الفصل الرابع متتاليات (متواليات)الأعداد

الدرس الأول المتتاليات

المتتالية هي تتالي أعداد بترتيب معين، كل عدد يسمى حد للمتتالية مثلا متتالية الأعداد: 1, 3, 5, 7, ...
حدها الأول هو 1 وحدها الثاني 3 يعني اضفنا 2 وهذه 2 نضيفها ل 3 يصبح 5 ونضيفها لل 5 يصبح 7 و... وهكذا،

من خصائص المتتالية :
- أن الفرق بين حد وحد ثابت
- قد تكون متتالية منتهية أو غير منتهية
- كل عدد يعتبر حد (مثلا الرقم الأول نقول الحد الاول , والرقم الثاني نقول الحد الثاني وهكذا)

1, 3, 5, 7, ... لاحظ: هذه المتتالية غير منتهية
نرمز للحد الأول بـ a_1 والحد الثاني بـ a_2 وهكذا...
(المتتالية تعني هي مجموعة أو سلسلة أرقام بينها فواصل تربط بينها صيغة رياضية أو قاعدة)
$a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_3 = 5$ $a_4 = 7$

نرمز للحد العام بـ a_n
A_n هي الحد النوني أي رقم الحد وتسمى الحد العام فنعوضها بالحد المطلوب مثلا الحد العاشر تصبح a_{10} الحد الخامس a_5 الحد التاسع a_9 وهكذا

ماهي قاعدة إنشاء هذه المتتالية؟
تم تكوين المتتالية السابقة بإضافة 2 لحدها الأول للحصول على حدها الثاني، وهكذا في كل مرة يضاف 2 للحد السابق للحصول على الحد التالي.

مثال معطى المتتالية: 5, 9, 13, ...

ماهي قاعدة إنشاء هذه المتتالية؟ أوجد حدها الرابع.

الحل القاعدة: إضافة 4 للحد السابق (توضيح الحد الاول 5 والحد الثاني 9 نلاحظ ماهي العملية التى بينهم هنا اضافة 4 (5+4=9)
وهكذا كل حد اضيف 4 ليعطيني الحد اللى بعده فاضافة 4 هنا هي قاعدة المتتالية)

. بالتالي حدها الرابع هو:

$$a_4 = a_3 + 4 = 13 + 4 = 17$$

احسب الحد السادس : a_6 الحل = 25 التوضيح :

هنا اجيب الحد الخامس واضيف عليه اربعة ثم اضيف على الحد الخامس4 يعطيني الحد السادس (a_6 21 +4=25) (a_5 17+ 4=21)

احسب حدها 100 هنا الامر صعب ويحتاج لقاعدة وسوف يتم شرحها لايجاد قاعدة معينة .

أنواع المتتاليات

1) المتتالية الحسابية 2) المتتالية الهندسية

المتتالية الحسابية

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي **قاعدة إنشائها هي: إضافة (طرح) عدد معين للحد السابق** ، للحصول على الحد التالي نسمي هذا العدد **الثابت بأساس المتتالية ونرمز له بـ** d.

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d$$
و هكذا ،...

كيف نوجد أساس المتتالية الحسابية؟ أساس المتتالية الحسابية يكون:

$$d = a_2 - a_1$$
أو
$$d = a_3 - a_2$$

بصورة عامة فإن الأساس هو: $d = a_n - a_n - 1$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

1. أساس المتتالية: 1, 3, 5, 7, هو

التوضيح / نطرح الاول من الثانى والثاني من الثالث وهكذا

1-3=2

5-3=2

7-5=2 نلاحظ جميع الاجابات = 2 اذا هي متتالية حسابية

1 (d)	4 (c)	2 (b)	3(a)

---

2. أساس المتتالية 8,3.-2,-7 هو :

التوضيح/ 3 – 8 =-5

3 – (-2) =-5

-2 – (-7) = -5

−3 (d)	−5(c)	5 (b)	3(a)

---

3. الحد المفقود في المتتالية :..., 13, 10,.....4, هو

7 – 4 = 10 (نتاكد 4+3=7 و 7+3=10 و 10+3= 13)

−3(d)	5(c)	16(b)	7(a)

---

4. متتالية حسابية حدها الأول 5 وأساسها 4 يكون حدها الثالث هو

الشرح / نجيب الحد الثاني = 5+ 4 = 9

الحد الثالث = 9 +4 =13

20(d)	13(c)	1 (b)	9 (a)

الحد العام للمتتالية الحسابية:

الحد a_n يسمى الحد العام أو الحد النوني وهو القاعدة المتبعة في تكوين المتتالية، لنوجد صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية:

عرفنا أن:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

بالتلي فإن الحد العام هو $a_n = a_1 + (n-1)d$

تمكنا هذه الصيغة من إيجاد الحد الذي نريد.

