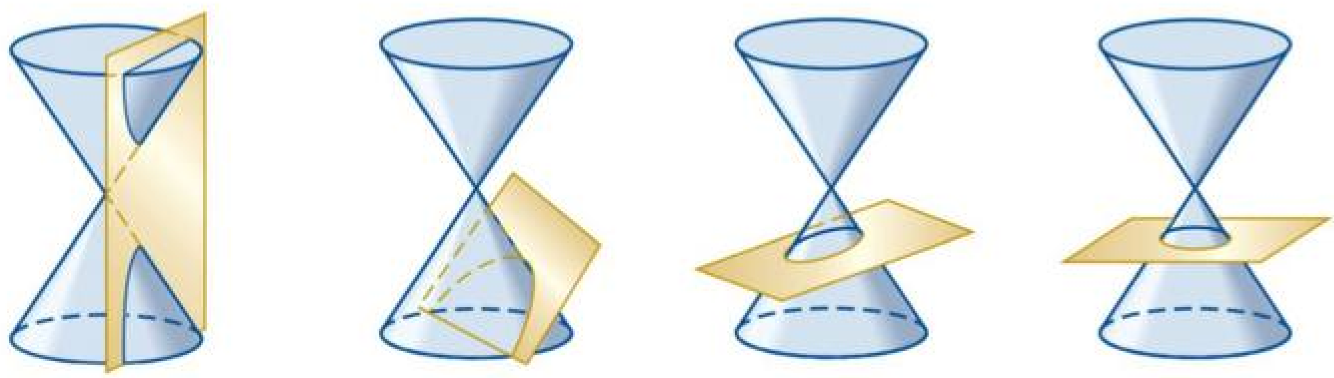
القطوع المخروطية

هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس .



الدائرة — القطع الناقص — القطع المكافئ — القطع الزائد

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث C , B , A أعداد ليست جميعها أصفاراً.

وتوجد صورة أكثر تحديداً لمعادلة كل قطع مخروطي .

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانياً

المحل الهندسي هو الشكل الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة .

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل .

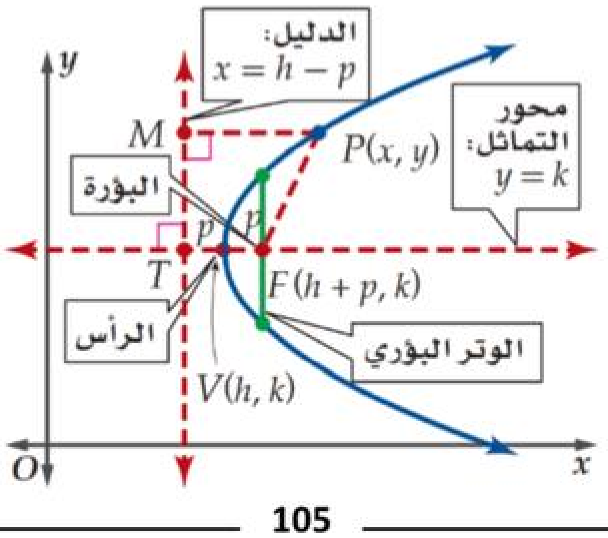
البؤرة هي نقطة ثابتة تقع على محور التماثل للقطع ، وتبعد عن الرأس مسافة $|c|$ وتكون مساوية لبعد الرأس عن مستقيم ثابت يسمى الدليل.

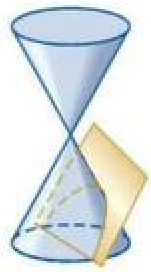
الدليل هو مستقيم عمودي على محور التماثل بحيث يكون بعده عن أي نقطة تقع على القطع مساوياً لبعد هذه النقطة عن البؤرة .

محور التماثل هو المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة .

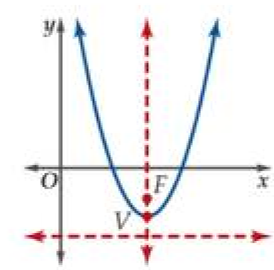
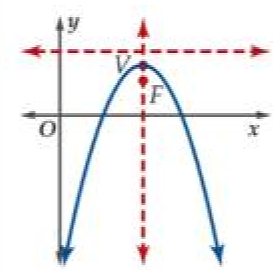
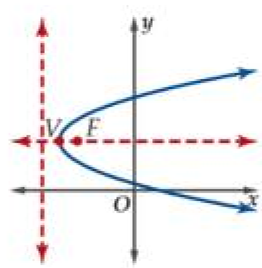
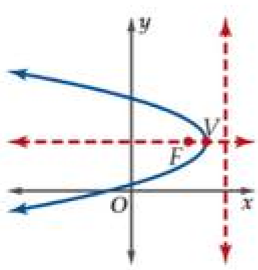
الرأس هو نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل .

الوتر البؤري هو القطعة المستقيمة المار بالبؤرة والعمودية على محور التماثل ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ ويساوي $|4c|$ حيث c المسافة بين البؤرة والرأس.





خصائص القطوع المكافئة

$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$	المعادلة	$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$
 $c>0$  $c<0$	التمثيل البياني	 $c>0$  $c<0$
رأسي	الاتجاه	أفقي
$(h\,,k)$	الرأس	$(h\,,k)$
$(h\,,k+c)$	البؤرة	$(h+c\,,k)$
$y = k - c$	معادلة الدليل	$x = h - c$
$x = h$	معادلة محور التماثل	$y = k$
$\|4c\|$	طول الوتر البؤري	$\|4c\|$

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$$

h | $+$, $\frac{4c}{4}$ | k

الاتجاه : رأسي .. أعلى (حسب الإشارة)

(+) أعلى ، (−) أسفل

البؤرة : $(h\,,k+c)$

معادلة الدليل : $y = k - c$

طول الوتر البؤري: $|4c|$

معادلة محور التماثل :

$x = h$

الرأس: $(h\,,k)$

مثال

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(x+1)^2 = -12\,(y-6)$$

الحل :

$k = 6$ $\quad c = \frac{-12}{4} = -3$

$h = -1$

الاتجاه : رأسي .. أسفل

البؤرة : $(-1\,,6+(-3))$

$(-1\,,3)$

معادلة الدليل : $y = 6-(-3)$

$y = 9$

طول الوتر البؤري: $|-12| = 12$

معادلة محور التماثل :

$x = -1$

الرأس: $(-1\,,6)$

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$$

k $\quad$ $+$ $\quad$ $\frac{4c}{4}$ $\quad$ h

الاتجاه : أفقي .. يمين (حسب الإشارة)

(+) يمين ، (−) يسار

البؤرة : $(h+c\,,k)$

معادلة الدليل : $x = h - c$

طول الوتر البؤري : $|4c|$

معادلة محور التماثل :

$y = k$

الرأس: $(h\,,k)$

مثال

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(y-4)^2 = 20\,(x+2)$$

الحل :

$h = -2$ $\quad$ $c = \frac{20}{4} = 5$ $\quad$ $k = 4$

الاتجاه : أفقي .. يمين

البؤرة : $(-2+5\,,4)$

$(3\,,4)$

معادلة الدليل : $x = -2 - 5$

$x = -7$

طول الوتر البؤري : $|20| = 20$

معادلة محور التماثل :

$y = 4$

الرأس: $(-2\,,4)$

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع المكافئ:

$$x^2 - 4y + 3 = 7$$

الحل :

$$x^2 = 7 + 4y - 3$$

$$x^2 = 4y + 4$$

$$x^2 = 4(y + 1)$$

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

معطى البؤرة والرأس

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(2, -6)$ والرأس $(-1, -6)$

الحل :

$$(x - h)^2 = 4c\ (y - k)$$

البؤرة $(2, -6)$

$$(x + 6)^2 = 12\ (y + 1)$$

الاختلاف بين الرأس والبؤرة في y

إذن المنحنى مفتوح رأسيًا

نوجد c

الرأس $(-1, -6)$

$k + c = 2$

(h, k)

$-1 + c = 2 \rightarrow c = 3 \rightarrow 4c = 12$

معطى الرأس والدليل

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

الحل :

$$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$$

$$(y+2)^2 = -12\,(x-9)$$

الرأس $(9, -2)$

(h, k)

الدليل $x = 12$

الدليل رأسي

إذن المنحنى مفتوح أفقيًا

نوجد c

$x = 12$

$h - c = 12$

$9 - c = 12 \rightarrow c = 9 - 12 = -3$

معطى البؤرة واتجاه المنحنى ويمر بنقطة

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-3, -4)$ والمنحنى مفتوح إلى أسفل ، ويمر بالنقطة $(5, -10)$

