شرح التحليل التوافقي مع الحل رياضيات بكالوريا المنهاج السوري

تم التحميل من مدونة المناهج السعودية القسم السوري

أوجد عدد متوازيات الأضلاع

الحل

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = 10 \times 6 = 60$$

③ $\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2} = 10$ مثلث

④ $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ رباعي

محمد إدريس

0991574406

أوراق عمل — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

سؤال أوجد آحاد وعشرات 12^8

الحل $(2+10)^8 = 12^8$

$a=2 \quad b=10 \quad n=8$

$T_0 = \binom{n}{r}\cdot a^{n-r}\cdot b^r$

$T_0 = \binom{8}{0}\cdot 2^8\cdot 10^0 = 256$

$T_1 = \binom{8}{1}\cdot 2^7\cdot 10 = 10240$

$T_0 + T_1 = 10496$

⇐ الآحاد 6 والعشرات 9

سؤال $F(x) = (1+ax)^5\cdot(1+bx)^4$

أمثال x يساوي 62

غيب $F(0)$ ثم $F'(x)$

$F'(x) = 5a(1+ax)^4\cdot(1+bx)^4 + 4b(1+bx)^3\cdot(1+ax)^5$

$\Rightarrow F'(0) = 5a + 4b$

$F'(0)$ أمثال x

$\Rightarrow 5a+4b = 62$

$4a+4b < 62$ ، $5a+5b > 62$

$4(a+b) < 62$ ، $5(a+b) > 62$

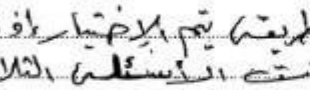
$(a+b) < \frac{62}{4}$ ، $(a+b) > \frac{62}{5}$

$(a+b) < 15,5$ ، $(a+b) > 12,4$

ومنه $12 < (a+b) < 16$

أوراق عمل — قناة التلغرام : المدرس محمد إدريس

تمرين: لدينا خمس نقاط



① ما عدد القطع المستقيمة ؟

② ما عدد الأشعة المتشكلة ؟

③ ما عدد المثلثات المتشكلة ؟

④ ما عدد الأشكال الرباعية المتشكلة ؟

الحل

① $\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$ قطعة

② $P_5^2 = 5\times4 = 20$ شعاع

③ $\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2} = 10$ مثلث

④ $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ رباعي

دورة 2017

يطلب من طالب اختيار 5 أسئلة من أصل 8

① بكم طريقة يتم الاختيار

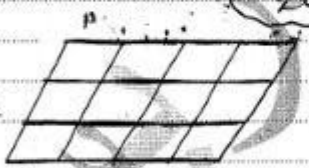
② بكم طريقة يتم الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية

الحل :

① $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

② $\binom{3}{3}\cdot\binom{5}{2} = 1\times\frac{5\times4}{2\times1} = 10$

دورة 2018



أوجد عدد متوازيات الأضلاع

الحل

$\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = 10\times6$

$= 60$

أوراق عمل — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

④ جميعهم من نفس اللون = الحدث المضاد
= RRR أو WWW
= 6x5x4 + 3x2x1
= 120 + 6 = 126
العدد المطلوب = الكلي − المضاد
= 720 − 126 = 594

⑤ ولا كرة حمراء = الحدث المضاد
= R'R'R'
= 4x3x2 = 24
= الكلي − المضاد
= 720 − 24 = 696

⑥ ولا كرة سوداء = الحدث المضاد
= B'B'B'
= 9x8x7 = 504
العدد المطلوب = الكلي − المضاد
= 720 − 504 = 216

سؤال أوجد $(1-2i)^5$ الحل ؟

$$= \sum_{r=0}^{n=5} \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^{r}$$

$$= \binom{5}{0} \cdot 1^5 \cdot (-2i)^0 + \binom{5}{1} \cdot 1^4 \cdot (-2i)^1$$
$$+ \binom{5}{2} \cdot 1^3 \cdot (-2i)^2 + \binom{5}{3} \cdot 1^2 \cdot (-2i)^3$$
$$+ \binom{5}{4} \cdot 1^1 \cdot (-2i)^4 + \binom{5}{5} \cdot 1^0 \cdot (-2i)^5$$

$$= 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i$$
$$= 41 - 38i$$

مسألة : صندوق يحوي 10 كرات
6 كرات حمراء R
3 كرات بيضاء W
1 كرة سوداء B
نسحب 3 كرات على التتالي دون إعادة

① ما عدد الحالات المختلفة ؟
② ما عدد الحالات التي تشمل كرتين فقط من نفس اللون
③ ما عدد الحالات التي تشمل ثلاث كرات مختلفة الألوان
④ ما عدد الحالات التي تشمل ثلاث كرات ليست جميعها من نفس اللون
⑤ ما عدد الحالات التي تشمل كرة حمراء على الأقل
⑥ ما عدد الحالات التي تشمل كرة سوداء على الأقل

الحل :
على التتالي دون إعادة
① ترتيب P_n^r

عدد الحالات الكلية $= P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

② $(RRR' \text{ أو } WWW') \times 3$

$= \left(P_6^2 \cdot P_4^1 + P_3^2 \cdot P_7^1\right) \times 3$

$= \left(6 \times 5 \times 4 \times 1 + 3 \times 2 \times 7 \times 1\right) \times 3$

$= (120 + 42) \times 3$

$= 162 \times 3 = 486$

③ $RWB \times 3!$

$= 6 \times 3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 18 \times 6 = 108$

أوراق عمل سهيل — قناة التلغرام : المدرس محمد إدريس

③ RWB x 3!

