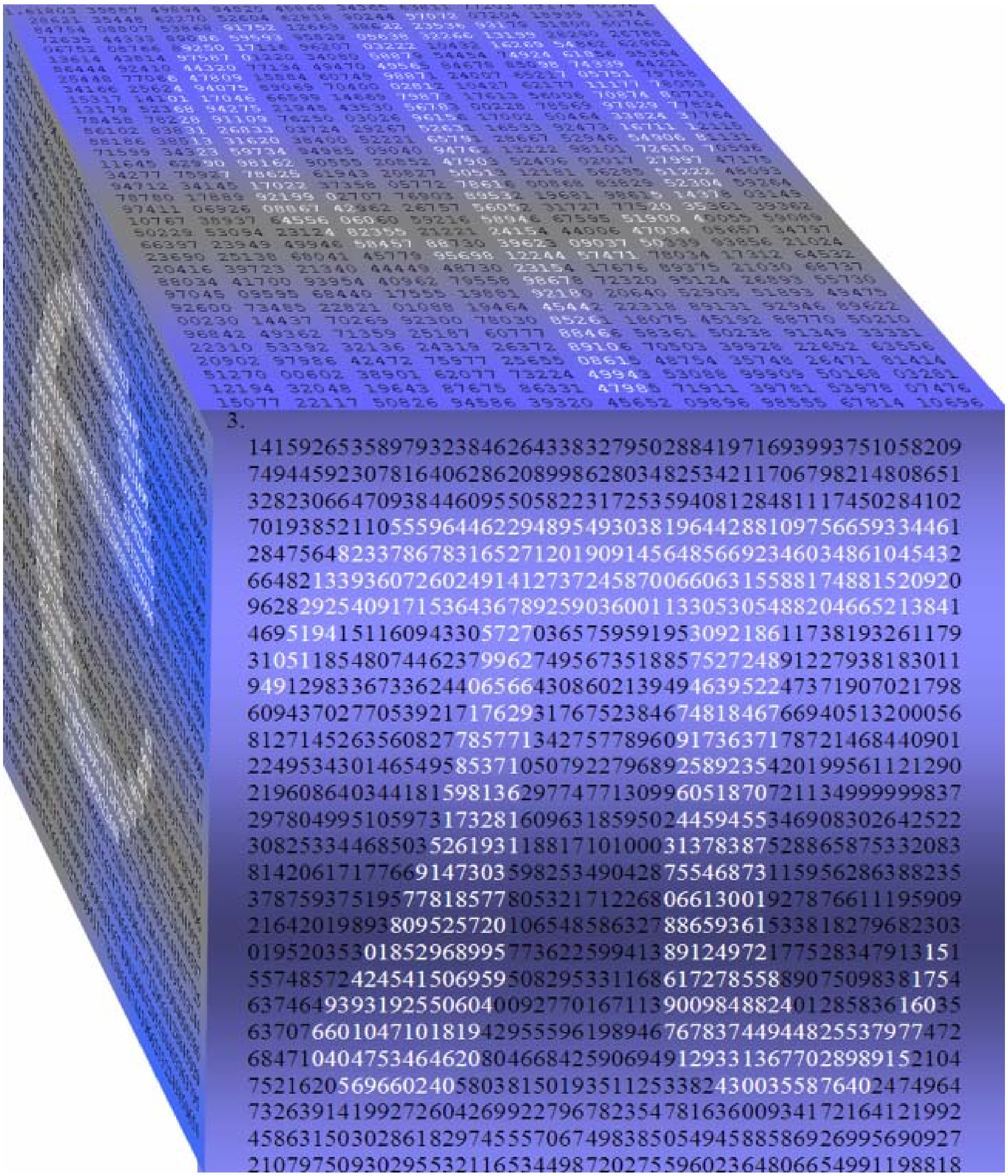
أهم ثوابت الرياضيات



جلال الحاج عبد

بسم الله الرحمن الرحيم

نتناول في هذا البحث أهم الأعداد و الثوابت الرياضية ، فلهذه الأعداد و الثوابت أهمية بالغة في الرياضيات و الحياة حيث لا يمكن إنكار تأثير النسبتة الثابتة على الهندسة و آثارها على الفيزياء ، كذلك لا يمكن إنكار أثر النسبة الذهبية على الأشكال الهندسية و الطبيعية .

جميع الثوابت الرياضية مهمة في مجالاتها ، لكن ما وجدته أكثر أهمية من بين هذه الأعداد هي النسبة الثابتة و النسبة الذهبية و عدد نابير . نالت النسبة الثابتة الحظ الأوفر في هذا البحث و ذلك لأهميتها الهندسية و التاريخية و كذلك إعجابي الشديد بها . أكتفيت بهذه الأعداد و بعض الأعداد المرتبطة بها و ما أستطرقت الى بحث جميع الأعداد و الثوابت الرياضية ، و ذلك لعدم تعقيد المقال .

تمحور البحث في هذا المقال على الخواص العددية و العملية و التاريخية لهذه الأعداد ، و أبتعدت عن التحليل الرياضي و أكتفيت ببعض الروابط التحليلية البسيطة لهذه الأعداد.

لكي أبث الروح في هذه الأعداد طرحت بعض النظريات الفلسفية و نظرياتي الخاصة حول هذه الأعداد و الثوابت ، فهي ليست مجرد أعداد تختصر فاعليتها على الشكل و الخواص و إنما وراء وجودها مفاهيم كامنة ، تتحر عند فرض عدمها أو أي تغير جزئي يطرأ عليها .

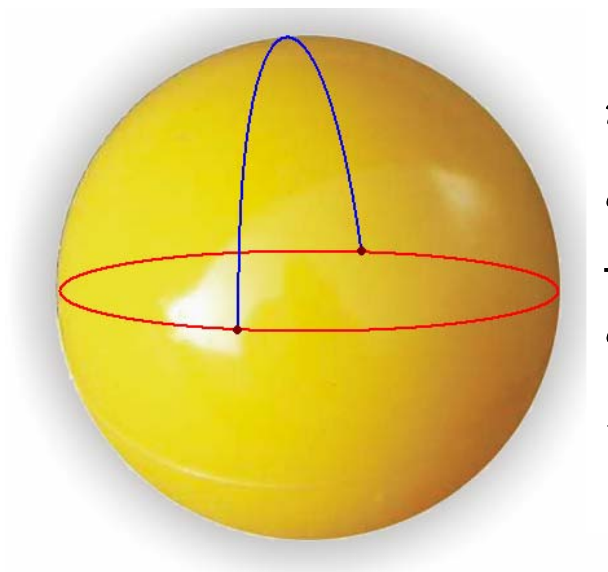
النسبة الثابتة

النسبه الثابته من أهم الأعداد و الثوابت الرياضية ، نالت هذه النسبة إهتمام الإنسان مع بداية الحضارة البشرية حيث أهتم بها البابليين و المصريين و اليونانين و الصينيين و الفرس و الهنود . نالت هذا الأهتمام لأثرها الملموس في فن العمارة ، و محاسبة السطوح و الأحجام . دقة محاسبة النسبة الثابتة و التطور الذي طرأ على محاسباتها كان و لا زال بموازات تطور علم الرياضيات بأكمله .