الحل :

$$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$$

$$(x+3)^2 = -8\,(y+2)$$

المنحنى مفتوح إلى أسفل

إذن الاتجاه رأسي ، وعليه التغير في y

البؤرة $(-3, -4)$

$k + c = -4$

الرأس $(-3, -4-c)$

(h, k)

لإيجاد c من الصورة القياسية للقطع :

$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$

نعوض عن

$x = 5, y = -10, h = -3, k = -4 - c$

$(5+3)^2 = 4c\,(-10-(-4-c))$

$64 = 4c(-6+c)$

$64 = -24c + 4c^2$

$4c^2 - 24c - 64 = 0$

$c^2 - 6c - 16 = 0$

$(c-8)(c+2) = 0 \rightarrow c = 8, c = -2$

ولأن المنحنى مفتوح للأسفل إذن :

$c = -2$

$4c = -8$

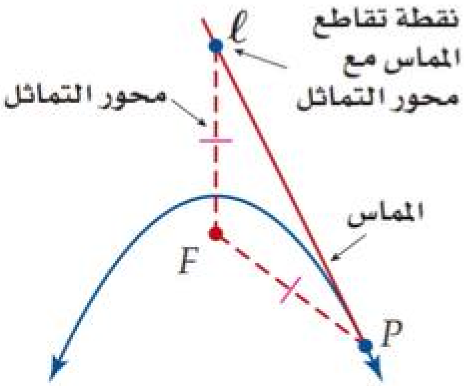
$k = -4 + 2$

$k = -2$

مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون :

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين .
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني .



كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

- إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$
- إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مثال

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $y = 4x^2 + 4$

عند النقطة $(-1 , 8)$

الحل :

أولًا: نوجد إحداثيات البؤرة

المنحنى مفتوح رأسيًا

الصورة القياسية

$$x^2 = \frac{1}{4}(y - 4)$$

$$4c = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{1}{16} = 0.0625$$

الرأس $(0, 4)$

البؤرة $(0, 4.06)$

ثانيًا: نوجد d المسافة بين البؤرة والنقطة المعطاة

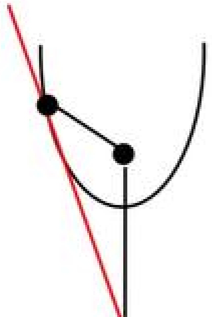
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 - 0)^2 + (8 - 4.06)^2}$$

$$d = 4.06$$

ثالثًا: نوجد إحداثيات النقطة وذلك بطرح المسافة من أحد احداثي البؤرة ولان القطع رأسيًا نطرح من y فتصبح

$$(0, 0)$$



رابعًا: نوجد الميل ونعوض في معادلة المستقيم

$$m = \frac{8 - 0}{-1 - 0} = -8$$

معادلة المستقيم المار بـ $(0 , 0)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -8(x - 0)$$

$$y = -8x$$

تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانيًا

القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا وهو $2a$ حيث a هي البعد بين الرأس والمركز.

البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور الأكبر والمسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري ويكون مجموع بعديهما عن أي نقطة على منحنى القطع الناقص يساوي مقدارًا ثابتًا ، حيث c هي البعد بين إحدى البؤرتين والمركز .

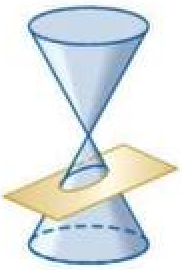
المحور الأكبر هو محور تماثل للقطع الناقص وهو القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين وتقع نهايتاها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2a$ حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

المحور الأصغر هو القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والمتعامدة مع المحور الأكبر ، وتقع نهايتاها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2b$ ، حيث b هي البعد بين المركز وأحد الرأسين المرافقين .

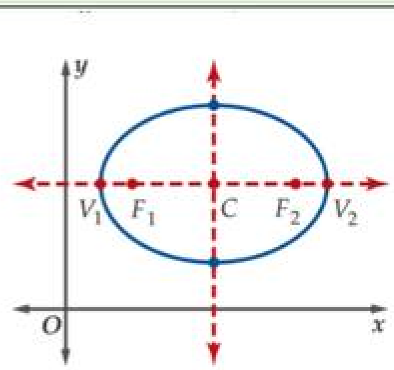
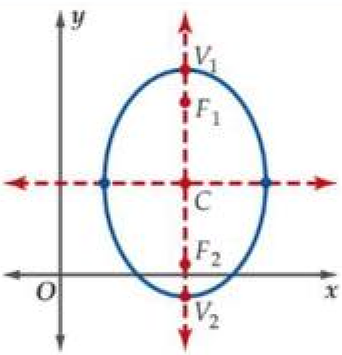
المركز هو نقطة المنتصف للمحورين الأكبر والأصغر والبؤرتين .

