سلـ لة الرؤى الشاملـ
ي الرياضيات

رؤية شاملة في الجبر

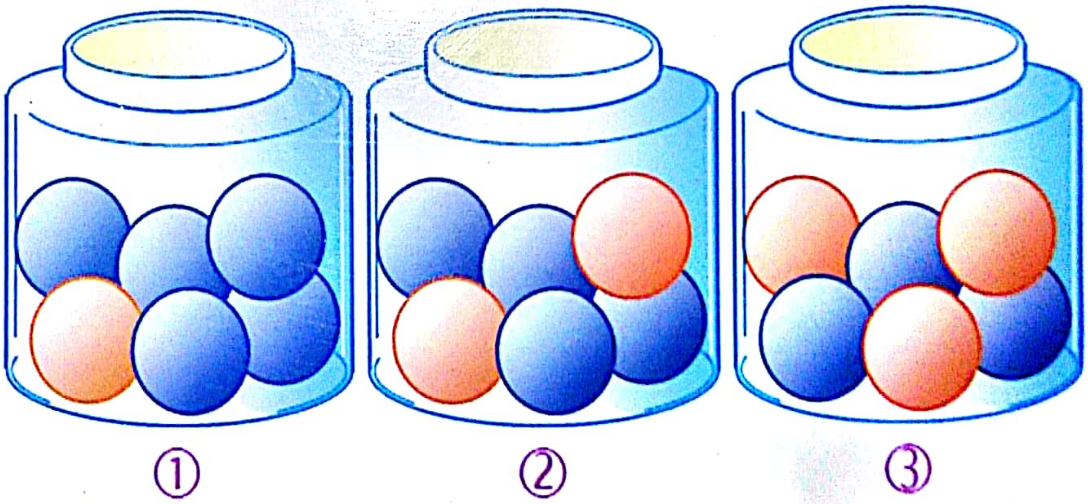
الأعـــداد العـــقديـــة

تطبيقات الأعداد العقدية

التحليل التوافقي

الاحتمالات

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$



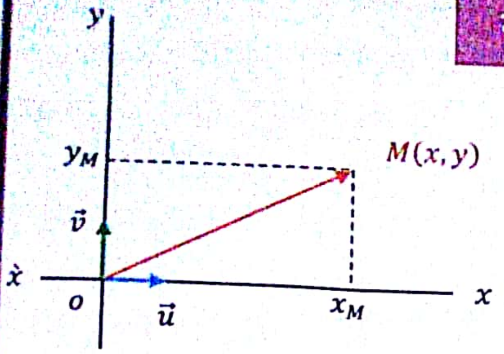
بإشراف المدرس

حسان البيطار

الثالث الثانو

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تمثيل الأشعة بأعداد عقدية:



نتأمل المعلم المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي.

1) نقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي العدد العقدي:

$$Z_M = x + iy$$

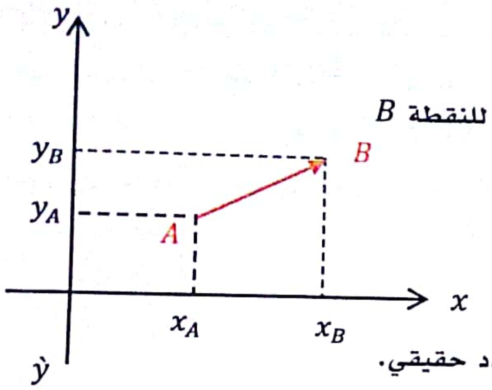
2) إن العدد العقدي $Z = x + iy$ الذي مركبتاه (x,y) يمثل بالشعاع $\overrightarrow{oM}$:

$$Z_{\overrightarrow{oM}} = Z_M = x + iy$$

3) بفرض لدينا في المستوي النقطتان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$:

العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$.

حيث Z_A هو العدد العقدي الممثل للنقطة A و Z_B هو العدد العقدي الممثل للنقطة B



$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$

نتائج:

إذا كان $\vec{w}$ و $\vec{\acute{w}}$ شعاعان يمثلانهما العددان العقديان Z و $\acute{Z}$ وكان λ عدد حقيقي.

1) تساوي شعاعين يكافئ تساوي العددين العقديين الذين يمثلانهما. $Z = \acute{Z} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{\acute{w}}$

2) الشعاع $\vec{w} + \vec{\acute{w}}$ يمثله العدد العقدي $Z + \acute{Z}$

3) الشعاع $\lambda\vec{w}$ يمثله العدد العقدي λZ

العدد العقدي الموافق لمركز الأبعاد المتناسبة:

بفرض لدينا n عدداً من النقاط المثقّلة: $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots\ldots(A_n,\alpha_n)$ التي تمثلها الأعداد العقدية $Z_1,Z_2,\ldots\ldots,Z_n$ نفترض $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \neq 0$ عندئذ يعطى Z_G العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط بالعلاقة:

$$Z_G = \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \cdots + \alpha_n Z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

ملاحظات هامة جداً:

1) العدد العقدي Z_I الممثل لمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو: $Z_I = \frac{Z_A+Z_B}{2}$

2) العدد العقدي Z_G الممثل لمركز ثقل المثلث ABC هو: $Z_G = \frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}$

3) لإثبات وقوع ثلاث نقاط A, B, C على استقامة واحدة يجب إثبات وجود عدد حقيقي λ يحقق: $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = \lambda Z_{\overrightarrow{AC}}$$

$$b - a = \lambda(c - a)$$

إذاً A, B, C تقع على استقامة واحدة

a هو العدد العقدي الممثل للنقطة A.

b هو العدد العقدي الممثل للنقطة B.

c هو العدد العقدي الممثل للنقطة C.

تدريب:

نتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي العقدي ولتكن النقاط $C\,,B\,,A$ التي تمثلها الأعداد العقدية.

$c=-18+7i \quad , \quad b=-6+3i \quad , \quad a=6-i$ بالترتيب

اثبت وقوع النقاط $C\,,B\,,A$ على استقامة واحدة.

لإثبات أن النقاط $C\,,B\,,A$ على استقامة واحدة يجب أن نثبت الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{AB}} &= b-a=-6+3i-(6-i)=-12+4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} &= c-a=-18+7i-(6-i)=-24+8i \end{aligned}\right\} \qquad Z_{\overrightarrow{AC}}=2Z_{\overrightarrow{AB}}$$

فالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً، فالنقاط $C\,,B\,,A$ تقع على استقامة واحدة.

تدريب:

ليكن MNP مثلثاً ما والنقاط $C\,,B\,,A$ هي منتصفات اضلاعه $[NP]$ و $[PM]$ و $[MN]$ بالترتيب.

اثبت أن للمثلثين MNP و ABC مركز الثقل نفسه.

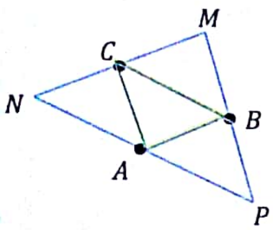
نختار معلم متجانس كيفي:

نفرض أن الأعداد $p\,,m\,,n$ هي الأعداد العقدية التي تمثل النقاط $P\,,M\,,N$ بالترتيب.

نرمز بـ G لمركز ثقل المثلث MNP :

$$Z_G=\frac{n+m+p}{3}$$

نفرض أن الأعداد $c\,,b\,,a$ هي الأعداد العقدية التي تمثل النقاط $C\,,B\,,A$ بالترتيب.



$$a=\frac{n+p}{2} \quad , \quad b=\frac{m+p}{2} \quad , \quad c=\frac{m+n}{2}$$

فيكون مركز ثقل المثلث ABC هو:

$$Z_{\acute{G}}=\frac{\frac{n+p}{2}+\frac{m+p}{2}+\frac{m+n}{2}}{3}=\frac{2m+2n+2p}{6}=\frac{m+n+p}{3}$$

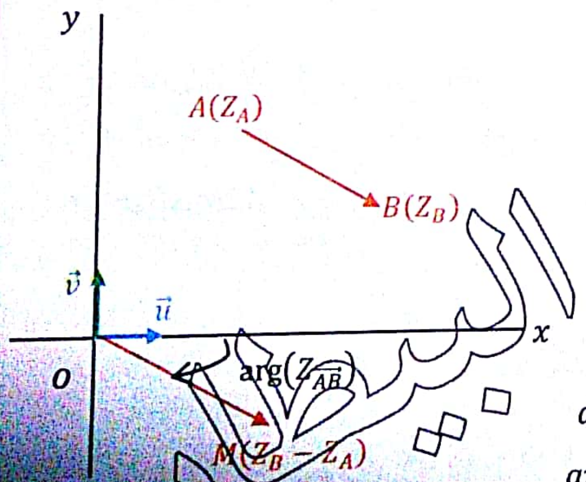
ومنه $Z_G=Z_{\acute{G}}$ وبالتالي $\acute{G}=G$

أي أن للمثلثين MNP و ABC مركز الثقل نفسه.

***

استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع

المسافة والزاوية:



بفرض $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ما ولتكن M النقطة التي تحقق:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$$

$$Z_{\overrightarrow{OM}}=Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_M=Z_B-Z_A$$

اي $|Z_M|=oM=AB$ ومنه

$$\boxed{AB=|Z_B-Z_A|}$$

زاوية العدد Z_M هي الزاوية بين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{oM}$ اي: $arg(Z_M)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})$

ومنه : $arg(Z_{\overrightarrow{AB}})=(\vec{u},\overrightarrow{AB})=arg(Z_B-Z_A)$

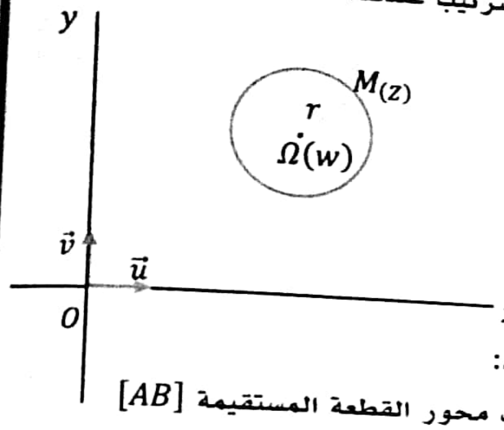
مبرهنة: «قياس الزاوية الموجهة»

لتكن D, C, B, A اربع نقاط تمثلها الأعداد العقدية Z_A, Z_B, Z_C, Z_D بالترتيب:

نفترض $Z_A \neq Z_B$ و $Z_C \neq Z_D$ عندئذ:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)$$

ملاحظات:



1) بفرض M, B, A ثلاث نقاط مختلفة تمثلها الأعداد الحقيقية a, b, z بالترتيب عندئذ:

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = arg\left(\frac{Z - b}{Z - a}\right)$$

2) بفرض r عدد حقيقي موجب تماماً وبفرض w عدداً عقدياً وΩ النقطة التي يمثلها العدد العقدي w عندئذ:

مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق الشرط $|Z - w| = r$

تمثل نقاط دائرة مركزها $\Omega(w)$ ونصف قطرها r

3) بفرض B, A نقطتان يمثلان العددان العقديان a, b حيث$(a \neq b)$ عندئذ:

مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق الشرط $|Z - a| = |Z - b|$ هي نقاط محور القطعة المستقيمة $[AB]$

4) بفرض لدينا النسبة: $Z = \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}$: $Z_B \neq Z_A$

$$\left|\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right| = \frac{CD}{AB} \qquad arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

◆ $arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \theta$

إذا كان $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ فإن $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً

إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ فإن $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$ متعامدان

5) $Z = ki$

إذا كان $k > 0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$

إذا كان $k < 0$: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

تدريب: لتكن D, C, B, A اربع نقاط تمثلها الأعداد العقدية: $a = -2$, $b = 2$, $c = -1 + i$, $d = 1 - 3i$

اثبت ان المثلثين ACD , BCD قائمان.