يعتبر الرابع عشر من آذار يوم النسبة الثابتة و يحتفل بهذا اليوم في الساعة الواحدة و التسعة و الخمسون دقيقة و ستة و عشرون ثانية ظهراً ، و بما إن آذار هو الشهر الثالث فهذا العدد هو 3.14 at 1:59:26 pm إذا كتبناه بهذه الصورة 3.1415926 هو تقريب النسبة الثابتة أو العدد π .

أول من قدم الحرف اليوناني π كرمز لتعريف النسبة الثابتة عالم الرياضيات الإنجليزي ويليام جونز (William Jones) عام 1706 و أول من أستعمل هذا الرمز للنسبة الثابتة عالم الرياضيات أويلر (Euler) عام 1737 و من بعد أصبح هذا الحرف اليوناني رمز و علامة النسبة الثابتة . يرمز لها بالعربي بالحرف ط .

تعريف النسبة الثابتة : هي نسبة محيط الدائرة الى قطرها في الهندسة الإقليدية . نعم يجب حين تعريف النسبة الثابتة بهذا التعريف ذكر الهندسة الإقليدية ، في الهندسة اللا إقليدية النسبة الثابتة لا يمكن تعريفها بهذا التعريف و إذا عرفناها بهذا التعريف فقيمتها أكبر أو أصغر من π ، في الهندسه الهذلوليه التقوس أصغر من الصفر و النسبة الثابتة في هذه الهندسة أصغر من π و في الهندسة البيضوية التقوس أكبر من الصفر و النسبة الثابتة فيها أكبر من π . الخط في الهندسة اللا إقليدية ليس خط مستقيم و إنما هو متقاصر أو جيوديسي أي أقصر فاصلة بين نقطتين ، فعلى سبيل المثال على سطح الكرة الخط الذي يوصل نقطتين ببعظهما دوائر عظيمة على سطح الكرة .



في هذا الشكل : الدائرة الحمراء دائره عظيمه، لو فرضنا الدائرة الزرقاء هي نصف دائرة عظيمة تربط نقطتين من هذه الدائرة هي بمثابة قطر هذه الدائرة العظيمة فنسبة محيط الدائرة العظيمة (الحمراء) الى القطر- نصف الدائرة العظيمة- (الزرقاء) يساوي أثنين ! و ليس π

في الهندسة الهذلولية مساحة و محيط الدائرة بهذه الصورة :

محيط الدائره في الهندسة الهذلوليه ، r نصف القطر الهذلولي $C = 2\pi \sinh(r)$

مساحة الدائره في الهندسة الهذلوليه ، r نصف القطر الهذلولي $S = 4\pi \sinh^2(\frac{r}{2})$

ليس الهدف هو شرح أو إثبات الهندسة الهذلولية و روابطها و إنما مشاهدة قاعدة محيط و مساحة الدائرة في هذا النوع من الهندسة .

النسبة الثابتة في نظرية النسبية

بما إن قيمة النسبة الثابتة تخضع لهندسة الفضاء و في النسبية العامة هندسة الفضاء ليست هندسة إقليدية و إنما لا إقليدية أو بعبارة – زمكان - لذلك يتغير مفهوم النسبة الثابتة في النسبية العامة ، كذلك في النسبية الخاصة في السرعات القريبة من سرعة الضوء يتغير مفهوم النسبة الثابتة كما هو في مسئلة القرص الدوار .

بمقياس صغير جداً، أو حينما يكون تقوس الفضاء ضئيل جداً يفترض إنطباق الصفحة اللا إقليدية على الصفحة الإقليدية ، بالتالي تتكافأ القوانين و من بينها النسبة الثابتة ، أي في ناحية صغيرة من الفضاء يمكن فرض تغيرات النسبة الثابتة لا شئ .

بعض الوقائع و الطرائف حول النسبة الثابتة

- يوم النسبة الثابتة ، يحتفل بها اليوم و توزع الحلوى فيه
- يوجد من يحفظ و يكتب النسبة الثابتة الى آلاف الأعداد بعد الأعشار
- يوجد من يطلقون على أنفسهم عشاق و مجانين النسبة الثابتة
- حك على حائط غرفة الرياضيات في قصر الإكتشافات في بارس النسبة الثابتة
- يوجد من يشكك بقيمة النسبة الثابتة ... 3.14
- يوجد من حسب النسبة الثابتة بقوانين الإحتمالات
- إنتخاب عددين طبيعيين بصورة عشوائية ، نسبة إحتمال أن لا يقبلان القسمة على بعضهما البعض هي $\frac{6}{\pi^2}$
- توجد بعض الأشعار و الأقوال تسهل حفظ النسبة الثابتة (عدد حروف الكلمات)

May I have a large container of coffee ?

3 1 4 1 5 9 2 6

تطور النسبة الثابتة : تطورت النسبة الثابتة في طول التاريخ تطوراً مذهلاً ، و هذا التطور لا في شكلها و لا في خواصها و إنما في دقة محاستبها ، تشمل هذه الدقة عدد الأرقام بعد الأعشار . كانت قيمة النسبة الثابتة عند البابليين تساوي ثلاثة أي لا عدد بعد الأعشار ، حين كانوا يحسبون محيط الدائرة يضربون قطرها في ثلاثة . دقة النسبة الثابتة عند اليونانيين عددان بعد الأعشار . من بين علماء اليونان أهتم أرخميدس بالنسبة الثابتة أكثر من غيره . كذلك نالت هذه النسبة أهتمام علماء المسلمين و توجد عدة رسائل في محاسبة النسبة الثابتة ، و يعتبر غياث الدين جمشيد الكاشاني أو الكاشي من العلماء البارزين في محاسبة النسبة الثابتة و توصل الى دقة ححدود 14 عدد بعد الأعشار (بعض المصادر 15 عدد بعد الأعشار) . في عام 1873 توصل العالم الإنجليزي شانكيز الى دقة 707 عدد بعد الأعشار و حك هذا الرقم حول حائط غرفة الرياضيات في قصر الأكتشافات في باريس ، لكن عام 1948 بعد محاسبة النسبة الثابتة الى دقة 808 عدد بعد الأعشار واجهوا خطأ رقم شانكيز في محاسبة النسبة الثابتة و هذا الخطأ يبدأ بعد رقم 528 بعد الأعشار.

