

(٠\_٠)

---

**[T.me/Science\\_2022bot](https://t.me/Science_2022bot)** : تم التحميل بواسطة 



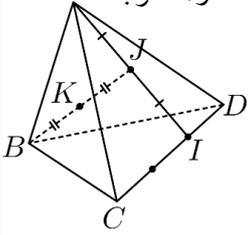
---

**Telegram : @Science\_2022bot**

(٠\_٠)

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (40° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل في معلم متجانس النقاط  $A(1,1,2)$  و  $B(3,1,-4)$  و  $C(2,0,-1)$  و  $H(2,-9,-1)$  والمطلوب:  $A$



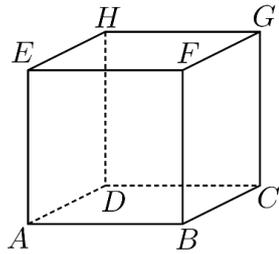
(1) اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .

(2) أثبت أن  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $ABC$ .

السؤال الثاني: انطلاقاً من الشكل المجاور:

(1) عيّن الأمثال  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  لتكون  $K$  مركز الأبعاد المناسبة للنقاط المثقلة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$  و  $(D, \delta)$ .

(2) عين مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق العلاقة  $\|3\vec{MA} + 6\vec{MB} + \vec{MC} + 2\vec{MD}\| = 12$



السؤال الثالث: مكعب  $ABCDEFGH$  ، والمطلوب:

(1) أثبت أن  $\vec{DB} + \vec{DE} + \vec{DG} = 2\vec{DF}$

(2) عيّن النقطة  $M$  التي تحقق العلاقة  $\vec{DM} = \frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{DE} + \frac{1}{2}\vec{DG} - \vec{DH}$

السؤال الرابع: نتأمل في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطة  $M(2,0,4)$  والمستوي  $P: x - 2y + z = 0$  والمطلوب:

(1) أوجد إحداثيات  $M'$  المسقط القائم للنقطة  $M$  على المستوي  $P$ .

(2) اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $M$  وتمس المستوي  $P$ .

$$P: 2x - 2y - z = 1$$

والمطلوب:

$$Q: 3x + 4y - 2z + 1 = 0$$

السؤال الخامس: نتأمل في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المستويين

(1) أثبت أن المستويين  $P$  و  $Q$  متعامدين بفصل مشترك  $d$ .

(2) احسب بعد  $A(4,3,-2)$  عن كل من المستويين  $P$  و  $Q$  ، ثم استنتج بعد  $A$  عن  $d$ .

ثانياً: حل المسألة الآتية: (100° درجة)

$ABCDEFGH$  مكعب فيه  $I$  و  $J$  منتصفا  $[AD]$  و  $[EH]$  و  $O$  مركز الوجه  $(BCGF)$

نتخذ  $(A, \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$  معلماً متجانساً والمطلوب:

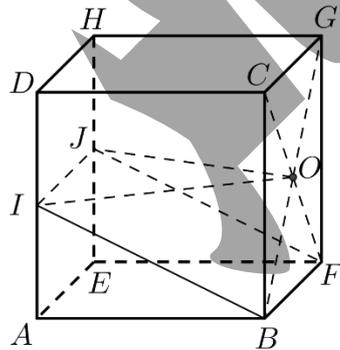
(1) أوجد إحداثيات النقاط  $B$  و  $F$  و  $I$ .

(2) تأكد أن  $\vec{n}(1,0,2)$  ناظم على المستوي  $(BFJI)$  ثم اكتب معادلته.

(3) احسب بعد  $O$  عن المستوي  $(BFJI)$  وحجم الهرم  $(OBFJI)$ .

(4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$  العمودي على المستوي  $(BFJI)$  والمار بالنقطة  $O$ .

(5) احسب إحداثيات  $N$  نقطة تقاطع المستقيم  $d$  مع المستوي  $(BFJI)$ .



(6) أثبت أن النقطة  $N$  هي مركز الأبعاد المناسبة للنقاط  $(I, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(F, \gamma)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  ثوابت يطلب تعيينها.

انتهى الاختبار الأول

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

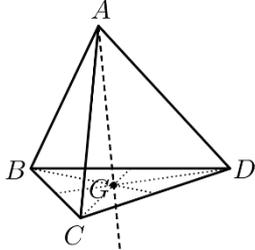
أولاً: أجب عن الأسئلة التالية: (40° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل في معلم متجانس النقاط  $A(0,1,0)$  و  $B(0,7,0)$  و  $C(-2,1,5)$  و  $D(2,3,-5)$  والمطلوب:

(1) أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة.

(2) أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تقع في مستوي واحد.

(3) اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها  $(O, \vec{j})$  ومركزي قاعدتها  $A$  و  $B$ .



السؤال الثاني: لتكن النقطتين  $A(2,1,1)$  و  $B(-1,-1,0)$  والمستوي  $P: x-3z=1$  والمطلوب:

(1) اكتب معادلة المستوي  $Q$  العمودي على المستوي  $P$  ويمر بالنقطتين  $A$  و  $B$ .

(2) اكتب معادلة الكرة التي قطرها  $[AB]$ .

السؤال الثالث:  $ABCD$  رباعي وجوه،  $G$  مركز ثقل المثلث  $BCD$ ، و  $K$  نظيرة  $A$  بالنسبة لـ  $G$  والمطلوب:

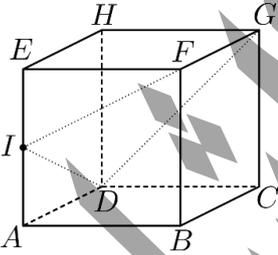
(1) عيّن الأمتثال  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  لتكون  $K$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$  و  $(D, \delta)$ .

(2) عين مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق  $\|3\vec{MA} + 2\vec{BM} + 2\vec{CM} + 2\vec{MD}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\|$

السؤال الرابع: ليكن لدينا المستويين  $P: 2x+3y-z=1$  و  $Q: x-2y+2=0$  والمطلوب:

(1) أثبت أن المستويين  $P$  و  $Q$  متقاطعين ثم اكتب المعادلات الوسيطة للفصل المشترك لتقاطع المستويين.

(2) اكتب معادلة المستوي  $R$  العمودي على كل من المستويين  $P$  و  $Q$  ويمر بالنقطة  $A(2,0,-1)$ .



السؤال الخامس:  $ABCDEFGH$  مكعب،  $I$  منتصف  $[AE]$  والمطلوب:

(1) نقطة تحقق العلاقة  $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{GD} + \vec{AI}$ ، أثبت أن  $K$  تنتمي إلى المستوي  $(IDG)$ .

(2) أثبت أن  $\vec{IB} \cdot \vec{IF} = AB^2 - AI^2$  ثم استنتج  $\cos \hat{BIF}$ .