= 6 x 3x 1 x 3x2x1

= 18 x 6 = 108

④ الحدث المضاد = جميعهن من نفس اللون

(BBB أو WWW أو RRR)

= (1x1x1 + 3x3x3 + 6x6x6)

= (1 + 27 + 216)

= 244

المضاد = الكلي − العدد المطلوب

= 1000 − 244 = 756

⑤ الحدث المضاد = ولا كرة حمراء

R'R'R' = 4x4x4 = 64

المضاد = الكلي − العدد المطلوب

= 1000 − 64 = 936

⑥ الحدث المضاد = ولا كرة سوداء

B'B'B' = 9x9x9 = 729

المضاد = الكلي − العدد المطلوب

= 1000 − 729 = 271

ملاحظة

السحب على التتالي مع الإعادة
مبدأ أساسي في العد (لهمال أهمية لترتيب العناصر)

السحب التتالي دون إعادة
ترتيب (لهمال أهمية لترتيب العناصر)

السحب معاً
توافيق (لا أهمية لترتيب العناصر)

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right) dx$$

تمرين : ① عبّر عن $\sin^3 x$ كعبارة خطية لنسب مثلثية لمضاعفات الزاوية .

② من الطلب الأول نجد

$$\sin^3 x = \frac{-1}{4}\left(\sin 3x - 3\sin x\right)$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x$$

$$\xrightarrow{x-1} -4\sin^3 x = \sin 3x - 3\sin x$$

استنتج ③ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$

الحل ①

$$\sin^3 x = \left(\sin x\right)^3 = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3$$

$$= \frac{1}{-8i}\left(e^{xi} - e^{-xi}\right)^3$$

$$= \frac{1}{-8i}\left(e^{3xi} - 3e^{2xi}\cdot e^{-xi} + 3e^{-2xi}\cdot e^{xi} - e^{-3xi}\right)$$

$$= \frac{-1}{8i}\left(e^{3xi} - e^{-3xi} - 3\left(e^{xi} - e^{-xi}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{8i}\left(2i\sin 3x - 3\left(2i\sin x\right)\right)$$

$$= \frac{-2i}{8i}\sin 3x + \frac{6i}{8i}\sin x$$

$$= \frac{-1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\sin 3x - 3\sin x\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = \frac{0}{0}$$ صورة تعين

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin^3 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4}{\frac{1}{\cos^3 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -4\cos^3 x = -4(1) = -4$$

مسألة :

صندوق يحوي 15 كرات
6 كرات حمراء R
6 كرات بيضاء W
3 كرة واحدة سوداء B

نسحب 3 كرات على التتالي مع إعادة

① ما عدد الحالات الكلية.
② ما عدد الحالات التي تشمل كرتين فقط من نفس اللون.
③ ما عدد الحالات التي تشمل ثلاث كرات مختلفة الألوان.
④ ما عدد الحالات التي تشمل كرات ليست جميعها من نفس اللون
⑤ ما عدد الحالات التي تشمل كرة حمراء على الأقل.
⑥ ما عدد الحالات التي تشمل كرة سوداء على الأقل.

① عدد الحالات الكلية $= 15 \times 15 \times 15 = 1000$

② $3 \times RRR' \begin{cases} RRW \\ RRB \end{cases}$

$3 \times WWW' \begin{cases} WWR \\ WWB \end{cases}$

$3 \times BBB' \begin{cases} BBR \\ BBW \end{cases}$

④ $\left[3(RRR' \text{ أو } WWW' \text{ أو } BBB')\right]$

⑤ عدد الحالات $= 3(6 \times 6 \times 4 + 3 \times 3 \times 7 + 1 \times 1 \times 9)$

$= 3(144 + 63 + 9)$

$= 3(216) = 648$

الحل :

① على التتالي مع إعادة ⇐
مبدأ أساسي في العد
(هناك أهمية للترتيب)

ملاحظة

دستور أويلر

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

مثال

$$\cos 2x = \frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2}$$

$$\sin 3x = \frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i}$$

ملاحظة

$$2\cos x = e^{xi} + e^{-xi}$$

$$2i \sin x = e^{xi} - e^{-xi}$$

ملاحظة عن التكامل

① $\int m\,dx = mx$

② $\int \cos x\,dx = \sin x$

③ $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$

④ $\int \sin x\,dx = -\cos x$

⑤ $\int \sin(ax)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax)$

ملاحظة

① $\int_a^b m\,dx = [mx]_a^b$

= فوق − تحت = $mb - ma$

② التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

تمرين:

① عبّر عن $\cos^3 x$ كعبارة خطية لنسب مثلثية لمضاعفات الزاوية.

