جامعة الشام الخاصة　　　　　　　　　　مقرر بحوث العمليات

المحاضرة الخامسة　　　　　　　　　　التاريخ:

---

# طريقة السيمبلكس لحل النماذج الخطية

## مقدمة:

نعلم انه أثناء البحث عن حلول قاعدية غير سالبة نضطر لإيجاد جميع الحلول ثم نختار منها الحلول غير السالبة ونظرا لصعوبة تطبيق هذا الأسلوب وخاصة عندما تكون المعادلات تحوي عدد كبير من المجاهيل فانه لابد من طريقة مختصـــرة نصـــل من خلالها مباشـــرة إلى الحلول القاعدية غير الســـالبة، فكانت طريقة الســـيمبلكس التي تعتبر تطويرا لطريقة (جاردان – غوص)

تعد هذه الطريقة من أحدث الطرق لحل مســـائل البرمجة الخطية التي تتكون من أكثر من متحولين، وهي من أفضـــل الانجازات في مجال بحوث العمليات والبرمجة الخطية وازدادت أهميتها مع تزايد إمكانيات وضـــع وتطوير برامج حاســـوبية لتطبيق الطريقة وإيجاد حلول بالســـرعة المذهلة وبالدقة العالية ومهما كان عدد المتحولات فالحل يمكن أن يتوفر في خلال ثواني.

تسير طريقة السيمبلكس بخطوات منتظمة في إيجاد الحل الأمثل، وتعتمد على اختيار نقطة قصـــوى ممكنة عادة تكون نقطة الأصـــل ثم ينتقل الحل في عمليات متتالية من نقطة إلى أخرى أفضل منها حتى نصل إلى النقطة التي تحقق الحل الأمثل

علما بان طريقة السيمبلكس تشير إلى نوعية الحلول فيما إذا كانت المسالة بدون حل أمثل أو أن لها حلولا متعددة

نستخدم في طريقة السيمبلكس النماذج الرياضية بالشكل القياسي وفي حال كان النموذج نموذج غير قياسي فيجب تحويله إلى الشكل القياسي قبل البدء في الحل بطريقة السيمبلكس

**خوارزمية السيمبلكس لحل النماذج من النوع** $Max$ :

1–نحول النموذج الرياضي إلى الشكل القياسي نحصل على النموذج الخطي التالي

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + -----+c_nx_n + 0y_1 + 0y_2 + ----+0y_m$$

الخاضع للشروط التالية

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + - - - - - + a_{1m}x_m + - - - - + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + - - - - - + a_{2m}x_m + - - - - + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + - - - - - + a_{mm}x_m + - - - - + a_{mn}x_n + y_m = b_m
\end{array}
\qquad (1)
$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad b_i \geq 0 \quad , \quad y_i \geq 0 \quad , i = 1 - - - m \quad , \quad j = 1 - - - n$$

المطلوب إيجاد القيم غير السالبة للمتحولات

$$x_1, x_2, - - - -, x_n , y_1 , y_2 \ , - - -, y_m$$

بحيث نحصل على أعظم قيمة للتابع الخطي $Z$

2–نقوم بتحويل النموذج القياسي السابق إلى شكل قاعدي مناسب بمعنى أننا نقوم بإيجاد قاعدة أولى لهذا النموذج مؤلفة من $m$ متحولا وذلك بتنفيذ الخطوات التالية:

**الخطوة الأولى:**

إذا كانت جميع المتحولات الإضافية $y_i$ ذات أمثال مساوية للواحد وموزعة في جميع المعادلات ( في كل معادلة متحول فقط أمثاله مساوية للواحد)كما في المثال السابق عندها فان هذه المتحولات تصلح لان تكون قاعدة أولى مؤلفة من المتحولات القاعدية $y_1, y_2 , - - - - y_m$ وعندها نعتبر المتحولات $x_1, x_2 , - - - - x_n$ متحولات غير قاعدية ثم نشكل الجدول الأساسي وننتقل إلى معاينة سطر تابع الهدف

| المتغيرات القاعدية | المتغيرات الأساسية | | | | | | المتغيرات الإضافية | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $--$ | $x_d$ | $--$ | $x_n$ | $y_1$ | $y_2$ | $--$ | $y_m$ | |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $--$ | $a_{1d}$ | $--$ | $a_{1n}$ | 1 | 0 | $--$ | 0 | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $--$ | $a_{2d}$ | $--$ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $b_2$ |
| – – | – – | – – | – – | – – | – – | – – | – – | – – | – – | – – | – – |
| $m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $--$ | $a_{md}$ | $--$ | $a_{mn}$ | 0 | $--$ | $--$ | 1 | $b_m$ |
| $Z$ | $-c_1$ | $-c_2$ | $--$ | $-c_d$ | $--$ | $-c_n$ | 0 | 0 | $--$ | 1 | 0 |