اليوم بفضل وجود الحاسوب توصل علماء الرياضيات الى دقة جداً فائقة في محاسبة النسبة الثابتة ، توصلوا الى دقة مليار عدد بعد الأعشار . توجد بيانية تطلب وقف سباق محاسبة النسبة الثابتة !

بعض المحاسبات الفلكية تستطلب دقة عالية في محاسبة النسبة الثابتة ، فعلى سبيل المثال أقطار مدار الكواكب البعيدة عن الشمس مليارات الكيلومترات حساب محيط هذه المدارات لرحلات فضائية يستطلب دقة عالية في محاسبة النسبة الثابتة لتفادي الأخطاء الناجمة عن عدم دقة النسبة الثابتة .

السير التاريخي للنسبة الثابتة

شكلت محاسبة النسبة الثابتة في طول التاريخ موضوع أثار أهتمام علماء الرياضيات و في كل مقطع زمني ترتفع دقة النسبة الثابتة من خلال عدد الأعداد بعد الأعشار .

عدد الأعداد بعد الأعشار	السنه	الأسم
1	2000 قبل الميلاد	البابليين
1	2000 قبل الميلاد	المصريين
1	1200 قبل الميلاد	الصينيين
1	550 قبل الميلاد	الكتاب المقدس
3 $\pi = 3.141$	250 قبل الميلاد	Archmedes أرخميدس
3	150	Ptolemy بطليموس
5	263	Liu Hui
7	480	Tsu Chung Chi
14	1429	Al-Kashi الكاشي
15	1593	Romanus
35	1615	Van Ceulen
71	1699	Sharp
100	1706	Machin
527	1874	Shanks
10,000	1958	Genuys
17,526,200	1985	Gosper
29,360,111	Jan. 1986	Bailey
1,073,741,799	Nov. 1989	Kanada and Tamura
4,044,000,000	May 1994	Chudnovskys
206,158,430,000	Sep. 1999	Kanada and Takahashi
1,241,100,000,000	Dec. 2002	Kanada , Ushiro , Kuroda

طرق و روابط لمحاسبة النسبة الثابتة

$$Arc\tan x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+\cdots)dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots$$

إذا إنتخبنا $x=1$ و بما أن $Arc\tan 1=\frac{\pi}{4}$ لذا :

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

تقارب هذه المتتالية بطيأ جداً بحيث حساب مئات العبارات من هذه المتتالية يعطي حدود عددان دقيقان بعد الأعشار للنسبتة الثابتة ، و هي غير مناسبة لمحاسبة أعداد هائلة بعد الأعشار للنسبة الثابتة و بدقة عاليه .

- تقريب آخر للنسبة الثابتة

$$\frac{\pi}{4}=Arc\tan(\frac{1}{2})+Arc\tan(\frac{1}{3})$$

يمكن كتابتها بهذه الصورة :

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1}{5\times 2^5}-\frac{1}{7\times 2^7}+\cdots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times 3^3}+\frac{1}{5\times 3^5}-\frac{1}{7\times 3^7}+\cdots$$

تقارب هذه المتتالية سريع . و يمكن الإستعانة بها لمحاسبة النسبة الثابتة بدقة جيدة.

- من عام 1650 الى حدود 1973 أكثر الروابط التي كان تحسب بهـا النسبة الثابتة هي روابط مثلثاتيه يستعمل فيها $Arc\tan$ (معكوس ظل) . هذه رابطة من عام 1706

$$\frac{\pi}{4}=4Arc\tan\frac{1}{5}-Arc\tan\frac{1}{239}$$

- رابطة أخرى يستعمل فيها $Arc\tan$

Arctag1+Arctag2+Arctag3 = π

- في عام 1593 طرح Francois Viete هذه المتتالية

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

هذه المتتالية بطيئة و لا تعطي قيمة دقيقه من النسبة الثابتة بسرعة

- هذه الرابطة من Johan wallis عام 1655

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\cdots}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\cdots}$$

- في عام 1658 عرض الورد وليام برونكير Lord William Brounker هذه المتتالية

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}$$

- هذه الرابطة لعالم الرياضيات السويسري أويلر (Euler) :

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\frac{1}{n^2}\right)$$

- كشف عالم الرياضيات الهندي رامانوجون عام 1910 بعض المتتاليات لمحاسبة النسبة الثابتة ، أحد هذه المتتاليات :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4\times396^{4k}}$$

- هذه الرابطة للعالم جون واليز (John Wallis) و هي رابطة ضربيه ، كانت هذه الرابطة وراء إكتشافه لدالة غاما و بعض التوابع الأخرى .

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^{2}-1}{4k^{2}}$$

- أحدث رابطة و أفضل دقة لمحاسبة النسبة الثابتة :

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^{k}}\left(\frac{4}{8\times k+1}-\frac{2}{8\times k+4}-\frac{1}{8\times k+5}-\frac{1}{8\times k+6}\right)$$

تعرف هذه الرابطة بأسم قاعدة Bailey-Borwein-Plouffe (BBP formula)

حققت بنفسي هذه الرابطة من خلال برنامج MathCad أنتخبت k من الصفر الى 9 ، كانت النتيجة النسبة الثابتة بدقة خمسة عشر رقماً بعد الأعشار :

$$p := \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{16^{k}}\cdot\left(\frac{4}{8\cdot k+1}-\frac{2}{8\cdot k+4}-\frac{1}{8\cdot k+5}-\frac{1}{8\cdot k+6}\right)$$

$$p = 3.14159265358979$$

كسور عدديه تعطي قيمه تقريبيه للنسبة الثابتة

أول نسبة كانت تستعمل لتقريب النسبة الثابتة بدقة عددين بعد الأعشار $\frac{22}{7}$

الدقة في هذا الكسر 5 أعداد بعد الأعشار $\frac{355}{113}$

الدقة في هذا الكسر 7 أعداد بعد الأعشار $\frac{54648}{17395}$

الدقة في هذا الكسر هي 9 أعداد بعد الأعشار $\frac{63}{25}\times\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$

الدقة في هذا الكسر 9 أعداد بعد الأعشار $\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$