ثانياً: حل المسألة التالية: (100° درجة)

$ABCDEFGH$  متوازي مستطيلات فيه  $AB=4$  و  $AE=AD=2$  وتكن  $J$  منتصف  $[HG]$

ونتأمل معلماً متجانساً  $(A, \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$  والمطلوب:

(1) أوجد إحداثيات النقاط  $A$  و  $F$  و  $C$  و  $J$ .

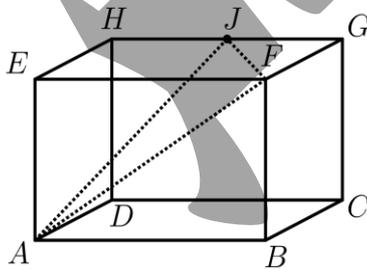
(2) احسب المسافتين  $[AJ]$  و  $[JF]$ .

(b) أثبت أن المثلث  $AFJ$  قائم في  $J$ ، واحسب مساحته.

(3) أثبت أن  $\vec{n}(1,1,-2)$  ناظم المستوي  $AFJ$  ثم اكتب معادلته.

(b) احسب بعد  $C$  عن المستوي  $AFJ$  ثم استنتج حجم رباعي الوجوه  $AFJC$ .

(4) أوجد إحداثيات النقطة  $N$  المسقط القائم للنقطة  $E$  على المستقيم  $(AF)$ .



انتهى الاختبار الثاني

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (40° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: لتكن لدينا النقطتين  $A(1,1,1)$  و  $B(1,3,5)$  والمطلوب:

(1) أعط معادلة للمجموعة  $\mathcal{E}$  المكونة من النقاط  $M(x,y,z)$  التي تحقق  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  ، ما طبيعة المجموعة  $\mathcal{E}$  ؟

(2) أعط معادلة للمجموعة  $P$  المكونة من النقاط  $M(x,y,z)$  التي تحقق  $MA = MB$  ، ما طبيعة المجموعة  $P$  ؟

السؤال الثاني: نتأمل في معلم متجانس المستقيم  $d: \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$  والمستوي  $P: 2x + 3z = 2$  والمطلوب:

(1) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$ .

(2) أثبت أن المستقيم  $d$  يقطع المستوي  $P$  وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

السؤال الثالث:  $ABCD$  رباعي وجوه منتظم طول ضلعه  $a$  و  $G$  مركز ثقله وفيه  $I$  و  $J$  منتصفات  $[AB]$  و  $[CD]$  والمطلوب:

(1) أثبت أن النقاط  $I$  و  $J$  و  $G$  على استقامة واحدة.

(2) احسب  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  ثم استنتج تعامد المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$ .

السؤال الرابع: في الشكل المجاور  $ABCDEF$  موشور ثلاثي قائم قاعدته  $ABC$  مثلث قائم في  $A$

حيث  $AB = 3\vec{i}$  و  $AC = 4\vec{j}$  و  $AD = 6\vec{k}$  نفترض  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلماً متجانساً والمطلوب:

(1) جد إحداثيات جميع رؤوس الموشور ثم اكتب معادلة المستوي  $BCD$ .

(2) اكتب معادلة المخروط الذي رأسه  $A$  ومحوره  $(A, \vec{k})$  وقاعدته الدائرة التي مركزها  $D$  ونصف قطرها  $[DF]$ .

السؤال الخامس: نتأمل في معلم متجانس النقاط  $A(2,1,-1)$  و  $B(0,-1,3)$  و  $M(-1,-4,4)$  والمطلوب:

(1) أوجد إحداثيات  $M'$  المسقط القائم للنقطة  $M$  على المستقيم  $(AB)$

(2) جد إحداثيات النقطة  $N$  التي تجعل الرباعي  $ABMN$  متوازي أضلاع.

ثانياً: حل المسألة الآتية: (100° درجة)

نتأمل في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(3,2,6)$  و  $B(1,2,4)$  و  $C(4,-2,5)$  و  $D(1,1,-1)$

والمستوي  $P$  الذي معادلته  $2x + y - 2z = -4$  والمطلوب:

(1) أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  تعين مستويًا ، وبين أن هذا المستوي هو  $P$ .

(2) أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  واحسب مساحته.

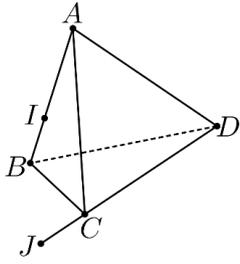
(3) عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$  المار بالنقطة  $D$  والعمودي على  $P$  استنتج إحداثيات  $K$  المسقط القائم لـ  $D$  على  $P$ .

(4) احسب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$ .

(5) أثبت أن النقطة  $K$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة  $(A,7)$  و  $(B,-9)$  و  $(C,-2)$ .

انتهى الاختبار الثالث

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ



أولاً: أجب عن الأسئلة التالية: (40° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:،  $ABCD$  رباعي وجوه النقطتان  $I$  و  $J$  تحققان  $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB}$  و  $\overline{DJ} = \frac{4}{3}\overline{DC}$  و مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المنقلة  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(C,4)$  و  $(D,-1)$  والمطلوب:

(1) أثبت أن النقطة  $G$  منتصف القطعة المستقيمة  $[IJ]$ .

(2) جد إحداثيات النقطة  $G$  في المعلم  $(B, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BA})$ .

السؤال الثاني: نتأمل في معلم متجانس النقاط  $A(2,1,1)$  و  $B(-1,-2,4)$  و  $C(-3,2,0)$  والمطلوب:

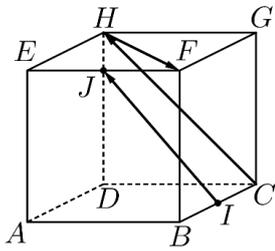
(1) أثبت أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين ، احسب مساحته.

(2) جد إحداثيات النقطة  $N$  التي تحقق العلاقة  $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{BC} - 2\overline{AC}$ .

السؤال الثالث:  $ABCDEFGH$  مكعب فيه  $I$  منتصف  $[BC]$  و  $J$  منتصف  $[EF]$  ، والمطلوب:

(1) أثبت أن  $\overline{IJ} = \overline{CH} + \frac{1}{2}\overline{HF}$ .

(2) استنتج أن المستقيم  $(IJ)$  يوازي المستوي  $(CHF)$ .



السؤال الرابع: ليكن لدينا المستوي  $P: 3x - 4z = 1$  والكرة  $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z + 9 = 0$  والمطلوب:

(1) عين  $I$  مركز الكرة  $S$  واحسب نصف قطرها ثم أثبت أن المستوي  $P$  يمس الكرة  $S$ .