**الخطوة الثانية:**

إذا كانت جميع المتحولات $y_1, y_2, ----y_m$ لا يمكن اعتبارها قاعدة (حيث يكون بعضـــها سالب) هنا ننظر في إمكانية اعتبار بعضـها متحولات قاعدية (هي التي يكون أمثالها $+1$ ) ونتمم القاعدة من بين المتحولات $x_1, x_2, ----x_n$ غير القاعدية وذلك عن طريق حســـاب احد تلك المتحولات من إحدى المعادلات وتعويضيها في المعادلات الأخرى وفي تابع الهدف بغية حذفها من تلك المعادلات واعتبارها متحولا قاعديا

**الخطوة الثالثة:**

نقوم بتحديد المتحول المناسب لحذفه وإدخاله في القاعدة عن طريق دراسـة أمثال المتحولات الداخلة في تابع الهدف حيث نختار $Min$ ، المتحول ذي الأمثال الأكثر ايجابية في السطر الأخير (سطر تابع الهدف)

لنفرض أن هذا المتحول هو $x_d$ أمثاله $c_d$ نسمي العمود الموافق له بعمود الارتكاز

بعد تحديد عمود الارتكاز يجب أن نحدد ســطر الارتكاز وذلك من خلال المؤشـــر $\theta$ الذي نحصل عليه من العلاقة التالية

$$\theta = Min\left[\frac{b_i}{a_{id}} > 0 \quad , \quad b_i > 0 \quad , \quad a_{id} > 0\right] = \frac{b_t}{a_{td}} > 0$$

بمعنى أننا نقســم العناصــر $b_i$ في الطرف الأيمن من المعادلات على القيم الموجبة الموافقة لها في عمود الارتكاز ثم نختار اصغر هذه النسب ليكون مقامها هو عنصر الارتكاز

نقوم بحذف المتحول $x_d$ من جميع المعادلات عدا المعادلة $t$ وذلك وفق مايلي

أ- نقسم جميع عناصر المعادلة $t$ على أمثال $x_d$ في هذه المعادلة عندها يأخذ سطر الارتكاز الشكل التالي

$$\frac{a_{t1}}{a_{td}} \quad \frac{a_{t2}}{a_{td}} \quad \frac{a_{t3}}{a_{td}} \quad ----1---- \frac{a_{tn}}{a_{td}} \qquad \frac{1}{a_{td}} \quad 0 \quad 0------0, \frac{b_t}{a_{td}}$$

ب-نجعل جميع عناصر عمود الارتكاز (عمود $x_d$ ) مساوية للصفر ماعدا عنصر الارتكاز مساويا للواحد

ت- نحسب جميع العناصر الجديدة الأخرى وفق العلاقات التالية

$$a'_{ij} = (a_{ij} - a_{id}\frac{a_{tj}}{a_{td}}) \qquad j \neq d \quad , \quad i \neq t \qquad (1)$$

$$b'_i = (b_i - a_{id}\frac{b_t}{a_{td}}) \qquad , \qquad i \neq t \qquad (2)$$

$$c'_j = (c_j - c_d\frac{a_{tj}}{a_{td}}) \qquad , \qquad i \neq t \qquad (3)$$

بذلك نحصل على الجدول الجديد

لمتابعة العمل ولإدخال متحولا جديدا إلى القاعدة التي نحاول تشكيلها أو تغيرها نعود إلى الخطوة الثالثة ونطبق كل ما جاء فيها وما يليها حتى نحصل على جدول جديد أخر نكرر هذه العملية حتى نحول الشكل القياسي إلى شكل قاعدي محدد فيه $m$ من المتغيرات القاعدية الموجودة في العمود الأول من الجدول المحدد وقيم الحل هي القيم المقابلة في العمود الأخير $(b_i)$ وبالنسبة لباقي المتغيرات وهي $n-m$ متغير حر تساوي الصفر وقيمة تابع الهدف $Z = c_\circ$ وهي القيمة الموجودة في المربع الأيمن السفلي

نقوم بدراسة جميع أمثال المتحولات في سطر تابع الهدف $Z$ من جديد وهنا نكون أمام إحدى الحالتين

**الحالة الأولى:**

إذا كانت جميع الأمثال المقابلة للمتحولات الحرة غير موجبة فان ذلك يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل ونحصل عليه بوضع جميع المتحولات الحرة مساوية للصفر فنحصل على الحل القاعدي غير السالب الذي يمثل الحل المثالي المطلوب

**الحالة الثانية:**

إذا كانت بعض الأمثال المقابلة للمتحولات الحرة في السطر الأخير $c_j$ موجبة (واحد على الأقل) فهذا يعني أننا لم نتوصل بعد إلى الحل المثالي وعلينا أن نحذف المتحولات الحرة المقابلة لكل القيم الموجبة لذلك نعود إلى الخطوة الثالثة وما يليها