② استنتج $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$

$T_3 = \binom{12}{3} \cdot x^{12-12}$

يكون العدد الناتج آحاده 1 وعشراته 1

محمد إدريس
0991574406

(1) $\int m\,dx = mx$

(2) $\int \cos x\,dx = \sin x$

(3) $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$

(4) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

الحل: (1)

$\cos^3 x = [\cos x]^3$

$= \left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)^3$

متطابقة تكعيبية

$= \frac{1}{8}\left(e^{3xi}+3e^{2xi}\cdot e^{-xi}+3e^{-2xi}\cdot e^{xi}+e^{-3xi}\right)$

$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{3xi}+e^{-3xi}\right)+3\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)\right)$

$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3x + 3(2\cos x)\right)$

$= \left(\frac{2}{8}\cos 3x + \frac{6}{8}\cos x\right)$

$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$= \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$

من الطلب الأول نجد

$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$

$= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

= تحت − فوق

$= \left(\frac{1}{12}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{12}\sin 0 + \frac{3}{4}\sin 0\right)$

بالتعويض

$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ، $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ، $\sin 0 = 0$

$= \left(\frac{-1}{12} + \frac{3}{4}\right) - (0+0)$

$= \frac{-1}{12} + \frac{9}{12} = \frac{+8}{12} = \frac{2}{3}$

$= 9 \times 4 \times 7 \times 1$

$T_5 = 252$

$\Rightarrow 10 - 2 = 2r$

$8 = 2r \Rightarrow \boxed{r = 4}$

$\Rightarrow T_r = \binom{10}{r} \cdot x^{10-2r}$

محمد إدريس

0991574406

أوراق عمل — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

سؤال : ما هو الحد الثابت الذي لا يتعلق بالمتحول x في المنشور $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12}$

الحل:

$a = x \quad b = \frac{1}{x^3} \quad n = 12$

$T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$

$= \binom{12}{r} \cdot x^{12-r} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^r$

$= \binom{12}{r} \cdot x^{12-r} \cdot \left(\frac{1^r}{x^{3r}}\right)$

$= \binom{12}{r} \cdot x^{12-r} \cdot x^{-3r}$

$T_r = \binom{12}{r} x^{12-4r}$

حتى يكون الحد مستقل عن x ⟸ $12 - 4r = 0$

$12 = 4r$

$\boxed{r = 3}$

$T_3 = \binom{12}{3} \cdot x^{12-12}$

$T_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \times 1$

$= 2 \times 11 \times 10 = 220$

سؤال : ما آحاد وعشرات $(11)^{11}$

الحل:

$11^{11} = (1+10)^{11}$

$a = 1 \quad b = 10 \quad n = 11$

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$

$T_r = \binom{11}{r} \cdot 1^{11-r} \cdot 10^r$

$\Rightarrow T_0 = \binom{11}{0} \cdot 1^{11} \cdot 10^0 = 1$

$T_1 = \binom{11}{1} \cdot 1^{11-1} \cdot 10^1 = 110$

$T_2 = \binom{11}{2} \cdot 1^{11-2} \cdot 10^2 = 5500$

ومنها باقي الحدود آحادها وعشراتها أصفار وبالتالي بجمع هذه الحدود يكون العدد الناتج آحاده 1 وعشراته 1

سؤال: عيّن في مفكوك $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x

الحل:

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

$a = x \quad b = \frac{1}{x} \quad n = 10$

$$\Rightarrow T_r = \binom{10}{r} \cdot x^{10-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{10}{r} \cdot x^{10-r} \cdot \frac{1^r}{x^r}$$

$$= \binom{10}{r} \cdot x^{10-r} \cdot x^{-r}$$

$$= \binom{10}{r} \cdot x^{10-2r}$$

الحد الذي يحوي x^2 ⟸ $10-2r = 2$

$\Rightarrow 10-2 = 2r$

$8 = 2r \Rightarrow \boxed{r=4}$

$$\Rightarrow T_r = \binom{10}{r} \cdot x^{10-2r}$$

$$\Rightarrow T_4 = \binom{10}{4} \cdot x^{10-2(4)}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} \cdot x^2$$

$$= 10\times3\times7 \times x^2$$

$$\boxed{T_4 = 210x^2}$$

الحد الثابت ⟸ لساوي مع الصفر

$\Rightarrow \boxed{10-2r=0}$

$10 = 2r$

$\Rightarrow \boxed{r=5}$

$$\Rightarrow T_r = \binom{10}{r} \cdot x^{10-2r}$$

$$T_5 = \binom{10}{5} \cdot x^{10-2(5)}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} \cdot x^0$$

$$= 9\times4\times7\times1$$

$$\boxed{T_5 = 252}$$

عيّن في المفكوك الحد ... ⟸ صيغة السؤال
$D_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,27\}$
$\Rightarrow \binom{10}{3}$
محمد إدريس
0991574406
(IV)

عدد طرق توزيع هديتين

عدد طرق توزيع n هدية على n تلميذ $= n!$

عدد النتائج $= n! \times \binom{n+1}{2}$

كل الهدايا $\binom{n+1}{2}$ ← هديتين

عدد الأوتار = عدد الأقطار المتقاطعة في داخل المضلع $= 6 = n$

عدد تقاطع الأقطار $= \binom{n}{4} + n$

محمد إدريس
0991574406

أوراق عمل تمرين — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 29, 30\}$

S_0 مضاعفات العدد 3

S_1 باقي قسمة أي عدد من S على 3 هو 1

S_2 باقي قسمة أي عدد من S على 3 هو 2

المطلوب: أوجد عدد الطرق الممكنة لتشكيل مجموعة مكونة من 3 عناصر من S بحيث مجموعها مضاعف للعدد 3