الرأسان هما نقطتا نهايتي المحور الأكبر .

الرأسان المرافقان هما نقطتا نهايتي المحور الأصغر.



خصائص القطع الناقص

نوع القطع	القطع الناقص	
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
إيجاد c " البعد بين المركز والبؤرة "	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	
a^2	هو العدد الأكبر	
تحديد الاتجاه	حسب اللي فوق العدد الأكبر a^2	
	أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2
$2a$	طول المحور الأكبر	
$2b$	طول المحور الأصغر	
$2c$	طول البعد البؤري	
المركز	(h, k)	
معادلة المحور	الأكبر $y=k$	الأكبر $x=h$
	الأصغر $x=h$	الأصغر $y=k$
الرأسان " a "	$(h\pm a, k)$	$(h, k\pm a)$
البؤرتان " c "	$(h\pm c, k)$	$(h, k\pm c)$
الرأسان المرافقان " b "	$(h, k\pm b)$	$(h\pm b, k)$
خطا التقارب	....	

تحديد خصائص القطع الناقص

مثال

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

الاتجاه : رأسي

الحل :

$h=-2$, $k=0$, $a=7$, $b=3$, $c=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}$

معادلة المحور الأصغر $y=0$

المركز $(-2\,,0)$

معادلة المحور الأكبر $x=-2$

الرأسان: $a=7$

$(-2\,,7)$

$(-2\,,-7)$

طول المحور الأكبر $2a=14$

البؤرتان: $c=\sqrt{40}$

$(-2\,,\sqrt{40})$

$(-2\,,-\sqrt{40})$

طول البعد البؤري $2c=2\sqrt{40}$

الرأسان المرافقان: $b=3$

$(1\,,0)$

$(-5\,,0)$

طول المحور الأصغر $2b=6$

تحديد خصائص القطع الناقص

مثال

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

الاتجاه : أفقي

الحل :

$h=-4$, $k=-3$, $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

معادلة المحور الأكبر $y=-3$

المركز $(-4\,,-3)$

معادلة المحور الأصغر $x=-4$

الرأسان المرافقان: $b=2$

$(-4\,,-1)$

$(-4\,,-5)$

طول المحور الأصغر $2b=4$

البؤرتان: $c=\sqrt{5}$

$(-4+\sqrt{5}\,,-3)$

$(-4-\sqrt{5}\,,-3)$

طول البعد البؤري $2c=2\sqrt{5}$

الرأسان: $a=3$

$(-1\,,-3)$

$(-7\,,-3)$

طول المحور الأكبر $2a=6$

كتابة معادلة القطع الناقص بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والرأسان المرافقان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-6,-8)$, $(-6,2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9,-3)$, $(-3,-3)$

الحل :

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a=\sqrt{(-6+6)^2+(2+8)^2}=10$$

$$a=5\ \rightarrow\ a^2=25$$

نستعمل المحور الأصغر لتحديد b من الرأسين المرافقين

$$2b=\sqrt{(-3+9)^2+(-3+3)^2}=6$$

$$b=3\ \rightarrow\ b^2=9$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h,k)=\left(\frac{-6-6}{2},\frac{2+(-8)}{2}\right)$$

$$=(-6,-3)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(y+3)^2}{25}+\frac{(x+6)^2}{9}=1$$

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-4,4)$, $(6,4)$ ، والبؤرتان $(-2,4)$, $(4,4)$

الحل :

طول المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a=\sqrt{(-4-6)^2+(4-4)^2}=10$$

$$a=5\ \rightarrow a^2=25$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c=\sqrt{(-2-4)^2+(4-4)^2}=6$$

$$c=3$$

نوجد b^2

$$c^2=a^2-b^2$$

$$3^2=5^2-b^2$$

$$b^2=25-9$$

$$b^2=16$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h,k)=\left(\frac{-4+6}{2},\frac{4+4}{2}\right)$$

$$=(1,4)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأكبر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

البؤرتان $(3, -7)$, $(3, 19)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة

الحل :