3-نكرر العملية السابقة حتى نتخلص من جميع الأمثال $c_j$ الموجبة ، بذلك نحصل على الحل المثالي ( في حال وجوده )

**ملاحظة** (1) :

عند حل النماذج الخطية نصادف إحدى الحالات التالية :

- حالة وجود حل مثالي محدد
- لا يوجد حل مثالي محدد بسبب كون المنطقة مفتوحة باتجاه تزايد تابع الهدف (يبين لنا ذلك عدم وجود عنصر موجب في عمود الارتكاز ) وبالتالي لا يمكن الحصول على قيمة موجبة محددة للمؤشر $\theta$
- يوجد عدد لانهائي من الحلول المثالية (حالة تعدد الحلول المثالية) ويعود السبب إلى أن مستوي التابع $z$ موازيا لأحد أضلاع أو سطح منطقة الحلول المشتركة ويدلنا على ذلك الجدول حيث يظهر الصفر في السطر الأخير المقابل للمتحولات الحرة غير القاعدية
- عدم وجود أي حل مقبول (وبالتالي عدم وجود حل مثالي) وذلك بسبب تعارض الشروط بعضها مع بعض ونستدل على ذلك من الجدول وذلك عدم وجود أي عنصر موجب في أحد الأسطر (هذا يعني أن الطرف الأيسر يأخذ قيم سالبة في حين الطرف الأيمن $b_i \geq 0$ وهذا لا يمكن أن يحدث إلا إذا كانت الشروط متعارضة

4-نقوم بالتحقق من أن الحل المثالي الذي حصلنا عليه يحقق الشروط المفروضة ويعطينا القيمة الكبرى للتابع $z$ وذلك بتعويض مركباته في جميع الشروط وفي تابع الهدف

**نلخص الطريقة السابقة بالخطوات التالية**

1-مرحلة تحويل النموذج المفروض إلى الشكل القياسي المكافئ

2-مرحلة تحويل الشكل القياسي إلى شكل قاعدي للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة

3-مرحلة البحث عن الحل المثالي المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة

**ملاحظة** (2) :

إذا لم يتضمن عمود الارتكاز (عمود $x_d$ ) أي عنصر موجب فان ذلك يعني انه لا يمكن حساب $\theta$ وبالتالي لا يمكن التخلص من المتحول $x_d$ ) تحدث هذه الحالة عندما تكون

منطقة الحلول المقبولة مفتوحة باتجاه تزايد التابع $z$ وفي هذه الحالة نقول إن الحل المثالي غير محدد وغير موجود لعدم إمكانية تحديده على الرغم من وجود عدد كبير من الحلول المقبولة التي تؤدي إلى تكبير دائم في قيمة $z$

**ملاحظة** $(3)$:

إذا حصلنا عند حساب المؤشر $\theta$ على عدة نسب متساوية فانه لتحديد عنصر الارتكاز يمكننا اختيار أي من هذه العناصر ليكون عنصرا للارتكاز

ولكن يفضل اختيار أكبرها نجري الحسابات اللازمة لحذف المتحول $x_d$ من جميع المعادلات ماعدا المعادلة $t$ لكي يكون متحولا قاعديا في المعادلة $t$

**نوضح ما سبق من خلال الأمثلة التالية**

مثال $(1)$: (تابع الهدف من النوع $Max$ والمتحولات الإضافية تشكل قاعدة اولية )

أوجد قيم $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ التي تجعل تابع الهدف أعظم ما يمكن

$$Max\,Z = 10x_1 + 20\,x_2 + 12\,x_3$$

الخاضع للشروط التالية

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 120\\
&x_1 + 2x_2 \le 60\\
&2x_1 + x_3 \le 40\\
&x_1\,,\,x_2\,,\,x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

من معاينة النموذج نلاحظ أنه ليس بالشكل القياسي وجميع الشروط من الشكل أصغر أو يساوي لذلك من اجل تحويله إلى الشكل القياسي نقوم بإضافة مقدار لكل متراجحة منها لنحولها إلى معادلة تصبح القيود بالشكل التالي

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_1 = 120\\
&x_1 + 2x_2 + y_2 = 60\\
&2x_1 + x_3 + y_3 = 40\\
&x_1\,,x_2\,,x_3\,,y_1\,,y_2\,,y_3 \ge 0
\end{aligned}$$

نسمي المتحولات الجديدة بمتحولات الفروق ونقوم بإدخالها إلى تابع الهدف بأمثال مساوية للصفر وعليه تصبح المسالة بعد تحويلها إلى الشكل القياسي المكافئ

$$Max\,Z = 10x_1 + 20\,x_2 + 12\,x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$$