- المثلث ACD:

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = arg\left(\frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A}\right)$$

$$\frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{d - a}{c - a} = \frac{1 - 3i + 2}{-1 + i + 2} = \frac{3 - 3i}{1 + i}$$

$$= \frac{(3 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 - 3i - 3i + 3i^2}{1 + 1} = \frac{-6i}{2} = -3i$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = arg(-3i) = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad (-3 < 0) \text{ لأن}$$

فالمثلث ACD قائم في A.

▪ المثلث BCD:

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) = arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right)$$

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{d-b}{c-b} = \frac{1-3i-2}{-1+i-2} = \frac{-1-3i}{-3+i}$$

$$= \frac{(-1-3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{3+i+9i+3i^2}{9+1} = \frac{10i}{10} = i$$

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) = arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad (\text{لأن } 1 > 0)$$

فالمثلث BCD قائم في B.

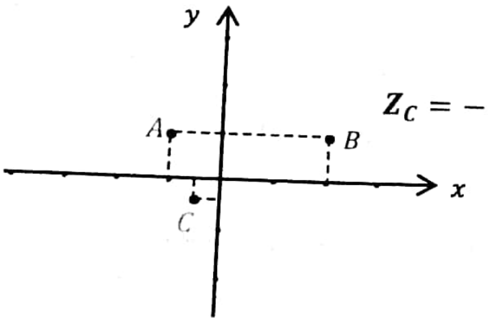
****

تدريب صفحة 132:

1) لتكن النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$Z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad , \quad Z_B = 2+i \quad , \quad Z_A = -1+i$$

1. وضع النقاط A , B , C على شكل:



2. احسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

- $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 2+i-(-1+i) = 3$
- $Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - (-1+i) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
- $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - (2+i) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$

3. احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وبين إذا كان مثلثاً قائماً في C.

- $AB = |Z_B - Z_A| = |3| = \sqrt{9+0} = 3$
- $AC = |Z_C - Z_A| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
- $BC = |Z_C - Z_B| = \left|-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} AB^2 &\stackrel{?}{=} AC^2 + BC^2 \\ 9 &\stackrel{?}{=} \frac{10}{4} + \frac{34}{4} \\ 9 &\neq 11 \end{aligned}\right\}$$

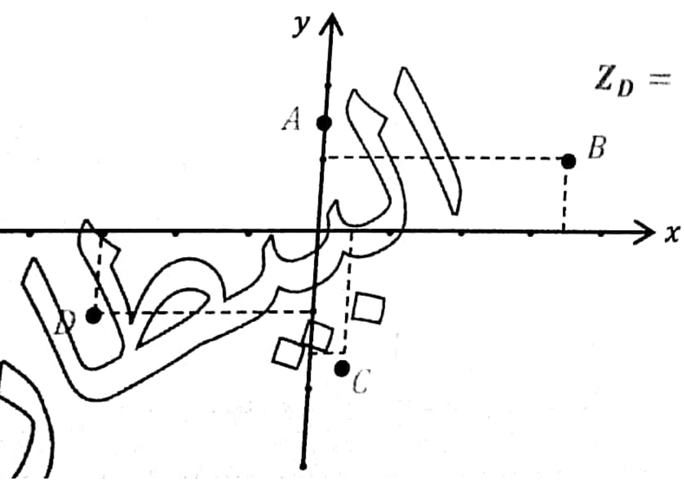
حسب عكس فيثاغورث نجد أن المثلث ليس قائم في C

---

2) لتكن النقاط A , B , C , D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$Z_D = -3-i \quad , \quad Z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \qquad Z_B = \frac{7}{2} + i \quad , \quad Z_A = \frac{3}{2}i$$

1. وضع النقاط A , B , C , D في شكل:



2. ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

$$\left.\begin{aligned} &\blacksquare\ Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \\ &\blacksquare\ Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - (-3 - i) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$$

ومنه : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع

---

3) لتكن النقطتان A , B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية:

$$Z_B = 2(1 - i\sqrt{3}) \quad , \quad Z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$$

1. اثبت ان A , B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

$$\left.\begin{aligned} Z_A = 2 + 2\sqrt{3}i &\Rightarrow |Z_A| = \sqrt{4+12} = 4 \\ Z_B = 2 - 2\sqrt{3}i &\Rightarrow |Z_B| = \sqrt{4+12} = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |Z_A| = |Z_B| = 4 = r$$

ومنه النقطتان A , B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4.

2. جد العدد العقدي الممثل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC .

O مركز ثقل المثلث ABC فإن:

$$Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

$$0 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i + Z_C}{3}$$

$$0 = 4 + Z_C \Rightarrow Z_C = -4$$

3. ما طبيعة المثلث ABC؟

طريقة 1: O مركز ثقل المثلث ومركز الدائرة المارة برؤوسه وبالتالي O نقطة تلاقي المتوسطات و المحاور فالمثلث متساوي الأضلاع .

طريقة 2: يمكن إثبات ان المثلث متساوي الأضلاع بحساب أطوال أضلاعه .

$$\left.\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{AB}} &= -4\sqrt{3}i &&\Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \\ Z_{\overrightarrow{AC}} &= -6 - 2\sqrt{3}i &&\Rightarrow AC = 4\sqrt{3} \\ Z_{\overrightarrow{BC}} &= -6 + 2\sqrt{3}i &&\Rightarrow BC = 4\sqrt{3} \end{aligned}\right\} AB = AC = BC$$

فالمثلث متساوي الأضلاع

---

4) نتأمل شعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ يمثلهما العددان العقديان u , v بالترتيب.

نفترض ان $v = iu$ ونضع $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. اثبت أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

$$v = iu$$

$$\frac{v}{u} = i$$

$$arg\frac{v}{u} = arg(i)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في A

$$\left|\frac{v}{u}\right| = |i|$$

$$\frac{|v|}{|u|} = 1$$

$$|u| = |v|$$

$$AB = AC$$

المثلث ABC متساوي الساقين راسه A

5) المثلثان ABC و $\grave{A}\grave{B}\grave{C}$ معرفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$$a = 1 - i \quad , \quad b = 2 + 3i \quad , \quad c = 2 + i$$
$$\grave{a} = -2 + 3i \quad , \quad \grave{b} = 3 - i \quad , \quad \grave{c} = 4 + i$$

1. احسب العدد الممثل للشعاع: $\overrightarrow{A\grave{A}} + \overrightarrow{B\grave{B}} + \overrightarrow{C\grave{C}}$

$$Z_{\overrightarrow{A\grave{A}}} = \grave{a} - a = -2 + 3i - (1 - i) = -3 + 4i$$
$$Z_{\overrightarrow{B\grave{B}}} = \grave{b} - b = 3 - i - (2 + 3i) = 1 - 4i$$
$$Z_{\overrightarrow{C\grave{C}}} = \grave{c} - c = 4 + i - (2 + i) = 2$$
$$Z_{\left(\overrightarrow{A\grave{A}}+\overrightarrow{B\grave{B}}+\overrightarrow{C\grave{C}}\right)} = -3 + 4i + 1 - 4i + 2 = 0$$

2. جد العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

بما ان G مركز ثقل المثلث ABC فإن:

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{1 - i + 2 + 3i + 2 + i}{3} = \frac{5}{3} + i$$

3. هل $\grave{G}$ مركز ثقل المثلث $\grave{A}\grave{B}\grave{C}$ هو نفسه G.

$$Z_{\grave{G}} = \frac{Z_{\grave{A}} + Z_{\grave{B}} + Z_{\grave{C}}}{3} = \frac{-2 + 3i + 3 - i + 4 + i}{3} = \frac{5}{3} + i$$

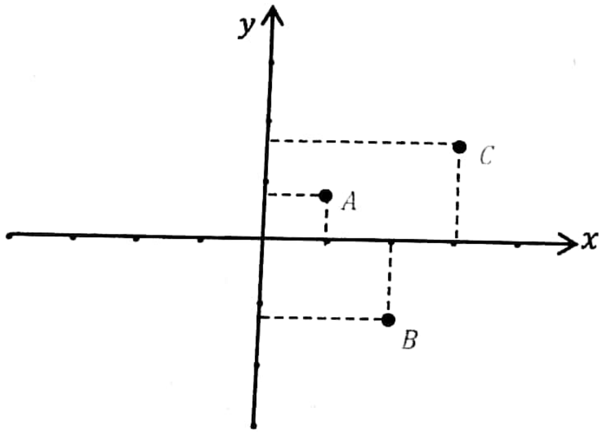
$Z_G = Z_{\grave{G}}$ ومنه $\grave{G} = G$

---

6) لتكن النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a = 1 + \frac{3}{4}i \quad , \quad b = 2 - \frac{5}{4}i \quad , \quad c = 3 + \frac{7}{4}i$$

1. وضع النقاط C, B, A في شكل ما. ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ ؟



$$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = 2 - \frac{5}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right) = 1 - 2i$$
$$Z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = 3 + \frac{7}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right) = 2 + i$$
$$Z_{\overrightarrow{AC}} = iZ_{\overrightarrow{AB}}$$

2. استنتج ان ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = i$$

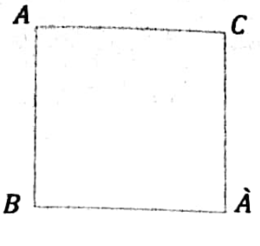
$$\arg \frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \arg i$$
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في A

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right| = |i|$$
$$\frac{AC}{AB} = 1$$
$$AB = AC$$

المثلث ABC متساوي الساقين راسه A

3. احسب العدد العقدي الممثل للنقطة $\grave{A}$ التي تجعل $AB\grave{A}C$ مربعاً.



$$\overrightarrow{B\grave{A}} = \overrightarrow{AC}$$
$$Z_{\overrightarrow{B\grave{A}}} = Z_{\overrightarrow{AC}}$$
$$\grave{a} - b = c - a$$
$$\grave{a} - 2 + \frac{5}{4}i = 3 + \frac{7}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$$
$$\grave{a} = 4 - \frac{1}{4}i$$

---

7) لتكن النقاط D, C, B, A التي يمثلها الأعداد العقدية:

$$d = -4 - 2i \quad , \quad c = 4 + 2i \quad , \quad b = -1 + 7i \quad , \quad a = 2 - 2i$$

1. لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $w = -1 + 2i$.