الدقة في هذا الكسر 10 أعداد بعد الأعشار $\frac{833009}{265155}$

الدقة في هذا الكسر 30 عدد بعد الأعشار $\frac{\ln(640320^3+744)}{\sqrt{163}}$

من دالة غاما نستنتج هذا التساوي : $(-\frac{1}{2})!=\sqrt{\pi}$

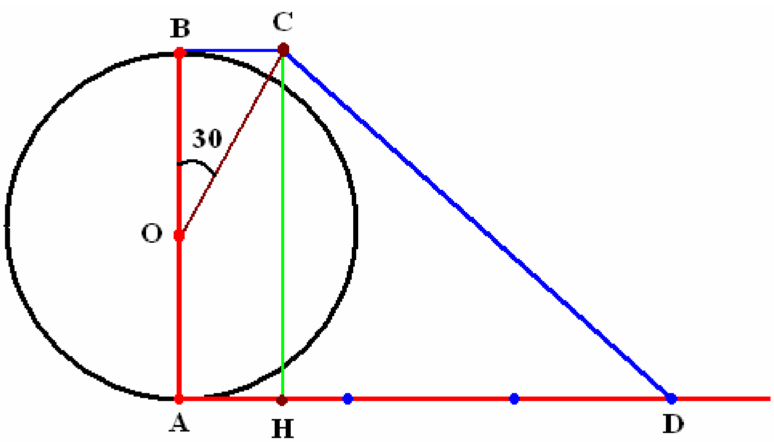
العلامه (!) مضروب أو فاكتوريل

الرسم الهندسي للنسبة الثابتة

يرتبط رسم النسبة الثابتة بمسئلة تربيع الدائرة ، و هي مسئلة قديمة المطلوب فيها رسم مربع مساحته تساوي مساحة دائرة معطاة ، بشرط أن يتم الرسم بالفرجال و المسطره الغير مدرجه . و بما أن النسبة الثابتة عدد متسامي للذلك لا يمكن حل هذه المسئلة . توجد عدة محاولات تقريبية لرسم النسبة الثابتة منها هذه المحاولتان .

المحاولة الأولى :

- نرسم دائره نصف قطرها واحد $OA = 1$
- الزاويه $\measuredangle BOC = 30^\circ$
- نرسم خطين مماسين على الدائره من A و B
- الطول $AD = 3$



طول الخط BC يساوي

$$\Delta OBC \Rightarrow BC = 1 \times \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

إذن HD يساوي

$$HD = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

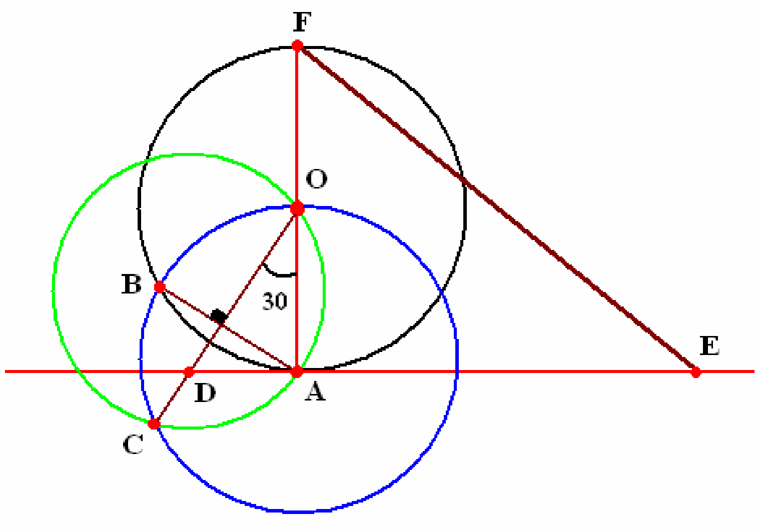
من مبرهنة فيثاغورث في المثلث HCD

$$\Delta HCD \Rightarrow CD^2 = CH^2 + HD^2$$

$$CD^2 = 4 + (3 - \frac{\sqrt{3}}{3})^2$$

$$CD = 3.14153$$

المحاولة الثانية تقريب كوشانسكي[1]



- نرسم دائره مركزها O و نصف قطرها واحد $OA = 1$
- نرسم دائره أخرى مركزها A و نصف قطرها واحد تقطع الدائرة O في B
- نرسم دائره مركزها B و نصف قطرها واحد تقطع الدائرة A في C

الزاويه : $\measuredangle AOD = 30^\circ$

في المثلث AOD طول الضلع AD يساوي

$$AD = 1 \times \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ننتخب النقطة E على أمتداد مماس الدائرة من A بحيث $DE = 3$

إذن :

$$AE = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

من مبرهنة فيثاغورث في المثلث HCD

$$\Delta FAE \Rightarrow EF^2 = AF^2 + AE^2$$
$$EF^2 = 4 + (3 - \frac{\sqrt{3}}{3})^2$$
$$EF = 3.14153$$

1-Kochanski Approximation

إستعمال النسبة الثابتة

تظهر النسبة الثابتة في كثير من الروابط الهندسية و القوانين الفيزيائية و هذا الجدول خلاصه لبعض هذه الروابط و القوانين .

الزاويه	حسب الراديان r راديان و d درجه	$\frac{\alpha^d}{180}=\frac{\alpha^r}{\pi}$
الطول	محيط الدائره	$l=2\pi R$
السطح	مساحة الدائره	$S=\pi R^2$
الحجم	حجم الكره	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$
الجاذبيه	ثابت الجاذبيه الكوني لأنشتاين	$\Lambda=\frac{8\pi G}{3c^2}\rho$
الشحنه الكهربائيه	قانون كولمب	$F=\frac{\lvert q_1q_2\rvert}{4\pi\varepsilon_o r^2}$
المغناطيسيه	النفاذيه المغناطيسيه	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$
الكمّ	لا وثوقية هايزنبرغ	$\Delta x\,\Delta p\geq\frac{h}{2\pi}$
حركة الأجرام السماويه	قانون كبلر	$\frac{P^2}{a^3}=\frac{(2\pi)^2}{G(M+m)}$
الثقوب السوداء	درجة حرارة الثقب الأسود	$T=\frac{hc^3}{8\pi kGM}$

الرابطة بين الهندسة و النسبة الثابتة

السؤال الذي شغلني و يلقيني في دوامة لا خروج منها هو : هل جائت الهندسة بالنسبة الثابتة أم النسبة الثابتة هي التي جائت بالهندسة ؟ لو إن النسبة الثابتة من الخواص الذاتية للهندسة فهذا يعني أن الرابطة بين الهندسة و النسبة الثابتة رابطة ذاتية ، كل في ذات الأخرى ، كالفضاء في الكون . وسعة النسبة الثابتة في الهندسة كوسعة الفضاء في الكون . على رغم عدم تناهي قيمة النسبة الثابتة لكن محيط و مساحة الدائرة متناه ! لا أدري هل تناهي محيط و مساحة الدائرة واقعي أم مجازي ؟ الأمر الذي يمكن فرضه هو إن الهندسة في العالم الواقعي الذي نعيش فيه هي ليست إقليدية خالصة و إنما تقترب من الإقليدية ، لذلك عملياً قيمة النسبة الثابتة متناهية و بالنتيجة محيط و مساحة الدائرة متناهيان . هل يمكن الإدعاء على إننا لسنا في محيط إقليدي مائة في المائة ؟!

