

الرياضيات

للفيف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

Original Title:

Algebra2 © 2010

By:

John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M. Casey

Contributing Authors

Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content

Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented

Shelbik.cole

Graphing Calculator

Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency

Robert m . capraro

Pre-AP

Dixie Ross

Reading and Writing

Releah cassett lent
Lynn T. Havens

الرياضيات

الصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

أعدّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق

محمد بن عبد الله البصيص

صلاح بن عبد الله الزيد

عبد الحكيم عبد الله سليمان

عمر محمد أبو غليون

خلود عبد الحفيظ لوباني

حسان عبد الله الحوراني

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

إعداد الصور

د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

حول الغلاف

تدرس في الفصل الرابع من هذا الكتاب تمثيل دوال الجذور التربيعية وحلها. وتُعدّ حركة البندول مثالاً على دالة جذرية.



www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies. Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies. Inc. © 2008.



حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل © ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آمليّن أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علمياً وتربوياً، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقياً والمتراصة رأسياً، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانياً: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططاً للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. ويقترح الدليل آلية لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعماً للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططاً للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثاً: الدروس:

يقدم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثناءه وبعده.

التدريس: يقدم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة بحسب مستويات الطلاب تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحاً للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات. كما يقدم الدليل في كل درس إجابات مفصلة لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعاً: أساليب التقويم:

تقدم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

العلاقات والدوال النسبية

الفصل
5

الفهرس

8A	مخطط الفصل 5	
8C	التقويم والمعالجة	
8D	تنويع التعليم	
8E	المحتوى الرياضي	
9	التهينة للفصل 5	
10	ضرب العبارات النسبية وقسمتها	5-1
18	جمع العبارات النسبية وطرحها	5-2
24	تمثيل دوال المقلوب بيانياً	5-3
31	اختبار منتصف الفصل	
32	تمثيل الدوال النسبية بيانياً	5-4
38	توسع 5-4 معمل الحاسبة البيانية : تمثيل الدوال النسبية بيانياً	
39	دوال التغير	5-5
45	حل المعادلات والمتباينات النسبية	5-6
51	توسع 5-6 معمل الحاسبة البيانية : حل المعادلات والمتباينات النسبية	
53	دليل الدراسة والمراجعة	
57	اختبار الفصل	
58	الإعداد للاختبارات المعيارية	
60	اختبار تراكمي	
61A	ملحق الإجابات	

المتابعات والمتسلسلات

الفصل
6

62A	مخطط الفصل 6	
62C	التقويم والمعالجة	
62D	تنويع التعليم	
62E	المحتوى الرياضي	
63	التهينة للفصل 6	
64	المتابعات بوصفها دوال	6-1
70	المتابعات والمتسلسلات الحسابية	6-2
78	المتابعات والمتسلسلات الهندسية	6-3
84	اختبار منتصف الفصل	
85	المتسلسلات الهندسية غير المنتهية	6-4
91	توسع 6-4 معمل الحاسبة البيانية : النهايات	
92	نظرية ذات الحدين	6-5
96	توسع 6-5 معمل الجبر : التوافق ومثلث باسكال	
97	البرهان بالاستقراء الرياضي	6-6
101	دليل الدراسة والمراجعة	
105	اختبار الفصل	
106	الإعداد للاختبارات المعيارية	
108	اختبار تراكمي	
109A	ملحق الإجابات	

110A.....	مخطط الفصل 7
110C.....	التقويم والمعالجة
110D.....	تنوع التعليم
110E.....	المحتوى الرياضي
111.....	التهيئة للفصل 7
112.....	تمثيل فضاء العينة 7-1
118.....	الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق 7-2
125.....	الاحتمال الهندسي 7-3
131.....	اختبار منتصف الفصل
132.....	احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة 7-4
139.....	احتمالات الحوادث المتنافية 7-5
146.....	دليل الدراسة والمراجعة
149.....	اختبار الفصل
150.....	الإعداد للاختبارات المعيارية
152.....	اختبار تراكمي
153A.....	ملحق الإجابات

154A.....	مخطط الفصل 8
154C.....	التقويم والمعالجة
154D.....	تنوع التعليم
154E.....	المحتوى الرياضي
155.....	التهيئة للفصل 8
156.....	استكشاف 8-1 معمل الجداول الإلكترونية : استقصاء المثلثات القائمة الخاصة
157.....	الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية 8-1
165.....	الزوايا وقياساتها 8-2
171.....	الدوال المثلثية للزوايا 8-3
177.....	قانون الجيوب 8-4
184.....	توسع 8-4 معمل الهندسة : مساحة متوازي الأضلاع
185.....	اختبار منتصف الفصل
186.....	قانون جيوب التمام 8-5
192.....	الدوال الدائرية 8-6
199.....	تمثيل الدوال المثلثية بيانياً 8-7
206.....	الدوال المثلثية العكسية 8-8
212.....	دليل الدراسة والمراجعة
217.....	اختبار الفصل
220.....	اختبار تراكمي
221A.....	ملحق الإجابات

التقويم التشخيصي
التهيئة ص (9)

العنوان	الدرس 5-1 حصتان	الدرس 5-2 (3) حصص	الدرس 5-3 حصتان	الدرس 5-4 (3) حصص
الأهداف	- تعرف العبارات النسبية - تبسيط العبارات النسبية. - تبسيط الكسور المركبة.	- إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود. - جمع عبارات نسبية وطرحها.	- تحديد خصائص دوال المقلوب من تمثيلها البياني. - تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانياً.	- تمثيل دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية بيانياً. - تمثيل دوال نسبية لها نقاط انفصال بيانياً.
المفردات	العبرة النسبية الكسر المركب		دالة المقلوب القطع الزائد خط تقارب خط تقارب رأسي خط تقارب أفقي	الدالة النسبية نقطة انفصال
تمثيلات متعددة	ص (16)		ص (29)	
مصادر الدرس	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون - تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (4) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون - تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (5) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون - تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (6) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون - تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (7) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (11)	السبورة التفاعلية، ص (19)	السبورة التفاعلية، ص (26)	عرض تقديمي، ص (33)
تنوع التعليم	ص (13, 17)	ص (20, 22)	ص (25, 27)	ص (33, 34, 37)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (31)

المفاتيح: **دون** : دون المتوسط **ضمن** : ضمن المتوسط **فوق** : فوق المتوسط

العلاقات والدوال النسبية

الخطة الزمنية		
المجموع	المراجعة والتقويم	التدريس
22 حصة	4	18

توسع 5-4 حصة	الدرس 5-5 حصتان	الدرس 5-6 (3) حصص	توسع 5-6 حصتان
معمل الحاسبة البيانية : تمثيل الدوال النسبية بيانياً	دوال التغير	حل المعادلات والمتباينات النسبية	معمل الحاسبة البيانية : حل المعادلات والمتباينات النسبية
استعمال الحاسبة البيانية لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية.	- تمييز مسائل التغير الطردي والتغير المشترك وحلها. - تمييز مسائل التغير العكسي والتغير المركب وحلها.	- حل معادلات نسبية. - حل متباينات نسبية.	استعمال الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات نسبية بيانياً أو باستعمال ميزة table.
	التغير الطردي ثابت التغير التغير المشترك التغير العكسي التغير المركب	المعادلة النسبية المتباينة النسبية	
		ص (50)	
المواد الحاسبة البيانية	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون - تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (30) دون ضمن فوق كتاب التمارين - ص (8) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون - تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (35) دون ضمن فوق كتاب التمارين - ص (9) دون ضمن فوق	المواد الحاسبة البيانية
	تسجيل صوتي، ص (42)	آلة التصوير الرقمية، ص (48)	
	ص (42, 44)	ص (48, 50)	

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (53-56)
- اختبار الفصل ص (57)
- اختبار تراكمي ص (60, 61)

المعالجة	التشخيص	
مخطط المعالجة، ص (9)	بداية الفصل 5 التهيئة للفصل 5، ص (9)	التقويم التشخيصي
مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	بداية كل درس فيما سبق، والآن، لماذا؟	
مستوى المعالجة 1 تدريبات المهارات، الفصل 5 تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5 www.obeikaneducation.com	خلال كل درس وبعده تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة، ص (11, 12) www.obeikaneducation.com	التقويم التكويني
مستوى المعالجة 1 تدريبات المهارات، الفصل 5 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5 www.obeikaneducation.com	منتصف الفصل اختبار منتصف الفصل، ص (31) اختبار منتصف الفصل، ص (13) www.obeikaneducation.com	
تدريبات المهارات، الفصل 5 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5 www.obeikaneducation.com	نهاية الفصل دليل الدراسة والمراجعة، ص (53-56) اختبار الفصل، ص (57) اختبار تراكمي، ص (60, 61) www.obeikaneducation.com	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5 www.obeikaneducation.com	بعد انتهاء الفصل 5 اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B، ص (15-20) اختبار الفصل، النموذج 3، ص (21, 22) اختبار المفردات، ص (14) اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة، ص (23) اختبار تراكمي، ص (24-26) www.obeikaneducation.com	التقويم الختامي

البديل 1

جميع المستويات (دون، فوق، ضمن)

المتعلمون المتفاعلون: قسم الطلبة إلى مجموعات رباعية. بما أن هناك عددًا من المهام المتعلقة بتمثيل دالة المقلوب التي على الصورة $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ بيانيًا. لذا اطلب إلى أفراد كل مجموعة اختيار المهمة التي تناسب كلاً منهم لتمثيل دالة مقلوب محددة بيانيًا، فعلى سبيل المثال يكون أحد الأعضاء مسؤولاً عن إيجاد قيمة كل من a, h, k ، وآخر مسؤولاً عن تحديد خطوط التقارب، وثالث مسؤولاً عن تحديد بعض النقاط الواقعة على التمثيل البياني للدالة، ورابع مسؤولاً عن تعيين النقاط وتمثيل الدالة بيانيًا.

المتعلمون المنطقيون: خلال شرحك وتوضيحك لأنواع التغير المختلفة، اطلب إلى الطلبة أن يكملوا الجدول الآتي ليساعدهم على فهم وتمييز كل نوع:

نوع التغير	المعادلة
طردي	
مشترك	
عكسي	
مركب	

البديل 2

دون المتوسط (دون)

اكتب كلاً من الكسر والعبارة النسبية أدناه على السبورة:

$$\frac{32}{34}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\frac{32}{34} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 17} = \frac{16}{17}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \frac{(x-3)}{(x-5)}$$

راجع مع الطلبة كيفية تبسيط الكسور، والتي تتم بقسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة بينهما، مع ملاحظة أن تكرار رقم في عددين لا يعني أن الرقم عامل مشترك لهما؛ فمثلاً لا يمكن اعتبار الرقم 3 عاملاً مشتركاً للعددين 32, 34. ثم شارك طلبة الصف في تبسيط العبارة النسبية، ووضح لهم أنه على الرغم من أن الحد x^2 يظهر في البسط والمقام إلا أنه ليس عاملاً مشتركاً بينهما؛ لأن x^2 هو حد في كل منهما وليس عاملاً مشتركاً. واستعمل الألوان لتوضيح العوامل المشتركة.

البديل 3

فوق المتوسط (فوق)

اكتب كسراً وعبارة نسبية على السبورة. واطلب إلى الطلبة أن يجدوا كسرين يكون مجموعهما مساوياً للكسر الذي كتبه على السبورة. ثم اطلب إليهم أن يستعملوا طريقة التفكير نفسها لإيجاد عبارتين نسبيتين مجموعهما يساوي العبارة النسبية التي كتبتها أيضاً. وحتى تكون المهمة أكثر صعوبة وتحدياً اطلب إليهم أن يكتبوا عبارتين نسبيتين مقاماهما مختلفان عن مقام العبارة التي كتبتها على السبورة، لكن مجموعهما يساوي هذه العبارة.

ملخص الدروس

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها

- سيطبق الطلاب في هذا الدرس ما تعلموه عن الكسور على العبارات النسبية (النسبة بين كثيرتي حدود).
- إيجاد أصفار مقام العبارة النسبية لاستثناء تلك القيم؛ لأنها تجعل العبارة غير معرّفة.
- تبسيط العبارات النسبية وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على العوامل المشتركة بينهما حتى يصبح القاسم المشترك لهما مساوياً للواحد مع مراعاة أن ناتج قسمة $(b - a)$ على $(a - b)$ هو -1 .
- تُضرب العبارات النسبية كما في الكسور الاعتيادية؛ إذ نضرب البسط في البسط، والمقام في المقام.
- تُقسم العبارات النسبية كما في الكسور الاعتيادية؛ إذ يُضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.
- تبسيط الكسر المركب؛ وذلك بكتابته أولاً على صورة قسمة عبارتين نسبيتين.

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها

- تشبه عملية جمع العبارات النسبية وطرحها جمع الكسور وطرحها، حيث نحتاج إلى إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات حدود المقام؛ وذلك بتحليل كثيرات الحدود إلى عواملها، ثم ضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر.
- تأكد من أن للعبارتين المقام نفسه. وإذا لم يكن لهما المقام نفسه فأوجد المضاعف المشترك الأصغر لمقامي العبارتين النسبيتين، وأعد كتابة كل منهما على صورة عبارة مكافئة مقامها المضاعف المشترك الأصغر.
- ناتج جمع عبارتين نسبيتين لهما المقام نفسه أو طرحهما هو عبارة نسبية مقامها هو المقام المشترك، وبسطها هو ناتج جمع أو طرح بسطي العبارتين.

الترباط الرأسي

ما قبل الفصل 5

- استعمال الخصائص: الإبدالية، التجميعية، التوزيعية لتبسيط العبارات الجبرية.
- تحديد المجال والمدى، ثم تحديد قيم المجال والمدى المنطقية وفقاً للموقف المعطى.
- حل مسائل تتضمن تناسبات.
- تمثيل بعض الدوال الأم (الرئيسية) بيانياً بما فيها الدوال الخطية.
- كتابة المعادلات وحلها بطرق مختلفة بما فيها طريقة التحليل.

الفصل 5

- تحديد خصائص دوال المقلوب وتمثيل تحويلاتها الهندسية بيانياً.
- استعمال قسمة كثيرات الحدود لوصف تمثيلات الدوال النسبية البيانية، وتحديد القيود على المجال والمدى لكل دالة واختبار سلوكها.
- تحديد قيم المجال والمدى المنطقية للدالة النسبية ضمن ظروف معينة، وإيجاد حلول المعادلات والمتباينات النسبية.
- تحليل المواقف التي يمكن تمثيلها بالمعادلات النسبية، ثم تحويلها إلى معادلة خطية أو تربيعية وحلها.
- استعمال التغير الطردي أو العكسي للتعبير عن مواقف معينة، وتكوين تخمينات مرتبطة بهذه المواقف.

ما بعد الفصل 5

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- تحديد مجال الدوال ومدادها باستعمال التمثيل البياني، والجداول، والرموز.
- استقصاء مفاهيم الاتصال، سلوك طرفي الدالة وخطوط التقارب، وربطها بدالة ممثلة بيانياً وعددياً.