اثبت وقوع النقاط D, C, B, A على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها (5).

- $Z_{\overrightarrow{A\Omega}} = w - a = -1 + 2i - (2 - 2i) = -3 + 4i$

  $A\Omega = |w - a| = \sqrt{9 + 16} = 5$
- $Z_{\overrightarrow{B\Omega}} = w - b = -1 + 2i - (-1 + 7i) = -5i$

  $B\Omega = |w - b| = \sqrt{0 + 25} = 5$
- $Z_{\overrightarrow{C\Omega}} = w - c = -1 + 2i - (4 + 2i) = -5$

  $C\Omega = |w - c| = \sqrt{25 + 0} = 5$
- $Z_{\overrightarrow{D\Omega}} = w - d = -1 + 2i - (-4 - 2i) = 3 + 4i$

  $D\Omega = |w - d| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$A\Omega = B\Omega = C\Omega = D\Omega = 5$

فالنقاط D, C, B, A تقع على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها (5).

2. ليكن e العدد الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e وبرهن ان $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

- $e = \frac{a+b}{2} = \frac{2-2i-1+7i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

$$L_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}i}$$
$$= \frac{3 - 9i}{-9 - 9i} = \frac{1 - 3i}{-3 - 3i} = \frac{(1 - 3i)(-3 + 3i)}{(-3 - 3i)(-3 + 3i)}$$
$$= \frac{-3 + 3i + 9i - 9i^2}{9 + 9} = \frac{6}{18} + \frac{12}{18}i$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$L_2 = \frac{c-e}{a-e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}$$
$$= \frac{7 - i}{3 - 9i} = \frac{(7 - i)(3 + 9i)}{(3 - 9i)(3 + 9i)}$$
$$= \frac{21 + 63i - 3i - 9i^2}{9 + 81} = \frac{30}{90} + \frac{60}{90}i$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$L_1 = L_2$ فالعلاقة السابقة صحيحة

3. ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC؟

من العلاقة السابقة: $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

عددين عقديين متساويين إذاً زاويتاهما متساويتان

$$arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$
$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$$

فإن (EA) منصف داخلي للزاوية $\widehat{DEC}$.

8) لتكن النقطتان B , A اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : 1 , $3+2i$ بالترتيب. مثّل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق:

$$1)\ |Z-1| = |Z-3-2i|$$
$$|Z-1| = |Z-(3+2i)|$$
$$\underbrace{|Z-Z_A|}_{AM} = \underbrace{|Z-Z_B|}_{BM}$$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل نقاط محور القطعة المستقيمة $[AB]$

$$2)\ |Z-3-2i| = 1$$
$$|Z-(3+2i)| = 1$$
$$\left.\underbrace{|Z-Z_B|}_{BM} = 1\right\} \Rightarrow BM = 1$$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل نقاط دائرة مركزها B. ونصف قطرها 1

****

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

تمهيد:

نزود المستوي بمعلم متجانس ومباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ وبفرض u تحويلاً هندسياً يقرن بكل نقطة M يمثلها العدد العقدي Z نقطة $\grave{M}$ يمثلها العدد العقدي $\grave{Z}$.

أولاً: الصيغة العقدية للانسحاب (T):

ليكن لدينا $\vec{W}$ شعاعاً يمثله العدد العقدي b.

الصيغة العقدية للتحويل T هي $\boxed{\grave{Z} = Z + b}$

تدريب:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 3 - 2i$

أوجد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة النقطة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(-2,3)$.

الحل:

b هو العدد العقدي الممثل للشعاع $\vec{w}$:

$$\grave{Z} = Z + b$$
$$= 3 - 2i + (-2 + 3i)$$
$$\grave{Z} = 1 + i$$

ثانياً: الصيغة العقدية للتحاكي (H):

بفرض w العدد العقدي الذي يمثل النقطة Ω و k عدد حقيقي غير معدوم. الصيغة العقدية للتحويل H (H تحاكي مركزه Ω ونسبته k) هي:

$$\boxed{\grave{Z} - w = k(Z - w)}$$

حالة خاصة : التحاكي مركزه مبدأ المعلم $\boxed{\grave{Z} = kZ}$

تدريب:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 5 + i$ أوجد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة العدد العقدي Z وفق تحاكي مركزه $\Omega(-1,2)$ ونسبته (3).

$;w = -1 + 2i \quad , \quad k = 3$

$$\grave{Z} - w = k(Z - w)$$
$$\grave{Z} - (-1 + 2i) = 3(5 + i + 1 - 2i)$$
$$\grave{Z} + 1 - 2i = 18 - 3i$$
$$\grave{Z} = 17 - i$$

ثالثاً: الصيغة العقدية للدوران (R):

بفرض w العدد العقدي الذي يمثل النقطة Ω و θ عدد حقيقي غير معدوم. الصيغة العقدية للتحويل R (R دوران مركزه Ω وزاويته θ) هي:

$$\grave{Z} - w = e^{i\theta}(Z - w)$$

حالة خاصة: الدوران مركزه مبدأ المعلم

$$\grave{Z} = e^{i\theta}Z$$

تدريب:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 3 - 2i$ اوجد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة العدد العقدي Z وفق دوران مركزه $\Omega(-1\,,1)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $;w = -1 + i$

$$\grave{Z} - w = e^{i\theta}(Z - w)$$

$$\grave{Z} + 1 - i = e^{\frac{\pi}{2}i}(3 - 2i + 1 - i) \quad ;\left(e^{\frac{\pi}{2}i} = i\right)$$

$$\grave{Z} + 1 - i = i(4 - 3i)$$

$$\grave{Z} + 1 - i = 4i - 3i^2$$

$$\grave{Z} = 2 + 5i$$

****

ملاحظات هامة:

- إذا كانت $A\,,B\,,C$ ثلاث نقاط تمثلها الأعداد العقدية $a\,,b\,,c$ عندئذ:
  - يكون ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين إذا وفقط إذا كانت B صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $\left(\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\right)$.
  - يكون ABC مثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$.
- $Z = x + iy$ العدد العقدي الممثل للنقطة $M(x,y)$. $\grave{Z}$ العدد العقدي الممثل للنقطة $\grave{M}$ عندئذ:

نلاحظ حالات التناظر (S) التالية:

التناظر بالنسبة لنقطة	التناظر بالنسبة لمحور التراتيب	التناظر بالنسبة لمحور الفواصل
$\grave{M}$ صورة M وفق تناظر بالنسبة للنقطة Ω فإن:	$\grave{M}$ صورة M وفق تناظر بالنسبة لـ $y\grave{y}$ فإن:	$\grave{M}$ صورة M وفق تناظر بالنسبة لـ $x\grave{x}$ فإن:
$w = \frac{\grave{Z} + Z}{2}$ $\grave{Z} = 2w - Z$	$\grave{Z} = -\overline{Z} = -x + iy$	$\grave{Z} = \overline{Z} = x - iy$

****

تدريب صفحة 136:

1) لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 1 + i$. جد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:

1. T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

$$\grave{Z} = Z + b \quad ;(b = -2 + 3i)$$
$$= 1 + i - 2 + 3i$$
$$= -1 + 4i$$

2. H التحاكي الذي مركزه O ونسبته (3).

$$\begin{aligned}\grave{Z} &= kZ\\ &= 3(1+i)\\ &= 3+3i\end{aligned}$$

3. R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}\grave{Z} &= e^{\theta i}Z\\ &= e^{\frac{\pi}{4}i}(1+i)\\ &= \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(1+i)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i) \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,i\end{aligned}$$

4. S التناظر الذي مركزه $A(1-3i)$.

$$\begin{aligned}\frac{\grave{Z}+Z}{2} &= Z_A\\ \grave{Z}+Z &= 2Z_A\\ \grave{Z} &= 2Z_A - Z \qquad ; Z_A = 1-3i\\ &= 2(1-3i)-1-i\\ &= 2-6i-1-i\\ &= 1-7i\end{aligned}$$

5. R الدوران الذي مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

$$\grave{Z}-w = e^{i\theta}(Z-w) \qquad ; \; w = 2-i$$

$$\grave{Z}-2+i = e^{\frac{2\pi}{3}i}(1+i-2+i)$$

$$\grave{Z}-2+i = \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(-1+2i)$$

$$\grave{Z}-2+i = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+2\mathrm{i})$$

$$\grave{Z}-2+i = \frac{1}{2}-i-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\sqrt{3}$$

$$\grave{Z} = \left(\frac{5}{2}-\sqrt{3}\right)+i\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

6. S التناظر المحوري الذي محوره $(\acute{O}X)$.

$$\grave{Z} = \bar{Z} = 1-i$$

---

2) فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a , b الممثلان للنقطتين A , B بالعلاقة المعطاة. عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A.

1) $b = a - 1 + 3i$

$b = a + (-1+3i)$

النقطة B صورة النقطة A وفق انسحاب T شعاعه $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

2) $b = -ia$

$b = e^{\frac{-\pi}{2}i}a \qquad ; \left(-i = e^{\frac{-\pi}{2}i}\right)$

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه O وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

3) $b = \overline{a}$

النقطة B صورة النقطة A وفق تناظر S بالنسبة للمحور ox.