الحل:

S_0 باقي قسمة أي عدد على 3 هو 0

$\Rightarrow S_0 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

$\Rightarrow \binom{10}{3}$

$S_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$

$\Rightarrow \binom{10}{3}$

عدد الطرق $= \binom{\text{3 أعداد من } S_0 \text{ إما من } S_0 \text{ أو من } S_1 \text{ أو من } S_2}{} \text{ أو } \binom{\text{عنصر من } S_0 \text{ وعنصر من } S_1 \text{ وعنصر من } S_2}{}$

$= \left[\binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3}\right] + \binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$

$= 3 \times \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} + 10 \times 10 \times 10$

$= 10 \times 9 \times 4 + 1000$

$= 360 + 1000$

$= 1360$ طريقة

منشور ثنائي حدين نيوتن

$(a+b)^n \Rightarrow T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$

$$= \frac{\frac{n+1}{(n-r+1)(n-r)!}}{\frac{1}{(n-r)!}} = \frac{n+1}{n-r+1}$$

$$= \frac{n+1}{n+1-r} = L_2$$

$$n = \frac{108}{2} = 54$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 54}$$

سؤال: $E = \{a, b, c, d\}$

أوجد عدد تباديل المجموعة E

الحل:

عدد التباديل $= 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

ملاحظة

* الضلع : قطعة مستقيمة تصل بين رأسين متتاليين

* القطر : قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين

سؤال: أثبت أنّ عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$ حيث $n \geq 4$

الحل:

عدد القطع المستقيمة − عدد الأضلاع = عدد الأقطار

$$= \frac{n(n-1)}{2 \times 1} - n$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n}{2}$$

$$= \frac{n(n-1) - 2n}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n - 2n}{2}$$

$$= \frac{n^2 - 3n}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

سؤال دورة

$= \binom{n}{2}^2 - n$

أوجد عدد المستطيلات في الشكل
مع العلم أن المربع هو مستطيل

0991574406 — محمد إدريس

الحل: مستقيمان و مستقيمان = المستطيل
شاقوليان - أفقيان

$= \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2}$

$= \frac{6\times5}{2\times1} \times \frac{6\times5}{2\times1}$

$= 225$ مستطيل

سؤال: ليكن معلم توزيع $(n+1)$ جائزة مختلفة على n تلميذ بحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل

ما هو عدد النتائج المختلفة لتوزيع الهدايا ؟

الحل: توزيع الهدايا

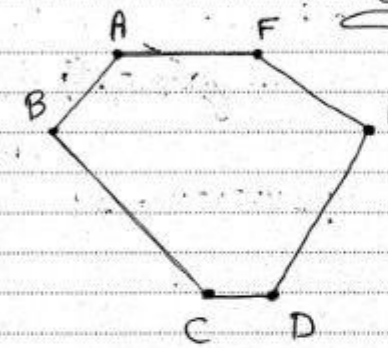
عدد طرق توزيع هديتين

عدد طرق توزيع n هدية على n تلميذ

$n!$ ، كل الهدايا $(n+1)$ ، هديتين 2

عدد النتائج $= n! \times \binom{n+1}{2}$

سؤال:



مضلع غير منتظم عدد رؤوسه (n) حيث لا تتلاقى $n \geq 4$ أي ثلاث أقطار في نقطة واحدة إلا في رأس المضلع