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(19+7)^2 + (3-3)^2} = 26$$
$$c = 13$$

طول المحور الأكبر $2a = 30$

$$a = 15 \rightarrow a^2 = 225$$

نوجد b^2

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$13^2 = 15^2 - b^2$$
$$b^2 = 225 - 169$$
$$b^2 = 56$$

مركز القطع هو نقطة منتصف البؤرتين

$$(h, k) = \left(\frac{19-7}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (6, 3)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x-6)^2}{225} + \frac{(y-3)^2}{56} = 1$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأصغر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(8, -2)$, $(-4, -2)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة

الحل :

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-2+2)^2 + (-4-8)^2} = 12$$
$$a = 6$$
$$a^2 = 36$$

طول المحور الأصغر $2b = 10$

$$b = 5$$
$$b^2 = 25$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

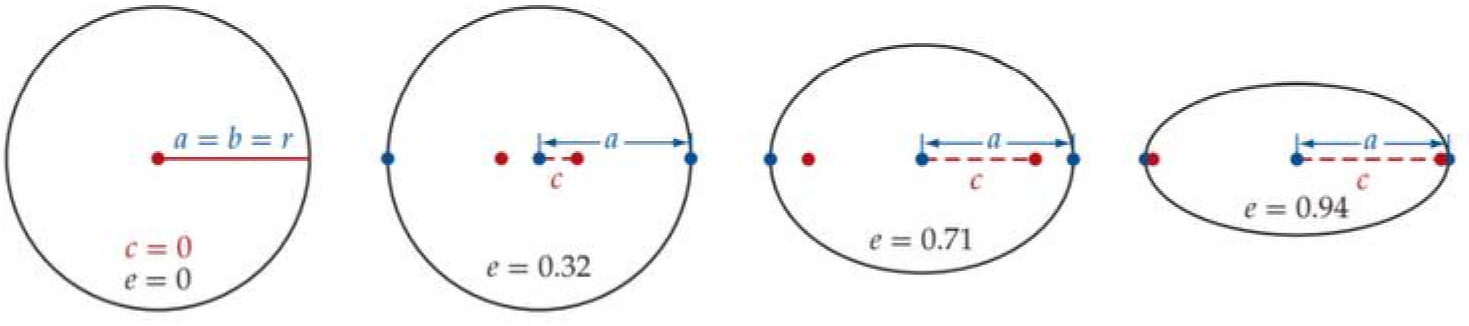
$$(h, k) = \left(\frac{-2-2}{2}, \frac{-4+8}{2}\right) = (-2, 2)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

هو نسبة c إلى a وتقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص .



الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$0 < e < 1$$

مثال

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$$

الحل :

$$a^2 = 19 \;, a = \sqrt{19}$$

أولًا: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{19 - 17}$$

$$c = \sqrt{2}$$

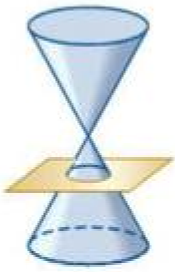
ثانيًا: نستعمل قيمتي c , a لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$$

$$e \approx 0.32$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة



الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

كتابة معادلة الدائرة

مثال

مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 3

الحل :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$

نوجد المركز (h, k) باستخدام قانون نقطة المنتصف

الحل :

$$(h, k) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$$

$$(h, k) = (2, 1)$$

نوجد طول نصف القطر باستخدام قانون المسافة بين نقطتين

(بين المركز واحدى نقاط طرفا القطر)

$$r = \sqrt{(2-3)^2 + (1+3)^2}$$

$$r = \sqrt{17}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 17$$

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً

القطع الزائد هو **المحل الهندسي** لجمع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a$ ، حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

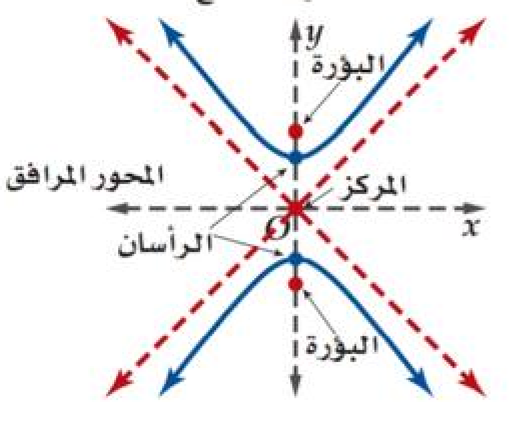
البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور القاطع و المسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري والفرق المطلق بين بعديهما عن أي نقطة من نقاط منحنى القطع الزائد يساوي مقداراً ثابتاً.