(2) اكتب معادلة المستوي  $Q$  الموازي للمستوي  $P$  ويمر بالنقطة  $I$ .

السؤال الخامس: المستقيمين  $d$  و  $d'$  معرفين وسيطياً وفق  $d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 2 \end{cases} t \in \mathbb{R}$  و  $d': \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s - 1 \\ z = s + 1 \end{cases} s \in \mathbb{R}$

والمطلوب: (1) أثبت أن المستقيمين  $d$  و  $d'$  متقاطعين وعين إحداثيات  $I$  نقطة تقاطعهما.

(2) أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين  $d$  و  $d'$ .

ثانياً: حل المسألة التالية: (100° درجة)

نتأمل في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(0,1,2)$  و  $B(2,1,1)$  و  $C(1,0,0)$  و  $D(1,-2,\lambda)$

والمستويين  $P: 2x - y + 3z = 9$  و  $Q: 3x - 2y + 4z = 11$  والمطلوب:

(1) جد العدد الحقيقي  $\lambda$  بحيث يكون المثلث  $ABD$  قائم في  $A$ .

(2) أثبت أن المستقيم  $(AD)$  عمودي على المستوي  $ABC$  ثم استنتج معادلة المستوي  $ABC$ .

(3) أثبت أن المستويين  $P$  و  $Q$  متقاطعين ، جد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك  $d$ .

(4) أوجد نقطة تقاطع المستويين  $P$  و  $Q$  و  $ABC$ .

(5) أثبت أن النقطة  $A'(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3})$  هي المسقط القائم للنقطة  $A$  على المستقيم  $d$  ثم استنتج بعد  $A$  عن  $d$ .

انتهى الاختبار الرابع

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً:

السؤال الأول:

$$H(2, -9, -1) \text{ و } C(2, 0, -1) \text{ و } B(3, 1, -4) \text{ و } A(1, 1, 2)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}(2, 0, -6) \text{ هو } [AB] \text{ المستقيمة } \quad (1)$$

$$\text{المعادلة من الشكل } 2x - 6z + d = 0$$

$$\text{المستوي يمر بالنقطة } I(2, 1, -1) \text{ منتصف } [AB]$$

$$d = -10 \text{ أي } 4 + 6 + d = 0$$

$$2x - 6z - 10 = 0 \text{ وتكافئ } x - 3z - 5 = 0$$

$$AH \perp BC \text{ أي } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, -10, -3) \cdot (-1, -1, 3) = -1 + 10 - 9 = 0 \quad (2)$$

$$CH \perp AB \text{ أي } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (0, -9, 0) \cdot (2, 0, -6) = 0 + 0 + 0 = 0$$

وبالتالي  $H$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $ABC$ .

السؤال الثاني:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CD} \text{ تحقق العلاقة } I \quad (1)$$

$$\text{أي } \overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{DI} = \vec{0} \text{ وتكافئ } 3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{DI}$$

وبالتالي  $(I, 3)$  مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثلثتين  $(C, 1)$  و  $(D, 2)$

$J$  منتصف  $[AI]$  أي أن  $(J, 6)$  مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثلثتين  $(A, 3)$  و  $(I, 3)$

$K$  منتصف  $[BJ]$  أي أن  $(K, 12)$  مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثلثتين  $(B, 6)$  و  $(J, 6)$

حسب الخاصة التجميعية:

تكون  $K$  مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثلثة  $(A, 3)$  و  $(B, 6)$  و  $(C, 1)$  و  $(D, 2)$ .

بما أن  $K$  مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثلثة  $(A, 3)$  و  $(B, 6)$  و  $(C, 1)$  و  $(D, 2)$  فإن: (2)

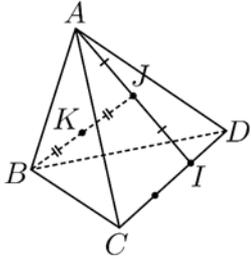
$$3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 12\overrightarrow{MK}$$

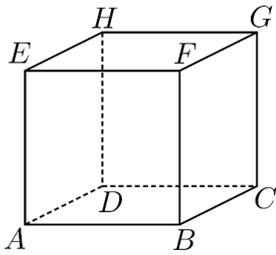
$$\text{وبالتالي العلاقة } \|3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\| = 12$$

$$\|12\overrightarrow{MK}\| = 12$$

$$\|\overrightarrow{MK}\| = 1$$

وبالتالي مجموعة النقاط  $M$  تمثل كرة مركزها  $K$  ونصف قطرها 1





$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DF} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH})$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH})$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DF}$$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DH} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}) - \overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{DF}) - \overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB}$$

وبالتالي  $M$  تنطبق على  $B$

$$\overrightarrow{MM'} = kn_P \text{ ففي تحقق العلاقة } M'(x, y, z) \quad (1)$$

$$(x-2, y, z-4) = k(1, -2, 1) = (k, -2k, k)$$

$$x = k + 2$$

$$P: x - 2y + z = 0 \text{ فمنه } y = -2k \text{ وبما أن } M' \text{ نقطة من } P \text{ فهي تحقق معادلته:}$$

$$z = k + 4$$

$$M'(1, 2, 3) \text{ أي } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \text{ وبالتالي } k = -1 \text{ أي } k + 2 + 4k + k + 4 = 0$$

$$R = \text{dist}(M, P) = \frac{|2 - 0 + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \quad (2)$$

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 6 \text{ معادلة الكرة}$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = (2, -2, -1) \cdot (3, 4, -2) = 6 - 8 + 2 = 0 \quad (1)$$

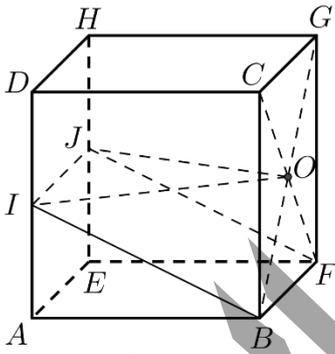
وبالتالي المستويين  $P$  و  $Q$  متعامدين.

$$\text{dist}(A, P) = \frac{|8 - 6 + 2 - 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{3} = 1 \quad (2)$$

$$\text{dist}(A, Q) = \frac{|12 + 12 + 4 + 1|}{\sqrt{9 + 16 + 4}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

$$(\text{dist}(A, d))^2 = (\text{dist}(A, P))^2 + (\text{dist}(A, Q))^2 = 1 + 29 = 30$$

$$\text{dist}(A, d) = \sqrt{30} \text{ وبالتالي}$$



$$I\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \text{ و } F(1, 1, 0) \text{ و } B(1, 0, 0) \quad (1)$$

$$\vec{n} \perp \vec{BF} \text{ وبالتالي } \vec{n} \cdot \vec{BF} = (1, 0, 2) \cdot (0, 1, 0) = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (2)$$

$$\vec{n} \perp \vec{BI} \text{ وبالتالي } \vec{n} \cdot \vec{BI} = (1, 0, 2) \cdot \left(-1, 0, \frac{1}{2}\right) = -1 + 0 + 1 = 0$$