ضمن الشروط

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_1 = 120 \\
&x_1 + 2x_2 + y_2 = 60 \\
&2x_1 + x_3 + y_3 = 40 \\
&x_1 , x_2 , x_3 , y_1 , y_2 , y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

القيود جملة من المعادلات الخطية عدد المتغيرات فيها $n$ وعدد المعادلات $m$ حيث $(n = 6 \;\; , \;\; m = 3)$ من اجل حل هذه الجملة بطريقة الحذف المسماة طريقة (جاردن – غوص) أو أي طريقة أخرى يجب أن يكون $(n = m)$ وعليه نعتبر انه لدينا $(n - m = 3)$متغيرا من أصل $n$ متغيرا مساوية للصفر عندها نستطيع حل المعادلات وإيجاد قيم المتغيرات المتبقية والسؤال الذي يطرح نفسه هنا أي من المتغيرات سنعتبرها مساوية للصفر

وهنا يبرز دور تابع الهدف حيث انه يجب أن يتم الاختيار بحيث يكون تابع الهدف أعظم ما يمكن ولكن بما أننا أدخلنا المتغيرات الإضافية بأمثال مساوية للصفر فإننا نعتبرها هي التي تساوي الصفر وبالتالي نحصل على جملة المعادلات التالية

حيث انه عند حل هذه المعادلات سنجد أن بعض هذه المتغيرات تأخذ قيم سالبة وهذا مرفوض وعليه يكون الحل الأولي الذي يمكن استخراجه من المعادلات مباشرة هو عند اعتبار $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ وعليه تصبح المعادلات

$$
\begin{aligned}
&y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 120 \\
&0y_1 + y_2 + 0y_3 = 60 \\
&0y_1 + 0y_2 + y_3 = 40
\end{aligned}
$$

والتي تكتب بالشكل المصفوفي التالي

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 120 \\ 60 \\ 40 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow y_1 = 120 \quad , \quad y_2 = 60 \quad , \quad y_3 = 40 \\
&x_1 = x_2 = x_3 = 0
\end{aligned}
$$

تابع الهدف في هذه الحالة يساوي الصفر حيث نسمي هذا الحل بالحل الأولي المقبول

ونسمي $y_1 , y_2 , y_3$ المتغيرات القاعدية أما المتحولات الأخرى $x_1 , x_2 , x_3$ ندعوها

بالمتغيرات الحرة وباعتماد الطريقة المبسطة أو طريقة السيمبلكس المباشرة سنتوصل إلى الحل المثالي وذلك بالاعتماد على الحل الأولي

حيث نستبدل أحد المتحولات القاعدية بمتحول حر ليكون المتحول القاعدي مساوي للصفر ويتم هذا الاختيار من اجل الحصول على الحل الأمثل بأقل ما يمكن من التكرارات من خلال ما سبق نكون قد حولنا الشكل القياسي إلى شكل قاعدي مناسب للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة

المرحلة التالية هي إيجاد الحل الأمثل من بين الحلول القاعدية غير السالبة

من اجل تنفيذ هذه المرحلة نضع معاملات الشكل السابق في جدول مناسب كالتالي

| المتغيرات القاعدية | المتغيرات الأساسية | | | المتغيرات الإضافية | | | الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
| $y_1$ | 2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| $y_2$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 60 |
| $y_3$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| $Z$ | 10 | 20 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |

هنا من اجل إيجاد الحل الأمثل يجب أن نستبدل أحد المتغيرات القاعدية بمتغير غير قاعدي بحيث يؤدي هذا التبديل إلى أكبر تغير نحو الحل الأمثل حيث أن المتغير غير القاعدي الذي سنختاره ليكون متغيرا قاعديا نسميه بالمتغير الداخل (لأنه سيدخل في الحل) والمتغير الذي سيتم إخراجه نسميه بالمتغير الخارج (لأنه سيخرج من الحل)

**ملاحظة** ( 4 ):

إذا قمنا بعملية التبديل بشكل عشوائي ما بين المتغيرات القاعدية والمتغيرات غير القاعدية سنجد أمامنا $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ حلا مقبولا أي أن هذه التكرارات العشوائية ستزداد بشكل كبير كلما ازدادت قيمة $n$ و $m$ ففي مثالنا وحيث أن $n=6$ و $m=3$ يكون لدينا $\frac{6!}{3!(6-3)!}=20$ حلا مقبولا وهنا يبرز دور طريقة السيمبلكس حيث أنها تساعدنا على الوصول إلى الحل