مثلا لنوجد الحد السابع للمتتالية ... 3, 5, 7, في هذه المتتالية: $d= 2$, $a_1=1$

الشرح /

$$a_n= a_1 + (n-1)d$$
$$a_7 = a_1 + (7-1)d$$
$$a_7 = a_1 + 6d$$
$$a_7 = 1 + 6(2)$$
$$a_7= 1 + 12$$
$$a_7= 13$$

الشرح / هذا القانون العام نعوض فيه

معطيات السؤال a_1= 1 والأساس : d= 2 (لانه 5-3=2 و 7-5=2وهكذا) n =7 أولا نضع قانون الحد العام وهو

$$a_n= a_1 + (n-1)d$$

نحن نريد إيجاد الحد السابع الطريقة تعويض إذن

$$a_7= 1 + (7-1)\ 2$$

أولا نجري العملية الحسابية داخل القوس(7-1) =6 ثم نجري عملية الضرب 6× 2 = 12 ثم نجمع 12 +1 = 13

وأخيرا الجمع يكون ناتج الحد السابع هو

$$a_7= 13$$

س/ أوجد الحد العشرين للمتتالية نفسها :

$$a_n= a_1 + (n-1)d$$
$$a_{20} = a_1 + (20-1)d$$
$$a_{20} = a_1 + 19d$$
$$a_{20}= 1 + 19(2)$$
$$a_{20}= 1 + 38$$
$$a_{20}=39$$

الشرح/ معطيات السؤال a_1= والأساس : d =2 n =20 أولا نضع قانون الحد العام وهو

$$a_n= a_1 + (n-1)d$$

نحن نريد إيجاد الحد السابع الطريقة تعويض إذن

$$a_7= 1 + (20-1)\ 2$$

أولا نجري العملية الحسابية داخل القوس(20 -1) =19 ثم نجري عملية الضرب 19× 2 = 38 ثم نجمع 12 +1 = 38

وأخيرا الجمع يكون ناتج الحد العشرين هو

$a_{20}=39$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة / الحد الحادي عشر في المتتالية :...12, 9, 6, 3 هو

33(a)	**23 (b)**	**21 (c)**	**30(d)**

الشرح / (3=9-12 و 3=6-9 و 3=3-6) اذا d= 3

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d$$
$$a_{11} = a_1 + 10d$$
$$a_{11}= 3 + 10(3)$$
$$a_{11}= 3 + 30$$
$$a_{11}= 33$$

لها قانون وهو $a_n = a_1 + (n-1)d$
An هو الحد العام أو يسمى الحد النوني لأي عدد n تعوض برقم الحد وهو العدد الذي يذكر بالسؤال
A_1 هو الحد الأول للعدد
و d هو أساس المتتالية هذا قانون الحد العام للمتتالية الحسابية

مجموع المتتالية الحسابية

ما هو مجموع الأعداد من 1 إلى5؟

$$1+ 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

لاحظ للمتتالية:

1, 2, 3, 4, 5

متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1 وعدد حدودها 5(أي حدها الأخير 5).

مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول a_1 وحدها الأخير L وعدد حدودها n يساوي

$$\frac{n\,(a1 + l)}{2}$$

تذكير :
n = عدد حدودها
a_1 = الحد الاول
l = الحد الأخير

س/ أوجد مجموع المتتالية التالية :

1, 2, 3, 4, 5 (مجموع المتتالية هو 15 و الحد الاول هو 1 والحد الأخير 5)

هو $\frac{n\,(a1 + l)}{2} = \frac{5\,(1+5)}{2} = \frac{30}{2} = 15$

س/ أوجد مجموع المتتالية التالية : 1,2,3,4,5,6,7,8

$$\frac{n\,(a1+l)}{2}=\frac{8\,(1+8)}{2}=\frac{9\times8}{2}=\frac{72}{2}=36$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة مجموع حدود المتتالية: 1, 3, 5, 7, 9, 11 هو

72 (a)	23 (b)	30 (c)	**36** (d)

$$\frac{n\,(a1+l)}{2}=\frac{6\,(1+11)}{2}=\frac{72}{2}=36$$

لاحظ: لحساب مجموع متتالية نحتاج لمعرفة قيمة الحد الأخير.