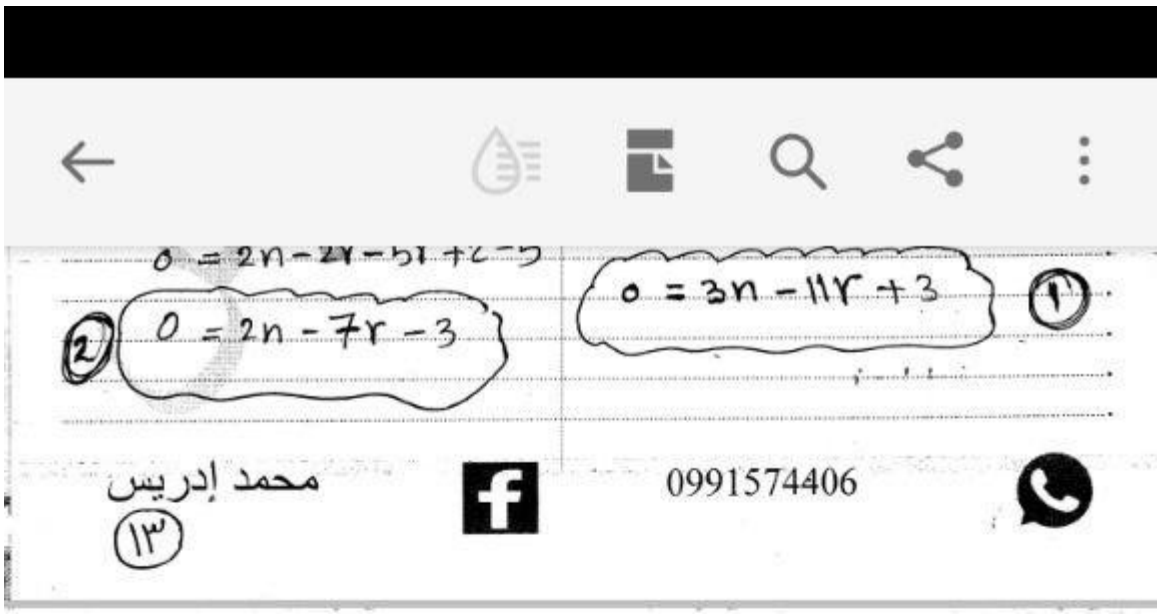
ما هو عدد نقاط تقاطع الأقطار

الحل: كل قطرين يتقاطعان بنقطة
(كل أربع رؤوس تشكل قطرين)

عدد نقاط التقاطع داخل المضلع $= \binom{6}{4} = \binom{n}{4}$

عدد الأقطار $= 6 = n$ ، كل الأقطار تتقاطع في رأس

عدد نقاط تقاطع الأقطار $= \binom{n}{4} + n$



① $3n-11r+3=0$

② $2n-7r-3=0$

نضرب الأولى بـ 2 ونضرب الثانية بـ -3

$\Rightarrow 6n-22r+6=0$ ①

$-6n+21r+9=0$ ②

بالجمع

$0-r+15=0$

$\Rightarrow \boxed{15=r}$

نعوض بالثانية

$2n-7(15)-3=0$

$2n-105-3=0$

$2n=108$

$n=\frac{108}{2}=54$

$\Rightarrow \boxed{n=54}$

أثبت صحة العلاقة التالية

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{n+1-r}$$

الحل :

$$L_1=\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}}=\frac{\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1-r)!}\cdot\frac{r!(n-r)!}{n!}$$

$$=\frac{n+1}{(n-r+1)(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{1}=\frac{n+1}{n-r+1}$$

$$=\frac{n+1}{n+1-r}=L_2$$

$= \frac{8\times7}{2\times1} \times \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}$

$= 28 \times 2\times11\times10 = 6160$ طريقة

$= 56 + 840 + 3696 + 6160$

$= 10752$ طريقة

أو 5 طالبات = 0 طالبات

$\binom{8}{5}\binom{12}{0} + \binom{8}{4}\binom{12}{1} + \binom{8}{3}\binom{12}{2} + \binom{8}{2}\binom{12}{3}$

محمد إدريس
0991574406

أوراق عمل — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

تمرين

$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$

$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$

أحسب قيمة كل من n , r

الحل :

$3\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = 8\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$

$\frac{3\,n!}{r(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{8\,n!}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$

$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1}$

$\Rightarrow 8r = 3n - 3r + 3$

$0 = 3n - 8r - 3r + 3$

$0 = 3n - 11r + 3$ (1)

$2\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = 5\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$

$\frac{2}{(r+1)!\,(n-r)!} = \frac{5}{r!\,(n+1-r)!}$

$\frac{2}{(r+1)!\,(n-r)!} = \frac{5}{r!\,(n-r+1)(n-r)!}$

$\frac{2}{(r+1)!} = \frac{5}{r!\,(n-r+1)}$

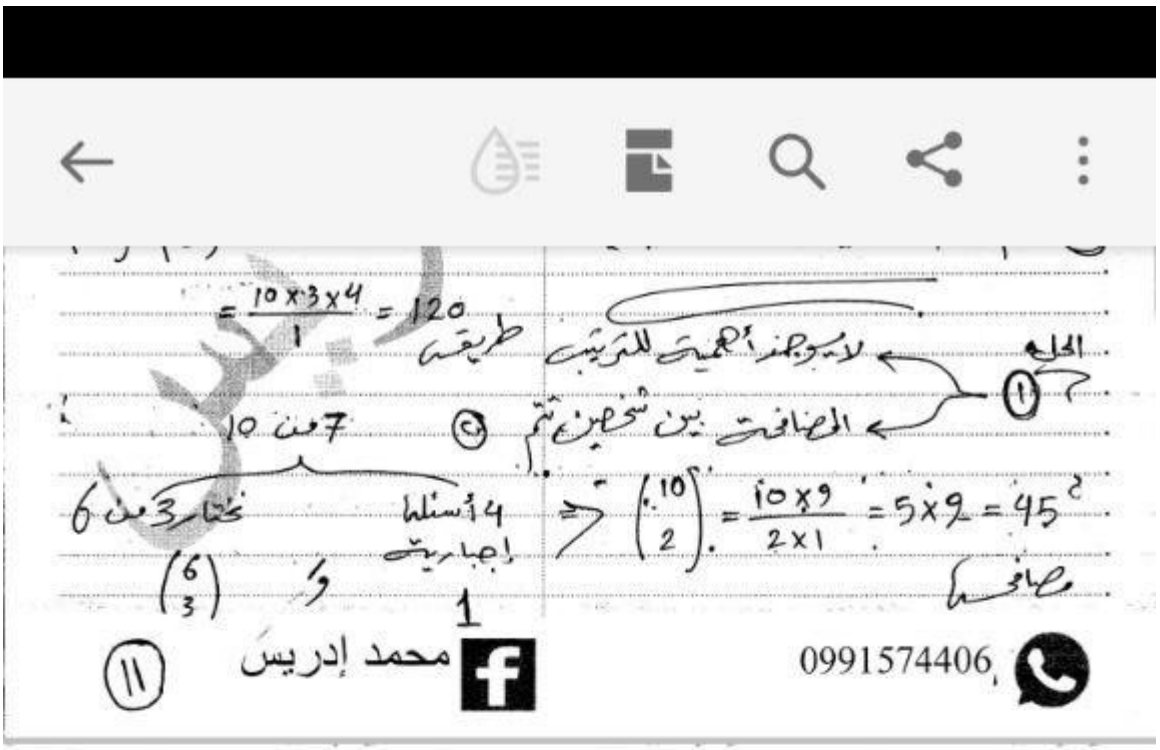
$\frac{2}{(r+1)\,r!} = \frac{5}{r!\,(n-r+1)}$