الأمثل بأقل عدد ممكن من التكرارات ويعتمد ذلك على اختيار المتحول الداخل والمتغير الخارج في كل تكرار بحيث نحصل على تعظيم لتابع الهدف إذا كان المطلوب تعظيم وتقليل لتابع الهدف إذا كان المطلوب تقليل في مثالنا المطلوب الحصـــــول على أعظم قيمة لتابع الهدف لذلك يجب اختيار المتغير الذي تكون أمثاله في تابع الهدف اكبر أي يجب أن نختار $x_2$ أمثال $Max\, c_j = 20$ وفي مثالنا معاملات المتغيرات في تابع الهدف $c_j$ حيث $Max\, c_j$ هي اكبر قيمة لمعاملات تابع الهدف لذلك نختار $x_2$ ليكون متغيرا داخلا نســـمي العمود الموجود فيه $x_2$ بعمود الارتكاز وعليه يكون $x_d = x_2$ بعد تحديد عمود الارتكاز يجب أن نحدد سطر الارتكاز الذي سنحسب منه المتحول $x_d$ وذلك اعتمادا على طريقة السيمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية بحيث يحافظ على عدم السلبية للثوابت العددية في الطرف الأيمن أي أن تبقى $b_i \geq 0$ نقوم بتقسيم جميع العناصر الموجبة $b_i$ على العناصر المقابلة لها ( فقط الموجبة ) من أمثال المتحول $x_2$ في مختلف المعادلات ونختار اصغر النسب الناتجة أي نقوم باختيار المؤشر $\theta$ حيث

$$\theta = Min\left[\frac{b_i}{a_{id}} > 0 \quad , \quad b_i > 0 \quad , \quad a_{id} > 0\right] = \frac{b_t}{a_{td}} > 0$$

هذا المؤشر سيحدد لنا عنصر الارتكاز $a_{td}$ حيث أن المعادلة $t$ هي التي ستحدد سطر الارتكاز أي السطر الذي ستبقى فيه قيمة $x_2$ مساوية للواحد في مثالنا

$$\theta = Min\left[\frac{120}{1} \quad , \quad \frac{60}{2}\right] = \frac{60}{2} = 30$$

وعليه يكون عنصر الارتكاز هو $(2)$ وسطر الارتكاز هو السطر الممثل بـ $y_2$

بعد تحديد عنصـــر الارتكاز نقوم بعملية حذف المتحول $x_d = x_2$ من جميع المعادلات عدا المعادلة $t$ ليصبح متحولا قاعديا وذلك باستخدام طريقة غوص

حيث نقسم جميع عناصر السطر $t$ على عنصر الارتكاز $(2)$ نحصل على القيم الجديدة لهذا السطر في الجدول الجديد ونجعل جميع عناصر عمود الارتكاز مساوية للصفر ماعدا

عنصر الارتكاز فيصبح مساويا للواحد ونحسب بقية عناصر الجدول من خلال العلاقات التالية:

$$a'_{ij} = (a_{ij} - a_{id}\frac{a_{tj}}{a_{td}}) \qquad j \neq d \quad , \quad i \neq t \qquad (1)$$

$$b'_i = (b_i - a_{id}\frac{b_t}{a_{td}}) \qquad , \qquad i \neq t \qquad (2)$$

$$c'_j = (c_j - c_d\frac{a_{tj}}{a_{td}}) \qquad , \qquad i \neq t \qquad (3)$$

| المتغيرات القاعدية | المتغيرات الأساسية | | | المتغيرات الإضافية | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
| $y_1$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 3 | 1 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | 90 |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 30 |
| $y_3$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 40 |
| $Z$ | 0 | 0 | $-12$ | 0 | $-10$ | 0 | $Z-600$ |

الخطوة التالية هي معاينة سطر تابع الهدف إذا كانت جميع الأمثال سالبة فهذا يعني أننا وصلنا إلى الحل المثالي أما إذا كانت أحد هذه الأمثال موجبة فهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل النهائي ولابد من إعادة الخطوة السابقة وهي تحديد عمود الارتكاز أي تعين العنصر الداخل الجديد والعنصر الخارج

أما كيفية اختيار العمود فهو العمود الموافق لأكثر العناصر ايجابية ضمن عناصر السطر $Z$ وفي مثالنا (12)ولا يوجد غيره لذلك يكون عمود $x_3$ هو عمود الارتكاز ونحدد سطر الارتكاز من المؤشر $\theta$ ونجري العمليات الحسابية اللازمة نحصل على الجدول التالي

| المـتـغـيـرات القاعدية | المتغيرات الأساسية | | | المتغيرات الإضافية | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
| $x_3$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $1$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | $0$ | $30$ |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $30$ |
| $y_3$ | $\frac{3}{2}$ | $0$ | $0$ | $\frac{-1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $10$ |
| $Z$ | $-6$ | $0$ | $0$ | $-4$ | $-6$ | $0$ | $Z-960$ |

نلاحظ أن جميع العناصر في السطر تابع الهدف سالبة وبالتالي توصلنا إلى الحل الأمثل المطلوب وهو

$$y_3 = 10 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_1 = 0$$
$$x_3 = 30 \quad , \quad x_2 = 30 \quad , \quad x_1 = 0$$
$$Z - 960 = 0 \quad \Rightarrow Z = 960$$