وبالتالي ناظم المستوي  $(BFJI)$  هو  $\vec{n}(1, 0, 2)$

معادلة المستوي من الشكل  $x + 2z + d = 0$

$B$  نقطة من المستوي  $(BFJI)$  فهي تحقق معادلته  $1 + d = 0$  أي  $d = -1$

$$(BFJI): x + 2z - 1 = 0$$

$$\text{dist}(O, BFJI) = \frac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ وبالتالي } O\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ لدينا} \quad (3)$$

$$\text{لدينا } \vec{BF}(0, 1, 0) \text{ و } \vec{BI}\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right) \text{ أي } BF = 1 \text{ و } BI = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S = BF \times BI = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ومنه مساحة المربع } (BFJI) \text{ تساوي}$$

$$\text{وبالتالي حجم الهرم } (OBFJI) \text{ يساوي } V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{لدينا } \vec{u}_d = \vec{n}_P(1,0,2) \text{ وبالتالي:} \quad (4)$$

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2t + \frac{1}{2} \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

$$\text{نعوض المعادلات الوسيطة للمستقيم } d \text{ في معادلة المستوى } (BFJI): x + 2z - 1 = 0 \quad (5)$$

$$t + 1 + 2\left(2t + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{5} \text{ أي } t + 1 + 4t + 1 - 1 = 0$$

$$N\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right) \text{ أي } \begin{cases} x = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \end{cases} \text{ نعوض قيمة } t \text{ في المعادلات الوسيطة فنجد}$$

$$\text{النقاط } B \text{ و } F \text{ و } I \text{ و } N \text{ تقع في مستو واحد وبالتالي الأشعة } \vec{BF} \text{ و } \vec{BI} \text{ و } \vec{BN} \text{ مرتبطة خطياً} \quad (6)$$

$$\text{وبالتالي يوجد عددين حقيقيين } a \text{ و } b \text{ بحيث } \vec{BN} = a\vec{BF} + b\vec{BI}$$

$$\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right) = a(0,1,0) + b\left(-1,0,\frac{1}{2}\right) = \left(-b, a, \frac{1}{2}b\right)$$

$$\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{BF} + \frac{1}{5}\vec{BI} \text{ وبالتالي } b = \frac{1}{5} \text{ و } a = \frac{1}{2} \text{ ومنه نجد}$$

$$10\vec{BN} = 5\vec{BF} + 2\vec{BI}$$

$$10\vec{BN} = 5\vec{BN} + 5\vec{NF} + 2\vec{BN} + 2\vec{NI}$$

$$3\vec{BN} + 5\vec{NF} + 2\vec{NI} = \vec{0}$$

$$\text{وبالتالي } N \text{ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط } (F,5) \text{ و } (B,3) \text{ و } (I,2)$$

### انتهى حل النموذج الأول

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً:

السؤال الأول:

$$D(2,3,-5) \text{ و } C(-2,1,5) \text{ و } B(0,7,0) \text{ و } A(0,1,0)$$

(1) الشعاعين  $\overrightarrow{AB}(0,6,0)$  و  $\overrightarrow{AC}(-2,0,5)$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

وبالتالي النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة.

(2) نبحث عن عددين  $a$  و  $b$  بحيث تتحقق العلاقة  $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$(2,2,-5) = a(0,6,0) + b(-2,0,5) = (-2b, 6a, 5b)$$

$$-2b = 2$$

بالمطابقة نجد  $6a = 2$  وبالتالي  $a = \frac{1}{3}$  و  $b = -1$  أي  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$$5b = -5$$

ومنه الأشعة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AD}$  مرتبطة خطياً وبالتالي النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تقع في مستوى واحد.

$$(3) \text{ معادلة الأسطوانة } x^2 + z^2 = 36 \text{ و } 1 \leq y \leq 7$$

السؤال الثاني:

$$P: x - 3z = 1 \text{ و } B(-1, -1, 0) \text{ و } A(2, 1, 1)$$

(1) نفرض  $\overrightarrow{n_Q}(a, b, c)$  ناظم المستوى  $Q$  فهو يحقق:

$$(1) \dots a - 3c = 0 \text{ أي } (a, b, c) \cdot (1, 0, -3) = 0 \text{ أي } \overrightarrow{n_Q} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0$$

$$(2) \dots -3a - 2b - c = 0 \text{ أي } (a, b, c) \cdot (-3, -2, -1) = 0 \text{ أي } \overrightarrow{n_Q} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

نفرض  $c = 1$  ، نعوض في (1) فنجد  $a = 3$  ، نعوض في (2) فنجد  $-9 - 2b - 1 = 0$  أي  $b = -5$

ومنه  $\overrightarrow{n_Q}(3, -5, 1)$  وبالتالي معادلة المستوى  $Q$  من الشكل  $3x - 5y + z + d = 0$

$$d = -2 \text{ أي } A \in Q$$

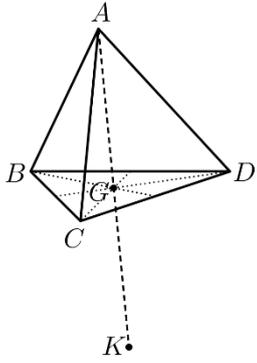
$$Q: 3x - 5y + z - 2 = 0$$

(2) مركز الكرة التي قطرها  $[AB]$  هو  $I\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$  منتصف  $[AB]$

ونصف قطرها  $AI$  أو  $BI$  أو  $\frac{1}{2}AB$

$$R = AI = \sqrt{\frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{\frac{7}{2}} \text{ أي } \overrightarrow{AI}\left(-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \text{ وبالتالي معادلة الكرة}$$



بما أن  $G$  مركز ثقل المثلث  $BCD$  فإن

$$(G,3) \text{ مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقلة } (B,1) \text{ و } (C,1) \text{ و } (D,1)$$

بما أن  $K$  نظيرة  $A$  بالنسبة  $G$  فإن  $G$  منتصف  $[AK]$  أي:

$$\overrightarrow{KG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{KA} \text{ أي } \overrightarrow{KG} - \frac{1}{2} \overrightarrow{KA} = \vec{0} \text{ أي } 3\overrightarrow{KG} - \frac{3}{2} \overrightarrow{KA} = \vec{0} \text{ وبالتالي}$$

$$\left(K, \frac{3}{2}\right) \text{ مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين } (G,3) \text{ و } \left(A, -\frac{3}{2}\right)$$