4) $b = 2a$

النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكي H مركزه O ونسبته $k = 2$.

5) $b - 1 = -(a - 1)$

النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكي H مركزه $(w = 1)$ ونسبته $k = -1$.

أو النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه $(w = 1)$ وزاويته $\theta = \pi$.

6) $b - i = e^{\frac{\pi}{3}i}(a - i)$

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه $(w = i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

7) $b = a + 4 - 3i$

$= a + (4 - 3i)$

النقطة B صورة النقطة A وفق انسحاب T شعاعه $\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$

8) $b + 1 - i = e^{\frac{\pi}{4}i}(a + 1 - i)$

$b - (-1 + i) = e^{\frac{\pi}{4}i}\big(a - (-1 + i)\big)$

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه $(w = -1 + i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$.

---

3) لتكن النقطتان $G(3 - i\sqrt{3})\,,\, H(3 + i\sqrt{3})$ وليكن R الدوران الذي مركزه O ويحقق $R(G) = H$

احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R.

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{OH}}}{Z_{\overrightarrow{OG}}}\right)$$

$$= arg\left(\frac{h - O}{g - O}\right)$$

$$= arg\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}\right)$$

$$= arg\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}}\right)$$

$$= arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$$

الصيغة العقدية للدوران: $h = e^{\frac{\pi}{3}i} g$

ملاحظات ونتائج هامة

1) Z عدد حقيقي: $Im(Z) = 0$ ، $\bar{Z} = Z$ ، $arg\,(Z) \in \{0, \pi\}$

Z عدد تخيلي بحت: $Re(Z) = 0$ ، $\bar{Z} = -Z$ ، $arg\,(Z) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

2) بفرض لدينا أربع نقاط A, B, C, D الممثلة بالأعداد العقدية a, b, c, d على الترتيب فإن الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ هي:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{CD}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

3) $$(b \neq a\ ,\ d \neq c)\quad \frac{d-c}{b-a} = ai \ :\ a \epsilon R \quad \Rightarrow \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

4) $$(b \neq a\ ,\ d \neq c)\quad \frac{d-c}{b-a} = a \ :\ a \epsilon R \quad \Rightarrow \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

5) بفرض لدينا ثلاث نقاط A, B, C فإن الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ هي:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad ;\ (b \neq a\ ,\ d \neq c)$$

6) إذا كان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ فالرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع.

7) إذا كان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$ فالرباعي $ABCD$ معين.

8) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$ فالرباعي $ABCD$ مستطيل.

9) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ و $AD = DC$ و $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}\right) = \frac{\pi}{2}$ فالرباعي $ABCD$ مربع.

10) إذا كان $\frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{Z_A + Z_C}{2}$ فإن قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي أضلاع.

	العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
1	$AB = \lvert Z_B - Z_A \rvert$	المسافة بين A, B
2	$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[AB]$
3	$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$	G مركز ثقل المثلث ABC
4	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a\ \epsilon R$	النقاط A, B, C على استقامة واحدة
5	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ai \quad : a \in R$	ABC قائم الزاوية في النقطة A
6	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \pm i$	ABC متساوي الساقين وقائم في النقطة A
7	$\lvert Z - Z_A \rvert = r \Leftrightarrow AM = r \quad r \epsilon R_+^*$	M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها r
8	$\lvert Z - Z_A \rvert = \lvert Z - Z_B \rvert$ $AM = BM$	M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[AB]$

****

أنشطة

نشاط (1): متوازي الأضلاع وربع الدورة:

نتأمل في مستوٍ مزود بمعلم متجانس رباعياً محدباً $ABCD$ وننشئ عليه مثلثات قائمة ومتساوية الساقين $SDA\,, RCD$ و $QBC\,, PAB$ بحيث:

$$(\overrightarrow{PA}\,,\overrightarrow{PB}) = \frac{-\pi}{2} \quad , \quad (\overrightarrow{QB}\,,\overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{RC}\,,\overrightarrow{RD}) = \frac{-\pi}{2} \quad , \quad (\overrightarrow{SD}\,,\overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2}$$

نفرض أن الشكل مرسوم في المستوي الموجه وقد زودناه بمعلم متجانس مباشر ولنرمز بـ $a\,, b\,, c\,, d$ إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط $A\,, B\,, C\,, D$ وكذلك $p\,, q\,, r\,, s$ إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط $P\,, Q\,, R\,, S$.

① الدوران الذي مركزه p وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ ينقل A إلى B ، استعمل الصيغة العقدية لتثبت أن:

$$p = \frac{1}{2}[a(1+i) + b(1-i)]$$

الحل: أي ان B صورة A وفق دوران مركزه p وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

$$b - p = e^{-\frac{\pi}{2}i}(a-p)$$
$$b - p = -i(a-p)$$
$$b - p = -ia + ip$$
$$b + ia = p + ip$$
$$b + ia = p(1+i) \qquad \div (1+i)$$
$$\frac{b+ia}{1+i} = p$$

نضرب بمرافق المقام :

$$\frac{(b+ia)(1-i)}{2} = p$$
$$\frac{1}{2}[b(1-i) + ia(1-i)] = p$$
$$\boxed{\frac{1}{2}[b(1-i) + a(1+i)] = p}$$

② عبر بالمثل عن $q\,, r\,, s$ بدلالة $a\,, b\,, c\,, d$

C صورة B وفق دوران مركزه Q وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c - q = e^{\frac{\pi}{2}i}(b-q)$$
$$c - q = i(b-q)$$
$$c - q = ib - iq$$
$$c - ib = q - iq$$
$$c - ib = q(1-i) \qquad \div (1-i)$$
$$\frac{c-ib}{1-i} = q$$

نضرب بمرافق المقام

$$\frac{(c-ib)(1+i)}{2} = q$$
$$\frac{1}{2}[c(1+i) - ib(1+i)] = q$$
$$\boxed{\frac{1}{2}[c(1+i) + b(1-i)] = q}$$

D صورة C وفق دوران مركزه R وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$d - r = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-r)$$
$$d - r = -i(c-r)$$
$$d - r = -ic + ir$$
$$d + ic = r + ir$$
$$d + ic = r(1+i) \qquad \div (1+i)$$
$$\frac{d+ic}{1+i} = r$$

نضرب بمرافق المقام

$$\frac{(d+ic)(1-i)}{2} = r$$
$$\frac{1}{2}[d(1-i) + ic(1-i)] = r$$
$$\boxed{\frac{1}{2}[d(1-i) + c(1+i)] = r}$$

A صورة D وفق دوران مركزه S وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$S = \frac{1}{2}[a(1+i) + d(1-i)]$$

بالمثل نجد أن:

③ تيقن أن $p + r = q + s$ ثم استنتج أن $PQRS$ متوازي أضلاع.

$$* \; p + r = \frac{1}{2}\left[\underline{b(1-i)} + \underline{\underline{a(1+i)}}\right] + \frac{1}{2}\left[\underline{d(1-i)} + \underline{\underline{c(1+i)}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(1-i)(b+d) + (1+i)(a+c)]$$

$$* \; q + s = \frac{1}{2}\left[\underline{c(1+i)} + \underline{\underline{b(1-i)}}\right] + \frac{1}{2}\left[\underline{a(1+i)} + \underline{\underline{d(1-i)}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(1+i)(a+c) + (1-i)(b+d)]$$

$$\Rightarrow p + r = q + s \qquad \div 2$$

$$\frac{p+r}{2} = \frac{q+s}{2}$$

اصبح الشكل $PQRS$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان.

نشاط (2): الجذور التكعيبية للواحد . المثلث المتساوي الأضلاع.

أولاً: في حالة $z \neq 0$ نرمز بالرمز r إلى طويلة Z وبالرمز θ إلى زاويته من المجال $[0,2\pi[$

① تيقن أن الشرط $Z^3 = 1$ يقتضي أن يكون $r = 1$, $3\theta = 2\pi k$ حيث k عدد صحيح.

$$Z^3 = 1$$

$$\left(r.e^{\theta i}\right)^3 = 1e^{0i}$$

$$r^3.e^{3\theta i} = 1.e^{0i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r = 1 \\ 3\theta = 2\pi k \end{matrix}$$

② تحقق أن الشرط $\theta \in [0,2\pi[$ يقتضي في الحقيقة أن $k \in \{0,1,2\}$

$$3\theta = 2\pi k$$

$$\left.\begin{matrix} k = 0 & \Rightarrow & \theta = 0 \\ k = 1 & \Rightarrow & \theta = \frac{2\pi}{3} \\ k = 2 & \Rightarrow & \theta = \frac{4\pi}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta \in [0,2\pi[$$

③ استنتج أن مجموعة حلول المعادلة $Z^3 = 1$ محتواة في $U_3 = \left\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\right\}$

$$r = 1 \; , \quad \theta = \frac{2\pi k}{3}$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_0 = 1$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = 1.e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad Z_2 = 1.e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

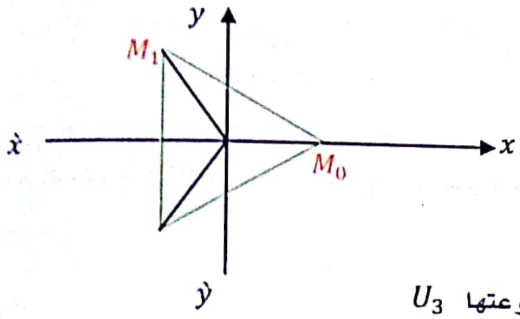
④ وبالعكس تحقق ان كل عنصر من $u_3 = \left\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\right\}$ هو حل المعادلة $Z^3 = 1$

$$Z_0 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} L_1 = (1)^3 = 1 \\ L_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 \quad (\text{محققة})$$

$$Z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} L_1 = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3 = e^{2\pi i} = 1 \\ L_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 \quad (\text{محققة})$$

$$Z_2 = e^{\frac{4\pi}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} L_1 = \left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^3 = e^{4\pi i} = 1 \\ L_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 \quad (\text{محققة})$$

⑤ مثّل النقاط $M_0(1)$ ، $M_1\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$ ، $M_2\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)$ في المستوي وتيقن انها تؤلف رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.