العلاقات والدوال النسبية

- يوجد للدالة النسبية على الأكثر خط تقارب أفقي واحد هو:
 $y = 0$ ، عندما تكون درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$.

- المستقيم الذي معادلته: $y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$ ، عندما تكون درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$.

- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ ، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالة النسبية.

ويمكن للطلبة استعمال خطوط التقارب مع جدول القيم لتمثيل الدالة النسبية بيانياً.

دوال التغير

- يعبر عن التغير الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ (يمكن كتابتها على الصورة $\frac{y}{x} = k$)، حيث k ثابت التغير. والتمثيل البياني لهذه المعادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله يساوي k .
- تغيير y تغيراً مشتركاً مع x وإذا وجد عدد $k \neq 0$ بحيث $y = kxz$.
- يعبر عن التغير العكسي على الصورة $y = \frac{k}{x}$ (أو $xy = k$). والتمثيل البياني لهذه المعادلة على شكل قطع زائد.
- يحدث التغير المركب عندما تتغير كمية ما طردياً أو عكسياً أو كليهما معاً مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية

- تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر معادلة نسبية، ويمكن استعمال المهارات نفسها المستعملة في حل المعادلات الخطية لحل المعادلات النسبية بعد ضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات. ويجب التحقق من جميع الحلول التي نحصل عليها بتعويضها في المعادلة الأصلية لتحديد الحلول الدخيلة.
- يمكن استعمال المعادلات النسبية لحل المسائل المتعلقة بالوسط الموزون، حيث إن الوسط الموزون لمجموعة من القيم يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها مقسوماً على مجموع التكرارات. وهذه المسائل تتضمن ما يتعلق بالكيمياء، والعمل، والمسافة... إلخ.

5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

دالة المقلوب هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ؛ حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.

التمثيلات البيانية لدوال المقلوب غير متصلة عند القيم المستثناة من مجال كل منها، وبعضها يكون له خط تقارب، وهو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

- يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالة عندها غير معرفة.

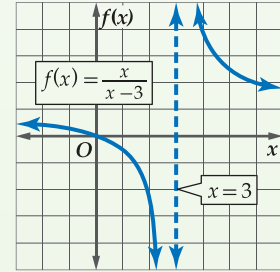
- يبين خط التقارب الأفقي سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة.

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال المقلوب هي $f(x) = \frac{1}{x}$. ويمكن تطبيق تحويلات التمثيل على التمثيل البياني لدوال المقلوب.

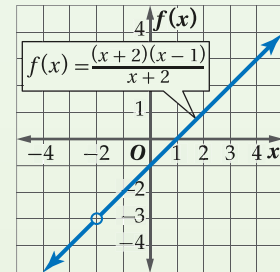
5-4 تمثيل الدوال النسبية بيانياً

الدالة النسبية هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

- وجود خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$



- وجود نقطة انفصال أو فجوة في التمثيل البياني، وتظهر هذه النقطة عند $x = c$ ويكون في هذه الحالة عاملاً من عوامل كل من البسط والمقام.



مشروع الفصل

رحلة بالطائرة

يستعمل الطلبة ما تعلموه عن الدوال النسبية والتغير لاستقصاء رحلة طائرة.

- اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية لإيجاد سرعة طائرة خلال رحلتها من الرياض إلى القريات، استعمل المعادلة $v = \frac{d}{t}$ ؛ حيث v : سرعة الطائرة، d : المسافة المقطوعة، t : زمن الرحلة.
- اطلب إليهم البحث عن المسافة بين الرياض والقريات، وإيجاد سرعة الطائرة إذا علمت أن زمن الرحلة ساعة ونصف الساعة. ثم اطلب إليهم حساب الزمن الذي تستغرقه هذه الطائرة في رحلة مسافتها 2476 km إذا سارت بالسرعة نفسها.

- اطلب إلى كل مجموعة أن تقدر الزمن الذي يحتاج إليه شخص للوصول إلى القريات بدءاً من لحظة انطلاقة من بيته في وسط مدينة الرياض، علماً بأنه سافر بالطائرة، مع الأخذ بعين الاعتبار الزمن اللازم لإنهاء الإجراءات (التفتيش، الجوازات، ...).

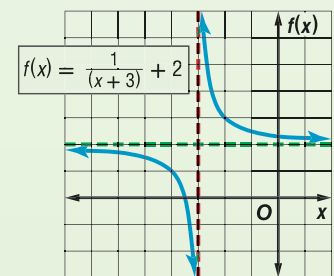
المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملاً النمط الآتي:

التعريف: خط التقارب هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

مثال: يوضح الشكل أدناه خطي التقارب عند $x = -3$ و $y = 2$.

سؤال: ما الذي يبينه خط التقارب الرأسى؟

يبين متى تكون الدالة غير معرفة.



فيما سيأتي:

درست حل المعادلات التربيعية: بالتحليل إلى العوامل، وبيانياً.

والآن:

- أتعرف العبارات النسبية وأبسطها.
- أمثل دوال نسبية بيانياً.
- أحل مسائل التغير الطردي والتغير المشترك والتغير العكسي والتغير المركب.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

لماذا:

سفر: يمكن استعمال الدوال النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، يمكن أن تستعمل العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقيق هدفك.

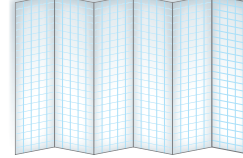
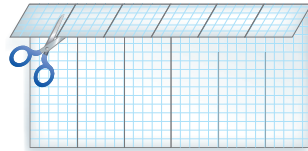
منظم أفكار

المطويات

العلاقات والدوال النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول العلاقات والدوال النسبية، مبتدئاً بورقة رسم بياني.

- اطو الورقة عرضياً ست طيات متساوية.
- اطو الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، اكتب عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.
- اكتب عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.

عنوان الدرس	تعريف	أمثلة	ملاحظات
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			



منظم أفكار

المطويات

وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9).
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها يدون الطلاب ملاحظاتهم أثناء دراستهم العلاقات والدوال النسبية في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس، وحفزهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،
فقم	بمراجعة جمع الكسور الاعتيادية وطرحها، وحل المعادلات ذات الخطوة الواحدة، وحل التناسبات.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

اختبار سريع

حل كل معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة.

$$(1) \quad x = \frac{15}{14} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{3}x \quad (2) \quad m = \frac{56}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{7}{3}$$

$$(3) \quad k = \frac{32}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{1}{4}k \quad (4) \quad p = \frac{63}{10} \cdot \frac{10}{9}p = 7$$

(5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لتراً من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟
120 لتراً

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$(6) \quad -\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} - \frac{7}{8} \quad (7) \quad \frac{1}{18} \cdot \frac{8}{9} - \frac{7}{6} + \frac{1}{3}$$

$$(8) \quad \frac{29}{30} \cdot \frac{9}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3} \quad (9) \quad \frac{43}{6} \cdot \frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 3$$

(10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $1\frac{1}{2}$ كوب لعمل كعكة الفانيلا. كم كوباً من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟ **$2\frac{1}{6}$ أكواب**

حل كل تناسب مما يأتي:

$$(11) \quad p = 27 \cdot \frac{9}{12} = \frac{p}{36}$$

$$(12) \quad m = 12 \cdot \frac{9}{18} = \frac{6}{m}$$

$$(13) \quad k = 17.5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{k}$$

(14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشتري ملابس سعرها الأصلي 550 ريالاً، ودفع مبلغ 440 ريالاً بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر بنفسه سعرها الأصلي 350 ريالاً وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟ **280 ريالاً**

مثال 1

حل المعادلة: $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$ ، واكتب الحل في أبسط صورة.

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في العدد 8} \quad \frac{72}{11} = 7r$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على العدد 7} \quad \frac{72}{77} = r$$

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 77، 72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$.

$$\text{العبارة الأصلية} \quad \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$$

$$\text{المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 6, 4, 3 هو العدد 12} \quad = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{4} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{3} \right) - \frac{5}{6} \left(\frac{2}{2} \right)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$$

$$\text{بالجمع، ثم بالطرح} \quad = \frac{3}{12}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{3 \div 3}{12 \div 3} = \frac{1}{4}$$

مثال 3

حل التناسب: $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$.

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \frac{5}{8} = \frac{u}{11}$$

$$\text{بالضرب التبادلي} \quad 5(11) = 8u$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 55 = 8u$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على 8} \quad \frac{55}{8} = u$$

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 8، 55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.
 $u = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$

ضرب العبارات النسبية وقسمتها Multiplying and Dividing Rational Expressions



المادة

يستطيع الغواصون الوصول إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال

أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d-33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاءه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، و d العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d-33}$ "عبارة نسبية".

بما أن المتغيرات في الجبر تمثل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{2}{3}$$

↑
GCF = 4

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{(x-5)\cancel{(x-1)}} = \frac{x-3}{x-5}$$

↑
GCF = $x-1$

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

(a) بسط العبارة: $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)}$

$$\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)} = \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى عوامل

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \cdot \frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}$$

بإختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$$

بالتبسيط

(b) متى تكون العبارة في الفرع (a) غير معرفة؟
بما أن مقام العبارة في الفرع (a) يحلّل إلى العوامل بالشكل: $(x-6)(x+3)(x-3)$ ، فإن قيم x التي تجعل المقام صفرًا هي 6، -3، 3. ولذا تكون العبارة غير معرفة عند $x = 6$ ، $x = -3$ ، $x = 3$.

تحقق من فهمك

بسط كل عبارة مما يأتي، وحدد متى تكون غير معرفة:

$$\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)} \quad (1B) \quad \frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)} \quad (1A)$$

$$z = -5, z = 2, z = 1; \frac{2z(z+4)}{(z-1)} \quad y = -2, y = 3, y = 0; \frac{4(y+4)}{(y+2)}$$

فيما سبق

درست تحليل كثيرات الحدود.

والآن

- أتعرف العبارات النسبية.
- أبسط عبارات نسبية.
- أبسط كسورًا مركبة.

المفردات

العبارة النسبية
rational expression

الكسر المركب
complex fraction

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

تحليل كثيرات الحدود.

الدرس 5-1

تعريف العبارات النسبية.

تبسيط العبارات النسبية.

تبسيط الكسور المركبة.

ما بعد الدرس 5-1

حل المعادلات النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- كيف تساعدك مفردة "العبارة النسبية" على تحديد معناها؟
- "نسبية" تشير إلى "النسبة".
- ما النسبة في الدالة: $T(d) = \frac{1700}{d-33}$ ؟

- ماذا نعني بقولنا إن العدد 6 هو العامل (القاسم) المشترك الأكبر للعدد 12 و 30؟ 6 هو أكبر عدد صحيح يقسم كلا من 12 و 30 دون باقي.

إرشادات للدراسة

GCF

الرمز (GCF) يمثل اختصارًا ل: Greatest Common Factor (العامل القاسم) المشترك الأكبر

إرشادات للدراسة

لايجاد قيم x التي تكون العبارة عندها غير المعرفة، استعمل العبارة المعطاة قبل تبسيطها.

مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (13)	• تنويع التعليم، ص (13، 17)	• تنويع التعليم، ص (17)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6)	• تدريبات المهارات، ص (8)	• تدريبات المهارات، ص (8)
	• تدريبات المهارات، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (9)
	• تدريبات حل المسألة، ص (9)	• التدريبات الإثرائية، ص (10)	• التدريبات الإثرائية، ص (10)

مثال 2 على اختبار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2 - 5x - 14)}{4x(x^2 + 6x + 8)}$ غير معرفة؟

- A -2, -4 B -2, 7 C 0, -2, -4 D 0, -4, 7

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفراً.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2 + 6x + 8)$ يساوي صفراً هي $x = 0$ ؛ لذا يمكن حذف البديلين A و B. والآن حلل المقام إلى عوامل.

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

وبما أن المقام يساوي صفراً عندما $x = 0$ ، أو $x = -2$ ، أو $x = -4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

(2) ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2 + 8x + 12)}{-6(x^2 - 3x - 10)}$ غير معرفة؟ B

- A 5, 0, -2 B 5, -2 C 0, -2, -6 D 5, -2, -6

إرشادات للاختبار

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

تبسيط العبارات النسبية

مثال 1 يبين طريقة تبسيط عبارة نسبية وتحديد القيم التي تكون العبارة عندها غير معرفة.

مثال 2 يبين طريقة حذف بعض البدائل للإجابة عن فقرة اختبار من نوع الاختيار من متعدد.

مثال 3 يبين طريقة تبسيط عبارة نسبية بإخراج -1 كعامل مشترك من البسط أو المقام.

مثال 4 يبين طريقة ضرب العبارات النسبية وقسمتها.

مثال 5 يبين طريقة تبسيط عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كل من بسطها ومقامها.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

(a) بسّط العبارة: $\frac{3y(y+7)}{(y+7)(y^2-9)}$

(b) متى تكون العبارة في الفرع (a) غير معرفة؟

$$y = -7, y = -3, y = 3$$

مثال على اختبار:

ما قيم p التي تجعل العبارة:

$$\frac{p^2 + 2p - 3}{p^2 - 2p - 15}$$

غير معرفة؟ B

A 5 B -3, 5 C 3, -5 D 5, 1, -3

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$(a) -a \cdot \frac{a^4b - 2a^4}{2a^3 - a^3b}$$

$$(b) \frac{-9x^2 - 3xy - y^2}{2} \cdot \frac{27x^3 - y^3}{2y - 6x}$$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل السبورة

التفاعلية لتوضيح كيفية اختصار

العوامل المشتركة بين البسط

والمقام. اشطب العوامل المشتركة

عند تبسيط العبارة النسبية، ثم حرك

العوامل المتبقية للحصول على

العبارة في أبسط صورة.

تنبيه

أخطاء مفاهيمية شائعة غالباً ما يتم التعامل

مع العبارات النسبية بدون الإشارة إلى استثناء

القيم التي تجعلها غير معرفة؛ لأنه من المعروف

أن العبارة النسبية تشمل فقط القيم التي تكون

عندها العبارة معرفة.

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين، فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

$$\begin{array}{c} \text{القسمة} \\ \frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{35} \cdot 7}{\cancel{5} \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = \frac{7}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{الضرب} \\ \frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6} \end{array}$$

والجدول الآتي يلخص قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي	
أضف إلى	مطوية
ضرب العبارات النسبية	
التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.	
الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0$ ، $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	
قسمة العبارات النسبية	
التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.	
الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} \quad (a)$$

$$\text{بالتحليل إلى عوامل} \quad \frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

$$\text{باختصار العوامل المشتركة} \quad = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot c \cdot \cancel{5} \cdot 3 \cdot c \cdot \cancel{d} \cdot d}{\cancel{5} \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{9c^2d}{4a}$$

$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} \quad (b)$$

$$\text{بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه} \quad \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$$

$$\text{بتجميع العوامل} \quad = \left(\frac{18 \times 35}{7 \times 12} \right) \cdot \left(\frac{x}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{y^3}{y} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2} \right) \cdot \left(\frac{b}{b^2} \right)$$

$$\text{باستعمال قوانين الأسس واختصار العوامل المشتركة} \quad = \left(\frac{\cancel{6} \times 3 \times \cancel{7} \times 5}{\cancel{6} \times 2 \times \cancel{2}} \right) \cdot x^{1-2} \cdot y^{3-1} \cdot a^{2-2} \cdot b^{1-2}$$

$$= \frac{15}{2} \cdot x^{-1} \cdot y^2 \cdot a^0 \cdot b^{-1}$$

$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^1} \cdot y^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b^1}$$

$$= \frac{15y^2}{2xb}$$

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام.