$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n-r+1}$

$\Rightarrow 5r + 5 = 2n - 2r + 2$

$0 = 2n - 2r - 5r + 2 - 5$

$0 = 2n - 7r - 3$ (2)



$\Rightarrow \binom{6}{3}\times1 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1 = 20$ طريقة

سؤال: صف فيه 12 طالب و 8 بنات نريد تشكيل لجنة مكونة من 5 أشخاص. بكم طريقة يمكن تشكيل اللجنة في الحالات التالية

① اللجنة مؤلفة من 3 طلاب وطالبتين

② في اللجنة طالبتان على الأكثر

③ في اللجنة طالبتان على الأقل

الحل: ①

اللجنة

3 طلاب و طالبتين

$\binom{8}{2} \times \binom{12}{3}$

$= \frac{8\times7}{2\times1} \times \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}$

طريقة 6160

② طالبتان على الأكثر

0 طالبة أو 1 طالبة أو 2 طالبة

5 طلاب و 4 طلاب و 3 طلاب

$\binom{8}{0}\cdot\binom{12}{5} + \binom{8}{1}\cdot\binom{12}{4} + \binom{8}{2}\cdot\binom{12}{3}$

$= 1\times\frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1} + 8\times\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} + \frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}$

$= 792 + 3960 + 6160$

$= 10912$ طريقة

③ طالبتان على الأقل

2 طالبة أو 3 طالبات أو 4 طالبات

و 3 طلاب و 2 طلاب و 1 طالب

أو 5 طالبات

و 0 طالب

الحل:

$$f_1 = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n+1-r-1)!}}{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n-r)!}}{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}} + \frac{\frac{(n+1)!}{(r+1)!}}{\frac{n!}{r!}}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n!}{(r+1)\cdot r!} \cdot \frac{r!}{n!} = \frac{n+1}{r+1} = f_2$$

∴ العلاقة صحيحة

سؤال:

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل يصافح كل منهم التسعة الآخرين مرة واحدة فقط

① ما هو عدد المصافحات التي حدثت في الحفل

② عمم النتيجة في حالة n صديق

الحل:

① لا يوجد أهمية للترتيب ← المصافحة بين شخصين تتم

$$\Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10\times9}{2\times1} = 5\times9 = 45$$ مصافحة

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2\times1}$$

سؤال 2017

في أحد الامتحانات طُلب من الطالب الإجابة عن 7 أسئلة من 10 أسئلة

① بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة؟

② بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية؟

الحل:

① $$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$$

$$= \frac{10\times3\times4}{1} = 120$$ طريقة

10 من 7

② 4 أسئلة إجبارية ← نختار 3 من 6

$$\binom{6}{3}$$ و

أما $r_1 = r_2$

$\Rightarrow 3n = n+2$

$\Rightarrow 3n - n = 2 \Rightarrow 2n = 2$

$\Rightarrow \boxed{n=1}$ مقبول

أو $r_1 + r_2 = n$

$3n + n + 2 = 10$

$4n = 10 - 2$

$4n = 8$

$n = \frac{8}{4} = 2$

$\Rightarrow \boxed{n=2}$ مقبول

سؤال :

مجموعة من الأشخاص يكونت من 15 رجلاً و 14 امرأة

نريد تشكيل لجنة تكونت من 4 أشخاص

① كم لجنة مختلفة يمكن تأليفها

② كم لجنة مختلفة يمكن تأليفها وتكونت من رجلين وامرأتين

الحل ①

$\binom{29}{4} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 23751$ لجنة

② 4

2 نساء و 2 رجال

$\binom{14}{2} \times \binom{15}{2}$

$= \frac{14 \times 13}{2 \times 1} \times \frac{15 \times 14}{2 \times 1}$

$= 7 \times 13 \times 15 \times 7 = 9555$ لجنة

سؤال : اثبت صحة العلاقة التالية

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

أوراق عمل — قناة التلغرام : المدرس محمد إدريس

الحل:

① $\binom{n}{2}=36$

شرط الحل: $n \geq 2$

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=36$

$n(n-1)=72$

$n^2-n=72 \Rightarrow n^2-n-72=0$

$(n-9)(n+8)=0$

إما $n=9$ مقبول

أو $n=-8$ مرفوض

② $3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$

شرط الحل: $n \geq 4$ و $n \geq 2$

$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=14\frac{n(n-1)}{2\times1}$