نسمي حلول المعادلة $Z^3 = 1$ الجذور التكعيبية للواحد ونرمز إلى مجموعتها U_3

وكذلك نرمز إلى $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ بالرمز j لاحظ ان $U_3 = \{1, j, j^2\}$

⑥ تحقق أن $1 + j + j^2 = 0$ و $\bar{j} = j^2 = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$

- $L_1 = 1 + j + j^2$

$$= 1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$= 1 - \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= 1 - 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = L_2$$

- $\bar{j} = \overline{\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)} = e^{\frac{-2\pi}{3}i}$

$$j^2 = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \underbrace{e^{\frac{6\pi i}{3}}}_{=1} . e^{\frac{-2\pi i}{3}} = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$$

$$\Rightarrow \bar{j} = j^2 = e^{\frac{-2\pi}{3}i}$$

ثانياً: نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ونتأمل ثلاث نقاط متباينة A, B, C تمثلها الأعداد العقدية a, b, c

نقول إن ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا كنا عند قراءة رؤوسه بهذا الترتيب $A \to B \to C \to A$ ندور في الاتجاه الموجب وهذا يكافئ القول إن A هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$

استعمل نتائج الفقرة السابقة لتثبت ان ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان $a + bj + cj^2 = 0$

ABC مثلث متساوي الأضلاع ومنه: A صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$:

$$a - b = e^{\frac{\pi i}{3}}(c - b) \qquad (*)$$

لكن:

$$-j^2 = -e^{-\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow e^{\pi i}.e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow 1 + j^2 = -j$$

بالعودة إلى (*):

$$a-b=-j^2(c-b)$$
$$a-b=-j^2c+j^2b$$
$$a-b-j^2b+j^2c=0$$
$$a-b\underbrace{\left(1+j^2\right)}+j^2c=0$$
$$\boxed{a+bj+cj^2=0}$$

ثالثاً: نقرن بكل عدد $Z\neq 1$ ، النقاط $\grave{M}(Z), M\,(Z), R(1)$

① **ما هي قيم Z التي تجعل $\grave{M}\,,M$ مختلفين؟**

$\grave{M}\,,M$ مختلفتين إذا وفقط إذا كان $Z\neq\overline{Z}$ أي إذا وفقط إذا لم يكن Z عدد حقيقي.

② نفترض تحقق الشرط السابق اثبت أن Δ مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تمثل المثلث $RM\grave{M}$ مثلثاً متساوي الأضلاع مباشر هي مستقيم محذوف منه نقطة.

مما سبق وجدنا أن:

$$\underset{\downarrow}{a}+\underset{\downarrow}{b}j+\underset{\downarrow}{c}j^2=0$$
$$1+Zj+\overline{Z}j^2=0$$
$$1+Zj+\overline{Z}\,\overline{j}\;=0$$
$$1+\underbrace{Zj+\left(\overline{Zj}\right)}\;=0$$
$$1+\;\;2\,Re\,(Zj)\;=0\qquad ;Z=x+iy \text{ بفرض}$$
$$1+\qquad 2Re\left[(x+iy)\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\right]=0\qquad ,\qquad y\neq 0$$
$$1+\qquad 2Re\left[(x+iy)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]=0\qquad ,\qquad y\neq 0$$
$$1+\qquad Re\,\left[(x+iy)(-1+\sqrt{3}i)\right]\;=0\qquad ,\qquad y\neq 0$$
$$1+\quad Re\,\left[-x+\sqrt{3}xi-iy-\sqrt{3}y\right]\;=0\qquad ,\qquad y\neq 0$$
$$1+Re\,\left[(-x-\sqrt{3}y)+i(\sqrt{3}x-y)\right]\;=0\qquad ,\qquad y\neq 0$$

أي: $1-x-\sqrt{3}y=0\quad ,\quad y\neq 0$

فالمجموعة Δ هي المستقيم الذي معادلته $1-x-\sqrt{3}y=0$ محذوف منه النقطة $(1,0)$

****

.1 نتأمل النقاط A , B , C التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية:

$$a = 8 \quad , \quad b = -4 + 4i \quad , \quad c = -4i$$

(1 ⓐ تحقق ان $b - c = i(a - c)$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \quad b - c = -4 + 4i + 4i = -4 + 8i \\ L_2 = i(a - c) = \quad i(8 + 4i) \quad = -4 + 8i \end{array}\right\} \Rightarrow \quad L_1 = L_2$$

ⓑ استنتج ان المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

لدينا

$$b - c = i(a - c)$$

$$\boxed{b - c = e^{\frac{\pi i}{2}}(a - c)}$$

النقطة B هي صورة النقطة A وفق الدوران R الذي مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

2) نقرن بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $\grave{M}$ الموافقة للعدد العقدي $\grave{Z} = e^{\frac{\pi}{3}i}.Z$.

ⓐ ما التحويل الهندسي الموافق؟

التحويل هو دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

ⓑ احسب الأعداد العقدية $\grave{a}$, $\grave{b}$, $\grave{c}$ الموافقة للنقاط $\grave{A}$, $\grave{B}$, $\grave{C}$ صور A, B, C وفق هذا التحويل:

• $\grave{a} = e^{\frac{\pi}{3}i}\, a$ $= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(8)$ $= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)8 \; = \; 4 + 4\sqrt{3}i$	• $\grave{c} = e^{\frac{\pi}{3}i}\, c$ $= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-4i)$ $= -2i - 2\sqrt{3}i^2 = 2\sqrt{3} - 2i$
• $\grave{b} = e^{\frac{\pi}{3}i}\, b$ $= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-4 + 4i)$ $= -2 + 2i - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i^2$ $= (-2 - 2\sqrt{3}) + (2 - 2\sqrt{3})\, i$	

3) لتكن P, Q, R منتصفات القطع المستقيمة $[\grave{A}B]$, $[\grave{B}C]$, $[\grave{C}A]$ ولتكن p, q, r الأعداد العقدية التي توافقها.

ⓐ احسب p, q, r

$$p = \frac{\grave{a} + b}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i - 4 + 4i}{2} = (2\sqrt{3} + 2)i$$

$$q = \frac{\grave{b} + c}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3}i - 4i}{2} = (-1 - \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3})\, i$$

$$r = \frac{\grave{c} + a}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i + 8}{2} = 4 + \sqrt{3} - i$$

ⓑ تحقق ان $r - p = e^{\frac{\pi}{3}i}(q - p)$

$$\begin{aligned} L_1 &= r - p \\ &= 4 + \sqrt{3} - i - 2\sqrt{3}\, i - 2i \\ &= 4 + \sqrt{3} - 3i - 2\sqrt{3}\, i \end{aligned}$$

$$L_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}(q-p)$$
$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).(-1-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i-2i)$$
$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1-\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}i)$$
$$= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}i)$$
$$= \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3i+3\sqrt{3}+9)$$
$$= \frac{1}{2}(8+2\sqrt{3}-6i-4\sqrt{3}i)$$
$$L_2 = 4+\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3}i$$

$L_1 = L_2$ فالعلاقة صحيحة.

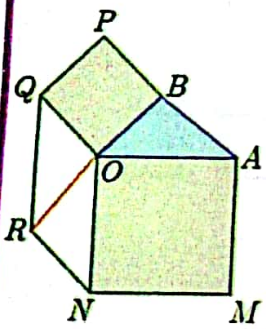
ⓒ استنتج ان المثلث PQR متساوي الأضلاع.

من العلاقة السابقة: $r-p = e^{\frac{\pi i}{3}}(q-p)$

النقطة R هي صورة النقطة Q وفق دوران مركزه النقطة P وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$ فالمثلث PQR متساوي الأضلاع.

---

2. نتأمل مثلثاً OAB فيه $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$ حيث $\alpha \in]0,\pi[$ ننشئ خارج هذا المثلث المربعين $OAMN$ ، $OBPQ$ ومتوازي الأضلاع $NOQR$ نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أن المستقيمين $(AB),(OR)$ متعامدان وان $OR = AB$ وذلك باستعمال الأعداد العقدية.



لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ وليكن a , b العددين العقديين اللذين يمثلان A , B.

1) ⓐ ما هي صورة النقطتين N , B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول O؟

- نعتبر O مبدأ الإحداثيات ومنه:
- النقطة A هي صورة النقطة N وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- النقطة Q هي صورة النقطة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ⓑ نرمز n إلى العدد العقدي الممثل للنقطة N و q العدد العقدي الموافق للنقطة Q.

اثبت أن: $n = -ia$, $q = ib$

A صورة N وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$a = e^{\frac{\pi}{2}i}\, n$$
$$a = i\,n$$
نضرب بـ i: $ia = i^2\, n$
$$ia = -n$$
$$\boxed{n = -i\,a}$$

Q صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$q = e^{\frac{\pi}{2}i}b$$
$$\boxed{q = i\,b}$$

2) ⓐ عبر عن $\overrightarrow{OR}$ بدلالة $\overrightarrow{ON}$ ، $\overrightarrow{OQ}$.

الشكل $OQRN$ متوازي أضلاع فإن: $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$

ⓑ استنتج العدد العقدي r الذي يمثل النقطة R بدلالة a ، b

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON}$$
$$r = q + n = bi - ai$$
$$r = (b-a)i$$

ⓒ ما العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$؟

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$$

ⓓ اثبت إذن أن $OR = AB$ وأن $(\vec{u},\overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u},\overrightarrow{AB})$ واستنتج تعامد المستقيمين (OR) و (AB)

$$r = (b-a)i$$

$$\underbrace{\frac{r-o}{b-a} = i}$$

$$\frac{|r-o|}{|b-a|} = |i|$$

$$\frac{OR}{AB} = 1$$

$$OR = AB$$

$$arg\,\frac{r-o}{b-a} = arg(i)$$

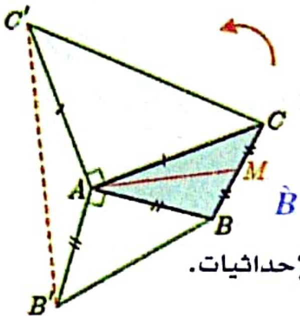
$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB},\vec{u}) + (\vec{u},\overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$$

$$-(\vec{u},\overrightarrow{AB}) + (\vec{u},\overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{u},\overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u},\overrightarrow{AB})$$

وجدنا أن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه المستقيمان (OR) , (AB) متعامدان



3. دراسة شكل:

نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشر التوجيه كيفياً. ولتكن M منتصف $[BC]$

وليكن $A\grave{B}B$, $AC\grave{C}$ مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين.