مثال $(2)$ : ( المتحولات الإضافية لا تشكل قاعدة أولية وتابع الهدف $Max$ )

أوجد قيم $x_1 \ , \ x_2$ التي تجعل تابع الهدف أعظم ما يمكن

$$Max Z = 5x_1 + 2x_2 - 5$$

ضمن الشروط

$$x_1 - x_2 \le 4$$
$$3x_1 - 2x_2 \ge 1$$
$$x_1 + x_2 \ge -4$$
$$x_2 \le 5$$
$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 6$$
$$x_1 \ , x_2 \ \ge 0$$

الحل: نحول هذا النموذج إلى الشكل النظامي نحصل على النموذج التالي

$$Max\, Z = 5x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 - 5$$

ضمن الشروط

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + y_1 = 4 \\
&3x_1 - 2x_2 - y_2 = 1 \\
&-x_1 - x_2 + y_3 = 4 \\
&x_2 + y_4 = 5 \\
&x_1 - \frac{1}{2}x_2 + y_5 = 6 \\
&x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن المتراجحات انقلبت إلى معادلات وان الثوابت العددية أصبحت كلها موجبة وان المتحولات $y_i$ دخلت في عبارة تابع الهدف بأمثال مساوية للصفر وان عدد المتحولات أصبح سبعة بينما عدد المعادلات خمسة ننظم جدول السيمبلكس

| | المتغيرات القاعدية | | المتغيرات الإضافية | | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المعادلات | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 2 | 3 | $-2$ | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 5 | 1 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| $Z$ | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $Z+5$ |

من دراسة الجدول السابق نلاحظ انه لا يوجد قاعدة جاهزة وذلك لان أمثال $y_2$ تساوي $(-1)$ لذلك علينا أن نبحث عن قاعدة أولى لهذه المسالة ثم نبحث عن الحل المثالي المطلوب ، من دراسة أمثال المتحولات في سطر تابع الهدف $Z$ نلاحظ وجود عنصرين موجبين هما $(5)$ ، $(2)$ المقابلين لـ $(x_2 , x_1)$ على الترتيب نختار أكبرهما وهو العدد $(5)$ مقابل لـ $(x_1)$ وبذلك يكون العمود الأول هو عمود الارتكاز لتحديد المعادلة التي يجب أن نحسب منها $x_1$ لتعويضه في المعادلات الأخرى نحسب قيمة المؤشر $\theta$ ونقوم بتقسيم عناصر عمود الثوابت على العناصر الموجبة في عمود $x_1$ ( عمود الارتكاز ) ونختار اصغر النسب أي نحسب المؤشر $\theta$

$$\theta = Min\left[\frac{4}{1},\frac{1}{3},\frac{6}{1}\right] = \frac{1}{3}$$

عندها يكون عنصر الارتكاز هو العدد 3 الواقع في المعادلة ( السطر ) الثانية نقوم بحساب $x_1$ من هذه المعادلة ونعوضه في المعادلات الأخرى وتابع الهدف نحصل على الجدول التالي

| | المتغيرات القاعدية | | المتغيرات الإضافية | | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المعادلات | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
| $y_1$ | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{11}{3}$ |
| $x_1$ | 1 | $\frac{-2}{3}$ | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| $y_3$ | 0 | $\frac{-5}{3}$ | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{13}{3}$ |
| $y_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $y_5$ | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{17}{3}$ |
| $Z$ | 0 | $\frac{16}{3}$ | 0 | $\frac{5}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $Z+\frac{10}{3}$ |

من الجدول السابق نلاحظ أننا قد حصلنا على قاعدة أولى مؤلفة من المتحولات $(y_1 \quad x_1 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5)$ وتعطينا الحل القاعدي غير السالب التالي :

$(\frac{1}{3} \;,\; 0 \;,\; \frac{11}{3} \;,\; 0 \;,\; \frac{13}{3} \;,\; 5 \;,\; \frac{17}{3})$ ويعطينا قيمة لـ $Z$ تساوي

$$0 = Z + \frac{10}{3} \Rightarrow Z = \frac{10}{3}$$

من دراسة عناصر السطر الأخير (سطر تابع الهدف) نلاحظ انه مازال يتضمن عددين موجبين هما $(\frac{16}{3})$ و $(\frac{5}{3})$ وهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل المثالي لذلك نختار العدد الأكبر وهو $(\frac{16}{3})$ ونعتبر عموده المقابل $x_2$ عمودا للارتكاز ثم نحسب قيمة المؤشر $\theta$ فنجد

$$\theta = Min\left[\frac{5}{1}, \frac{17/3}{1/6}\right] = \frac{5}{1}$$

أي إن عنصر الارتكاز هو العنصر (1) في السطر الرابع ، لذلك نقوم بحساب $x_2$ من المعادلة الرابعة ونعوضه بالمعادلات الأخرى وتابع الهدف نحصل على الجدول التالي

| | المتغيرات القاعدية | | المتغيرات الإضافية | | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المعادلات | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
| $y_1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{16}{3}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{11}{3}$ |
| $y_3$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{38}{3}$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $y_5$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{29}{6}$ |
| $Z$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{3}$ | 0 | $\frac{-16}{3}$ | 0 | $Z-\frac{70}{3}$ |