مثال إضافي

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{1}{6x^2y} \cdot \frac{8x}{21y^3} \cdot \frac{7y^2}{16x^3} \quad (a)$$

$$\frac{4dk^2}{m^4} \cdot \frac{10mk^2}{3c^2d} \div \frac{5m^5}{6c^2d^2} \quad (b)$$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على المعرفة السابقة وضح

للطلبة أن القسمة هي عملية ضرب في مقلوب المقسوم عليه، من خلال مناقشة أمثلة بسيطة مثل: قسمة 18 كرة زجاجية على شخصين، تعني أن كل شخص يحصل على نصف عدد الكرات أو على 9 كرات زجاجية.

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{7a^2}{15b^2x^3} \cdot \frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y} \quad (4B)$$

$$acd \cdot \frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d} \quad (4A)$$

$$\frac{4x^3}{5a^2b^4y^2} \cdot \frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x} \quad (4D)$$

$$\frac{2f^2}{9a^2bm^2} \cdot \frac{16mf^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2} \quad (4C)$$

في بعض الأحيان عليك أن تحلل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

مثال 5

عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كل من بسطها ومقامها

بسّط كلا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} \quad (a)$$

بالتحليل إلى عوامل

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 8)(x + 2)}{(x - 8)(x - 8)} \cdot \frac{x - 8}{(x + 3)(x + 2)}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{\cancel{(x - 8)}(x + 2)}{\cancel{(x - 8)}(x - 8)} \cdot \frac{\cancel{x - 8}}{(x + 3)\cancel{(x + 2)}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{x + 3}$$

$$\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} \quad (b)$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} = \frac{x^2 - 16}{12y + 36} \cdot \frac{y^2 - 3y - 18}{x^2 - 12x + 32}$$

بالتحليل إلى عوامل

$$= \frac{(x + 4)(x - 4)}{12(y + 3)} \cdot \frac{(y - 6)(y + 3)}{(x - 4)(x - 8)}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{(x + 4)\cancel{(x - 4)}}{12\cancel{(y + 3)}} \cdot \frac{\cancel{(y - 6)}(y + 3)}{\cancel{(x - 4)}(x - 8)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{(x + 4)(y - 6)}{12(x - 8)}$$

تحقق من فهمك

بسّط كلا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{6x - 30}{(x + 3)^2} \cdot \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 21} \div \frac{x^2 - x - 12}{6x + 42} \quad (5B)$$

$$\frac{8x - 20}{x^2 + 2x - 35} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{4x^2 - 16} \quad (5A)$$

تبسيط الكسور المركبة: الكسر المركب يتكون بسطه ومقامه أو أحدهما من كسور، والعبارات الآتية كسور مركبة:

$$\frac{\frac{c}{6}}{5d}$$

$$\frac{\frac{8}{x}}{x - 2}$$

$$\frac{\frac{x - 3}{8}}{\frac{x - 2}{x + 4}}$$

$$\frac{\frac{4}{a} + 6}{\frac{12}{a} - 3}$$

ولتبسيط كسر مركب، اكتبه أولاً على صورة قسمة عبارتين.

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها 13

مثال إضافي

بسّط كلا من العبارتين الآتيتين:

$$-1 \cdot \frac{k - 3}{k + 1} \cdot \frac{1 - k^2}{k^2 - 4k + 3} \quad (a)$$

$$\frac{2d + 6}{d^2 + d - 2} \div \frac{d + 3}{d^2 + 3d + 2} \quad (b)$$

$$\frac{2(d + 1)}{d - 1}$$

تنبيه

تجنب الأخطاء: اطلب إلى الطلبة أن يستبدلوا المتغيرات بأعداد كلية صغيرة، ثم يحسبوا قيمة العبارة قبل التبسيط وبعده، ويتأكدوا من تساوي القيمتين.

المحتوى الرياضي

القسمة على الصفر إذا اعتقد الطلبة أن $\frac{6}{0} = 0$ ، فاستعمل تعريف حاصل ضرب عددين (إذا كان $\frac{a}{b} = c$ فإن $a = bc$)؛ لبيان أن اعتقاد الطلبة خاطئ؛ لأن هذا الاعتقاد يقودنا إلى المساواة $6 = 0 \cdot 0$ ، وهذا خطأ.

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ففي مثال 5a، يظهر العامل $x - 8$ أربع مرات؛ لذا استعمل ذلك مرشداً عند تحليل كثيرات الحدود.

تنوع التعليم

دون ضمن

واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أسئلة تحقق من فهمك،

بتشجيعهم على كتابة خطوات الحل متتالية مع الحفاظ على تكافئها. ونبّههم إلى إجراء تغيير واحد فقط في الخطوة الواحدة.

بسط كلا من العبارتين الآتيتين:

$$(a) \frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

بالتبسيط

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} &= \frac{a+b}{4} \div \frac{a^2+b^2}{4} \\ &= \frac{a+b}{4} \cdot \frac{4}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a+b}{\cancel{4}^1} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{a^2+b^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$(b) \frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$$

بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

بالتحليل إلى عوامل

باختصار العوامل المشتركة

بالتبسيط

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} &= \frac{x^2}{x^2-y^2} \div \frac{4x}{y-x} \\ &= \frac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{y-x}{4x} \\ &= \frac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(-1)(x-y)}{4x} \\ &= \frac{x \cdot \cancel{x}^1}{(x+y)(\cancel{x-y}^1)} \cdot \frac{(-1)\cancel{(x-y)}^1}{4\cancel{x}^1} \\ &= \frac{-x}{4(x+y)} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

بسط كلا من العبارتين الآتيتين:

$$(6A) \frac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}} \quad (6B) \frac{\frac{-x-y}{y-7}}{\frac{y-x}{y+7}}$$

تأكد

بسط كلا من العبارتين الآتيتين:

$$(1) \frac{\frac{x+3}{x+8}}{\frac{x^2-5x-24}{x^2-64}} \quad (2) \frac{\frac{1}{3(c-d)}}{\frac{c+d}{3c^2-3d^2}}$$

مثال 1

مثال 2 (3) اختيار من متعدد: حدد قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرفة.
 A -7, 4 B 4, 7 C -7, 4, 7 D -4, 7

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$(4) -\frac{y+8}{y+5} \cdot \frac{y^2+3y-40}{25-y^2} \quad (5) \frac{-x(a+b)}{y} \cdot \frac{a^2x-b^2x}{by-ay} \quad (6) \frac{x^2-3x+9}{3} \cdot \frac{x^3+27}{3x+9} \quad (7) \frac{3x}{2z^2} \cdot \frac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \frac{8z}{9xy^3}$$

الأمثلة 3-6

تبسيط الكسور المركبة

مثال 6 يبين طريقة تبسيط كسر مركب بكتابه على صورة قسمة عبارتين.

مثال إضافي

$$\frac{\frac{x^2}{9x^2-4y^2}}{\frac{x^3}{2y-3x}} = \frac{x^2}{9x^2-4y^2} \cdot \frac{2y-3x}{x^3} = \frac{-1}{3x^2+2xy}$$

6

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير ساعد الطلبة على فهم أن ناتج قسمة $(x-y)$ على $(y-x)$ هو -1 ، وذلك بتوضيح أن إحدى هاتين العبارتين نظير جمعي للأخرى، تمامًا مثل 2 و -2 .

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-13 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+5)} \cdot \frac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \frac{x-4}{x^2-2x-35} \quad (9)$$

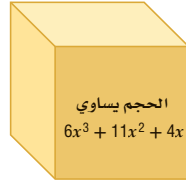
$$4 \cdot \frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}} \quad (11)$$

$$\frac{2x^2}{3aby^2} \cdot \frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b} \quad (8)$$

$$\frac{ab^2x}{y^3} \cdot \frac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}} \quad (10)$$

$$\frac{(a-b)(a+1)}{12(a-1)} \cdot \frac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \frac{4a+4b}{a^2-1} \quad (12)$$

(13) يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)$ للتعبير عن حجم الصندوق المجاور الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث ارتفاع الصندوق.



(a) أوجد طول الصندوق وعرضه. **إجابة ممكنة: $3x+4, 2x+1$**

(b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x=2$. **إجابة ممكنة: 10:5:2**

(c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكل قيم x ؟ **لا**

تدرب وحل المسائل

مثال 1

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{y(y+1)}{2(y-4)} \cdot \frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)} \quad (15)$$

$$\frac{x(x+6)}{x+4} \cdot \frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12} \quad (14)$$

$$\frac{1}{x+8} \cdot \frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)} \quad (17)$$

$$\frac{(x+3)(x-z)}{4} \cdot \frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)} \quad (16)$$

(18) **اختيار من متعدد:** حدد قيم x التي تجعل العبارة $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة. D -6, 3, 4, 6 C -6, 6 B 4, 6 A -6, 3

مثال 2

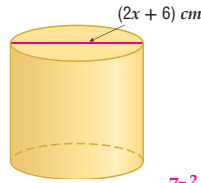
بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{x^2}{x+6} \cdot \frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54} \quad (20)$$

$$-\frac{x+2}{x+4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2} \quad (19)$$

$$\frac{-3}{y^2+y+1} \cdot \frac{3-3y}{y^3-1} \quad (22)$$

$$-\frac{c+4}{c+5} \cdot \frac{16-c^2}{c^2+c-20} \quad (21)$$



(23) **هندسة:** إذا كان حجم الأسطوانة المجاورة $\pi \text{ cm}^3 (x+3)(x^2-3x-18)$ ، فأوجد ارتفاعها. **$(x-6) \text{ cm}$**

مثال 3

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{7z^2}{18w^5y} \cdot \frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z} \quad (25)$$

$$\frac{c}{4ab^2f^2} \cdot \frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f} \quad (24)$$

$$\frac{15y^3}{2xz} \cdot \frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2} \quad (27)$$

$$\frac{32b}{3ac^3f^2} \cdot \frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2} \quad (26)$$

$$\frac{c+2}{c(c-d)} \cdot \frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d} \quad (29)$$

$$y+5 \cdot \frac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \frac{y^2-9y+18}{y^2-9} \quad (28)$$

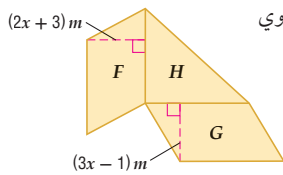
$$\frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}} \quad (33) \quad \frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}} \quad (32) \quad \frac{-a^2(a+b)}{b^4}$$

$$\frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}} \quad (31) \quad \frac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}} \quad (30) \quad -\frac{6}{z} \quad \frac{(x-3)(x+1)}{6(x+7)}$$

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها 15

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	51-64، 48-49، 14-33
ضمن ضمن المتوسط	54-64، 48-50، 35-45، 34، 14-32 زوجي، 34
فوق فوق المتوسط	34-64



(34) هندسة: في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع F تساوي $(8x^2 + 10x - 3)m^2$ ، وارتفاعه $(2x + 3)m$ ، ومساحة متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2 + 13x - 5)m^2$ ، وارتفاعه $(3x - 1)m$ ، فأوجد مساحة المثلث القائم الزاوية H .

$$\frac{1}{2} (8x^2 + 18x - 5) m^2$$

(35) تلوث: تمثل الدالة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

(a) اكتب الدالة في أبسط صورة. $T(x) = \frac{0.4}{x+3}$

(b) ما سمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟ **3.9 mm تقريباً**

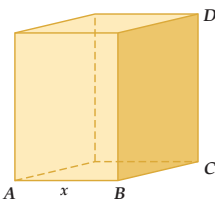
بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{1}{4} \frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3} \quad (37) \quad \frac{x-2}{3(2x+1)} \cdot \frac{x^2-16}{3x^3+18x^2+24x} \cdot \frac{x^3-4x}{2x^2-7x-4}$$

$$\frac{18y^8}{5a^2cx^4} \cdot \left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2} \right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3} \quad (39) \quad \frac{9-x^2}{x^2-4x-21} \cdot \left(\frac{2x^2+7x+3}{2x^2-15x+7} \right)^{-1}$$

$$\frac{4x^2-1}{3x^3-6x^2-24x} \cdot \frac{12x^2+12x-9}{-2x^2+5x+12} \quad (42) \quad \frac{2x^2+7x-30}{-6x^2+13x+5} \cdot \frac{-4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24} \quad (41) \quad \left(\frac{2xy^3}{3abc} \right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4} \quad (40)$$

(43) هندسة: مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي 20 cm^2 .



(a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x . $\frac{20}{x}$

(b) إذا كان $DC = 3BC$ ، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x . $\frac{1200}{x^2}$

(c) أوجد حجم المنشور بدلالة x . $\frac{1200}{x}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{x(x-2)(x+8)}{2(2x-1)(3x+1)} \cdot \frac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \cdot \frac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \frac{6x^2-18x-60}{x^3-4x} \quad (44)$$

$$\frac{(4x-1)^2(3x+1)(x+1)}{12(x+2)(x-4)(x^2-10x+6)} \cdot \frac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \frac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \cdot \frac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24} \quad (45)$$

$$\frac{-2(x-8)(x+4)(x-2)(x+1)}{(2x+1)^2(x^2+2x-6)} \cdot \frac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \frac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \frac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12} \quad (46)$$

(47) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال التمثيل البياني لدالة نسبة.

(a) جبرياً: بسّط العبارة: $x-1$

(b) جدولياً: إذا كانت $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$ ، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالة $g(x)$ المرتبطة بالدالة $f(x)$ ، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلتا الدالتين، حيث $0 \leq x \leq 10$. **(b, d) انظر الهامش**

(c) تحليلياً: أوجد قيمة كلٍّ من $f(4)$ و $g(4)$ ، ثم وضع الفرق بين القيمتين.

(d) بيانياً: مثل كلاً من الدالتين بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية، استعمل الميزة TRACE في الحاسبة البيانية لاكتشاف كلٍّ من التمثيلين البيانيين، واستعمل المفاتيح $\blacktriangle$ و $\blacktriangledown$ للانتقال بين التمثيلين، ثم قارن بينهما.