اثبت أن المتوسط (AM) في المثلث ABC هو ارتفاع في المثلث $A\grave{B}\grave{C}$ وأن $\grave{B}\grave{C} = 2AM$

العدد العقدي b يمثل النقطة B ، العدد العقدي c يمثل النقطة C نعتبر النقطة A مبدأ الإحداثيات.

النقطة $\grave{B}$ صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\grave{b} = e^{-\frac{\pi}{2}i}.b \quad \Rightarrow \quad \boxed{\grave{b} = -i\,b}$$

النقطة $\grave{C}$ صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\grave{c} = e^{\frac{\pi}{2}i}.c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\grave{c} = i\,c}$$

في المثلث ABC ، M منتصف BC وليكن m العدد العقدي الذي يمثل النقطة M فنجد أن:

$$m = \frac{b+c}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{1}{2}(b+c)}$$

لنحسب النسبة $\frac{Z_{\overrightarrow{\grave{B}\grave{C}}}}{Z_{\overrightarrow{AM}}}$:

$$\frac{Z_{\overrightarrow{\grave{B}\grave{C}}}}{Z_{\overrightarrow{AM}}} = \frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0} = \frac{ic+ib}{\frac{1}{2}(b+c)} = \frac{(c+b)i}{\frac{1}{2}(b+c)} = 2i$$

(تخيلي بحت)

$$\underbrace{\frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0} = 2i}$$

$$\left|\frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0}\right| = |2i|$$

$$\frac{\grave{B}\grave{C}}{AM} = 2$$

$$\Leftarrow \grave{B}\grave{C} = 2AM$$

$$arg\,\frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0} = arg(2i)$$

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\grave{B}\grave{C}}) = \frac{\pi}{2}$$

$\grave{B}\grave{C}$, AM متعامدان

$\Leftarrow AM$ ارتفاع في المثلث $A\grave{B}\grave{C}$

4. البحث عن مجموعة:

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ نقرن كل نقطة $M(Z)$ حيث $Z \neq i$ بالنقطة $M(\acute{Z})$ حيث $\acute{Z}=\frac{Z+2}{Z-i}$

- عين Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها $\acute{Z}$ عدداً حقيقياً.

$$\acute{Z}=\frac{Z+2}{Z-i}=\frac{Z-(-2)}{Z-(i)}$$

$$\acute{Z}=\frac{Z-a}{Z-b} \Leftarrow \begin{cases} \text{العدد العقدي } a=-2 \text{ يمثل النقطة } A \\ \text{العدد العقدي } b=i \text{ يمثل النقطة } B \end{cases}$$

$arg\left(\frac{Z-a}{Z-b}\right)\in\{0,\pi\} \Rightarrow \frac{Z-a}{Z-b}$ حقيقياً $\Rightarrow \acute{Z}$ عدداً حقيقياً

أي أن النقاط A,B,M تقع على استقامة واحدة.

Δ تمثل نقاط المستقيم المار من النقطتين A , B عدا النقطة B

- عين Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها $\acute{Z}$ عدداً تخيلياً بحتاً.

$arg\left(\frac{Z-a}{Z-b}\right)\in\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow \frac{Z-a}{Z-b}$ عدداً تخيلياً $\Rightarrow \acute{Z}$ عدداً تخيلياً

أي أن M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي ترى منها القطعة AB ضمن زاوية قائمة ما عدا النقطة B

Γ تمثل دائرة قطرها AB عدا النقطة B منها.

---

5. خاصة مميزة لمتوازي الأضلاع:

تمثل الأعداد العقدية a,b,c,d اربع نقاط A,B,C,D اثبت ان الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان: $a+c=b+d$

$ABCD$ متوازي اضلاع إذا و فقط إذا تناصف قطراه

العدد العقدي الذي يمثل منتصف AC هو $\frac{a+c}{2}$ ، العدد العقدي الذي يمثل منتصف BD هو $\frac{b+d}{2}$

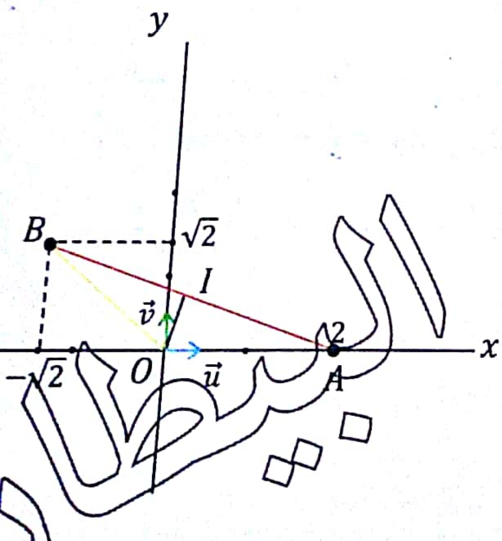
$ABCD$ متوازي اضلاع $\Leftrightarrow \frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2} \Leftrightarrow a+c=b+d$

---

6. حساب النسبة المثلثية $\frac{3\pi}{8}$:

نتأمل النقطتين A , B اللتين يمثلهما العددان $a=2$, $b=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$ وليكن I منتصف $[AB]$.

1) ⓐ ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB



$$a=2 \Rightarrow A(2,0)$$

$$b=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$b=2\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$b=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$b=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i \Rightarrow B(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$\left.\begin{array}{l} |Z_{\overrightarrow{OA}}|=\sqrt{4+0}=2 \\ |Z_{\overrightarrow{OB}}|=\sqrt{2+2}=2 \end{array}\right\}$ OAB متساوي الساقين رأسه O

ⓑ استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$

OI خط متوسط في مثلث متساوي الساقين فهو منصف لكن $(\vec{u},\overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{4}$ ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{3\pi}{8}$

2) ⓐ احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

$$Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} \Rightarrow Z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{(جبري)}$$

نكتب Z_I بالشكل الأسي :

$$r = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$arg\, Z_I = (\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$$

$$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}.e^{\frac{3\pi}{8}i} \quad \text{(اسي)}$$

ⓑ استنتج كلاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}$

الشكل الجبري لـ Z_I = الشكل الأسي لـ Z_I

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}.e^{\frac{3\pi}{8}i} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}.\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

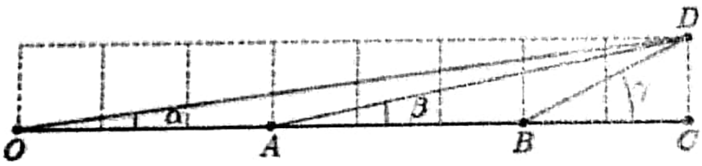
$$\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}i$$

بالمطابقة نجد :

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \quad , \quad \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

---

7. تامل الشكل واحسب المجموع $\alpha+\beta+\gamma$ حيث α, β, γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ بالترتيب:



النقطة $A(3,0)$ يمثلها العدد المركب $Z_A = 3$

النقطة $B(6,0)$ يمثلها العدد المركب $Z_B = 6$

النقطة $C(8,0)$ يمثلها العدد المركب $Z_C = 8$

النقطة $D(8,1)$ يمثلها العدد المركب $Z_D = 8 + i$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} = 8 + i$$

$$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 8 + i - 3 = 5 + i$$

$$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 8 + i - 6 = 2 + i$$

$$\alpha+\beta+\gamma = arg\left(Z_{\overrightarrow{OD}}.Z_{\overrightarrow{AD}}.Z_{\overrightarrow{BD}}\right)$$

$$arg\, z_{\overrightarrow{OD}} = \alpha$$

$$arg\, z_{\overrightarrow{AD}} = \beta$$

$$arg\, z_{\overrightarrow{BD}} = \gamma$$

مجموع زوايا اعداد عقدية يساوي زاوية العدد الناتج عن جداء هذه الأعداد

$$\alpha+\beta+\gamma = arg\,\underbrace{[(8+i)(5+i)(2+i)]}_{\text{بالنشر}}$$

$$\alpha+\beta+\gamma = arg[65+65i] = \frac{\pi}{4}$$

8. نقرن بكل نقطة $M(Z)$ من المستوي حيث $Z \neq -\frac{1}{2}i$ النقطة $\grave{M}$ التي يمثلها العدد العقدي $\grave{Z} = \frac{Z+2i}{1-2iZ}$ لتكن Γ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها (1) اثبت انه إذا انتمت M إلى Γ انتمت $\grave{M}$ إلى Γ ايضاً أيكون العكس صحيحاً ؟

أولاً: بما ان $M \in \Gamma$ فإنه يكافئ $OM = 1$ اي

$|Z| = 1$ ومنه $Z.\overline{Z} = 1$ او $\overline{Z} = \frac{1}{z}$

ولإثبات انتماء $\grave{M}$ إلى Γ يجب ان نثبت ان $O\grave{M} = 1$ اي $|\grave{Z}| = 1$ اي $\grave{Z}.\overline{\grave{Z}} = 1$

$$\grave{Z} = \frac{Z+2i}{1-2iZ}$$

$$\overline{\grave{Z}} = \frac{\overline{(Z+2i)}}{\overline{(1-2iZ)}} = \frac{\overline{Z}-2i}{1+2i\overline{Z}}$$

نضرب بـ Z :

$$= \frac{Z\overline{Z}-2iZ}{Z+2i\overline{Z}Z} = \frac{1-2iZ}{Z+2i} = \frac{1}{\grave{Z}}$$

$$\overline{\grave{Z}} = \frac{1}{\grave{Z}}$$

$$\grave{Z}\overline{\grave{Z}} = 1$$

$$|\grave{Z}| = 1$$

$$O\grave{M} = 1$$

اي $\grave{M} \in \Gamma$

ثانياً: لنحاول إثبات العكس

بما ان $\grave{M} \in \Gamma$ فإنه يكافئ ان $O\grave{M} = 1$ اي $|\grave{Z}| = 1$

ومنه $\grave{Z}.\overline{\grave{Z}} = 1$

ولإثبات انتماء M إلى Γ يجب ان نثبت ان $OM = 1$

اي $|Z| = 1$ اي $Z.\overline{Z} = 1$

لدينا: $\grave{Z}.\overline{\grave{Z}} = 1$

$$\left(\frac{Z+2i}{1-2iZ}\right)\left(\frac{\overline{Z}-2i}{1+2i\overline{Z}}\right) = 1$$

$$\frac{Z\overline{Z}-2iZ+2i\overline{Z}+4}{1+2i\overline{Z}-2iZ+4Z\overline{Z}} = 1$$

$$Z\overline{Z}-2iZ+2i\overline{Z}+4 = 1+2i\overline{Z}-2iZ+4Z\overline{Z}$$

$$3Z.\overline{Z}-3 = 0 \qquad (\div 3)$$

$$Z.\overline{Z}-1 = 0$$

$$Z.\overline{Z} = 1$$

$$|Z| = 1$$

$$OM = 1$$

اي $M \in \Gamma$ ومنه العكس صحيح

---

9. مسألة تعامد:

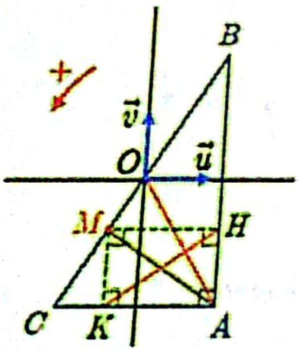
نتأمل في المستوي الموجه مثلثاً مباشراً ABC قائماً في A النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (CB) و H , K هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) و على (AC) بالترتيب.

نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK).

نختار معلماً متجانساً ومباشراً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ بحيث تقع O في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) شعاعاً موجهاً للمستقيم (AB) $\vec{v}$

ونرمز a, b, c, h, k, m إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A, B, C, H, K, M

1) علل ما يلي: $a = \overline{b}$, $a - m = \overline{h - k}$



- لاحظ $[AO]$ خط متوسط متعلق بالوتر في المثلثالقائم ABC وبالتالي طوله يساوي نصف طول الوتر اي $AO = OB$

إذاً A نظيرة B بالنسبة لـ $x\grave{x}$ اي $a = \overline{b}$.

- لنحسب $a - m$ ثم $\overline{h - k}$:

$$a - m = (x_A + y_A i) - (x_M + y_M i)$$
$$= x_A + y_A i - x_M - y_M i$$
$$a - m = (x_A - x_M) + i(y_A - y_M) \qquad ①$$
$$h - k = (x_H + iy_H) - (x_K + iy_K)$$
$$= (x_A + iy_M) - (x_M + iy_A)$$
$$= x_A + iy_M - x_M - iy_A$$

نلاحظ من الرسم:

$$\begin{cases} x_H = x_A , y_H = y_M \\ x_K = x_M , y_K = y_A \end{cases}$$

$$h-k=(x_A-x_M)+i(y_M-y_A)$$
$$h-k=(x_A-x_M)-i(y_A-y_M)$$
$$\overline{h-k}=(x_A-x_M)+i(y_A-y_M) \quad (11)$$

نلاحظ من (1) و (11) ان : $a-m=\overline{h-k}$

2) ⓐ اثبت ان $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=\frac{\pi}{2}$ او $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=-\frac{\pi}{2}$

بما ان النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على CB إذاً: $MA \perp BC$ فإن $MA \perp OB$ ومنه:

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MA})=-\frac{\pi}{2}$$
$$arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

ⓑ استنتج ان $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=-\frac{\pi}{2}$ او $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$ ثم اثبت المطلوب:

من (1) وجدنا ان : $a=\overline{b}$ $\quad \begin{pmatrix} a-m=\overline{h-k} \\ \overline{a-m}=h-k \end{pmatrix}$

$$arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=arg\left(\frac{\overline{a-m}}{\overline{b}}\right)=arg\,\overline{\left(\frac{a-m}{b}\right)}=\frac{\pi}{2}$$

إثبات المطلوب:

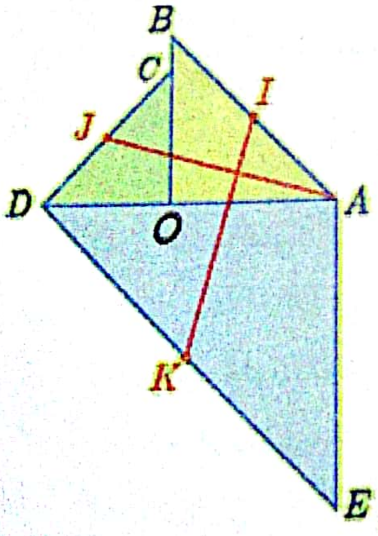
بما أن $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$

فإن $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH})=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\overrightarrow{KH},\overrightarrow{OA}$ متعامدان.

---

10. نتامل في المستوي الموجه الشكل المجاور: المثلثات ADE, OCD, OAB مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط K,J,I هي منتصفات اوتار هذه المثلثات نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين $(IK),(AJ)$ وان $IK=AJ$ نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O ونرمز c,a إلى العددين العقديين الممثلين للنقطتين C,A

1) عبر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثل النقاط B و D و E



نفرض b,d,e اعداد عقدية تمثل النقاط E,D,B

- B صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن:

$$b=e^{\frac{\pi}{2}i}a$$
$$\boxed{b=i\,a}$$

- D صورة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن:

$$d=e^{\frac{\pi}{2}i}c$$
$$\boxed{d=i\,c}$$

- E صورة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن:

$$e-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(d-a)$$
$$e-a=i\ (i\,c-a)$$
$$e-a=-c-ia$$
$$\boxed{e=(-c+a)-ia}$$

2) استنتج الأعداد العقدية $Z_I\,,Z_J\,,Z_K$ التي تمثل النقاط $I\,,J\,,K$

- I منتصف AB فإن:

$$Z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{a+ai}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}i$$

- J منتصف DC فإن:

$$Z_J=\frac{d+c}{2}=\frac{ic+c}{2}=\frac{c}{2}+\frac{c}{2}i$$

- K منتصف DE فإن:

$$Z_K=\frac{d+e}{2}=\frac{ic-c+a-ia}{2}$$
$$=\frac{a-c}{2}+i\left(\frac{c-a}{2}\right)$$

3) اثبت ان $Z_K-Z_I=i(Z_J-a)$ ثم استنتج الخواص المطلوبة:

$$L_1=Z_K-Z_I$$
$$=\frac{a-c}{2}+i\left(\frac{c-a}{2}\right)-\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}i\right)$$
$$=\frac{a}{2}-\frac{c}{2}+\frac{c}{2}i-\frac{a}{2}i-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}i$$
$$=-\frac{c}{2}+i\left(\frac{c}{2}-a\right)$$

$$L_2=i(Z_J-a)$$
$$=i\left(\frac{c}{2}+\frac{c}{2}i-a\right)$$
$$=i\frac{c}{2}-\frac{c}{2}-ai$$
$$=-\frac{c}{2}+i\left(\frac{c}{2}-a\right)$$

$L_1=L_2$ فالعلاقة صحيحة.

$$Z_K-Z_I=i(Z_J-a)$$
$$\frac{Z_K-Z_I}{Z_J-a}=i$$

$$\left|\frac{Z_K-Z_I}{Z_J-a}\right|=|i|$$
$$\frac{IK}{AJ}=1$$
$$AJ=IK$$

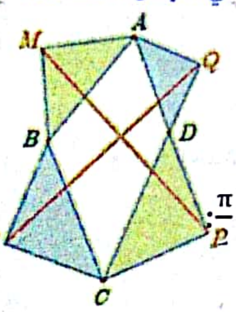
$$arg\frac{Z_K-Z_I}{Z_J-a}=arg(i)$$
$$\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{IK}\right)=\frac{\pi}{2}$$

AJ, IK متعامدان.

---

11. نتامل في المستوي الموجه رباعياً محدباً مباشراً $ABCD$ ننشئ خارجه النقاط $M\,,N\,,P\,,Q$ التي تجعل المثلثات $MBA\,,NCB\,,PDC\,,DQA$ قائمة في $M\,,N\,,P\,,Q$ بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.

اثبت باستعمال الأعداد العقدية ان $MP=NQ$ وان المستقيمين $(MP)\,,(NQ)$ متعامدان.



فكرة الحل: نوجد q,n,m,p بدلالة $a\,,b\,,c\,,d$ ثم نحسب $p-m\ \ ,\ \ q-n$

A صورة B وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$a-m=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-m)$$
$$a-m=i(b-m)$$
$$a-m=ib-im$$
$$im-m=ib-a$$
$$m(i-1)=ib-a$$
$$m=\frac{ib-a}{i-1}$$
$$\boxed{m=\frac{a-bi}{1-i}}$$

B صورة C وفق دوران مركزه N وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$b-n=e^{\frac{\pi}{2}i}(c-n)$$
$$b-n=i(c-n)$$
$$b-n=ic-in$$
$$in-n=ic-b$$
$$n(i-1)=ic-b$$
$$n=\frac{ic-b}{i-1}$$
$$\boxed{n=\frac{b-ic}{1-i}}$$

C صورة D وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$c-p=e^{\frac{\pi}{2}i}(d-p)$$
$$c-p=i(d-p)$$
$$c-p=id-ip$$
$$ip-p=id-c$$
$$p(i-1)=id-c$$
$$p=\frac{id-c}{i-1}$$
$$\boxed{p=\frac{c-id}{1-i}}$$

D صورة A وفق دوران مركزه Q وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$d-q=e^{\frac{\pi}{2}i}(a-q)$$
$$d-q=i(a-q)$$
$$d-q=ia-iq$$
$$iq-q=ia-d$$
$$q(i-1)=ia-d$$
$$q=\frac{ia-d}{i-1}$$
$$\boxed{q=\frac{d-ia}{1-i}}$$

$$p-m=\frac{c-id}{1-i}-\frac{a-bi}{1-i}=\frac{(c-a)+i(b-d)}{1-i}$$
$$q-n=\frac{d-ia}{1-i}-\frac{b-ic}{1-i}=\frac{(d-b)+i(c-a)}{1-i}$$

نلاحظ ان:

$$(q-n)=i(p-m)$$
$$\frac{q-n}{p-m}=i$$

$$\left|\frac{q-n}{p-m}\right|=|i|$$
$$\frac{NQ}{MP}=1$$
$$NQ=MP$$

$$arg\left(\frac{q-n}{p-m}\right)=arg(i)$$
$$\left(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}\right)=\frac{\pi}{2}$$

MP,NQ متعامدان.