وحسب الخاصة التجميعية  $\left(K, \frac{3}{2}\right)$  مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقلة  $(A, -\frac{3}{2})$  و  $(B,1)$  و  $(C,1)$  و  $(D,1)$  وتكافئ

$$(K,3) \text{ مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقلة } (A,-3) \text{ و } (B,2) \text{ و } (C,2) \text{ و } (D,2)$$

$$(2) \text{ بما أن } (G,3) \text{ مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقلة } (B,1) \text{ و } (C,1) \text{ و } (D,1) \text{ فإن } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$$

وبما أن  $(K,3)$  مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المثقلة  $(A,-3)$  و  $(B,2)$  و  $(C,2)$  و  $(D,2)$  فإن

$$-3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MK}$$

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -3\overrightarrow{MK}$$

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{MD} = -3\overrightarrow{MK}$$

وبالتالي العلاقة  $\| -3\overrightarrow{MK} \| = \| 3\overrightarrow{MG} \|$  تكافئ  $\| 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{MD} \| = \| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \|$  أي

$$\| \overrightarrow{MK} \| = \| \overrightarrow{MG} \|$$

وبالتالي مجموعة النقاط  $M$  تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[GK]$

$$Q: x - 2y + 2 = 0 \text{ و } P: 2x + 3y - z = 1$$

(1) الشعاعين  $\vec{n}_P(2,3,-1)$  و  $\vec{n}_Q(1,-2,0)$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي المستويين  $P$  و  $Q$  متقاطعين

نفرض  $y = t$  نعوض في معادلة  $Q$  فنجد  $x = 2t - 2$

نعوض في معادلة  $P$  فنجد  $z = 2x + 3y - 1 = 4t - 4 + 3t - 1 = 7t - 5$  وبالتالي

$$d: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = t \\ z = 7t - 5 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

نفرض  $\vec{n}_R(a,b,c)$  ناظم المستوي  $Q$  فهو يحقق:

$$(1) \dots 2a + 3b - c = 0 \text{ أي } (a,b,c) \cdot (2,3,-1) = 0 \text{ أي } \vec{n}_R \cdot \vec{n}_P = 0$$

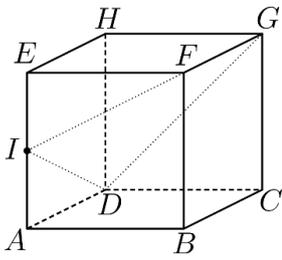
$$(2) \dots a - 2b = 0 \text{ أي } (a,b,c) \cdot (1,-2,0) = 0 \text{ أي } \vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0$$

نفرض  $b = 1$  ، نعوض في (2) فنجد  $a = 2$  ، نعوض في (1) فنجد  $4 + 3 - c = 0$  أي  $c = 7$

ومنه  $\vec{n}_R(2,1,7)$  وبالتالي معادلة المستوي  $R$  من الشكل  $2x + y + 7z + d = 0$

$$d = 3 \text{ أي } 4 + 0 - 7 + d = 0 \text{ أي } A \in Q$$

$$R: 2x + y + 7z + 3 = 0$$



$$\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{GD} + \vec{AI} \quad \text{نقطة تحقق العلاقة} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2\vec{AK} &= \vec{GD} + 2\vec{AI} \\ 2\vec{AK} &= \vec{GK} + \vec{KD} + 2\vec{AI} + 2\vec{KI} \\ -\vec{KG} + \vec{KD} + 2\vec{KI} &= \vec{0} \end{aligned}$$

وبالتالي  $(K, 2)$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة  $(G, -1)$  و  $(D, 1)$  و  $(I, 2)$

أي أن  $K$  تنتمي إلى المستوي  $(IDG)$

$$\vec{IB} \cdot \vec{IF} = (\vec{IA} + \vec{AB})(\vec{IE} + \vec{EF}) \quad (2)$$

$$\vec{IB} \cdot \vec{IF} = (\vec{IA} + \vec{AB})(-\vec{IA} + \vec{AB}) = (\vec{AB} + \vec{IA})(\vec{AB} - \vec{IA}) = AB^2 - IA^2$$

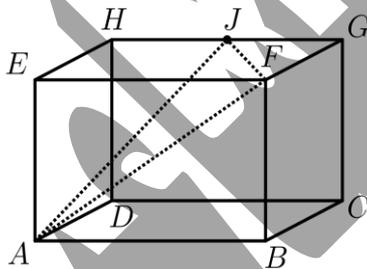
$$\vec{IB} \cdot \vec{IF} = AB^2 - AI^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \quad \text{وبالتالي}$$

$$IF = IB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \text{من جهة أخرى لدينا}$$

$$\cos \hat{BIF} = \frac{\vec{IB} \cdot \vec{IF}}{\|\vec{IB}\| \cdot \|\vec{IF}\|} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{3}{5} \quad \text{وبالتالي}$$

ثانياً:

المعلم المتجانس  $\left( A, \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE} \right)$



$$J(2, 2, 2) \text{ و } C(4, 2, 0) \text{ و } F(4, 0, 2) \text{ و } A(0, 0, 0) \quad (1)$$

$$\vec{JF}(2, -2, 0) \text{ و } \vec{AJ}(2, 2, 2) \quad (a) \quad (2)$$

$$[AJ] = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{وبالتالي}$$

$$[JF] = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{و}$$

$$AJ \perp JF \quad \text{وبالتالي} \quad \vec{AJ} \cdot \vec{JF} = (2, 2, 2) \cdot (2, -2, 0) = 4 - 4 + 0 = 0 \quad \text{لدينا} \quad (b)$$

$$S(AFJ) = \frac{AJ \times JF}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6} \quad \text{ومساحته في } J, \text{ وبالتالي المثلث } AFJ \text{ قائم في } J.$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AJ} \text{ أي } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AJ} = (1,1,-2) \cdot (2,2,2) = 2+2-4=0 \text{ لدينا} \quad (a) \quad (3)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AJ} \text{ أي } \vec{n} \cdot \overrightarrow{JF} = (1,1,-2) \cdot (2,-2,0) = 2-2+0=0 \text{ لدينا}$$

وبالتالي  $\vec{n}(1,1,-2)$  ناظم المستوي  $AFJ$  ومعادلته من الشكل  $x+y-2z+d=0$

$$d=0 \text{ أي } A \in Q$$

$$AFJ: x+y-2z=0$$

$$dist(C, AFJ) = \frac{|4+2-0|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \quad (b)$$

$$V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 4$$

نفرض  $N(x,y,z)$  المسقط القائم للنقطة  $E$  على المستقيم  $(AF)$  فبني تحقق  $(4)$

$$\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AF}$$

$$(x,y,z) = k(4,0,2) = (4k,0,2k)$$

$$x = 4k$$

بالمطابقة نجد  $y=0$  وهي إحداثيات  $N$  بدلالة  $k$

$$z = 2k$$

من جهة أخرى لدينا  $EN \perp AF$  أي  $\overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

$$(x,y,z-2) \cdot (4,0,2) = 0$$

$$(4k,0,2k-2) \cdot (4,0,2) = 0$$

$$N\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) \text{ ومنه } \begin{cases} x = 4k = 4\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} \\ y = 0 \\ z = 2k = 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ وبالتالي } k = \frac{1}{5} \text{ أي أن } 16k + 4k - 4 = 0$$