(e) لفضلياً: ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالة $g(x)$ ؟



الربط مع الحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأضراره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

تنبيه لحل سؤال

قانون الحجم يحتاج الطلبة في السؤال

43 إلى معرفة قانون حجم منشور متوازي

المستطيلات وهو: $V = Bh$ ، حيث B

مساحة قاعدته، h ارتفاعه.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في

السؤال 47 الحاسبة البيانية و جدول القيم

والتحليل لاستنتاج العلاقة بين العبارات

النسبية والدوال النسبية.

$$\frac{(3-x)(2x-1)}{(x+3)(2x+1)} \quad (38)$$

$$\frac{3bc^2}{8y^2} \quad (40)$$

$$\frac{x-4}{-4(x-3)} \quad (41)$$

$$\frac{2x+1}{-9x(x+2)} \quad (42)$$

إجابات :

(47b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	1	2
$g(x)$	-1	0	1	2

x	4	5	6	7
$f(x)$	ERR	4	5	6
$g(x)$	3	4	5	6

x	8	9	10
$f(x)$	7	8	9
$g(x)$	7	8	9

(47c) $f(4)$ لا يمكن إيجادها؛

لأن الدالة غير معرفة عندما

$x=4$ ، أما $g(4)$

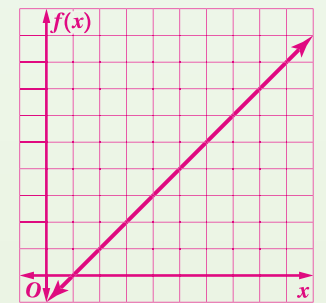
فتساوي 3

(47e) العبارة والدالة

متكافئتان عند جميع قيم x

ما عدا 4.

(47d)



يظهر التمثيلان البيانيان متطابقين على

الحاسبة البيانية، إلا أن $f(x)$ غير معرفة

عند $x=4$ ، على حين أن $g(4) = 3$.

(48) إجابة ممكنة: العبارتان

متكافئتان إلا عندما $x = -3$

حيث تكون العبارة النسبية

غير معرفة.

(49) إجابة ممكنة: محمد،

أما علي فقد أخطأ عندما

ضرب مقلوب المقسوم

في المقسوم عليه بدلاً من

ضرب المقسوم في مقلوب

المقسوم عليه.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة أن يشرحوا

كيف سيساعدكم ضرب العبارات النسبية

وتبسيطها في جمعها وطرحها .

إجابات :

(51) إجابة ممكنة: صحيحة أحياناً؛ فالمقام

$x^2 + 2$ مثلاً ليس له صفر حقيقي

وبالتالي تكون الدالة النسبية التي

مقامها $x^2 + 2$ معرفة لجميع الأعداد

الحقيقية. أما الدالة التي مقامها x مثلاً

فليست معرفة عند $x = 0$.

(53) إجابة ممكنة: العامل المشترك بين

البسط والمقام هو x مما يجعل العبارة

غير معرفة عند $x = 0$.

تنبيه !

اكتشف الخطأ : في السؤال 49

اطلب إلى الطلبة نسخ العبارة التي

بسطها كل من علي ومحمد ووضع

دائرة حول المقسوم عليه، ثم إعادة

كتابتها كحاصل ضرب عبارتين

نسبيتين .

(48) **تبرير:** قارن بين كلٍّ من $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

(49) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$. أيهما إجابهته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

$$\begin{aligned} \text{محمد} \\ \frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} &= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4} \\ &= -\frac{x+y}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{علي} \\ \frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} &= \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x} \\ &= \frac{-4}{x+y} \end{aligned}$$

(50) **تحذّر:** ما قيمة y التي تجعل الجملة $x - 2 = \frac{y}{x-6} \cdot \frac{x-6}{x+3}$ صحيحة دائماً، عدا عند $x = 6$ و $x = -3$ ؟ $x^2 + x - 6$

(51) **تبرير:** هل الجملة الآتية صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش
”العبارة النسبية التي تتضمن متغيراً في المقام تكون معرفة لجميع الأعداد الحقيقية“.

(52) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\frac{x-1}{x+4}$. **إجابة ممكنة:** $\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

(53) **اكتب:** إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\frac{x^2+3x}{4x}$ هو $\frac{x+3}{4}$. فوضح لماذا لا تكون هذه العبارة معرفة لجميع قيم x ؟ انظر الهامش

تدريب على اختبار

(54) **احتمال:** إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4 ؟ **C**

$\frac{1}{6}$ A	$\frac{1}{2}$ C
$\frac{1}{3}$ B	$\frac{2}{3}$ D

(55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$ ؟ **D**

$\frac{c+4}{c+5}$ C	$\frac{4-c}{c-5}$ A
$-\frac{c+4}{c+5}$ D	$\frac{4-c}{c+5}$ B

مراجعة تراكمية

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

(56) $\sqrt{x-8} + 5 = 7$ (الدرس 4-7) **12**

(57) $\sqrt[3]{n+8} - 6 = -3$ (الدرس 4-7) **19**

(58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (الدرس 4-6) $\frac{h+2h^{\frac{1}{2}}+1}{h-1}$

بسط كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-3)

(59) $10a - 2b$ (60) $x^2 - 4x + 3$ (61) $-3y^2 - 3y^2$ (62) $2x(3y+9) + 18xy$ (63) $x^2 + 9x + 18$ (64) $x^3 - x^2 + x + 3$ (65) $-3x^2 - 7x + 8$

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها **17**

تنويع التعليم

ضمن هوف

توسع: أعط الطلبة عبارات نسبية مثل $\frac{5x^2(x^2+3)}{5x(x+3)}$ ؛ لبناء قاعدة متينة لما سيتعلمونه عن هذه العبارات في الدروس

اللاحقة. واطلب إليهم أن يوضحوا بصورة مفصلة لماذا يمكن اختصار العدد 5 من البسط والمقام، على حين لا

يمكن اختصار العدد 3 . واسألهم: لماذا يمكن قسمة x^2 و x الموجودتين خارج الأقواس على x ، على حين لا يمكن

قسمة x^2 و x الموجودتين داخل الأقواس على x ؟

يجب أن تتضمن إجابات الطلبة أنه يمكن قسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة بين البسط والمقام، ولا يمكن

قسمة الحدود التي تكون أجزاءً من كثيرات حدود. ويمكنهم الوصول إلى هذه الاستنتاجات بتعويض عدد مثل 2

مكان x .

جمع العبارات النسبية وطرحها Adding and Subtracting Rational Expressions



لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفيرها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حدٍّ ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا، نسمع صوت صفيرها بتردد منخفض؛ لأن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler). ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعلاقة النسبية $f_s \left(\frac{v}{v - v_s} \right)$ ، حيث f_s تردد صوت صفير سيارة الإطفاء، و v سرعة الصوت في الهواء، و v_s سرعة سيارة الإطفاء.

فيما سبق:

درست جمع كثيرات حدود وطرحها.

والآن:

- أجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات حدود.
- أجمع عبارات نسبية وأطرحها.

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 5-2

جمع عبارات كثيرات حدود وطرحها.

الدرس 5-2

إيجاد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود.

جمع عبارات نسبية وطرحها.

ما بعد الدرس 5-2

حل معادلات ومتباينات نسبية.

إرشادات للدراسة

LCM

الرمز (LCM) يمثل اختصاراً لـ:

Least Common Multiple (المضاعف المشترك الأصغر)

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

وأسأل:

هل يمكن تبسيط العبارة: $\frac{v}{v - v_s}$ إلى

$v \left(\frac{1}{1 - v_s} \right)$ ؟ وضع إجابتك.

لا؛ لأن $\frac{v}{1 - v_s} = \frac{v}{1 - v_s}$

هل تحتاج إلى المقام المشترك عند ضرب

f_s في $\frac{v}{v - v_s}$ ؟ لا

LCM لكثيرات الحدود

مثال 1 يبين طريقة إيجاد المضاعف

المشترك الأصغر لمجموعة من كثيرات الحدود.

كثيرات الحدود

$$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$$

LCM لكثيرتي الحدود $x^2 - 3x + 2$ ، $2x^2 - 2$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$2x^2 - 2 = 2 \cdot (x - 1)(x + 1)$$

LCM هو $2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$

الأعداد

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$$

LCM للأعداد 6، 9

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

LCM هو $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود ممّا يأتي:

$$6xy, 15x^2, 9xy^4 \quad (a)$$

بالتحليل

$$6xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$$

بالتحليل

$$15x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x^2$$

بالتحليل

$$9xy^4 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^4 \text{ هو LCM}$$

بالتبسيط

$$90x^2y^4 \text{ ويساوي}$$

$$y^4 + 8y^3 + 15y^2, y^2 - 3y - 40 \quad (b)$$

بالتحليل

$$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$$

بالتحليل

$$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

$$y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8) \text{ هو LCM}$$

$$4a(a - 4)(a - 5)(a + 1) \quad (1B)$$

تحقق من فهمك

$$4a^2 - 12a - 16, a^3 - 9a^2 + 20a \quad (1B)$$

$$120a^2b^3c^4, 12a^2b, 15abc, 8b^3c^4 \quad (1A)$$

مصادر الدرس 5-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (20)	• تنويع التعليم، ص (20)	• تنويع التعليم، ص (22)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11)	• تدريبات المهارات، ص (13)	• تدريبات المهارات، ص (13)
	• تدريبات المهارات، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات حل المسألة، ص (14)
	• تدريبات حل المسألة، ص (14)	• التدريبات الإثرائية، ص (15)	• التدريبات الإثرائية، ص (15)

جمع العبارات النسبية وطرحها : عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوجد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

أضف إلى
طويبتك

مفهوم أساسي

جمع العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ ، حيث $b \neq 0$ ، $d \neq 0$ ، فإن

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

طرح العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لطرح العبارات النسبية، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ ، حيث $b \neq 0$ ، $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

(a) $20a^3c^6$ ، $15a^2bc^3$ ، $16b^5c^2$

$240a^3b^5c^6$

(b) $x^2 - 4x + 4$ و $x^3 - x^2 - 2x$
 $x(x+1)(x-2)^2$

جمع العبارات النسبية وطرحها

مثال 2 يبين كيفية جمع عبارتين نسبيتين مقام كل منهما وحيدة حد.

مثال 3 يبين كيفية طرح عبارتين نسبيتين مقام كل منهما كثيرة حدود.

المثالان 4، 5 يبينان كيفية تبسيط الكسور المركبة.

مثالان إضافيان

بسط العبارة: $\frac{5a^2}{6b} + \frac{9}{14a^2b^2}$
 $\frac{35a^4b + 27}{42a^2b^2}$

بسط العبارة: $\frac{x+10}{3x-15} - \frac{3x+15}{6x-30}$
 $-\frac{1}{6}$

مثال 2 جمع عبارات نسبية مقاماتها وحيدات حد وطرحها

LCM هو $8x^3y^2$

بضرب الكسور

بجمع البسطين

$$\begin{aligned} \text{بسط العبارة: } \frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} &= \frac{3y}{2x^3} \cdot \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} \\ &= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2} \\ &= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2} \end{aligned}$$

بسط كلاً من العبارتين الآتيتين:

$\frac{15a^5 - 128bx}{80a^3b^2}$

$\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$ (2B)

$\frac{8 + 9a^2bc}{10a^3b^2}$

$\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$ (2A)

يستخدم LCM أيضاً لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 جمع عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود وطرحها

بتحليل المقامين

بالضرب في العوامل المفقودة

ب طرح البسطين

بالتبسيط

$$\begin{aligned} \text{بسط العبارة: } \frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6} &= \frac{5}{6(x-3)} - \frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)} \\ &= \frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)} - \frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)} \\ &= \frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)} \\ &= \frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)} \end{aligned}$$

بسط كلاً من العبارتين الآتيتين:

$\frac{3x+2}{(4x+1)(x+5)}$

$\frac{x-8}{4x^2+21x+5} + \frac{6}{12x+3}$ (3B)

$\frac{x+7}{5(x+2)(x-3)}$

$\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$ (3A)

الدرس 5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها 19

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اختر عدداً من

الطلبة لحل الأمثلة أمام زملائهم في غرفة الصف باستخدام السبورة التفاعلية. وتأكد من أنهم يوضحون طريقة إيجاد LCM. ثم قم بتخزين هذه الأمثلة وإرسالها إلى سائر الطلبة.

تنبيه

تجنب الأخطاء: اطلب إلى الطلبة مناقشة

الفرق بين جمع الكسور وضربها. ومن المهم أن يركزوا على أهمية إيجاد المقام المشترك عند الجمع، وليس عند الضرب.

من طرائق تبسيط الكسور المركبة تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 تبسيط الكسور المركبة بتبسيط كل من البسط والمقام على حدة

مثال 4

$$\text{بسط العبارة } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$$

المقام المشترك الأصغر للبسط هو x
المقام المشترك الأصغر للمقام هو y

بتبسيط كل من البسط والمقام

بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

بالتبسيط

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} &= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}} \\ &= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y} \\ &= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y}{y-x} \\ &= \frac{xy+y}{xy-x^2} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

بسط كلا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{c^2 - d^2}{d^2 + 2cd} \quad \frac{\frac{c}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{d}{c} + 2} \quad (4B)$$

$$\frac{xy - y^2}{x + y} \quad \frac{1 - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} \quad (4A)$$

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كل من بسط العبارة ومقامها في LCM.

مثال 5 تبسيط الكسور المركبة بإيجاد (LCM) للمقامات

مثال 5

$$\text{بسط العبارة } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$$

LCM لمقامات البسط والمقام هو xy ، بضرب العبارة في $\frac{xy}{xy}$

خاصية التوزيع

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{xy}{xy}}{\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{xy}{xy}} \\ &= \frac{xy + y}{xy - x^2} \end{aligned}$$

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 4 و 5 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة؛ لذا يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تحقق من فهمك

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{c - d^2}{d + 6cd} \quad \frac{\frac{1}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{1}{c} + 6} \quad (5B)$$

$$\frac{xy + 2y}{3x - 4y} \quad \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{y} - \frac{4}{x}} \quad (5A)$$

$$\frac{a(a+b)}{b(a-b)} \quad \frac{\frac{a}{b} + 1}{1 - \frac{b}{a}} \quad (5D)$$

$$\frac{x+y}{x-y} \quad \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \quad (5C)$$

مثالان إضافيان

4

$$\text{بسط العبارة } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{b} - 1} \quad \frac{\frac{a+b}{a(1-b)}}{\frac{a+b}{a-ab}}$$

5

$$\text{بسط العبارة } \frac{\frac{2y-xy}{x-3y}}{\frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{y}-\frac{3}{x}}}$$

المحتوى الرياضي

العبارات المتكافئة توحيد المقامات للعبارات النسبية استعدادًا لجمعها أو طرحها، لا يغير من قيمها؛ لأننا نقوم بضرب هذه العبارات في إحدى صور العدد 1 مثل:

$$\frac{y-3}{y-3} \quad \text{أو} \quad \frac{6x}{6x}$$

تنويع التعليم

دون ضمن

واجه بعض الطلبة صعوبات في جمع العبارات النسبية وطرحها،

إذا

إلهم أن يعمل كل منهم مع زميله، على أن يمثل أحدهما دور المدرب والآخر دور المتدرب، ويقوم المتدرب بحل مسألة معينة باتباع خطوات الحل موضحاً أسلوب التفكير، على حين يستمع المدرب ويلاحظ الأخطاء ويصححها إذا كان ذلك ضرورياً، ثم يتبادل الطلبة الأدوار فيما بينهم.