ماذا سيحدث للهندسة لو طرأ أي تغير على قيمة النسبة الثابت ؟ هل قيمتها في الطبيعة كانت و لازالت ثابتة ؟ نظرياً قيمة النسبة الثابتة في الصفحة الإقليدية ثابتة ، بثبات ماهية الهندسة الإقليدية ، لكن لا أستطيع الجزم بطبيعتها ، ربما تتغير طبيعتها في المجرات البعيدة . لاحظنا قانون درجة حرارة أطراف الثقوب السوداء و ظهور النسبة الثابتة فيه ، كذلك ظهورها في قانون إحتمال مكان و زمان الإلكترونات في فيزياء الكمّ . يرجع ظهورها في هذه القوانين الى ماهية النسبة الثابتة لا الى طبيعتها . في مسئلة القرص الدوار و هي مسئلة في النسبية يفترض فيها دوران القرص بسرعة قريبة من سرعة الضوء (يدخل التعجيل في الحركة لذا يمكن فرض القرص مرجع عجلة) بالنسبة للملاحظ في مرجع العطالة محيط القرص $2\pi r$ بينما للملاحظ الذي على القرص ، محيط القرص يساوي $\dfrac{2\pi r}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ (r نصف قطر القرص ، v السرعة الخطية للقرص و c سرعة الضوء) .

قيمة النسبة الثابتة

3.
1415926535897932384626433832795028841971693993751058209
7494459230781640628620899862803482534211706798214808651
3282306647093844609550582231725359408128481117450284102
7019385211055596446229489549303819644288109756659334461
2847564823378678316527120190914564856692346034861045432
6648213393607260249141273724587006606315588174881520920
9628292540917153643678925903600113305305488204665213841
4695194151160943305727036575959195309218611738193261179
3105118548074462379962749567351885752724891227938183011
9491298336733624406566430860213949463952247371907021798
6094370277053921717629317675238467481846766940513200056
8127145263560827785771342757789609173637178721468440901
2249534301465495853710507922796892589235420199561121290
2196086403441815981362977477130996051870721134999999837
2978049951059731732816096318595024459455346908302642522
3082533446850352619311881710100031378387528865875332083
8142061717766914730359825349042875546873115956286388235
3787593751957781857780532171226806613001927876611195909
2164201989380952572010654858632788659361533818279682303
0195203530185296899577362259941389124972177528347913151
5574857242454150695950829533116861727855889075098381754
6374649393192550604009277016711390098488240128583616035

.
.
.

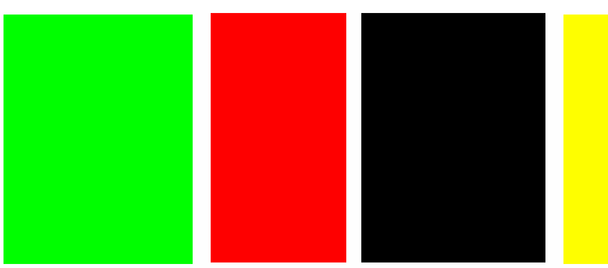
النسبة الذهبية

الثابت الرياضي الآخر الذي نتناول بحثه النسبة الذهبية ، تختلف هذه النسبة مع النسبة الثابتة لا من حيث القيمة فحسب و إنما كذلك من الناحية المفهومية ، على رغم كونها نسبة هندسية كالنسبة الثابتة لكن يكمن مفهومها في الشكل المتناسب الذي تأخذه الأشكال التي تظهر فيها هذه النسبة .

من بين هذه المستطيلات أي مستطيل أكثر تناسب ؟

المستطيل الأحمر لأن نسبة الطول

الى العرض فيه تقريباً 1.6



ما هي هذه النسبة و ما سر إرتياح

العين و الذهن لهذا الشكل بهذه النسبة ؟

هذه هي النسبة الذهبية و هذه هي أسرارها :

نفرض طول المستقيم CA المتكون من قطعتين $\overline{AB} = a$ و $\overline{BC} = b$ يساوي (a + b) نكتب النسبة بين جزئي هذا الخط بهذه الصورة :

$$a > b \quad ; \quad \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

إذا فرضنا b = 1 في هذه الحالة نحصل على هذه المعادلة :

$$\frac{a+1}{a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

أحد أجوبة هذه المعادلة هو :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

تعرف هذه بأسم النسبة الذهبيه ، أو العدد الذهبي أو المقدس أو الإلهي و يرمز لها بالحرف اليوناني (في phi) Φ أو φ ، إنتخبت الحرف φ كرمز لها في هذا البحث إذن :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811$$

بعض الروابط لمحاسبة النسبة الذهبيه

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}}$$

$$\varphi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(n+2)!n!4^{2n+3}}$$

$$\varphi = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{10}) = 1 + 2\sin 18^{\circ}$$

$$\sqrt{\varphi} \approx \frac{4}{\pi}$$

أعداد فـــيبوناشـــي Fibonacci Numbers

هي سلسلة من الأعداد تبدأ من الواحد ثم الواحد ، ثم الأثنين و هو حاصل واحد زائد واحد ، ثم الثلاثة و هي حاصل واحد زائد أثنين و هكذا أي كل عدد هو مجموع عددين قبله من هذه السلسلة . إذن أعداد فيبوناشي هي :

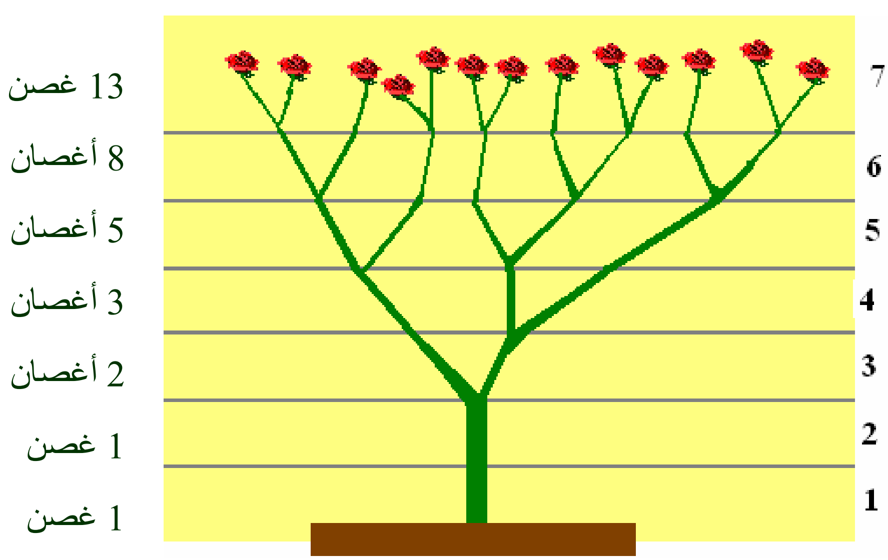
$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$$

كشف الفلكي كبلر إن نسبة كل عددين متتاليين من سلسلة أعداد فيبوناشي تقترب من النسبة الذهبيه ، على سبيل المثال :

$$\frac{34}{21}=1.6190476190$$

يقر كبلر في أحد كتبه بأن للهندسة كنزين في غاية الأهمية أحداهما مبرهنة فيثاغورث و الثاني تقسيم خط بنسبة ذهبية .