انتهى حل النموذج الثاني

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً:

السؤال الأول:

$B(1,3,5)$  و  $A(1,1,1)$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad (1)$$

$$(1-x, 1-y, 1-z) \cdot (1-x, 3-y, 5-z) = 0$$

$$(1-x)(1-x) + (1-y)(3-y) + (1-z)(5-z) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 3 + z^2 - 6z + 5 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 4 + 3 + (z^2 - 6z + 9) - 9 + 5 = 0$$

$$\varepsilon: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$$

المجموعة  $\varepsilon$  تمثل كرة مركزها  $(1,2,3)$  ونصف قطرها  $R = \sqrt{5}$  أو  $\varepsilon$  تمثل كرة قطرها  $[AB]$

$$MA = MB \quad (2)$$

$$MA^2 = MB^2$$

$$(1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2 = (1-x)^2 + (3-y)^2 + (5-z)^2$$

$$y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25$$

$$-2y + 1 - 2z + 1 = -6y + 9 - 10z + 25$$

$$P: y + 2z - 8 = 0 \text{ وتكافئ } 4y + 8z - 32 = 0$$

المجموعة  $P$  تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .

السؤال الثاني:

$$P: 2x + 3z = 2 \text{ و } d: \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ نفرض } x = t \text{ ومنه تصبح المعادلتين } \begin{pmatrix} -2y - 2z = -4t + 4 \\ -3y + 2z = -t + 1 \end{pmatrix} \text{ وتكافئ } \begin{pmatrix} -y - z = -2t + 2 \\ -3y + 2z = -t + 1 \end{pmatrix} \text{ بالجمع نجد:}$$

$$y = t - 1 \text{ أي } -5y = -5t + 5$$

نعوض فنجد  $2t - t + 1 - z = 2$  ومنه  $z = t - 1$  أي:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 : t \in \mathbb{R} \\ z = t - 1 \end{cases}$$

$$(2) \text{ بما أن } \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_d} = (2, 0, 3) \cdot (1, 1, 1) = 2 + 3 = 5 \neq 0 \text{ فإن المستقيم } d \text{ يقطع المستوي } P$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطة للمستقيم  $d$  في معادلة المستوي  $P$  فنجد:

$$2t + 3(t - 1) = 2 \text{ وتكافئ } 2t + 3t - 3 = 2 \text{ ومنه } t = 1$$

وبالتالي نقطة التقاطع  $(1, 0, 0)$

بما أن  $G$  مركز ثقل رباعي الوجوه  $ABCD$  فإن

$(G,4)$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة  $(A,1)$  و  $(B,1)$  و  $(C,1)$  و  $(D,1)$

وبما أن  $I$  منتصف  $[AB]$  فإن  $(I,2)$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(A,1)$  و  $(B,1)$

وبما أن  $J$  منتصف  $[CD]$  فإن  $(J,2)$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(C,1)$  و  $(D,1)$

وحسب الخاصة التجميعية نجد:

$(G,4)$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقتين  $(I,2)$  و  $(J,2)$

أي أن النقاط  $I$  و  $J$  و  $G$  على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos \hat{BAC} = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \cos \hat{BAD} = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

أي أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدين.

$F(0,4,6)$  و  $E(3,0,6)$  و  $D(0,0,6)$  و  $C(0,4,0)$  و  $B(3,0,0)$  و  $A(0,0,0)$

نفرض  $\vec{n}(a,b,c)$  ناظم المستوي  $BCD$  فهو يحقق

$$(1) \dots -3a + 4b = 0 \text{ أي } (a,b,c) \cdot (-3,4,0) = 0 \text{ أي } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$(2) \dots -3a + 6c = 0 \text{ أي } (a,b,c) \cdot (-3,0,6) = 0 \text{ أي } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

نفرض  $a = 1$  نعوض في (1) فنجد  $b = \frac{3}{4}$  ونعوض في (2) فنجد  $c = \frac{1}{2}$

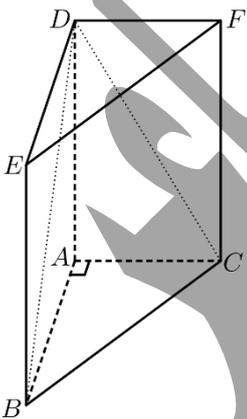
$$\vec{n}(4,3,2) \text{ وبالتالي } \vec{n}\left(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ ويكافئ}$$

$$4x + 3y + 2z + d = 0 \text{ معادلة المستوي}$$

$$d = -12 \text{ أي } 12 + d = 0 \text{ ومنه } B \in BCD$$

$$BCD: 4x + 3y + 2z - 12 = 0 \text{ وبالتالي}$$

$$0 \leq z \leq 6 \text{ و } x^2 + y^2 - \frac{16}{36}z^2 = 0 \text{ معادلة المخروط} \quad (2)$$



$$M(-1, -4, 4) \text{ و } B(0, -1, 3) \text{ و } A(2, 1, -1)$$

(1) نفرض  $M'(x, y, z)$  المسقط القائم للنقطة  $M$  على المستقيم  $(AB)$  فبني تحقق

$$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AB}$$

$$(x-2, y-1, z+1) = k(-2, -2, 4) = (-2k, -2k, 4k)$$

$$\begin{cases} x = -2k + 2 \\ y = -2k + 1 \\ z = 4k - 1 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد}$$

من جهة أخرى لدينا  $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  أي  $(x+1, y+4, z-4) \cdot (-2, -2, 4) = 0$

$$-2x - 2 - 2y - 8 + 4z - 16 = 0$$

$$-2x - 2y + 4z - 26 = 0 \text{ أي } x + y - 2z + 13 = 0$$

$$-2k + 2 - 2k + 1 - 8k + 2 + 13 = 0 \text{ ومنه } -12k + 18 = 0 \text{ أي } k = \frac{3}{2} \text{ ومنه}$$

$$z = 4\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 6 - 1 = 5 \text{ و } y = -2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = -3 + 1 = -2 \text{ و } x = -2\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$M'(-1, -2, 5) \text{ أي أن}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM} \text{ متوازي أضلاع أي أن } ABMN$$

$$(-2, -2, 4) = (-1-x, -4-y, 4-z)$$

$$N(1, -2, 0) \text{ أي } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \text{ أي أن } \begin{cases} -1-x = -2 \\ -4-y = -2 \\ 4-z = 4 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد}$$