من دراسة عناصر السطر الأخير (سطر تابع الهدف) نلاحظ انه مازال يتضمن عدد موجب هو $(\frac{5}{3})$ وهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل المثالي لذلك نعتبر عموده المقابل $y_2$ عمودا للارتكاز ثم نحسب قيمة المؤشر $\theta$ فنجد

$$\theta = Min\left[\frac{29/6}{1/3}, \frac{16/3}{1/3}\right] = \frac{29/6}{1/3}$$

أي إن عنصر الارتكاز هو العنصر $(\frac{1}{3})$ الواقع في السطر الخامس، لذلك نقوم بحساب $x_2$ من المعادلة الخامسة ونعوضه بالمعادلات الأخرى وتابع الهدف نحصل على الجدول التالي

| | المتغيرات القاعدية | | المتغيرات الإضافية | | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المعادلات | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
| $y_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{51}{6}$ |
| $y_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{105}{6}$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| $y_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{-1}{2}$ | 1 | $\frac{29}{6}$ |
| $Z$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{-11}{6}$ | $\frac{-5}{3}$ | $Z-\frac{285}{6}$ |

نلاحظ إن جميع عناصر السطر الأخير (سطر تابع الهدف) أصبحت غير موجبة، هذا يعني أننا قد توصلنا إلى الحل المثالي المطلوب ونحصل عليه بوضع المتحولين غير القاعديين (الحرين) مساويين للصفر أي $y_5 = y_4 = 0$ نحصل على

$$x_1 = \frac{51}{6} = 8{,}5 \quad , \quad x_2 = 5 \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{29}{2} = 14{,}5 \quad , \quad y_3 = \frac{105}{6} = 17{,}5$$

ويأخذ الحل المثالي الشكل التالي

$$(8{,}5 \quad , \quad 5 \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad 14{,}5 \quad , \quad 17{,}5 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0)$$

وهو يقابل النقطة $(8{,}5\, ,\, 5)$ بالنسبة للمتحولين $(x_1\, ,\, x_2)$ ويعطينا اكبر قيمة لتابع الهدف

$$0 = Z - \frac{285}{6} \Rightarrow Z = 47{,}5$$

**خوارزمية السيمبلكس لحل النماذج من النوع $Min$ :**

وجدنا في العرض الســابق لطريقة الســيمبلكس انه عند حل النماذج الخطية من النوع $Max$ نقوم بتحديد عمود الارتكاز باختيار العنصــر الأكثر ايجابية في سطر تابع الهدف ولكن في النماذج من النوع $Min$ نقوم بتحديد عمود الارتكاز باختيار العنصــــر الأكثر ســـلبية ( أي العنصـــر الســـالب الأكبر بالقيمة المطلقة ) في ســـطر تابع الهدف ونعتبره عمود الارتكاز ونتابع العمل حســـب التعليمات الســـابقة حتى نحصـــل على حل قاعدي أول ثم نتابع الحل

حتى نحصل على الحل المثالي المطلوب للنموذج الخطي المفروض ويتم ذلك عندما تصبح جميع عناصر سطر تابع الهدف غير سالبة

**نوضح ما سبق من خلال المثال التالي :**

مثال: أوجد قيم $x_1 \ , \ x_2$ التي تجعل تابع الهدف التالي

$$Min\, Z = -x_1 \ + 2x_2 - 3x_3$$

ضمن الشروط

$$\begin{aligned}
& -x_1 \ + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\
& -x_2 - 3x_3 \geq -1 \\
& x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq -3 \\
& -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \geq -5 \\
& x_1 \ , x_2 \ , x_3 \ \geq 0
\end{aligned}$$

الحل: نحول هذا النموذج إلى الشكل النظامي نحصل على النموذج التالي

$$Min\, Z = -x_1 \ + 2x_2 - 3x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4$$

ضمن الشروط

$$\begin{aligned}
& x_1 \ - x_2 - 2x_3 + y_1 = 2 \\
& x_2 + 3x_3 + y_2 = 1 \\
& -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + y_3 = 3 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + y_4 = 5 \\
& x_1 \ , x_2 \ , x_3 \ , y_1 \ , y_2 \ , y_3 \ , y_4 \ \geq 0
\end{aligned}$$