المركز هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين والرأسين .

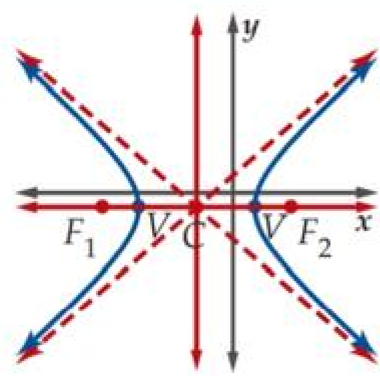
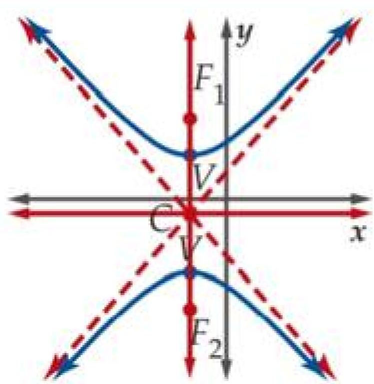
الرأسان هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى .

المحور القاطع هو أحد محوري تماثل القطع الزائد وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين ويمر بالمركز.

المحور المرافق هو أحد محوري تماثل القطع الزائد وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع ويمر بالمركز.



خصائص القطع الزائد

نوع القطع	القطع الزائد	
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
إيجاد c " البعد بين المركز والبؤرة "	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
a^2	هو العدد الأول	
تحديد الاتجاه	حسب اللي فوق العدد الأول a^2	
	أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2
$2a$	طول المحور القاطع	
$2b$	طول المحور المرافق	
$2c$	طول البعد البؤري	
المركز	(h, k)	
معادلة المحور	القاطع $y=k$	القاطع $x=h$
	المرافق $x=h$	المرافق $y=k$
الرأسان " a "	$(h\pm a, k)$	$(h, k\pm a)$
البؤرتان " c "	$(h\pm c, k)$	$(h, k\pm c)$
الرأسان المرافقان " b "	....	
خطا التقارب	$(y-k)=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$(y-k)=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

تحديد خصائص القطع الزائد

مثال

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

الاتجاه : رأسي

الحل :

$h = 0 , k = 0 , a = 2 , b = \sqrt{17} , c = \sqrt{4+17} = \sqrt{21}$

معادلة المحور المرافق $y = 0$

المركز $(0 , 0)$

معادلة المحور القاطع $x = 0$

الرأسان

$a = 2$

$(0 , 2)$

$(0 , -2)$

طول المحور القاطع

$2a = 4$

البؤرتان

$c = \sqrt{21}$

$(0 , \sqrt{21})$

$(0 , -\sqrt{21})$

طول البعد البؤري

$2c = 2\sqrt{21}$

$b = \sqrt{17}$

طول المحور المرافق

$2b = 2\sqrt{17}$

خطا التقارب : $y = \pm \frac{2}{\sqrt{17}} x$

$y = \pm \frac{2\sqrt{17}}{17} x$

تحديد خصائص القطع الزائد

مثال

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

الاتجاه : أفقي

الحل :

$h = 1 , k = 5 , a = 3 , b = 6 , c = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

معادلة المحور القاطع $y = 5$

المركز $(1 , 5)$

معادلة المحور المرافق $x = 1$

$b = 6$

طول المحور المرافق

$2b = 12$

خطا التقارب: $y - 5 = \pm \frac{6}{3} (x - 1)$

$y - 5 = \pm 2 (x - 1)$

البؤرتان

$c = \sqrt{45}$

$(1 + \sqrt{45} , 5)$

$(1 - \sqrt{45} , 5)$

طول البعد البؤري

$2c = 2\sqrt{45}$

الرأسان

$a = 3$

$(4 , 5)$

$(-2 , 5)$

طول المحور القاطع

$2a = 6$

كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع الزائد:

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$$

الحل :

تجميع المتشابهات

$$(4y^2 - 8y) + (-9x^2 - 36x) = 68$$

أخذ عوامل مشتركة

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 + 4x) = 68$$

اكمال المربع

$$4(y^2 - 2y + \square) - 9(x^2 + 4x + \square) = 68 + 4(\square) - 9(\square)$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 68 + 4(1) - 9(4)$$