فاطلب

أوجد LCM لكل مما يأتي:

مثال 1

$$63a^2b^3c^4, 7a^2, 9ab^3, 21abc^4 \quad (2)$$

$$80x^3y^3, 16x, 8x^2y^3, 5x^3y \quad (1)$$

$$x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4 \quad (4) \quad 3y(y-3)(y-5), 3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15 \quad (3)$$

$$x(x+2)(x-2)(x-8)$$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

المثالان 2, 3

$$\frac{48y^4 + 25x^2}{20xy^3} \cdot \frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3} \quad (5)$$

$$\frac{21b^4 - 2}{36ab^3} \cdot \frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3} \quad (7)$$

$$\frac{9x + 15}{(x+3)(x+6)} \cdot \frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x+6} \quad (9)$$

$$\frac{x-11}{3(x+2)(x-2)} \cdot \frac{4}{3x+6} - \frac{x+1}{x^2-4} \quad (11)$$

هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.

المثالان 4, 5

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{14x-10}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{3}{x-2}$$

$$\frac{2a+5b}{3b-8a} \cdot \frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}} \quad (17)$$

$$\frac{3y+2x}{xy+4x} \cdot \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}} \quad (16)$$

$$\frac{3y+2}{y+3} \cdot \frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}} \quad (15)$$

$$\frac{4x+2}{3x-2} \cdot \frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}} \quad (14)$$

تدرب وحل المسائل

مثال 1

أوجد LCM لكل مما يأتي: (20) $(x-4)(x-5)(x+6)$

$$180x^2y^4z^2, 4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2 \quad (19)$$

$$120a^2bc^3d^4, 24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3 \quad (18)$$

$$6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24 \quad (21)$$

$$x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30 \quad (20)$$

$$6(x+4)(2x-1)(2x+3)$$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

المثالان 2, 3

$$\frac{28by^2z - 9bx}{105x^3y^4z} \cdot \frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z} \quad (23)$$

$$\frac{15abc^3 + 2af}{72bc^4f^4} \cdot \frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3} \quad (22)$$

$$\frac{20x^2y + 120y + 6x^2}{15x^3y} \cdot \frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy} \quad (25)$$

$$\frac{25ab^3 + 9b^3 + 60a}{30a^2b^2} \cdot \frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2} \quad (24)$$

$$\frac{15b^3 + 100ab^2 - 216a}{240ab^3} \cdot \frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3} \quad (27)$$

$$\frac{240y + 20y^2 - 27}{90y^2} \cdot \frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2} \quad (26)$$

$$\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20} \quad (29)$$

$$\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40} \quad (28)$$

$$\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18} \quad (31)$$

$$\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8} \quad (30)$$

$$\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15} \quad (33)$$

$$\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24} \quad (32)$$

أحياء: يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$ ، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

(a) بسّط الصيغة السابقة. $A = \frac{6.5t^2 + 20.4t + 234}{t^2 + 36}$

(b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مضيّ 30 min على تناوله الطعام. 7.2 تقريباً

الدرس 5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها 21

3 التدريب

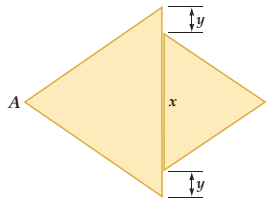
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-17 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	18-39, 58-73
ضمن المتوسط	19-39 فردي, 41-53 فردي, 55, 56, 58-73
فوق المتوسط	40-73



(35) هندسة: إذا كان كلٌّ من المثلثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة المثلث الأصغر 200 cm^2 ، ومساحة المثلث الأكبر 300 cm^2 ، فأوجد البعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x, y في أبسط صورة.

$$\frac{13x+21}{-3x+73} \cdot \frac{\frac{4}{x+5} + \frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6} - \frac{8}{x+5}} \quad (37)$$

$$\frac{-x^2+33x+16}{12x^2+11x-27} \cdot \frac{\frac{8}{x-9} - \frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2} + \frac{4x}{x-9}} \quad (39)$$

$$\frac{5x+6}{-x-9} \cdot \frac{\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3} - \frac{4x}{x^2-9}} \quad (36)$$

$$\frac{-2x^2-2x-5}{x^2+14x-4} \cdot \frac{\frac{5}{x+6} - \frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1} + \frac{4}{x+6}} \quad (38)$$

بسّط كل عبارة ممّا يأتي:

المثالان 5, 4

تنبيه لحل سؤال

قوانين يحتاج الطلبة إلى معرفة قانون مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$ لحل السؤال 35.

ورق الرسم البياني يحتاج الطلبة إلى ورق رسم بياني لحل الأسئلة 65-73.



الرابط مع الحياة

يعد حقل الغوار أكبر حقول النفط في العالم، ويقع الجزء الأكبر منه في محافظة الأحساء، وبدأ الإنتاج فيه عام 1370 هـ. ويقدر إنتاجه حالياً بحوالي 5 ملايين برميل يومياً.

(40) إنتاج النفط: قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$ حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنوياً بعد x سنة من بدء الإنتاج.

$$(a) \text{ بسّط الدالة } R(x) = \frac{260x^2+400}{3x^3+20x}$$

(b) ما معدل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟ **1730 برميل / سنة تقريباً**

أوجد LCM لكل ممّا يأتي:

$$-360a^4b^3c^2, -6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3 \quad (42) \quad 420x^5y^4z^3, 12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3 \quad (41)$$

$$x^2-5x-24, x^2-9, 3x^2+8x-3 \quad (44) \quad x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16 \quad (43)$$

$$(x+3)(x-3)(x-8)(3x-1) \quad (40) \quad (x+4)(x-4)(2x+1)(x-7)$$

بسّط كل عبارة ممّا يأتي:

$$\frac{15x^2-192x^2y^2-128y}{48x^2y^2} \cdot \frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y} \quad (46)$$

$$\frac{360a^2+5a-36}{60a^2} \cdot \frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2} \quad (45)$$

$$\frac{1}{8x^2-20x-12} + \frac{4}{6x^2+27x+12} \quad (48)$$

$$\frac{5}{6x^2+46x-16} + \frac{2}{6x^2+57x+72} \quad (47)$$

$$\frac{x^2+2x-29}{x^2-9x+8} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-9x+8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8} \quad (50)$$

$$0 \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y} \quad (49)$$

$$\frac{1}{y-x} \cdot \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x+y)} \quad (52)$$

$$\frac{5a-11}{6} \cdot \frac{\frac{2}{a-1} + \frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}} \quad (51)$$

$$\frac{42x+41}{6(3x-1)(x+8)(2x+3)} \quad (47)$$

$$\frac{19x-36}{12(2x+1)(x-3)(x+4)} \quad (48)$$

(53) هندسة: يُعطى طول مستطيل بالعلاقة $\frac{x^2-9}{x-2}$ ، ويعطى طول مستطيل آخر بالعلاقة $\frac{x+3}{x^2-4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة. **1 : (x-3)(x+2)**

(54) زوارق: قطع علي مسافة 20 mi راکباً زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h.

(a) إذا كانت x تعبر عن السرعة الأولى بالأميال لكل ساعة، فاكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة. **$\frac{10}{x}$**

(b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة. **$\frac{10}{x-2}$**

(c) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها. **$\frac{20(x-1)}{x(x-2)}$**

تنويع التعليم

هوف

توسّع كتابة العبارات النسبية باستعمال الكسور الجزئية هي مهارة جبرية مهمة تستعمل في كثير من مواضيع الرياضيات المتقدمة بما فيها حساب التفاضل والتكامل. لذا، أعط الطلبة عبارة نسبية مثل $\frac{5x+3}{x(x+1)}$ ، واسألهم: ما الكسرين اللذين يمكن جمعهما للحصول على هذه العبارة؟ فإذا استطاعوا تحديد x و $x+1$ على أنهما مقامان للكسرين الجزئيين فاطلب إليهم إيجاد قيمة كل من A و B التي تجعل المعادلة $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$ صحيحة لأي قيمة لـ x عدا $0, -1$. **$A = 3$ و $B = 2$**



الربط مع الحياة

يُوصف التصوير القريب عمومًا بأنه القدرة على تصوير جسم ما على أن يكون حجم صورته أكبر مما يمكن عند طباعة الصورة بالبعدين $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$.

(55) تصوير: يحدد البُعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البُعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البُعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد $x \text{ mm}$ من العدسة، وجب أن يكون الفيلم على بُعد $y \text{ mm}$ من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}$.

(a) اكتب y كدالة في المتغير x . $y = \frac{70x}{x-70}$
(b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

(56) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه يُعطى بالدالتين:

$$f(t) = \frac{2t}{3t^2 + 9t + 6}, \quad g(t) = \frac{3t}{2t^2 + 6t + 4}$$

(a) اجمع الدالتين لتحصل على دالة تمثل تركيز النوعين معًا في دم المريض. $h(t) = \frac{13t}{6t^2 + 18t + 12}$
(b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟ **0.19 تقريبًا**

مسائل مهارات التفكير العليا

(57) تحدّ: بسّط العبارة $\frac{5x^2 - x + 1}{3 - x^{-1} + 6x^{-1}}$. $\frac{-3x^3 - 2x^2 + 16x - 5}{4x^3 + 18x^2 - 6x}$
(58) تبير: حدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضّح إجابتك: **(58) إجابة ممكنة: خاطئة؛ فالمعادلة صحيحة لجميع قيم x ما عدا -2 و 3**

$$\frac{6}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$$

(59) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حدّ، على أن يكون LCM لهن يساوي $180a^4b^6c$.

(60) اكتب: اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

(59) إجابة ممكنة: $20a^4b^2c, 15ab^6, 9abc$

تدريب على اختبار

(61) إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$ ، فما قيمة a ؟ **C**
(A) $-\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 2

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة ممّا يأتي: (الدرس 5-1)

$$\frac{n^2 - n - 12}{n + 2} \div \frac{n - 4}{n^2 - 4n - 12} \quad (64) \quad 6y(x - y) \quad \frac{x^2 - y^2}{6y} \div \frac{x + y}{36y^2} \quad (63) \quad -\frac{4bc}{33a} \quad \frac{-4ab}{21c} \cdot \frac{14c^2}{22a^2} \quad (62)$$

مثّل كل دالة ممّا يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداه: **مهارة سابقة (65-67) انظر الهامش**

$$y = 2\sqrt{3-4x} + 3 \quad (67) \quad y = \sqrt{5x-3} \quad (66) \quad y = -\sqrt{2x+1} \quad (65)$$

مثّل كل دالة ممّا يأتي بيانيًا: (الدرس 3-5) **(68-73) انظر ملحق الإجابات**

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 \quad (70) \quad y = -(x-5)^2 - 3 \quad (69) \quad y = 4(x+3)^2 + 1 \quad (68)$$

$$y = x^2 - 8x + 18 \quad (73) \quad y = x^2 + 6x + 2 \quad (72) \quad y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 5 \quad (71)$$

الدرس 5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها **23**

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة توضيح كيف ساعدتهم الدرس السابق "ضرب العبارات النسبية وقسمتها" على جمع العبارات النسبية وطرحها؟

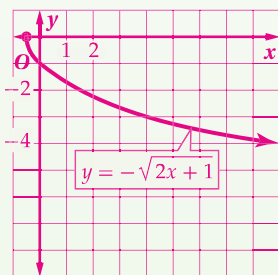
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسين 5-1، 5-2 بإعطائهم:

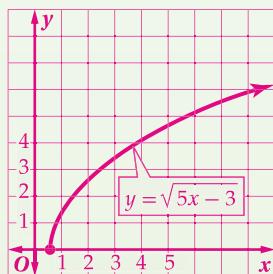
الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات إضافية:

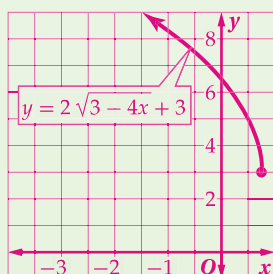
(65) المجال $\{x | x \geq -0.5\}$
المدى $\{y | y \leq 0\}$