فمثلا لحساب مجموع العشرة حدود الأولى من المتتالية: 1,5,9,…

الخطوات /

1- نحتاج أولا لإيجاد الحد العاشر: نعوض بالقانون التالي $a_n= a_1+(n-1)d$ و $d=4$ (1-5=4 , 5-9=4)

$$a_n= a_1+(10-1)d$$

$$a_{10}= a_1+9d$$

$$=1+9(4)$$

$$=37$$

2- الآن أصبح لدينا الحد الأخير (العاشر) وهو 28 ولدينا الحد الأول وهو 1 نستطيع حساب المجموع :

$$\frac{n\,(a1+l)}{2}=\frac{10\,(1+37)}{2}=\frac{380}{2}=190$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

مجموع العشرة حدود الأولى من المتتالية: 2, 4, 6, …. هو

90 (a)	100 (b)	**110** (c)	120(d)

الشرح / اولا: نجد الحد العاشر

$a_n= a_1+(n-1)d$

$a_{10}= 2+(10-1)\,d$

$a_{10}= 2+9(2)$

$=20$

ثانيا : نحسب المجموع باستخدام القانون :

$$=\frac{n\,(a1+l)}{2}$$

$$\frac{10\,(2+20)}{2}=\frac{220}{2}=110$$

الدرس الثاني

المتتالية الهندسية

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي قاعدة إنشائها هي: ضرب الحد السابق بعدد معين،للحصول على الحد التالي. نسمي هذا العدد المعين بأساس المتتالية ونرمز له بـ r.

$$a_2 = a_1(r)$$
$$a_3 = a_2(r) \text{ وهكذا،}$$

أساس المتتالية الحسابية يكون:

$$r=\frac{a2}{a1} \quad \text{أو} \quad r=\frac{a3}{a2}$$
$$r=\frac{an}{an-1}$$

بصورة عامة: نقسم الحد الأخير على الذي قبله وهكذا حتى نهاية الحدود ولا بد أن تكون جميعها نفس الناتج

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

1. أساس المتتالية :1, 3, 9, 27,...

2 (d)	12 (c)	9 (b)	3(a)

الحل / $\frac{27}{9} = 3$, $\frac{9}{3} = 3$, $\frac{3}{1} = 3$

2. أوجد أساس المتتالية ....2,10, 50 , 250

20 (d)	10(c)	5 (b)	2 (a)

الحل / $\frac{250}{50} = 5$, $\frac{50}{10} = 5$, $\frac{10}{2} = 5$

3. الحد المفقود في المتتالية الهندسية :4, 8, ... ,32

14 (d)	20(c)	16(b)	12 (a)

(هنا مطلوب الرقم المفقود لتكملة المتتالية

اولاً نوجد الاساس هو 8÷ 4 = 2

16 = 2 × 8

4. **متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 4**

يكون حدها الثالث هو :

6 (d)	5(c)	16 (b)	8 (a)

الحد الثاني = 1 × 4 =4 , الحد الثالث = 4×4=16

الحد العام للمتتالية الهندسية

لنوجد صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية. عرفنا أن: $a_2 = a_1(r)$, $a_4 = a_3(r) = a_1(r^2)(r) = a_1(r^3)$, $a_3 = a_2(r) = a_1(r)(r) = a_1(r^2)$

بالتالي فإن الحد العام هو: $a_n = a_1 (r^{n-1})$

وهذه الصيغة تمكنا من إيجاد الحد الذي نريد. An هو الحد العام لأي رقم أو الحد النوني a_1 هو الحد الأول r هو أساس المتتالية الهندسية n الموجودة في الأس هي رقم الحد **مثلا لنوجد الحد السادس للمتتالية : 3, 6, 12, ...**

الحد السادس هو : $a_6 = a_1(r^5)$ في هذه المتتالية: $r= 2$ (بقسمت الأخير على اللى قبلة) و $a_1= 3$ ، بالتعويض نجد:

$$a_6 = 3(2^{6-1})$$
$$= 3(2^5)$$
$$= 3(32)$$
$$= 96$$

التوضيح/ نعوض بدل كل n بالرقم 6 بالقانون فنقول $a_6 = 3 (2)^{6-1}$ أولا نجري عملية الطرح بالأس فتصبح $a_6 = 3 (2^5)$ نرفع العدد 2 للأس 5 فتصبح $a_6 = 3(32)$ ثم نجري عملية الضرب بين الرقمين فيصبح الجواب $a_6 = 96$ بالتالي الحد السادس يساوي96.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة الحد الخامس في المتتالية :1, 3, 9, ... هو

3^4(d)	2^4(c)	2^5(b)	3^5(a)

$$a_5 = 1(3^{5-1}) = 3^4$$