---

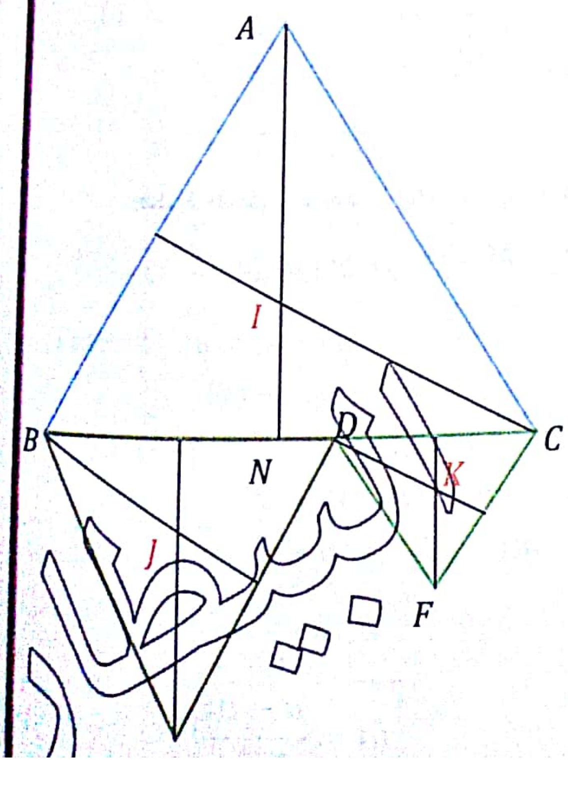
12. نتامل في المستوي الموجّه مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً ABC مركزه النقطة I . D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$ ننشئ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين DFC , BED .

ونعرّف K ,J مركزي المثلثين DFC , BED نهدف إلى اثبات ان المثلث IJK متساوي الأضلاع. نختار معلماً متجانساً مباشراً $(B;\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{BC}=\alpha\vec{u}$ حيث $\alpha=BC$

1) احسب بدلالة α العددين العقديين Z_I , Z_A اللذين يمثلان I , A بالترتيب.

$BC=\alpha$ فيكون $AB=AC=BC=\alpha$

ومنه إحداثيات النقاط:



$B(0,0)$

$C(\alpha,0)$

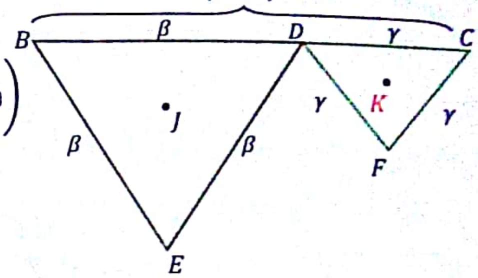
$A\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right):\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right.$ يساوي α الارتفاع في مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه

$I\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\sqrt{3}\alpha}{6}\right):\left(IN=\frac{1}{3}AN=\frac{\sqrt{3}\alpha}{6}\right)$

$$\boxed{Z_A=\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}i}\quad,\quad\boxed{Z_I=\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}\alpha}{6}i}$$

2) نفترض أن $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$ حيث $t \in]0,1[$ احسب بدلالة α و t العددين العقديين Z_J, Z_K اللذين يمثلان J, K بالترتيب.

لنوجد إحداثيات النقاط الآتية:



$D(\beta, 0)$

$E\left(\frac{\beta}{2}, \frac{-\sqrt{3}\beta}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}\beta}{2}\right.$ يساوي β الارتفاع في مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $\left.\right)$

$J\left(\frac{\beta}{2}, \frac{-\sqrt{3}\beta}{6}\right) : \quad (\overrightarrow{BD} = t.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \beta = t\alpha \ )$

$\Rightarrow J\left(\frac{t\alpha}{2}, \frac{-\sqrt{3}\,t\,\alpha}{6}\right) \Rightarrow \boxed{Z_J = \frac{t\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\,t\alpha}{6} i}$

$F\left(\beta + \frac{\gamma}{2}, -\frac{\sqrt{3}\gamma}{2}\right) \Rightarrow F\left(t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{2}\right)$

$K\left(\beta + \frac{\gamma}{2}, -\frac{\sqrt{3}\gamma}{6}\right) \Rightarrow K\left(t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{6}\right)$

$$\begin{bmatrix} \beta + \gamma = \alpha \\ t\alpha + \gamma = \alpha \\ \gamma = \alpha - t\alpha \\ \gamma = \alpha(1-t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Z_K = t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{6} i}$$

3) تحقق أن: $Z_K - Z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_J - Z_I)$ واستنتج الخاصة المرجوة:

$$L_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_J - Z_I)$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{t\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}t\alpha}{6} i - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha}{6} i\right)$$
$$= \frac{t\alpha}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}\alpha}{3} + \frac{\sqrt{3}\alpha t}{6}\right) i$$

$$L_1 = Z_K - Z_I$$
$$= t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{6} i - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha}{6} i$$
$$= \frac{t\alpha}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}\alpha}{3} + \frac{\sqrt{3}\alpha t}{6}\right) i$$

$L_1 = L_2$ فالعلاقة صحيحة.

لدينا $Z_K - Z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_J - Z_I)$ فإن K صورة J وفق دوران مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{3}$ والمثلث IJK متساوي الأضلاع.

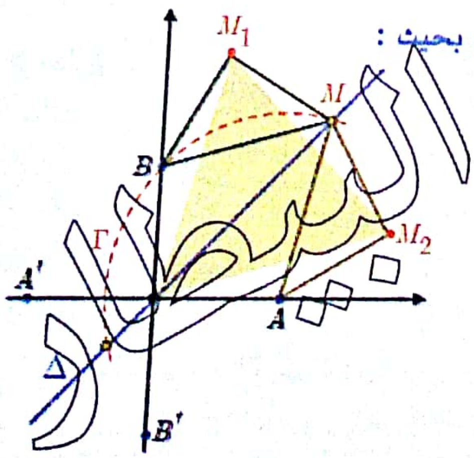
---

13. نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A و $\acute{A}$ و B و $\acute{B}$ هي النقاط الموافقة للأعداد العقدية 1 و -1 و i و $-i$ بالترتيب.

نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و $\acute{A}$ و B و $\acute{B}$ النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثان BMM_1 و AMM_2 قائمين و متساويي الساقين بحيث:

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

1) ارسم شكلاً مناسباً.



$Z - Z_1 = i(i - Z_1)$

$1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$

2) a. علل صحة المساواتين

لنثبت ان $Z - Z_1 = i(i - Z_1)$

BMM_1 مثلث قائم في M_1 ومتساوي الساقين

M صورة B وفق دوران مركزه M_1 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z - Z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_B - Z_1)$$
$$Z - Z_1 = i(i - Z_1)$$

لنثبت ان $1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$

AMM_2 مثلث قائم ومتساوي الساقين في M_2

A صورة M وفق دوران مركزه M_2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_A - Z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z - Z_2)$$
$$1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$$

b. عبر عن Z_1 و Z_2 بدلالة Z

$$Z - Z_1 = i(i - Z_1)$$
$$Z - Z_1 = -1 - iZ_1$$
$$iZ_1 - Z_1 = -1 - Z$$
$$Z_1(i - 1) = -1 - Z$$
$$Z_1 = \frac{-1 - Z}{i - 1}$$
$$Z_1 = \frac{Z + 1}{1 - i}$$

$$1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$$
$$1 - Z_2 = iZ - iZ_2$$
$$iZ_2 - Z_2 = iZ - 1$$
$$Z_2(i - 1) = iZ - 1$$
$$Z_2 = \frac{iZ - 1}{i - 1}$$
$$Z_2 = \frac{1 - iZ}{1 - i}$$

3) نهدف إلى تعيين النقاط M التي تجعل المثلث OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع

a. اثبت ان الشرط $OM_1 = OM_2$ يكافئ $|Z + 1| = |Z + i|$ و استنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$ و ارسم Δ على الشكل نفسه

$$OM_1 = OM_2$$
$$|Z_1| = |Z_2|$$
$$\left|\frac{Z + 1}{1 - i}\right| = \left|\frac{1 - iZ}{1 - i}\right|$$
$$\left|\frac{Z + 1}{1 - i}\right| = \left|\frac{-i(Z + i)}{1 - i}\right|$$
$$\frac{|Z + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|Z + i|}{\sqrt{2}}$$
$$\boxed{|Z + 1| = |Z + i|}$$
$$|Z + 1| = |Z + i|$$

$\Leftrightarrow$

$$|x + iy + 1| = |x + iy + i|$$
$$|(x + 1) + iy| = |x + (y + 1)i|$$
$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$
$$(x + 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$$
$$2x = 2y$$
$$\boxed{x = y}$$

مجموعة النقاط Δ تمثل منصف الربع الأول.

b. اثبت ان الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يكافئ $|Z + 1|^2 = 2|Z|^2$

$$M_1M_2 = |Z_2 - Z_1|$$

$$Z_2 - Z_1 = \frac{1 - iZ}{1 - i} - \frac{Z + 1}{1 - i} = \frac{1 - iZ - Z - 1}{1 - i} = \frac{-Z(1 + i)}{1 - i} = \frac{-Z\,(1 + i)}{(1 - i)} \cdot \frac{(1 + i)}{(1 + i)} = \frac{-2Z\,i}{2} = -i\,Z$$

$$OM_1 = M_1M_2$$
$$|Z_1| = |Z_2 - Z_1|$$
$$\left|\frac{Z + 1}{1 - i}\right| = |-iZ|$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{|Z + 1|}{\sqrt{2}} = |Z|$$
$$|Z + 1| = \sqrt{2}|Z|$$
$$\boxed{|Z + 1|^2 = 2|Z|^2}$$

هديل

c. استنتج ان Γ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$ وارسم Γ في الشكل نفسه.

$$2|Z|^2 = |Z+1|^2$$
$$2(x^2+y^2) = (x+1)^2 + y^2$$
$$2x^2+2y^2 = x^2+2x+1+y^2$$
$$x^2+y^2-2x-1=0$$
$$\underbrace{x^2-2x+1}-1+y^2-1=0$$
$$(x-1)^2+y^2=2$$

ومنه مجموعة النقاط Γ تمثل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$

d. استنتج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع وحددها على الشكل.

يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا انتمت النقطة M إلى تقاطع المجموعتين Δ و Γ بالحل المشترك لجملة المعادلتين :

$\boxed{1}$ $y = x \Rightarrow y^2 = x^2$ $\boxed{\acute{1}}$

$\boxed{2}$ $(x-1)^2+y^2=2$

نعوض $\boxed{\acute{1}}$ في $\boxed{2}$ فنجد:

$$(x-1)^2+x^2=2$$
$$x^2-2x+1+x^2-2=0$$
$$2x^2-2x-1=0$$
$$\Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$
$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \xRightarrow{\text{نعوض في } \boxed{1}} y_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \xRightarrow{\text{نعوض في } \boxed{1}} y_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه إما $M\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $M\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

****