يمكن ملاحظة أعداد فيبوناشي و النسبة الذهبية في الكثير من الظواهر الطبيعية ، فعلى سبيل المثال طبيعياً تميل النباتات لتكون لها أغصان تقترب من أعداد فيبوناشي أو النسبة بين عدد الأغصان نسبة ذهبية ، لاحظ الشكل :

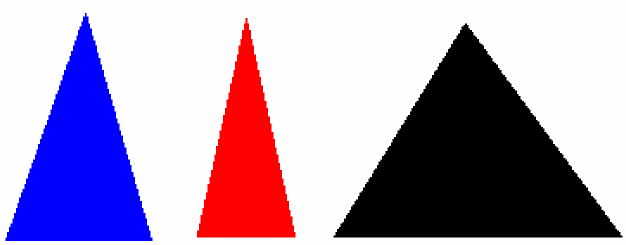


الذهنية في النسبة الذهبية

كما لاحظتم من بين المستطيلات المستطيل الذي النسبة بين أضلاعه تساوي أو تقترب من النسبة الذهبية أكثر تناسباً ، و من بين سائر المستطيلات أكثر ترتاح العين عند مشاهدته و كذلك يعكس هدوئاً ذهنياً عند رؤيته ، لذلك أكثر شاشات الكامبيوترات و التلفزيونات النسبة بين أضلاعها تقترب من النسبة الذهبية .

من بين المثلثات المتساوية الساقين ، المثلث الذي فيه نسبة الساق الى القاعدة تساوي أو تقترب من النسبة الذهبيه أكثر تناسباً و متعتاً عند المشاهدة ، فلننظر الى هذه المثلثات المتساوية الأضلع :

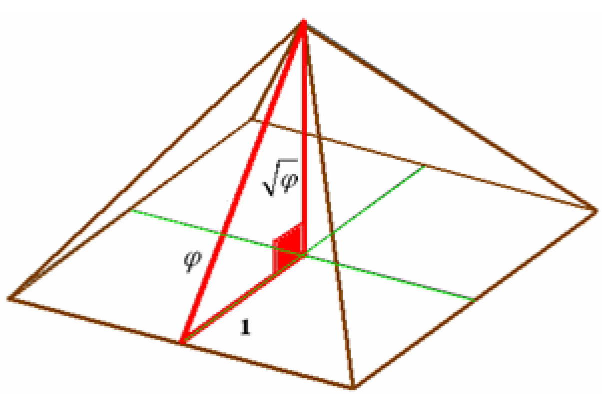
النسبة في المثلث الأزرق قريبة من النسبة الذهبية .



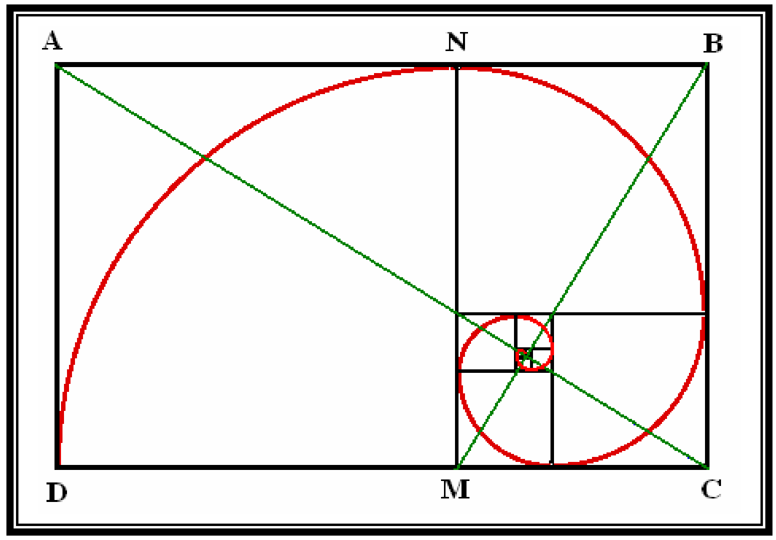
يعرف هذا المثلث بالمثلث الذهبي .

أكثر الظواهر الطبيعية تميل للحفاظ على هذه النسبة بين أجزائها ، لتصل الى الشكل الأكثر تناسباً . يمكن مشاهدة هذه النسبة حتى في جسم الإنسان ، فالتناسب بين طول الوجه و عرضه يقترب من هذه النسبة و الوجه الأكثر قرباً لهذه النسبة أكثر تناسباً . نلاحظ هذه النسبة في أكثر اللوحات الفنية و في لوحات دافنشي بوجه خاص .

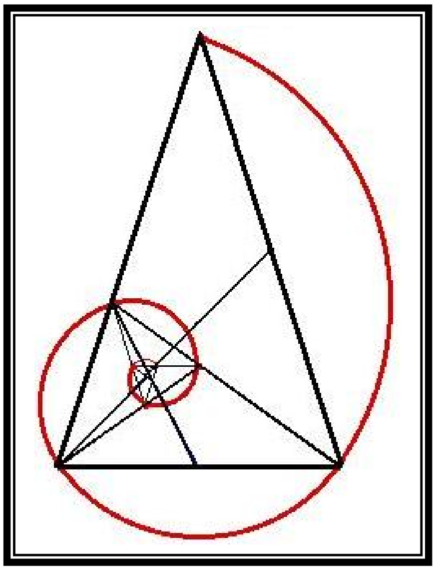
في أهرامات مصر نلاحظ وجود النسبة الذهبية في أبعاد الهرم لتعطيه شكلاً أكثر تناسباً و توازناً . لاحظ الشكل :



بناء حلزون على رؤس مثلثات (مستطيلات) ذهبيه يعطي حلزون أكثر تناسب من سائر الحلزونات المبنية على رؤس مثلثات (مستطيلات) غير ذهبيه ، لاحظ تناسب هذين الحلزونين :



حلزون ذهبي مبني على رؤس مستطيلات ذهبية



حلزون ذهبي مبني على رؤس مثلثات ذهبية

حالات و أشكال عديدة يوحي التناسب فيها (و المتعتة و اللذة من شكلها) بوجود النسبة الذهبية بين طول أجزائها . و كأنما المتعة و اللذة الذهنية هذه نتيجة خلفية ذهنية ترتبط بهذه النسبة ، أو كأنما الترددات الصادر من الأشكال المتناسبة ذهبياً تنطبق على الترددات الذهنية في ذهن الإنسان فيشعر بالراحة الذهنية عند مشاهدتها .