ثانياً:

$$P: 2x + y - 2z = -4 \text{ و } D(1, 1, -1) \text{ و } C(4, -2, 5) \text{ و } B(1, 2, 4) \text{ و } A(3, 2, 6)$$

(1) الشعاعين  $\overrightarrow{AB}(-2, 0, -2)$  و  $\overrightarrow{AC}(1, -4, -1)$  غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  تعين مستوياً

$$A \in P \text{ في معادلة } P: 6 + 2 - 12 = -4 \text{ محققة أي } A \in P$$

$$B \in P \text{ في معادلة } P: 2 + 2 - 8 = -4 \text{ محققة أي } B \in P$$

$$C \in P \text{ في معادلة } P: 8 - 2 - 10 = -4 \text{ محققة أي } C \in P$$

أي أن المستوي المار بالنقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  هو المستوي  $P$

ملاحظة: يمكن إيجاد معادلة المستوي بالطريقة المعروفة والتأكد أنها  $P$

$$AB \perp AC \text{ أي } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -2) \cdot (1, -4, -1) = -2 + 0 + 2 = 0 \quad (2)$$

وبالتالي المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  ومساحته

$$S(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{4+4} \times \sqrt{1+16+1}}{2} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 6$$

بما أن المستقيم  $d$  عمودي على المستوي  $P$  فإن  $\overrightarrow{u}_d = \overrightarrow{n}_P(2, 1, -2)$  وبالتالي:

$$d: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -2t - 1 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

لإيجاد إحداثيات  $K$  المسقط القائم لـ  $D$  على  $P$ ، نعوض المعادلات الوسيطة لـ  $d$  في معادلة المستوي  $P$

$$t = -1 \text{ وبالتالي } 4t + 2 + t + 1 + 4t + 2 = -4$$

ومنه  $K(-1, 0, 1)$

$$\text{dist}(D, P) = \frac{|2 + 1 + 2 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times 6 \times 3 = 6$$

لإثبات أن النقطة  $K$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط المنقلة  $(A, 7)$  و  $(B, -9)$  و  $(C, -2)$  يكفي إثبات أن:

$$7\overrightarrow{KA} - 9\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

$$7\overrightarrow{KA} - 9\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = 7(4, 2, 5) - 9(2, 2, 3) - 2(5, -2, 4)$$

$$7\overrightarrow{KA} - 9\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = (28, 14, 35) - (18, 18, 27) - (10, -4, 8)$$

$$7\overrightarrow{KA} - 9\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = (28 - 18 - 10, 14 - 18 + 4, 35 - 27 - 8)$$

$$7\overrightarrow{KA} - 9\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = (0, 0, 0)$$

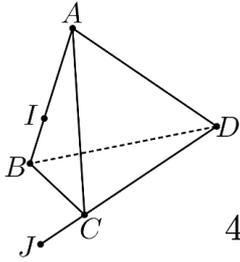
$$7\overrightarrow{KA} - 9\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

**انتهى حل النموذج الثالث**

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمت والمستويات في الفراغ

أولاً:

السؤال الأول:



$$\vec{AI} + 2\vec{BI} = \vec{0} \text{ وتكافئ } 3\vec{AI} = 2\vec{AI} + 2\vec{IB} \text{ أي } \vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB} \text{ تحقق العلاقة } I \quad (1)$$

وبالتالي  $(I,3)$  مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثلثتين  $(A,1)$  و  $(B,2)$

$$4\vec{CJ} - \vec{DJ} = \vec{0} \text{ وتكافئ } 3\vec{DJ} = 4\vec{DJ} + 4\vec{JC} \text{ أي } \vec{DJ} = \frac{4}{3}\vec{DC} \text{ تحقق العلاقة } J$$

وبالتالي  $(J,3)$  مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثلثتين  $(C,4)$  و  $(D,-1)$

وبما أن  $G$  مركز الأبعاد متناسبة للنقاط المنقلة  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(C,4)$  و  $(D,-1)$  وحسب الخاصية التجميعية:

$G$  مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين المثلثتين  $(I,3)$  و  $(J,3)$  أي أن النقطة  $G$  منتصف القطعة المستقيمة  $[IJ]$ .

في المعلم  $(B, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{BA})$  نجد  $A(0,0,1)$  و  $D(0,1,0)$  و  $C(1,0,0)$  و  $B(0,0,0)$  وبالتالي:

$$\left. \begin{aligned} x_G &= \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \frac{0 + 0 + 4 + 0}{1 + 2 + 4 - 1} = \frac{4}{6} \\ y_G &= \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \frac{0 + 0 + 0 - 1}{1 + 2 + 4 - 1} = -\frac{1}{6} \\ z_G &= \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \delta z_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \frac{1 + 0 + 0 + 0}{1 + 2 + 4 - 1} = \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} G\left(\frac{4}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

السؤال الثاني:

$$C(-3,2,0) \text{ و } B(-1,-2,4) \text{ و } A(2,1,1)$$

لدينا  $\vec{AB}(-3,-3,3)$  و  $\vec{AC}(-5,1,-1)$  و  $\vec{BC}(-2,4,-4)$  وبالتالي: (1)

$$BC = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6 \text{ و } AC = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ و } AB = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

بما أن  $AB = AC$  فإن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين رأسه  $A$

نفرض  $I(-2,0,2)$  منتصف  $[BC]$  فيكون  $[AI]$  متوسط في مثلث متساوي الساقين فهو ارتفاع

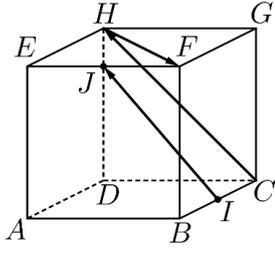
$$AI = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ أي } \vec{AI}(-4,-1,1)$$

$$S(ABC) = \frac{AI \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 6}{2} = 9\sqrt{2} \text{ مساحة المثلث}$$

$$\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{BC} - 2\vec{AC} \quad (2)$$

$$(x-2, y-1, z-1) = \frac{1}{2}(-2,4,-4) - 2(-5,1,-1) = (-1,2,-2) + (10,-2,2) = (9,0,0)$$

$$\left. \begin{aligned} x-2 &= 9 \\ y-1 &= 0 \\ z-1 &= 0 \end{aligned} \right\} N(11,1,1)$$



نفرض  $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$  معلم كفي

(1)

$$J\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) \text{ و } I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ و } F(1, 0, 1) \text{ و } H(0, 1, 1) \text{ و } C(1, 1, 0)$$

$$\vec{IJ}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \text{ و } \vec{CH}(-1, 0, 1) \text{ و } \vec{HF}(1, -1, 0) \text{ لدينا}$$

$$\vec{CH} + \frac{1}{2}\vec{HF} = (-1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, -1, 0) = \left(-1 + \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{2}, 1 - 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \vec{IJ}$$

$$\vec{IJ} = \vec{CH} + \frac{1}{2}\vec{HF} \text{ ومنه}$$

وبالتالي الأشعة  $\vec{IJ}$  و  $\vec{CH}$  و  $\vec{HF}$  مرتبطة خطياً  
ومنه المستقيم  $(IJ)$  يوازي المستوي  $(CHF)$ .