(66) المجال $\{x | x \geq 0.6\}$
المدى $\{y | y \geq 0\}$



(67) المجال $\{x | x \leq 0.75\}$
المدى $\{y | y \geq 3\}$





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 5

دون	ضمن	فوق
دون	دون	دون
الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-2 تدريبات إعادة التعليم جمع العبارات النسبية وطرحها الخطوة 1: أوجد المقام المشترك الأصغر (LCD)، وأعد كتابة الآلية عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحها. الخطوة 2: أجمع البسطين أو طرحها. الخطوة 3: أجمع الحدود المشابهة إن وجدت في البسط. الخطوة 4: حلل البسط إن أمكن. الخطوة 5: بسط إن أمكن. مثال: بسط العبارة: $\frac{6}{2x^2+2x-12} - \frac{2}{x^2-4}$ بالحل القادمان $\frac{6}{2x^2+2x-12} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{6}{2(x+3)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)}$ LCD يساوي $2(x+3)(x-2)(x+2)$ طرح البسطين $\frac{6(x+2) - 2 \cdot 2(x+3)}{2(x+3)(x-2)(x+2)} = \frac{6x+12-4x-12}{2(x+3)(x-2)(x+2)} = \frac{2x}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$ ببسيط $= \frac{x}{(x+3)(x-2)(x+2)}$ تدريبات بسط كل من العبارات الآتية: (1) $\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} - \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1}$ (2) $\frac{4x+14}{3x+6} - \frac{3}{x+2} + \frac{4x+5}{3x+6}$ (3) $\frac{4a^2-9b^2}{3ab} - \frac{4a}{3bc} - \frac{15b}{5ac}$ (4) $\frac{-2x^2+9x+4}{(2x+1)(2x-1)^2} - \frac{4}{4x^2-4x+1} - \frac{5x}{20x^2-5}$ (5) $\frac{4}{x+1} - \frac{3x+3}{x^2-2x+1} + \frac{x-1}{x^2-1}$ الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية	الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-2 تدريبات إعادة التعليم جمع العبارات النسبية وطرحها المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود، لإيجاد (LCM) لكثيري حدود أو أكثر، حلل كل منها إلى عواملها الأولية، ثم احرب القوى التي لها الأس الأكبر في كثيرات الحدود جميعها. أوجد LCM لكثيرات الحدود: مثال: $16p^2q^3r, 40pq^2r^2, 15p^3r^4$ الحل: $16p^2q^3r = 2^4 \cdot p^2 \cdot q^3 \cdot r$ $40pq^2r^2 = 2^3 \cdot 5 \cdot p \cdot q^2 \cdot r^2$ $15p^3r^4 = 3 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot r^4$ $LCM = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot q^3 \cdot r^4 = 240p^3q^3r^4$ تدريبات أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي: (1) $14ab^2, 42bc^2, 18ac^3$ (2) $8cdf^3, 28c^2f, 35d^2f^3$ (3) $126a^2b^2c^3$ (4) $65x^4y, 10x^2y^2, 26y^4$ (5) $130x^2y^4$ (6) $15a^4b, 50a^2b^2, 40b^4$ (7) $600a^4b^3$ (8) $12xy^4, 42x^2y, 30x^3y^3$ (9) $39b^2c^3, 52b^3c, 12c^3$ (10) $56stuv^2, 24s^2t^2v^3, 70t^3uv^3$ (11) $840s^2t^2v^3$ (12) $9x^2 - 12x + 4, 3x^2 + 10x - 8$ (13) $8x^2 - 36x - 20, 2x^2 + 2x - 60$ (14) $5x^2 - 125, 5x^2 + 24x - 5$ (15) $8x^2 - 36x - 20, 2x^2 + 2x - 60$ (16) $45x^2 - 6x - 3, 45x^2 - 5$ (17) $3x^2 - 18x + 27, 2x^2 - 4x^2 - 6x$ (18) $6x(x-3)^2(x+1)$ الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية	الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-2 تدريبات إعادة التعليم جمع العبارات النسبية وطرحها أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي: (1) $12c, 6c^2d$ (2) $18a^2bc^2, 24b^2c^2$ (3) $2x - 6, x - 3$ (4) $5a, a - 1$ (5) $t^2 - 25, t + 5$ (6) $x^2 - 3x - 4, x + 1$ (7) $t^2 - 25, t + 5$ (8) $\frac{13}{8p^2r} - \frac{3}{8p^2r} + \frac{5}{4p^2r}$ (9) $\frac{2c+5}{3} - \frac{2c-7}{3} + 4$ (10) $\frac{2+5m^2}{m^2p} - \frac{2}{m^2p} + \frac{5}{p}$ (11) $\frac{7h+3g}{4gh^2} - \frac{7}{4gh} + \frac{3}{4h^2}$ (12) $\frac{12z-2y}{5y^2z} - \frac{12}{5y^2} - \frac{2}{5yz}$ (13) $\frac{a-6}{2a(a+2)} - \frac{2}{a+2} - \frac{3}{2a}$ (14) $\frac{15bd-6b-2d}{3bd(3b+d)} - \frac{5}{3b+d} - \frac{2}{3bd}$ (15) $\frac{3m+7}{(m-3)(m+3)} - \frac{3}{m-3} - \frac{2}{m^2-9}$ (16) $\frac{5-3t}{x-2} - \frac{3t}{2-x} + \frac{5}{x-2}$ (17) $\frac{2k}{k-n} - \frac{k}{k-n} - \frac{k}{n-k}$ (18) $\frac{5z^2+4z-16}{(z-4)(z+1)} - \frac{4z}{z-4} - \frac{z+4}{z+1}$ (19) $\frac{3}{y^2+y-12} - \frac{2}{y^2+6y+8}$ (20) $\frac{y+12}{(y+4)(y-3)} - \frac{2}{(y+2)}$ الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية
الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-2 تدريبات حل المسألة جمع العبارات النسبية وطرحها (1) مربعات، يفضل خليل الربع الكامل x^2 ويفضل ماجد الربع الكامل x^4، في حين أن s عدنان كليلان. ما الربع الكامل الذي يقبل القسمة على كل من مربعي خليل وماجد منها تكون قيمة كل منها؟ (2) s^2 (3) s^2 (4) سباق التتابع، اشترك كل من محمد وعبدالله وخلف وزيد في سباق الجري مسافة 400 متر تتابع على أن يركض كل منهم مسافة 100 متر. وقد كان متوسط سرعة كل منهم $s=1$، $s=0.5$، $s=0.5$، s متر في الثانية على الترتيب. (5) ما الزمن الذي استغرقه كل منهم في مرحلته من السباق؟ (6) $\frac{100}{s-1} - \frac{100}{s} - \frac{100}{s+2}$ (7) اكتب الزمن الذي استغرقه الفريق على صورة نسبة بين كثيرتي حدود. (8) $\frac{100}{16s^3-12s^2-2s+1} - \frac{4s^4-4s^3-s^2+s}{4s^4-4s^3-s^2+s}$ (9) الرقم القياسي العالمي لسباق مسافة 400 متر تتابع هو 37.4 ثانية. إذا أسس الفريق السباق في زمن يساوي الرقم العالمي، فما قيمة s؟ 10.695 أمثاري الثاني الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية	الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-2 تدريبات حل المسألة جمع العبارات النسبية وطرحها (1) مربعات، يفضل خليل الربع الكامل x^2 ويفضل ماجد الربع الكامل x^4، في حين أن s عدنان كليلان. ما الربع الكامل الذي يقبل القسمة على كل من مربعي خليل وماجد منها تكون قيمة كل منها؟ (2) s^2 (3) s^2 (4) سباق التتابع، اشترك كل من محمد وعبدالله وخلف وزيد في سباق الجري مسافة 400 متر تتابع على أن يركض كل منهم مسافة 100 متر. وقد كان متوسط سرعة كل منهم $s=1$، $s=0.5$، $s=0.5$، s متر في الثانية على الترتيب. (5) ما الزمن الذي استغرقه كل منهم في مرحلته من السباق؟ (6) $\frac{100}{s-1} - \frac{100}{s} - \frac{100}{s+2}$ (7) اكتب الزمن الذي استغرقه الفريق على صورة نسبة بين كثيرتي حدود. (8) $\frac{100}{16s^3-12s^2-2s+1} - \frac{4s^4-4s^3-s^2+s}{4s^4-4s^3-s^2+s}$ (9) الرقم القياسي العالمي لسباق مسافة 400 متر تتابع هو 37.4 ثانية. إذا أسس الفريق السباق في زمن يساوي الرقم العالمي، فما قيمة s؟ 10.695 أمثاري الثاني الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية	الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-2 تدريبات حل المسألة جمع العبارات النسبية وطرحها (1) مربعات، يفضل خليل الربع الكامل x^2 ويفضل ماجد الربع الكامل x^4، في حين أن s عدنان كليلان. ما الربع الكامل الذي يقبل القسمة على كل من مربعي خليل وماجد منها تكون قيمة كل منها؟ (2) s^2 (3) s^2 (4) سباق التتابع، اشترك كل من محمد وعبدالله وخلف وزيد في سباق الجري مسافة 400 متر تتابع على أن يركض كل منهم مسافة 100 متر. وقد كان متوسط سرعة كل منهم $s=1$، $s=0.5$، $s=0.5$، s متر في الثانية على الترتيب. (5) ما الزمن الذي استغرقه كل منهم في مرحلته من السباق؟ (6) $\frac{100}{s-1} - \frac{100}{s} - \frac{100}{s+2}$ (7) اكتب الزمن الذي استغرقه الفريق على صورة نسبة بين كثيرتي حدود. (8) $\frac{100}{16s^3-12s^2-2s+1} - \frac{4s^4-4s^3-s^2+s}{4s^4-4s^3-s^2+s}$ (9) الرقم القياسي العالمي لسباق مسافة 400 متر تتابع هو 37.4 ثانية. إذا أسس الفريق السباق في زمن يساوي الرقم العالمي، فما قيمة s؟ 10.695 أمثاري الثاني الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 5

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15)

ضمن فوق

كتاب التمارين (5)

دون ضمن فوق

الاسم: _____

التاريخ: _____

5-2 التدرّيات الإفرائية

مشاركة زينو

لقد وضع الفيلسوف اليوناني زينو من إيليا (عاش بين العامين 495 و430 قبل الميلاد) أربع مفارقات تتحدى فكرة المكان والزمان. ومفارقة زينو الأولى تشبه الموقف الآتي:

افترض أنك في طريقك إلى المدرسة، وأن عليك أن تقطع في كل دقيقة نصف المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة، وأنك خرجت من بيتك عند الساعة 7:45 صباحًا. سوف يكون لديك من المدرسة نصف المسافة بين بيتك والمدرسة عند الساعة 7:46 صباحًا، وسوف تقطع في الدقيقة التالية نصف هذه المسافة. أي أنك تكون قطعت $\frac{1}{2}$ للمسافة بين بيتك والمدرسة عند الساعة 7:47 صباحًا. إذا استمر هذا النمط في الحركة، فمتى تصل إلى المدرسة؟ قبل الثامنة صباحًا؟ أم قبل الظهر؟

لما كان تصنيف قطعة مستقيمة ممكنًا بصورة لا نهائية، فإنه يمكننا تكرار هذه العملية إلى ما لا نهاية. ولذا يتعين عليك في طريقك إلى المدرسة أن تصل إلى عدد لا نهائي من النصفقات في وقت محدود. وهذا مستحيل. وعندما لن تتمكن من الوصول إلى غايتك أبدًا. وعلى العموم وفق رأي زينو، يتعين على أي شخص يرغب في الانتقال من نقطة إلى أخرى أن يحقق هذه المتطلبات، وعليه، فإن الحركة مستحيلة. وهكذا فإن ما نراه من حركة هو مجرد وهم وعيال.

يُعرف جمع الكسور بالصيغة: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ويُعرف الطرح أيضًا بطريقة مماثلة.

افترض أن بيتك بعدد كيلومترًا واحدًا عن المدرسة. فبعد الساعة 7:46 تكون قطعت نصف كيلومتر، ويبقى عليك $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{2}$ كيلومتر. وعند الساعة 7:47 يبقى عليك $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ، أي $\frac{1}{4}$ كيلومتر.

وتحديد المسافة التي قطعتها والمسافة المتبقية إلى المدرسة عند الساعة 7:48 صباحًا، أجمع المسافات التي قطعتها في الدقائق الثلاث $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{7}{8}$ ، ويبقى عليك أن تسج $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ كيلومتر.

1. حدّد المسافة التي قطعتها ويُعدّك عن المدرسة عند الساعة 7:50 صباحًا.

لقد قُصّت 31 من الكيلومتر ويكون بعدك عن المدرسة $\frac{1}{32}$ كيلومتر.

2. افترض أنك تقطع ثلاثة أرباع المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة في كل دقيقة بدلًا من نصفها، فهل يمكنك أن تصل إلى المدرسة؟ حدّد المسافة المتبقية التي يتعين عليك أن تقطعها عند الساعة 7:47 صباحًا.

لا، يبقى $\frac{1}{16}$ من الكيلومتر عليك أن تقطعها عند الساعة 7:47 صباحًا.

3. افترض أنك تقطع $\frac{1}{(x+1)}$ من المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة في كل دقيقة بدلًا من نصفها أو ثلاثة أرباعها، عل أن يكون x عددًا صحيحًا أكبر من 2، فإذا يكون بعدك عن المدرسة عند الساعة 7:47 صباحًا؟

$\frac{x^2}{(x+1)^2}$ من الكيلومتر.

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

(1) x^2y^3, x^3y, xy^4 (2) $a^2b^3c^4, a^2b^2c, ab^3c^4$ (3) $x + 1, x + 3, x + 1(x + 3)$

(4) $g - 1, g^2 + 3g - 4$ (5) $2r + 2, r^2 + r, r + 1$ (6) $3, 4w + 2, 4w^2 - 1$

(7) $x^2 + 2x - 8, x + 4$ (8) $2r(r + 1)$ (9) $6(2w + 1)(2w - 1)$

(10) $\frac{5}{6ab} - \frac{7}{8a}$ (11) $\frac{5}{12x^2y} - \frac{1}{5x^2y^3}$ (12) $\frac{1}{6c^2d} + \frac{3}{4cd^2}$

(13) $\frac{4m}{3mn} + 2$ (14) $2x - 5 - \frac{x-8}{x+4}$ (15) $\frac{4}{a-3} + \frac{9}{a-5}$

(16) $\frac{16}{x^2-16} + \frac{2}{x-4}$ (17) $\frac{2-5m}{m-9} + \frac{4m-5}{y-m}$ (18) $\frac{y-5}{y^2-3y-10} + \frac{y}{y^2+y-2}$

(19) $\frac{5}{2x-12} - \frac{20}{x^2-4x-12}$ (20) $\frac{2p-3}{p^2-5p+6} - \frac{5}{p^2-9}$ (21) $\frac{1}{5n} - \frac{3}{4} + \frac{7}{10n}$

(22) $\frac{2a}{a-3} - \frac{2a}{a+3} + \frac{36}{a^2-9}$ (23) $\frac{1}{x^2-y} + \frac{x+y}{x-y}$ (24) $\frac{r+6}{r^2+2r} - \frac{1}{r+2}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(10) $\frac{5}{6ab} - \frac{7}{8a}$ (11) $\frac{5}{12x^2y} - \frac{1}{5x^2y^3}$ (12) $\frac{1}{6c^2d} + \frac{3}{4cd^2}$

(13) $\frac{4m}{3mn} + 2$ (14) $2x - 5 - \frac{x-8}{x+4}$ (15) $\frac{4}{a-3} + \frac{9}{a-5}$

(16) $\frac{16}{x^2-16} + \frac{2}{x-4}$ (17) $\frac{2-5m}{m-9} + \frac{4m-5}{y-m}$ (18) $\frac{y-5}{y^2-3y-10} + \frac{y}{y^2+y-2}$

(19) $\frac{5}{2x-12} - \frac{20}{x^2-4x-12}$ (20) $\frac{2p-3}{p^2-5p+6} - \frac{5}{p^2-9}$ (21) $\frac{1}{5n} - \frac{3}{4} + \frac{7}{10n}$

(22) $\frac{2a}{a-3} - \frac{2a}{a+3} + \frac{36}{a^2-9}$ (23) $\frac{1}{x^2-y} + \frac{x+y}{x-y}$ (24) $\frac{r+6}{r^2+2r} - \frac{1}{r+2}$

25. همنسة: إذا كانت العبارات: $\frac{10}{x-4}, \frac{5x}{2}, \frac{20}{x+4}$ ، نحلّ أطوال أضلاع مثلث، فاقبب عبارة تمثل محيط المثلث في أبسط صورة: $5(x^2 - 4x - 16)$

26. هواميد: يسير قارب في نهر سرعة التيار فيه 2 mi/h. فإذا كانت r تمثل سرعة القارب في المياه الراكدة، فإن $(r+2)$ تمثل سرعته في اتجاه التيار، و $(r-2)$ تمثل سرعته عكس اتجاه التيار. إذا قطع القارب مسافة 2 mi في اتجاه التيار ثم عاد إلى نقطة البداية. فاستعمل قانون الزمن $t = \frac{d}{v}$ ، لكتابة عبارة نسبة تمثل الزمن اللازم لإتمام هذه الرحلة في أبسط صورة، حيث تمثل d المسافة المقطوعة، و v السرعة.

5

الفصل 5، العلاقات والدوال النسبية

15

المصدر: الثاني الثانوي

ملاحظات المعلم

تمثيل دوال المقلوب بيانياً Graphing Reciprocal Functions

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً.

الدرس 5-3

تحديد خصائص دوال المقلوب.

تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانياً.

ما بعد الدرس 5-3

تمثيل الدوال النسبية بيانياً باستعمال خطوط التقارب.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- علام يعتمد عدد الأيام التي يحتاج إليها الطلبة لجمع المبلغ؟ يعتمد على عدد الطلبة المشاركين في التبرع.
- ماذا يحدث لقيمة c كلما زادت قيمة n ؟ تقل.
- ما أصغر عدد كلي يمكن أن يكون قيمة n ؟ 1
- ما أكبر عدد كلي يمكن أن يكون قيمة n ؟ عدد الطلبة جميعهم

لماذا؟

خطّطت مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يومياً، فإذا كان عدد الطلاب n طالباً، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

فيما سبق:

درست تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً.

والآن:

- أحد خصائص دوال المقلوب.
- أمثل تحويلات دوال المقلوب بيانياً.