الدائره من الأشكال الهندسية المنتظمة و المتناسبة و المتوازنة بحيث من بين جميع المنحنيات المغلقة ذات محيط ثابت الدائرة تعطي أكبر مساحة . بنظري المنشأ الذهني للنسبة الثابتة و النسبة الذهبية واحد . ربما هذه النسبتان موجودتان في ذهن الإنسان وجوداً ذاتياً لا إكتسابياً !

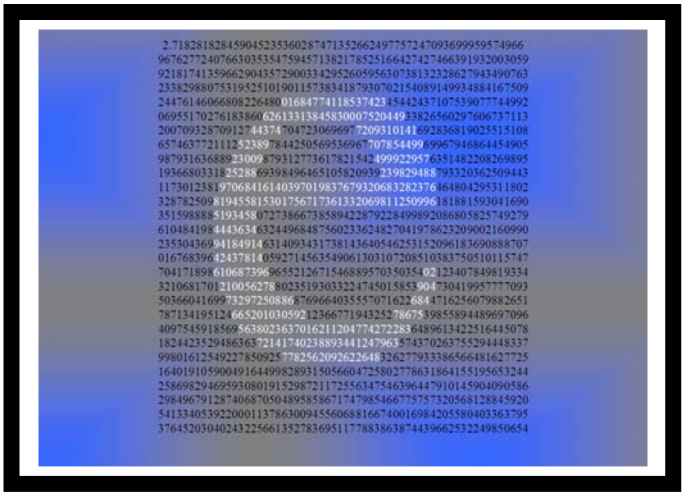
قيمة النسبه الذهبيه

1.61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576
28621 35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374
84754 08807 53868 91752 12663 38622 23536 93179 31800 60766
72635 44333 89086 59593 95829 05638 32266 13199 28290 26788
06752 08766 89250 17116 96207 03222 10432 16269 54862 62963
13614 43814 97587 01220 34080 58879 54454 74924 61856 95364
86444 92410 44320 77134 49470 49565 84678 85098 74339 44221
25448 77066 47809 15884 60749 98871 24007 65217 05751 79788
34166 25624 94075 89069 70400 02812 10427 62177 11177 78053
15317 14101 17046 66599 14669 79873 17613 56006 70874 80710
13179 52368 94275 21948 43530 56783 00228 78569 97829 77834
78458 78228 91109 76250 03026 96156 17002 50464 33824 37764
86102 83831 26833 03724 29267 52631 16533 92473 16711 12115
88186 38513 31620 38400 52221 65791 28667 52946 54906 81131
71599 34323 59734 94985 09040 94762 13222 98101 72610 70596
11645 62990 98162 90555 20852 47903 52406 02017 27997 47175
34277 75927 78625 61943 20827 50513 12181 56285 51222 48093
94712 34145 17022 37358 05772 78616 00868 83829 52304 59264
78780 17889 92199 02707 76903 89532 19681 98615 14378 03149
97411 06926 08867 42962 26757 56052 31727 77520 35361 39362
10767 38937 64556 06060 59216 58946 67595 51900 40055 59089
50229 53094 23124 82355 21221 24154 44006 47034 05657 34797
66397 23949 49946 58457 88730 39623 09037 50339 93856 21024
23690 25138 68041 45779 95698 12244 57471 78034 17312 64532
20416 39723 21340 44449 48730 23154 17676 89375 21030 68737
88034 41700 93954 40962 79558 98678 72320 95124 26893 55730
97045 09595 68440 17555 19881 92180 20640 52905 51893 49475
92600 73485 22821 01088 19464 45442 22318 89131 92946 89622
00230 14437 70269 92300 78030 85261 18075 45192 88770 50210
96842 49362 71359 25187 60777 88466 58361 50238 91349 33331
22310 53392 32136 24319 26372 89106 70503 39928 22652 63556
20902 97986 42472 75977 25655 08615 48754 35748 26471 81414
51270 00602 38901 62077 73224 49943 53088 99909 50168 03281
12194 32048 19643 87675 86331 47985 71911 39781 53978 07476
15077 22117 50826 94586 39320 45652 09896 98555 67814 10696
83728 84058 74610 33781 05444 39094 36835 83581 38113 11689
93855 57697 54841 49144 53415 09129 54070 05019 47754 86163
07542 26417 29394 68036 73198 05861 83391 83285 99130 39607
20144 55950 44977 92120 76124 78564 59161 60837 05949 87860
06970 18940 98864 00764 43617 09334 17270 91914 33650 13715
76601 14803 81430 62623 80514 32117 34815 10055 90134 56101
18007 90506 38142 15270 93085 88092 87570 34505 07808 14545
88199 06336 12982 79814 11745 33927 31208 09289 72792 22132
98064 29468 78242 74874 01745 05540 67787 57083 23731 09759
15117 76297 84432 84747 90817 65180 97787 26841 61176 32503
86121 12914 36834 37670 23503 71116 33072 58698 83258 71033
63222 38109 80901 21101 98991 76841 49175 12331 34015 27338
43837 23450 09347 86049 79294 59915 82201 25810 45982 30925

.

.

.



عدد نابير

ظهر عدد نابير أو ثابت نابير في جداول جون نابير عام 1618 . يرمز لهذا العدد بالحرف e ، ربما جاء هذا الرمز من الحرف الأول لأسم أويلر ، حيث عمل أويلر على هذا العدد ، و أحياناً يطلق عليه عدد أو ثابت أويلر. أو ربما الحرف الأول من exponential (أسي) . هذا العدد من أهم الأعداد و الثوابت في الحساب الفاضل و الجامع و التحليل الرياضي .

من الصعب تعريف عدد نابير كتعريف النسبة الثابتة أو النسبة الذهبية ، فهذين النسبتين هندسيّتين و يمكن إعطاء أمثله عمليه لمحاسبتهما و لمسهما ، لكن عدد نابير ليس بهذه البساطة ، فهو يعقد بعض المفاهيم البسيطة عندما يدخل في تعريفها كالمثلثات و الإحتمالات . لكن معرفه بسيطه بالحساب الفاضل و الجامع كافيه لدرك مفهوم هذا العدد.

تعريف العدد e هو نهاية هذه الرابطة $(1+\frac{1}{n})^n$ عندما يسعى n نحو ما لا نهاية

عندما يصبح هذا العدد أساس اللوغاريثم يصبح اللوغاريثم ، لوغاريثم نابير ، و دالة لوغاريثم نابير $\log_e^x = \ln x$ من الدوال المهمة في الحساب الفاضل و الجامع . كذلك تفاضل الدالة e^x نفسها لأي مرتبة من التفاضل .