$\frac{(n-2)(n-3)}{4}=14$

$(n-2)(n-3)=56$

$n^2-3n-2n+6=56$

$n^2-5n-50=0$

$(n-10)(n+5)=0$

إما $n=10$ مقبول

أو $n=-5$ مرفوض

③ $\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$

شرط الحل

$10 \geq 3n$

$\frac{10}{3} \geq n$

$3 \geq n$

$10 \geq n+2$

$10-2 \geq n$

$8 \geq n$

$3 \geq n$ مختار

$n \geq 4$ مختار

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

$n \geq 2$ نختار

$n(n-1) = 5(n-1)$

$n = 5$ مقبول

محمد إدريس

0991574406

أوراق عمل — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

سؤال : لدى أم 7 بنات تريد اصطحاب ثلاثة منهم إلى حفلة زفاف بكم طريقة يمكن اختيار المجموعة

الحل : $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$ طريقة

خواص هامة

① $\binom{n}{1} = n$ ← $\binom{5}{1} = 5$

② $\binom{n}{n} = 1$ ← $\binom{5}{5} = 1$

③ $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{6}{0} = 1$

④ $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ نستخدم الحسابات العلمية

⑤ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ نستخدم في إثبات صحة علاقة

⑥ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مثال $\binom{100}{99} = \binom{100}{1} = 100$

⑦ $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2}$

$r_1 = r_2$ ①

$r_1 + r_2 = n$ ②

تمرين :

عيّن n في كل حالة

① $\binom{n}{2} = 36$

② $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

③ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$ حذرة

التوافيق $\binom{n}{r}$

اختيار مجموعة جزئية غير مرتبة

لا أهمية للترتيب

السحب معاً

$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ $n \geq r$

$\binom{5}{2} = \frac{P_5^2}{2!} = \frac{5\times4}{2} = 10$

$\binom{3}{2} = \frac{3\times2}{2\times1} = 3$

$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

$(n+2)(n+1)(n) = 6(n+2)$

$(n+1)(n) = 6$

$n^2+n = 6$

$\Rightarrow n^2+n-6 = 0$

$(n+3)(n-2) = 0$

إما $n = -3$ مرفوض

أو $n = 2$ مقبول

③ $P_n^2 = 5P_{n-1}^1$

الحل: شرط أول

$n \geq 2$

$n-1 \geq 1$

$\Rightarrow n \geq 1+1$

$n \geq 2$

نختار $n \geq 2$

$n(n-1) = 5(n-1)$

$n = 5$ مقبول

حل معادلة تحوي تراتيب أو توليفات

نكتب شرط الحل
نشر التراتيب
نختصر بعوامل مشتركة
نحل المعادلة ونقبل كل حل يحقق شرط الحل

سؤال : عيّن n في كل من الحالات

① $P^4_{n+2} = 14\,P^3_n$

② $P^3_{n+2} = 6\,P^1_{n+2}$

③ $P^2_n = 5\,P^1_{n-1}$

الحل :

① $P^4_{n+2} = 14\,P^3_n$

شرط الحل

$n+2 \geq 4$
$n \geq 2$

$n \geq 3$

$(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14\,n(n-1)(n-2)$

$(n+2)(n+1) = 14\,(n-2)$

$n^2+n+2n+2 = 14n-28$

$n^2+3n+2-14n+28 = 0$

$n^2-11n+30 = 0$

$(n-6)(n-5) = 0$

$\Rightarrow$ إما $n=6$ مقبول

أو $n=5$ مقبول

② $P^3_{n+2} = 6\,P^1_{n+2}$

شرط الحل

الحل

$n+2 \geq 3$ | $n+2 \geq 1$
$n \geq 3-2$ | $n \geq 1-2$
$n \geq 1$ | $n \geq -1$

نختار $n \geq 1$

نختار $n \geq 3$

أوراق عمل — قناة التلغرام : المدرس محمد إدريس

سؤال: مجلس إدارة نادي رياضي
7 أعضاء. نريد تشكيل إدارة
جديدة مكونة من
(مدير - نائب - أمين سر)
ما هو عدد طرق تشكيل الإدارة؟

الحل:

$$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5$$
$$= 210$$

سؤال دورة

في مركز الهاتف 2 مهندسين
و 4 عمال بكم طريقة يمكن
تشكيل لجنة مكونة
من مهندس واحد
وعامل واحد
للقيام بأعمال الصيانة

الحل

$$P_2^1 \times P_4^1$$
$$= 2 \times 4 = 8 \text{ طريقة}$$

تمرين:

$S = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$

① بكم طريقة يمكن تشكيل
عدد مؤلف من مرتبتين
من المجموعة S

② بكم طريقة يمكن تشكيل
عدد مؤلف من مرتبتين
مختلفتين من المجموعة S

③ بكم طريقة يمكن تشكيل
عدد زوجي مكون من
مرتبتين من المجموعة S

الحل: ① عدد من مرتبتين

آحاد و عشرات

$6 \times 6 = 36$ طريقة

② عدد من مرتبتين مختلفتين

آحاد و عشرات

$5 \times 6 = 30$ طريقة

③ عدد زوجي

آحاد زوجي و عشرات

$6 \times 2 = 12$ طريقة

محمد إدريس
0991574406

آحاد زوجي و عشرات

6 × 2 = 12 طريقة

0991574406 محمد إدريس

ق عمل — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

إضافي (4) ما عدد الأعداد الزوجية المكونة من رقمين مختلفين

العدد

آحاد زوجي ... و ... عشرات

هناك حالتين

(الآحاد 2 و عشرات) أو (الآحاد 8 و عشرات)