نلاحظ أن المتراجحات انقلبت إلى معادلات وان الثوابت العددية أصبحت كلها موجبة وان المتحولات $y_i$ دخلت في عبارة تابع الهدف بأمثال مساوية للصفر وان عدد المتحولات أصبح سبعة بينما عدد المعادلات أربعة ننظم جدول السيمبلكس

| | المتغيرات القاعدية | | المتغيرات الإضافية | | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| القاعدة | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | |
| $y_1$ | 1 | $-1$ | $-2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $y_2$ | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $y_3$ | $-1$ | $-2$ | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| $y_4$ | 2 | 3 | $-6$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| $Z$ | $-1$ | 2 | $-3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $Z-0$ |

من دراسة الجدول السابق نلاحظ انه يوجد قاعدة جاهزة وهي المتحولات الإضافية $(y_4 , y_3 , y_2 , y_1)$ ، من دراسة أمثال المتحولات في سطر تابع الهدف $z$ نلاحظ وجود عنصرين موجبين هما $(-3)$ ، $(-1)$ المقابلين لـ $(x_3 , x_1)$ على الترتيب نختار أكبرهما وهو العدد $(-3)$ مقابل لـ $(x_3)$ وبذلك يكون العمود الثالث هو عمود الارتكاز ، لتحديد المعادلة التي يجب أن نحسب منها $x_3$ لتعويضه في المعادلات الأخرى نحسب قيمة المؤشر $\theta$ ونقوم بتقسيم عناصر عمود الثوابت على العناصر الموجبة في عمود $x_3$ ( عمود الارتكاز ) ونختار اصغر النسب أي نحسب المؤشر $\theta$

$\theta = Min\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{3}$ عندها يكون عنصر الارتكاز هو العدد 3 الواقع في المعادلة ( السطر الثانية ) نقوم بحساب $x_3$ من هذه المعادلة ونعوضه في المعادلات الأخرى وتابع الهدف نحصل على الجدول التالي

| القاعدة | المتغيرات القاعدية | | المتغيرات الإضافية | | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | |
| $y_1$ | 1 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{8}{3}$ |
| $x_3$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| $y_3$ | $-1$ | $\frac{-10}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{-4}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{5}{3}$ |
| $y_4$ | 2 | 5 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 7 |
| $Z$ | $-1$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $z-1$ |

من دراسة عناصر السطر الأخير (سطر تابع الهدف) نلاحظ انه مازال يتضمن عدد سالب هو $(-1)$ وهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل المثالي لذلك نعتبر عموده المقابل لـ $x_1$ عمودا للارتكاز ثم نحسب قيمة المؤشر $\theta$ فنجد

$$\theta = Min\left[\frac{8/3}{1}, \frac{7}{1/3}\right] = \frac{8/3}{1}$$

أي إن عنصر الارتكاز هو العنصر $(1)$ الواقع في السطر الأول ، لذلك نقوم بحساب $x_1$ من المعادلة الاولى ونعوضه بالمعادلات الأخرى وتابع الهدف نحصل على الجدول التالي

| | المتغيرات القاعدية | | | المتغيرات الإضافية | | | | | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المعادلات | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
| $x_1$ | 1 | $\frac{-1}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{8}{3}$ |
| $x_3$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| $y_3$ | 0 | $\frac{-11}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{-2}{3}$ | 1 | 1 | 0 | $\frac{13}{3}$ |
| $y_4$ | 0 | $\frac{17}{3}$ | 0 | $-2$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{5}{3}$ |
| $Z$ | 0 | $\frac{8}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{5}{3}$ | 0 | 0 | 0 | $Z-\frac{11}{3}$ |

نلاحظ ان جميع عناصر السطر الأخير (سطر تابع الهدف) أصبحت غير موجبة ، هذا يعني أننا قد توصلنا الى الحل المثالي المطلوب ونحصل عليه بوضع المتحولات غير القاعديين ( الحرين ) مساويين للصفر أي $x_2 = y_1 = y_2 = 0$ نحصل على

$$x_1 = \frac{8}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{3} \qquad , \quad y_3 = \frac{13}{3} \quad , \quad y_4 = \frac{5}{3}$$

ويأخذ الحل المثالي الشكل التالي

$$(\frac{8}{3} \; , \; 0 \; , \; \frac{1}{3} \; , \; 0 \; , \; 0 \; , \; \frac{5}{3} \; , \; \frac{11}{3})$$

وهو يقابل النقطة $(\frac{8}{3} \; , \; 0 \; , \; \frac{1}{3})$ بالنسبة للمتحولات $(x_1 , x_2 , x_3)$ ويعطينا اكبر قيمة لتابع الهدف

$$0 = Z - \frac{11}{3} \Rightarrow Z = \frac{11}{3}$$

انتهـــــت المحاضرة

مدرس المقرر

د. ميسم احمد جديد