روابط لمحاسبة العدد e

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

$$e=\lim_{n\to 0}(1+\frac{1}{n})^n$$

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

$$e=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{\frac{n+1}{2}}e^{-n}}=\sqrt{2\pi}$$

يعرّف الثابت أوميغا بهذه الصورة $\Omega e^{\Omega}=1$

القيمه العدديه لأوميغا هي : $\Omega=0.56714329\cdots$

$$e^{-\Omega}=\Omega$$

إستعمال عدد نابير

يدخل و يظهر عدد نابير في كثير من القوانين و الروابط الرياضية و الفيزيائية . وسعة إستعماله توازي وسعة إستعمال النسبة الثابتة . هذه بعض إستعمالات هذا العدد :

- في الحساب الفاضل و الجامع لوغاريثم نابير $\log_e^x = \ln x$

- في الحساب الفاضل و الجامع و التحليل الرياضي على سبيل المثال الدالة $f(x) = e^x$ ذات أهميه بالغه . و في الأعداد العقدية و الخيالية $e^{i\pi} = -1$

- في المثلثات المسطحة $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ و الهذلولية $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

- في الإحصاء و الإحتمالات التوزيع الحداني[1] $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$

- في الفيزياء قانون توزيع الطاقة (أحد صيغه) $f(E) = \dfrac{1}{Ae^{\frac{E}{kT}} - 1}$

- في فيزياء الكمّ إشعاع الجسم الأسود $\langle E \rangle = \dfrac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}$

- في الفيزياء النوويه نصف عمر العنصر المشع $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$

- في الإقتصاد و حساب الفائدة . و في النموّ السكاني

1- binomial distribution

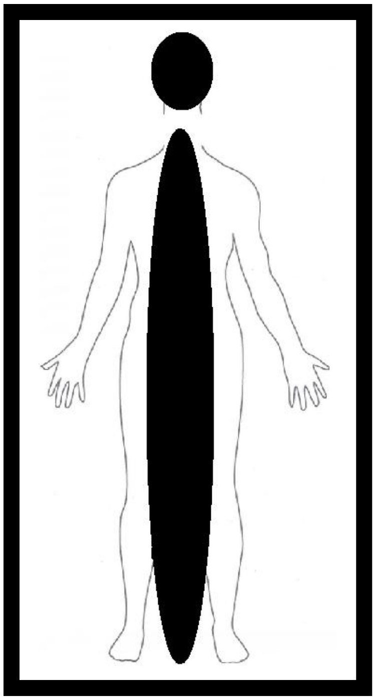
قيمة العدد e

e=2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966
967627724076630353547594571382178525166427427466391932003059
921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763
233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509
244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992
069551702761838606261331384583000752044933826560297606737113
200709328709127443747047230696977209310141692836819025515108
657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905
987931636889230098793127736178215424999229576351482208269895
193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443
117301238197068416140397019837679320683282376464804295311802
328782509819455815301756717361332069811250996181881593041690
351598888519345807273866738589422879228499892086805825749279
610484198444363463244968487560233624827041978623209002160990
235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707
016768396424378140592714563549061303107208510383750510115747
704171898610687396965521267154688957035035402123407849819334
321068170121005627880235193033224745015853904730419957777093
503660416997329725088687696640355570716226844716256079882651
787134195124665201030592123667719432527867539855894489697096
409754591856956380236370162112047742722836489613422516445078
182442352948636372141740238893441247963574370263755294448337
998016125492278509257782562092622648326277933386566481627725
164019105900491644998289315056604725802778631864155195653244
258698294695930801915298721172556347546396447910145904090586
298496791287406870504895858671747985466775757320568128845920
541334053922000113786300945560688166740016984205580403363795
376452030402432256613527836951177883863874439662532249850654
995886234281899707733276171783928034946501434558897071942586
398772754710962953741521115136835062752602326484728703920764
310059584116612054529703023647254929666938115137322753645098
889031360205724817658511806303644281231496550704751025446501
172721155519486685080036853228183152196003735625279449515828

.

.

.



العدد الخيالي

العدد الخيالي

يعرف العدد الخيالي بهذا التعريف $\sqrt{-1} = i$ وضع هذا التعريف عالم الرياضيات الإيطالي كاردان[1] (1501 - 1576) . (بحثت بعض خواص الأعداد الخيالية في مقال لي بأسم التطبيق) . و أذكر بأن عالم الرياضيات المسلم عمر الخيام قد أقترب من مفهوم الأعداد الخيالية في أعماله على المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة .

بعض روابط العدد الخيالي :

$$(i)^2 = 1$$

$$(i)^3 = -i$$

$$(i)^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \quad ، \quad k = 0,1,2,3,\cdots \\ i & n = 4k+1 \quad ، \quad k = 0,1,2,3,\cdots \\ -1 & n = 4k+2 \quad ، \quad k = 0,1,2,3,\cdots \\ -i & n = 4k+3 \quad ، \quad k = 0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

1- Girolamo Cardano

$$\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$e^{xi} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-xi} = \cos(x) - i\sin(x)$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 \Rightarrow e^{i\pi} = -1$$

$$\log_i^x = \frac{2\ln x}{i\pi}$$

$\log_i^x$ الأساس في هذا اللوغاريثم العدد الخيالي i

$\ln x$ الأساس في هذا اللوغاريثم عدد نابير e

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(i) = \frac{e^{-1} + e}{2} \Rightarrow \cos(i) = \frac{e^2 + 1}{2e} = 1.543080$$

العدد المتسام[1]

العدد المتسام هو العدد الغير جبري و الذي ليس جواب المعادله الجبريه ذات المعامل المُنطقه[2] (نسبة عددين صحيحين) .

ترجع هذه التسمية الى ليبنتز عام 1682 حين برهن على إن sin(x) ليست دالة جبرية .

برهن Ferdinand Von Lindemann عام 1882 على إن النسبة الثابتة π هي عدد متسام . أولاً هو برهن على إن عدد نابير e أس أي عدد جبري غير الصفر هو عدد متسام ، و بما أن $e^{i\pi} = -1$ هو عدد جبري لذلك π عدد متسام .

مجموعة الأعداد المتساميه غير محدودة أي ما لا نهاية .

$\sqrt{2}$ عدد غير كسري أي لا يمكن كتابته بصورة نسبة عددين صحيحين لكنه عدد غير متسام لأنه جواب المعادلة الجبرية $x^2 - 2 = 0$

أقترح هذه الرابطة تجمع هذه الأعداد و الثوابت

$$\varphi + e^{i\pi} = \frac{-e^{i\pi}}{\varphi}$$

1-Transcendental 2- Rational

المصــــــادر

MATHEMATICAL CONSTANTS, Steven R. Finch

π UNLEASHED, Jörg Arndt & Christoph Haenel

An Introduction to the History of Mathematics, Howard W. Eves

http://en.wikipedia.org/wiki/Pi

http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html

http://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com