5 × 1 — 5 × 1

= (5 × 1) + (5 × 1)

= 5 + 5 = 10

سؤال :

$S = \{0, 2, 5, 8, 9\}$

① ما عدد الأعداد التي تتألف من 3 منازل من S

② ما عدد الأعداد التي تتألف من 3 منازل مختلفة من S

③ ما عدد الأعداد الزوجية التي تتألف من 3 منازل من S

الحل : ملاحظة : لا يمكن أن نختار العدد (0) في مئة لأنه

① آحاد و عشرات و مئات

6 × 7 × 7

= 294 طريقة

② آحاد و عشرات و مئات

6 × 6 × 5

= 180 طريقة

③ آحاد زوجي و عشرات و مئات

6 × 7 × 3

= 126 طريقة

محمد إدريس 0991574406

في عمل

صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

التراتيب P_n^r ، $n \geq r$

نسحب بعض العناصر دون إعادة

تحديد مناصب

عند ترتيب r عنصراً من مجموعة تحوي n عنصراً فإن عدد الترتيبات هو P_n^r

ملاحظة

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)$$

$P_5^2 = 5 \times 4 = 20$

$P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

سؤال في مدرسة 10 مدرسين نريد تشكيل إدارة مكونة من ((مدير - نائب - أمين سر - موجه)) بكم طريقة يمكن تشكيل الإدارة

الحل :

$P_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 720 \times 7$

$P_{10}^4 = 5040$ طريقة

سؤال : يتسابق ستة متسابقين في سباق للدراجات بكم طريقة يمكن توزيع 3 ميداليات ((ذهبية - فضية - برونزية)) لا يوجد حالات تعادل

الحل :

$P_{100}^3 = 100 \times 99 \times 98$

$99 \times 98 =$

1782

$8910 +$

97020

$\Rightarrow P_{100}^3 = 970200$ طريقة

$72 \times 7 = 504$

التحليل التوافقي

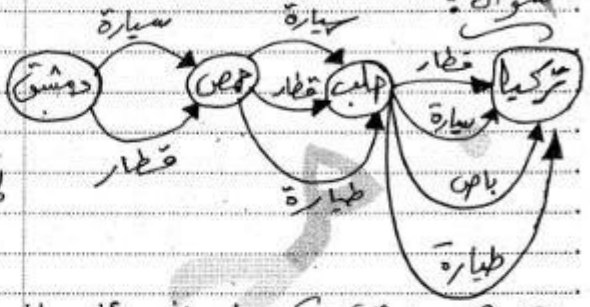
① المبدأ الأساسي في العد

ملاحظة: و ⇐ × ضرب
أو ⇐ + جمع

سؤال: مطعم يقدم وجبات مكونة من نوع واحد من كل مما يلي
لحوم ـ سلطة ـ عصير ـ فاكهة ـ حلويات
القائمة { 6 أنواع لحوم، 3 أنواع سلطة، 2 نوع عصير، 4 أنواع فاكهة، 5 أنواع حلويات }
ماهو عدد الوجبات المختلفة التي يمكن أن يقدمها المطعم

الحل:
6 × 3 × 2 × 4 × 5 = 720 وجبة

سؤال:



① بكم طريقة يمكن للمسافر أن يسافر من دمشق إلى حلب مروراً بحمص

3 ⇐ 2
الحل: ① طريقة ⇐ 3 × 2 = 6

② بكم طريقة يمكن للمسافر أن يسافر من دمشق إلى تركيا مروراً بحمص وحلب

4 ⇐ 3 ⇐ 2 ②
طريقة ⇐ 4 × 3 × 2 = 24

التباديل (العاملي !)

سؤال: بكم طريقة يمكن ترتيب 5 كتب مختلفة على رف

سحب على التتالي

أوراق عمل — صفحة النماذج : المدرس محمد إدريس

التباديل (العاملي !)

سحب على التتالي دون إعادة

ترتيب n عنصر مختلف في n مكان مختلف فإن عدد طرق الترتيب هي n!

$\Rightarrow n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times 2\times 1$

خواص العاملي

$1! = 1$ $\quad 0! = 1$

$n! = n(n-1)!$

$(n+1)\cdot n! = (n+1)!$

سؤال: بكم طريقة يمكن ترتيب 4 طلاب في صف أفقي

الحل:

$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$ طريقة

سؤال: بكم طريقة يمكن ترتيب 5 كتب مختلفة على رف

الحل:

$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$= 120$ طريقة

سؤال: بكم طريقة يمكن ترتيب 7 كتب مختلفة على رف وبشرط أن يكون كتاب معين في بداية الرف

الحل: ترتيب باقي الكتب × الكتاب المعين

$1 \times 6!$

$= 1\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$= 720$ طريقة