(2)

## السؤال الرابع:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z + 9 = 0 \text{ و } P: 3x - 4z = 1$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z + 9 = 0$$

(1)

$$x^2 + y^2 + 6y + 9 - 9 + z^2 - 2z + 1 - 1 + 9 = 0$$

$$x^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 1$$

وبالتالي مركز الكرة  $I(0, -3, 1)$  ونصف قطرها  $R = 1$

$$\text{dist}(I, P) = \frac{|0 - 4 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1 = R \text{ بما أن}$$

وبالتالي المستوي  $P$  يمس الكرة  $S$ .

$$\vec{n}_Q = \vec{n}_P(3, 0, -4) \text{ فإن } P \text{ يوازي المستوي } Q$$

(2)

معادلة  $Q$  من الشكل  $3x - 4z + d = 0$

$$d = 4 \text{ أي } 0 - 4 + d = 0 \text{ أي } I \in Q$$

$$Q: 3x - 4z + 4 = 0$$

$$d' : \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s - 1 \\ z = s + 1 \end{cases} \text{ و } d : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 2 \end{cases} \text{ و } s, t \in \mathbb{R}$$

(1) الشعاعين  $\vec{u}_d(1, 2, -1)$  و  $\vec{u}_{d'}(3, -1, 1)$  غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمين  $d$  و  $d'$  متقاطعين أو متخالفين

$$t + 1 = 3s + 2 \quad (1)$$

$$2t - 3 = -s - 1 \quad (2)$$

$$-t + 2 = s + 1 \quad (3)$$

بجمع (2) و (3) نجد  $t - 1 = 0$  أي  $t = 1$

نعوض في (3) فنجد  $-1 + 2 = s + 1$  أي  $s = 0$

للتأكد نعوض في (1) فنجد  $1 + 1 = 0 + 2$  محققة

وبالتالي المستقيمين  $d$  و  $d'$  متقاطعين في النقطة  $I(2, 1, 1)$

نفرض  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم المستوى فهو يحقق

$$(1) \dots a + 2b - c = 0 \text{ أي } (a, b, c) \cdot (1, 2, -1) = 0 \text{ أي } \vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$$

$$(2) \dots 3a - b + c = 0 \text{ أي } (a, b, c) \cdot (3, -1, 1) = 0 \text{ أي } \vec{n} \cdot \vec{u}_{d'} = 0$$

نفرض  $a = 1$  وبالتالي  $\begin{cases} 2b - c = -1 \\ -b + c = -3 \end{cases}$  بالجمع نجد  $b = -4$  وبالتالي  $c = -7$  أي  $\vec{n}(1, -4, -7)$

معادلة المستوى من الشكل  $x - 4y - 7z + d = 0$

$I$  نقطة من المستوى فهي تحقق معادلته  $2 - 4 - 7 + d = 0$  أي  $d = 9$

وبالتالي معادلة المستوى  $x - 4y - 7z + 9 = 0$

ثانياً:

$Q: 3x - 2y + 4z = 11$  و  $P: 2x - y + 3z = 9$  و  $D(1, -2, \lambda)$  و  $C(1, 0, 0)$  و  $B(2, 1, 1)$  و  $A(0, 1, 2)$

يكون المثلث  $ABD$  قائم في  $A$  إذا كان  $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$  أي

$$D(1, -2, 4) \text{ ومنه } \lambda = 4 \text{ أي } 2 - \lambda + 2 = 0 \text{ أي } (1, -3, \lambda - 2) \cdot (2, 0, -1) = 0$$

وجدنا أن  $AD \perp AB$

من جهة أخرى  $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = (1, -3, 2) \cdot (1, -1, -2) = 1 + 3 - 4 = 0$  أي أن  $AD \perp AC$

وبالتالي المستقيم  $(AD)$  عمودي على المستوى  $ABC$

لدينا  $\vec{n}_{ABC} = \vec{AD}(1, -3, 2)$  وبالتالي معادلة المستوى  $ABC$  من الشكل  $x - 3y + 2z + d = 0$

$A \in ABC$  وبالتالي  $-3 + 4 + d = 0$  أي  $d = -1$

وبالتالي معادلة المستوى  $x - 3y + 2z - 1 = 0$

(3) لدينا الشعاعين  $\vec{n}_P(2, -1, 3)$  و  $\vec{n}_Q(3, -2, 4)$  غير مرتبطين خطياً

وبالتالي المستويين  $P$  و  $Q$  متقاطعين

$$Q: 3x - 2y + 4z = 11 \text{ و } P: 2x - y + 3z = 9$$

نفرض  $x = t$  وبالتالي  $\begin{pmatrix} 2y - 6z = 4t - 18 \\ -2y + 4z = -3t + 11 \end{pmatrix}$  أي  $\begin{pmatrix} -y + 3z = -2t + 9 \\ -2y + 4z = -3t + 11 \end{pmatrix}$  بالجمع نجد

$$z = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{2} \text{ أي } -2z = t - 7$$

وبالتالي  $y = 2x + 3z - 9 = 2t + 3\left(-\frac{1}{2}t + \frac{7}{2}\right) - 9 = 2t - \frac{3}{2}t + \frac{21}{2} - 9 = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ z = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{2} \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطة للفصل المشترك  $d$  في معادلة المستوي  $ABC$  فنجد:

$$x - 3y + 2z - 1 = 0$$

$$t - 3\left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}t + \frac{7}{2}\right) - 1 = 0$$

$$t = 1 \text{ أي } t - \frac{3}{2}t - \frac{9}{2} - t + 7 - 1 = 0$$

وبالتالي نقطة تقاطع المستويات  $P$  و  $Q$  و  $ABC$  هي  $I(1, 2, 3)$

لدينا  $A'\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$  فيكون  $\vec{AA}'\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$  وبالتالي:

$$\vec{AA}' \cdot \vec{u}_d = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \cdot \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

أي أن النقطة  $A'$  هي المسقط القائم للنقطة  $A$  على المستقيم  $d$

$$AA' = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{21}{9}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

و بعد النقطة  $A$  عن المستقيم  $d$  هو  $\sqrt{\frac{7}{3}}$

**انتهى حل النموذج الرابع**

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