المفردات:

خط التقارب
asymptote

خط التقارب الرأسي
vertical asymptote

خط التقارب الأفقي
horizontal asymptote

دالة المقلوب
reciprocal function

القطع الزائد
hyperbola

www.obeikaneducation.com

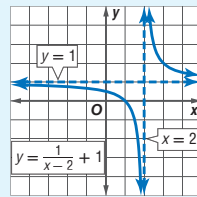


خطوط التقارب الرأسية والأفقية خط التقارب لدالة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة. ولدالة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ عند القيمة المستثناة من مجالها، و**خط تقارب أفقي** يبين سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة.

مفهوم أساسي

خطوط التقارب للدالة $y = \frac{a}{x-b} + c$

التعبير اللفظي: للدالة النسبية $y = \frac{a}{x-b} + c$, $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفراً، أي أن خط التقارب الرأسي للدالة هو $x = b$ ، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.



مثال:

وأما مجال الدالة $y = \frac{a}{x-b} + c$ فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = b$ ، وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $y = c$ ، ولأنه لا يمكن رسم هذه الدالة دون رفع القلم عن الورقة؛ لذا اختر قيمًا لـ x على جانبي خط التقارب الرأسي لترسم جزأي منحنى الدالة.

تمثل الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب، و**دالة المقلوب** التي سندرسها هي الدالة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي

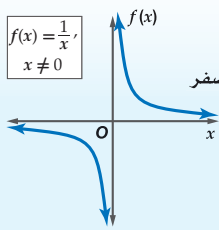
الدالة الرئيسية (الأم) لدوال المقلوب

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

الدالة الرئيسية (الأم):

قطع زائد

شكل التمثيل البياني:



جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر

المجال والمدى:

$$y = 0 \text{ و } x = 0$$

خطا التقارب:

لا يوجد

المقطعان:

تكون الدالة غير معرفة عندما: $x = 0$

مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (27)	• تنويع التعليم، ص (25, 27)	• تنويع التعليم، ص (25)
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

مجال دالة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالة عندها معرفة.

$$h(x) = \frac{3}{x}, \quad g(x) = \frac{4}{x-5}, \quad f(x) = \frac{-3}{x+2} \quad \text{فمثلاً الدوال:}$$

$$x = 0 \quad x = 5 \quad x = -2 \quad \text{غير معرفة عندما:}$$

خطوط التقارب الرأسية

والأفقية

مثال 1 يبين طريقة إيجاد القيم التي تجعل الدالة النسبية غير معرفة.

مثال 2 يبين طريقة تمثيل دالة المقلوب بيانياً.

مثال 3 يبين طريقة تحديد خصائص دوال المقلوب.

التقويم التكويني

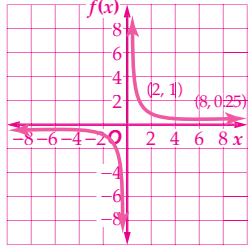
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

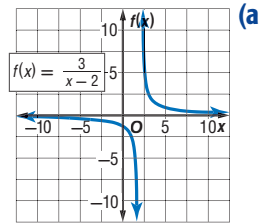
1 حدد قيم x التي تكون الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 + 5x - 24}$ عندها غير معرفة.

معرفة. $x = 3$ و $x = -8$

2 مثل الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$ بيانياً.



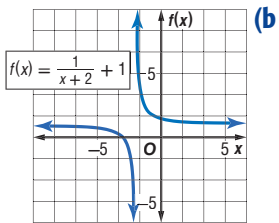
3 حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:



خطوط التقارب: $x = 2$ و $y = 0$

المجال: $\{x | x \neq 2\}$

المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



خطوط التقارب: $x = -2$

المجال: $\{x | x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 1\}$

مثال 1

حدد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرفة.

أوجد قيمة x التي يساوي المقام عندها صفراً.

$$2x + 5 = 0$$

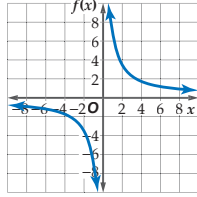
$$x = -\frac{5}{2}$$

الدالة غير معرفة عندما $x = -\frac{5}{2}$.

تحقق من فهمك

لكل دالة مما يأتي، حدد قيمة x التي تجعلها غير معرفة:

$$f(x) = \frac{7}{3x+2} \quad (1B) \quad f(x) = \frac{2}{x-1} \quad (1A)$$



وقد لا تكون بعض القيم منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثل زمناً، أو مسافة، أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني.

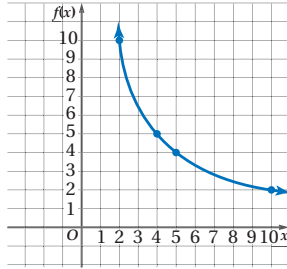
مثال 2 من واقع الحياة

تمثيل دالة المقلوب بيانياً

سفر: تمثل الدالة $f(x) = \frac{20}{x}$ بيانياً، حيث تمثل x عدد الأشخاص في منطاد هوائي، وتمثل $f(x)$ متوسط المساحة المخصصة لكل شخص بالأقدام المربعة.

عدد الأشخاص x	10	5	4	2
المساحة المخصصة للشخص $f(x)$	2	4	5	10

بما أن عدد الأشخاص لا يكون صفراً أو سالباً، لذا استعمل الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للمتغير x .



عين النقاط (10, 2)، (5, 4)، (4, 5)، (2, 10) في المستوى الإحداثي وصل بينها بخط منحنٍ. وبما أن الدالة غير معرفة عند $x = 0$ ، فإن لها خط تقارب رأسي هو $x = 0$ ؛ أي أن منحنها يقترب من المستقيم $x = 0$ (المحور y) ولا يمسه، وبالمثل للدالة خط تقارب أفقي $y = 0$ (المحور x)؛ أي أن منحنها يقترب من المستقيم $y = 0$ ولا يمسه، لذا مد المنحنى الذي رسمته في اتجاه كل من المحورين x ، y الموجبين، ولكن دون أن يمسا أيًا منهما، كما هو مبين في الشكل المجاور.

انظر ملحق الإجابات

تحقق من فهمك

2 مستطيل مساحته 18 cm^2 ، والدالة $l = \frac{18}{w}$ تبين العلاقة بين طوله وعرضه. مثل هذه الدالة بيانياً.

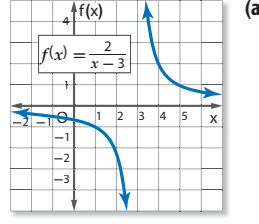
الدرس 5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً 25

تنويع التعليم

توسع اشرح الأفكار الآتية:

- نقول إن الدالة $f(x)$ دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل x في المجال. ويكون التمثيل البياني للدالة الزوجية متماثلاً حول المحور y .
 - نقول إن الدالة $f(x)$ دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x في المجال. ويكون التمثيل البياني للدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.
- وجه السؤال الآتي إلى الطلبة: هل الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ فردية أم زوجية؟ فردية

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:



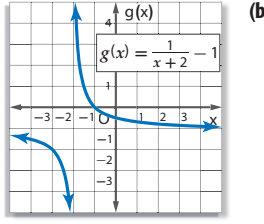
حدد قيمة x التي تكون الدالة $f(x)$ عندها غير معرفة.

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرفة عند $x = 3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$.

كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلت قيم x الأقل من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$.
مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3. أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.



حدد قيمة x التي تكون الدالة $g(x)$ عندها غير معرفة.

$$x + 2 = 0$$

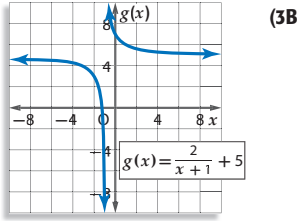
$$x = -2$$

$g(x)$ غير معرفة عند $x = -2$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

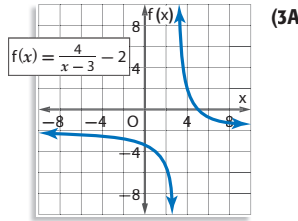
كلما زادت قيم x الأكبر من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1 أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = -1$.
مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2. أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1.

تحقق من فهمك

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:



(3B)



(3A)

$y = -2$ (3A)
 $x = 3$,
المجال $\{x | x \neq 3\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq -2\}$
 $y = 5$ (3B)
 $x = -1$,
المجال $\{x | x \neq -1\}$
المدى $\{g(x) | g(x) \neq 5\}$

المحتوى الرياضي

خطوط التقارب إن وجود خط تقارب لدالة معينة يعني أن هناك قيمة مفقودة لأحد المتغيرين. فخط التقارب الرأسي يعني أن هناك قيمة للمتغير x مستثناة من مجال الدالة، وكذلك خط التقارب الأفقي يعني أن هناك قيمة للمتغير y مستثناة من مداها.

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

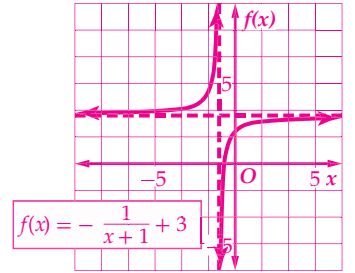
مثال 4 يوضح تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب.

مثال 5 يبين أن المجال المنطقي للدالة التي تمثل موقفًا من واقع الحياة هو جزء من مجال الدالة.

مثال إضافي

مثال 4 كلا من الدالتين الآتيتين بيانيًا، وحدد مجال كل منهما ومداها:

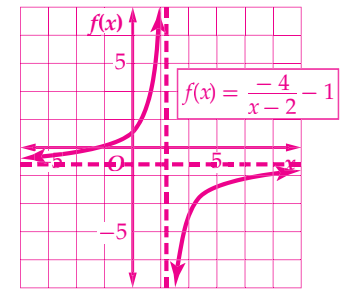
$$f(x) = -\frac{1}{x+1} + 3 \quad (a)$$



المجال $\{x | x \neq -1\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \neq 3\}$

$$f(x) = \frac{-4}{x-2} - 1 \quad (b)$$



المجال $\{x | x \neq 2\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \neq -1\}$

تنبيه

تجنب الأخطاء: اقترح على الطلبة أن يختاروا

ورقة رسم بياني ذات تقسيمات كبيرة لمساعدتهم في ترقيم الإحداثيات بالأعداد؛ وذلك لتحديد النقاط ذات الإحداثيات المقربة إلى أقرب جزء من عشرة. وبين لهم أنهم قد لا يتمكنون من رؤية التمثيل البياني للدالة كاملاً إلا عند استعمالهم الآلة الحاسبة البيانية أو برنامجاً حاسوبياً.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل

برنامج رسم لعرض المستوى

الإحداثي ثم تمثيل الدالة $f(x)$ بيانيًا.

واطلب إلى مجموعة من الطلبة

تمثيل الدالة $\frac{1}{f(x)}$ على السبورة كما

يتخلونها.

ثم استعمل برنامج الرسم لتمثيل

الدالة $\frac{1}{f(x)}$ بيانيًا، واطلب إليهم أن

يقارنوا إجاباتهم بالإجابة الصحيحة.

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب يمكنك تطبيق ما تعلمته في أثناء دراستك تحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على فهم التمثيل البياني لدوال المقلوب.

أضف إلى
مطوياتك

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

مفهوم أساسي

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$$

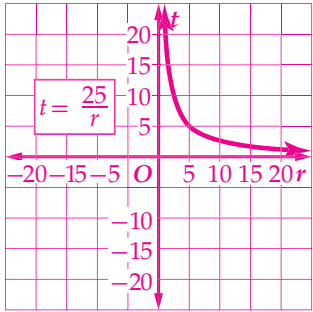
إزاحة رأسية: k	إزاحة أفقية: h
إزاحة بمقدار $ k $ وحدة إلى أعلى إذا كانت k موجبة. إزاحة بمقدار $ k $ وحدة إلى أسفل إذا كانت k سالبة. خط تقارب أفقي عند $y = k$.	إزاحة بمقدار $ h $ وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة. إزاحة بمقدار $ h $ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة. خط تقارب رأسي عند $x = h$.
المجال: $\{x x \neq h\}$ ، المدى: $\{f(x) f(x) \neq k\}$	
الشكل والاتجاه: a	
- إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x. - إذا كانت $a > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً (يتمدد في اتجاه المحور y). - إذا كانت $0 < a < 1$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسياً (يتقلص في اتجاه المحور y).	

مثال إضافي

5

قطار: تبلغ المسافة بين مدينتين 25 ميلاً، يقطعها أحد القطارات دون توقف.

(a) اكتب دالة تمثل الزمن الذي يستغرقه القطار لقطع هذه المسافة بدلالة السرعة، ثم مثل هذه الدالة بيانياً. $t = \frac{25}{r}$



(b) وضح أي قيود يمكن وضعها على كل من المجال والمدى في هذه الحالة. **المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة هنا ليس لها معنى. وهناك قيد إضافي على المجال؛ لأن لسرعة القطار قيمة عظمى وقيمة صغرى.**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-6 للتأكد من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

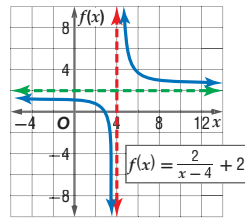
4 مثال

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

مثل كلا من الدالتين الآتيتين بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منهما:

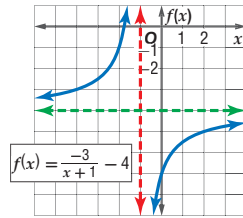
$$(a) f(x) = \frac{2}{x-4} + 2$$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.
 $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسياً (يقترّب منحناه من المحور y).
 $h = 4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى اليمين.
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 4$.
 $k = 2$: إزاحة التمثيل البياني وحدتين إلى أعلى.
يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 2$.
المجال: $\{x | x \neq 4\}$ ، المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$



$$(b) f(x) = \frac{-3}{x+1} - 4$$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.
 $a = -3$: يتسع التمثيل البياني رأسياً (يقترّب منحناه من المحور y)، وينعكس حول المحور x .
 $h = -1$: إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة إلى اليسار.
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$.
 $k = -4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى أسفل.
يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -4$.
المجال: $\{x | x \neq -1\}$ ، المدى: $\{f(x) | f(x) \neq -4\}$



4A, 4B انظر ملحق الإجابات

تحقق من فهمك

مثل كلا من الدالتين الآتيتين بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منهما:

$$(4A) g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$$

$$(4A) f(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$$

يمكن استعمال دوال المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

الدرس 5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً 27

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

تمتد خطوط التقارب لدالة المقلوب بمحاذاة التمثيل البياني للدالة، وتتقاطع عند النقطة (h, k) .

إرشادات للدراسة

يعتمد الربع الذي يقع فيه منحنى الدالة على إشارة a ، فإذا كانت موجبة فإن المنحنى يقع في الربعين الأول والثالث، وإذا كانت سالبة فإن المنحنى يقع في الربعين الثاني والرابع.

تنوع التعليم

دون ضمن

الطلبة البصريون والمكانيون اطلب إلى الطلبة أن يمثلوا إحدى دوال هذا الدرس بيانياً على ورقة رسم بياني كبيرة الحجم؛ لمشاهدوا كيف يقترّب تمثيل الدالة البياني من خط التقارب ولا يمسّه. وشجعهم على استعمال أقلام تلوين مختلفة لتوضيح الفكرة.