تبسيط

$$4(y-1)^2 - 9(x+2)^2 = 36$$

بالقسمة والتبسيط

$$\frac{4(y-1)^2}{36} - \frac{9(x+2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$$

كتابة معادلة القطع الزائد بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-3,2),(-3,-6)$ والبؤرتان $(-3,3),(-3,-7)$

الحل :

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right)$$

$$(h, k) = (-3, -2)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3+3)^2 + (-6+2)^2}$$

$$a = 4 \rightarrow a^2 = 16$$

نوجد c وهي المسافة بين أي من البؤرتين والمركز

$$= \sqrt{(-3+3)^2 + (3+2)^2}$$

$$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$$

نوجد b^2 من القانون

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2 يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

معطى الرأسان وخطا التقارب

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(0, 9-), (0 , 3-)$ وخطا التقارب $y = 2x - 12 , y = -2x + 12$

الحل :

في الرأسين إحداثيي y متساويان فإن المحور القاطع أفقي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$$(h , k) = (-6 , 0)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3+6)^2 + (0-0)^2}$$

$$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$$

ميلا خطي التقارب $\pm\frac{b}{a}$ نستخدم الميل الموجب لإيجاد b

$$\frac{b}{a} = 2 \rightarrow \frac{b}{3} = 2 \rightarrow b = 6$$

$$b^2 = 36$$

المحور القاطع أفقي فإن a^2 يرتبط بالحد x^2

$$\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$$

معطى الرأسان وطول المحور المرافق

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(3, 6), (3 , 2)$ وطول المحور المرافق 10 وحدات

الحل :

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$$

$$(h , k) = (3 , 4)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(3-3)^2 + (2-4)^2}$$

$$a = 2 \rightarrow a^2 = 4$$

طول المحور المرافق $2b = 10$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2 يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

لأي قطع زائد $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

حيث $c^2=a^2+b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e=\frac{c}{a}$

$$e>1$$

مثال

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد :

$$\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{(y-4)^2}{80}=1$$

الحل :

$$a^2=64\ ,a=8$$

أولاً: نحدد قيمة c

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$c=\sqrt{64+80}$$

$$c=\sqrt{144}=12$$

ثانياً: نستعمل قيمتي c , a لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e=\frac{c}{a}$$

$$e=\frac{12}{8}$$

$$e=\frac{3}{2}=1.5$$

ملاحظة

الاختلاف المركزي للقطوع :

القطع الناقص $0<e<1$

القطع الزائد $e>1$

الدائرة $e=0$

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

على أن لا تساوي C , B , A جميعها أصفارًا . ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية

$$4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$$

ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله .

الحل :

تجميع المتشابهات مع أخذ عوامل

$$4(x^2 - 4x) + y^2 + 8y = 4$$

اكمال المربع

$$4(x^2 - 4x + \square\,) + (y^2 + 8y + \square\,) = 4 + 4(\square\,) + \square$$

$$4(x^2 - 4x + 4\,) + (y^2 + 8y + 16) = 4 + 4(\,4\,) + 16$$

تبسيط

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 36$$

تبسيط

$$4(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

قسمة وتبسيط

$$\frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

نوع القطع المخروطي : قطع ناقص

تحديد أنواع القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

باستعمال المميز

$$B^2 - 4AC$$

قطع مكافئ

$B^2 - 4AC = 0$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

الحل :

$A = 0$, $B = 0$, $C = 6$

$B^2 - 4AC$

$(0)^2 - 4(0)(6) = 0$

قطع مكافئ

قطع ناقص

$B^2 - 4AC < 0$, $A \neq C$ أو $B \neq 0$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

الحل :

$A = 1$, $B = 0$, $C = 4$

$B^2 - 4AC$

$(0)^2 - 4(1)(4) = -16$

قطع ناقص

دائرة

$B^2 - 4AC < 0$, $B = 0$ و $A = C$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

الحل :

$A = 8$, $B = 0$, $C = 8$

$B^2 - 4AC$

$(0)^2 - 4(8)(8) = -256$

دائرة

قطع زائد

$B^2 - 4AC > 0$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

الحل :

$A = 4$, $B = 3$, $C = 0$

$B^2 - 4AC$

$(3)^2 - 4(4)(0) = 9$

قطع زائد