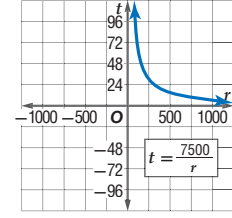


الربط مع الحياة

الخطوط الجوية العربية السعودية هي شركة الطيران الرسمية في المملكة، وتتخذ من مطار الملك عبدالعزيز الدولي بجدة مركزاً رئيساً لعملياتها، وتقدم خدماتها إلى أكثر من 75 وجهة في: آسيا، أفريقيا، أوروبا، الشرق الأوسط، أمريكا الشمالية.

تنبيه لحل أسئلة

ورق الرسم البياني يحتاج الطلبة إلى ورق الرسم البياني لحل الأسئلة 2-6, 10-22, 24, 36, 38



المعادلة الأصلية

$$rt = d$$

بقسمة كلا الطرفين على r

$$t = \frac{d}{r}$$

$$d = 7500$$

$$t = \frac{7500}{r}$$

مثل الدالة $t = \frac{7500}{r}$ بيانياً.

(b) وضع أية قيود يمكن وضعها على كل من المجال والمدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة في هذه الحالة غير منطقية. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن للطائرة سرعة عظيمة، وأخرى صغيرة تستطيع الطيران بها.

(5) انظر ملحق الإجابات

تحقق من فهمك

(5) رحلات: نطّم طلبة الصف الثاني الثانوي رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالاً رسم اشتراك، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريال. اكتب دالة تمثل متوسط التكلفة الكلية للطالب الواحد ومثلها بيانياً. ووضح أية قيود يمكن وضعها على كل من المجال والمدى.

تأكد

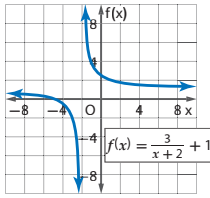
(1) حدّد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{5}{4x-8}$ غير معرفة. الدالة غير معرفة عند $x = 2$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منها: 2, 3. انظر ملحق الإجابات

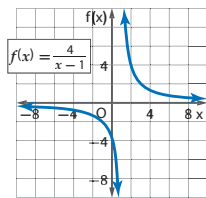
$$f(x) = \frac{2}{x+3} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad (2)$$

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:



(5)



(4)

مثال 1

المثالان 4, 2

مثال 3

$$x = 1, y = 0 \quad (4)$$

$$\{x | x \neq 1\} = \text{المجال}$$

$$\{f(x) | f(x) \neq 0\} = \text{المدى}$$

$$x = -2, y = 1 \quad (5)$$

$$\{x | x \neq -2\} = \text{المجال}$$

$$\{f(x) | f(x) \neq 1\} = \text{المدى}$$

مثال 5

(6) هدية جماعية: يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالاً إلى أحد أصدقائهم.

(a) فإذا كانت c تمثل المبلغ الذي يدفعه كل منهم، و f عدد الأصدقاء، فاكتب دالة تمثل المبلغ الذي يدفعه كل منهم بدلالة عدد الأصدقاء. $c = \frac{150}{f}$

(b) مثل هذه الدالة بيانياً. انظر ملحق الإجابات

(c) وضح أية قيود يمكن وضعها على كل من المجال والمدى في هذه الحالة. انظر إجابات الطلبة

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
27-38, 20-24, 7-16	دون المتوسط
27-38, 21-25, 7-17 فردي	ضمن المتوسط
16-38	فوق المتوسط

مثال 1

حدّد قيمة x التي تجعل كل دالة فيما يأتي غير معرفة.

(7) $f(x) = \frac{5}{2x}$ عند $x = 0$ (8) $f(x) = \frac{x}{x-7}$ عند $x = 7$ (9) $f(x) = \frac{4}{3x+9}$ عند $x = -3$

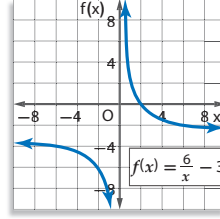
المثالان 4 , 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كلّ منها: (10-15) انظر ملحق الإجابات

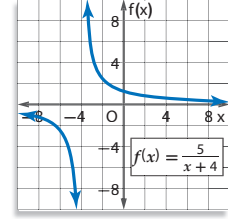
(10) $f(x) = \frac{3}{x}$ (11) $f(x) = \frac{-4}{x+2}$ (12) $f(x) = \frac{2}{x-6}$ (13) $f(x) = \frac{-2}{x-5}$ (14) $f(x) = \frac{3}{x-7} - 8$ (15) $f(x) = \frac{9}{x+3} + 6$

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلّ من الدالتين الآتيتين:

مثال 3



(17)



(16)

(16) $x = -4, y = 0$
المجال = $\{x | x \neq -4\}$
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$
(17) $x = 0, y = -3$
المجال = $\{x | x \neq 0\}$
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq -3\}$

(18) **كيمياء:** لدى محمد 200 g من سائل مجهول. وتساعد معرفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

مثال 5

(a) اكتب دالة تمثل كثافة هذا السائل بدلالة حجمه. $d = \frac{200}{v}$

(b) مثّل هذه الدالة بيانيًا. انظر ملحق الإجابات

(c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب والمجال والمدى لهذه الدالة.

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كلّ منها: (19-21) انظر ملحق الإجابات

(21) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ (20) $f(x) = \frac{2}{4x+1}$ (22) $f(x) = \frac{5}{3x}$

(22) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ، $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) **جدوليًا:** أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالتين. (22a-d) انظر ملحق الإجابات

(b) **بيانيًا:** استعمل القيم في الجدول لتمثيل كلتا الدالتين بيانيًا.

(c) **لفظيًا:** قارن بين التمثيلين البيانيين، ثم حدد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

(d) **تحليليًا:** اكتب تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوال التي على الصورة $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ، عندما يكون n عددًا زوجيًا، وعندما يكون n عددًا فرديًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

(23) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة مقلوب يكون تمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x = -4$ ، وخط تقارب أفقي عند $y = 6$. إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{1}{x+4} + 6$

الدرس 5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا 29

4 التقويم

تعلم لاحق اسأل الطلبة كيف سيساعدهم التدريب على تمثيل دوال المقلوب في تمثيل الدوال النسبية.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

(24) **تبرير:** قارن بين التمثيلين البيانيين لكل زوج من المعادلات الآتية موضحاً أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

$$y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x+5} \quad (c) \quad y = \frac{1}{x}, y = 4\left(\frac{1}{x}\right) \quad (b) \quad y = \frac{1}{x}, y - 7 = \frac{1}{x} \quad (a)$$

(d) استعمل ملاحظاتك في الفروع a-c لتمثيل الدالة $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانياً دون استعمال جدول قيم. (24a-c) **انظر الهامش.**

(25) **أيها لا ينتمي؟** حدد الدالة المختلفة عن الدوال الثلاث الأخرى، ووضح إجابتك. **انظر الهامش**

$$j(x) = \frac{20}{x-7}$$

$$h(x) = \frac{5}{x^2 + 2x + 1}$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{3}{x+1}$$

(26) **تحد:** اكتب دالتي مقلوب، يكون للتمثيل البياني لكل منهما خطا التقارب نفسهما، ثم مثل هاتين الدالتين بيانياً. **انظر ملحق الإجابات**

(27) **اكتب:** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضح كيف يمكن استعمال دوال المقلوب عند جمع التبرعات. وبين لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالة فقط منطقياً بالنسبة لسياق الموقف. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

(29) ما قيمة العبارة $(x+y)(x+y)$ ، إذا كانت

$$A \quad ?xy = -3, x^2 + y^2 = 10$$

4 A

7 B

13 C

16 D

(28) ما مجال الدالة $f(x) = \frac{8}{x+3}$ ؟ D

A مجموعة الأعداد الحقيقية.

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -3.

مراجعة تراكمية

بسط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 5-1)

$$\frac{2x+y}{2x-y} \cdot \frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}} \quad (32)$$

$$\frac{m+q}{m^2+q^2} \cdot \frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}} \quad (31)$$

$$-2p \cdot \frac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}} \quad (30)$$

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في كل مما يأتي: (الدرس 4-1) (33-35) **انظر الهامش**

$$f(x) = 2x^2 \quad (35)$$

$$f(x) = 2x-3 \quad (34)$$

$$f(x) = x+9 \quad (33)$$

$$g(x) = 8-x$$

$$g(x) = 4x+9$$

$$g(x) = x-9$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منها: (الدرسان 1-3، 1-2) (36-38) **انظر ملحق الإجابات**

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (38)$$

$$f(x) = |x-5| \quad (37)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (36)$$

30 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

إجابات:

(24a) المنحنى الأول له خط تقارب رأسي

عند $x = 0$ وخط تقارب أفقي عند

$y = 0$. والمنحنى الثاني ناتج عن

انسحاب مقداره 7 وحدات إلى

الأعلى للمنحنى الأول وله خط

تقارب رأسي عند $x = 0$ وأفقي عند

$y = 7$.

(24b) لكلا المنحنيين خط تقارب رأسي

عند $x = 0$ وخط تقارب أفقي

عند $y = 0$. المنحنى الثاني تمتد

للمنحنى الأول بعامل قدره 4.

(24c) المنحنى الأول له خط تقارب رأسي

عند $x = 0$ وأفقي عند $y = 0$.

المنحنى الثاني ناتج عن انسحاب

للمنحنى الأول مقداره 5 وحدات

باتجاه اليسار وله خط تقارب رأسي

عند $x = -5$ وأفقي عند $y = 0$.

(25) إجابة ممكنة: $g(x)$ ؛ لأن كل الدوال

الأخرى لا يوجد فيها متغيرات في

البسط

(27) دوال المقلوب تساعد في معرفة عدد

الأيام التي يحتاجها الطلبة لجمع

مبلغ التبرع، أو لمعرفة عدد الطلبة

المشاركين في التبرع.

جزء التمثيل البياني الواقع في الربع

الأول من المستوى الإحداثي هو

المنطقي فقط؛ لأن كلا من عدد الطلبة

والمبالغ يجب أن يكون قيمًا موجبة.

(33)

$$(f+g)(x) = 2x; (f-g)(x) = 18;$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 - 81;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+9}{x-9}, x \neq 9$$

$$(f+g)(x) = 6x+6; (f-g)(x) = -2x-12; \quad (34)$$

$$(f \cdot g)(x) = 8x^2 + 6x - 27;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-3}{4x+9}, x \neq -\frac{9}{4}$$

$$(f+g)(x) = 2x^2 - x + 8; (f-g)(x) = 2x^2 + x - 8; (f \cdot g)(x) = -2x^3 + 16x^2; \quad (35)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2}{8-x}, x \neq 8$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون	ضمن	فوق																											
تدريبات إعادة التعليم (16) الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-3 تدريبات إعادة التعليم تمثيل دوال المقلوب بيانياً خطوط التقارب الرأسية والأفقية <table border="1"> <thead> <tr> <th>الدالة الرئيسية (الأ) لدوال المقلوب</th> <th>الدالة الرئيسية (الأ)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$y = \frac{1}{x}$</td> <td>$y = \frac{1}{x}$</td> </tr> <tr> <td>شكل التمثيل البياني</td> <td>قطع زائد</td> </tr> <tr> <td>المجال</td> <td>جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر</td> </tr> <tr> <td>المدى</td> <td>جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر</td> </tr> <tr> <td>النقطة</td> <td>متمثل حول المنظم $x = y$</td> </tr> <tr> <td>المقطعان</td> <td>لا يوجد</td> </tr> <tr> <td>خطا التقارب</td> <td>المحور x والمحور y</td> </tr> </tbody> </table> مثال: $f(x) = \frac{3}{x+2}$ - حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى للدالة: $f(x) = \frac{3}{x+2}$ من قيم x التي تكون عندها الدالة غير معرّفة بمساواة المقام بالصفر. $x = -2$ إذن $x + 2 = 0$ فالدالة غير معرفة عندما $x = -2$، ولذا فإن لها خط تقارب رأسي عند $x = -2$. وإن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما تقتصت قيم x عن -2 بلا حدود، وكلما زادت قيم x عن -2 بلا حدود أيضاً. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $f(x) = 0$. بما أن هذه الدالة هي جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2 وأما مدداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر. تعاريف حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدوال الآتية: (1) $f(x) = \frac{1}{x}$ (2) $f(x) = \frac{-3}{x-1}$ (3) $f(x) = \frac{-4}{x+1} + 2$ الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية	الدالة الرئيسية (الأ) لدوال المقلوب	الدالة الرئيسية (الأ)	$y = \frac{1}{x}$	$y = \frac{1}{x}$	شكل التمثيل البياني	قطع زائد	المجال	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر	المدى	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر	النقطة	متمثل حول المنظم $x = y$	المقطعان	لا يوجد	خطا التقارب	المحور x والمحور y	تدريبات إعادة التعليم (17) الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-3 تدريبات إعادة التعليم تمثيل دوال المقلوب بيانياً تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب <table border="1"> <thead> <tr> <th>صورة للمعادلة</th> <th>صورة للمعادلة</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f(x) = \frac{1}{x}$</td> <td>$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ حيث الدالة الرئيسة (الأ) هي $y = \frac{1}{x}$</td> </tr> <tr> <td>إزاحة أفقية</td> <td>ينتقل خط التقارب الرأسي إلى $x = h$</td> </tr> <tr> <td>إزاحة رأسية</td> <td>ينتقل خط التقارب الأفقي إلى $y = k$</td> </tr> <tr> <td>انعكاس</td> <td>يتعكس الشكل حول المحور x إذا كانت $a < 0$</td> </tr> <tr> <td>تضييق واتساع</td> <td>يتغير التمثيل البياني رأسياً عندما $a < 1$ ويتسع رأسياً عندما $a > 1$</td> </tr> </tbody> </table> مثال: $f(x) = \frac{-1}{x+1} - 3$ مثل الدالة $f(x) = \frac{-1}{x+1} - 3$ بيانياً وحدد مجالها ومدنها. التمثيل البياني لهذه الدالة تحوّل تمثيل الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ حيث $a = -1$، $h = -1$، $k = -3$. $a = -1$: يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$ $k = -3$: يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -3$ المجال: $x \neq -1$ والمدى: $y \neq -3$ تعاريف مثل كل دالة $y = \frac{a}{x-h} + k$ بيانياً، وحدد مجالها ومدنها: (1) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ (2) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$ (3) $f(x) = \frac{-1}{x-3}$ الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية	صورة للمعادلة	صورة للمعادلة	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ حيث الدالة الرئيسة (الأ) هي $y = \frac{1}{x}$	إزاحة أفقية	ينتقل خط التقارب الرأسي إلى $x = h$	إزاحة رأسية	ينتقل خط التقارب الأفقي إلى $y = k$	انعكاس	يتعكس الشكل حول المحور x إذا كانت $a < 0$	تضييق واتساع	يتغير التمثيل البياني رأسياً عندما $ a < 1$ ويتسع رأسياً عندما $ a > 1$
الدالة الرئيسية (الأ) لدوال المقلوب	الدالة الرئيسية (الأ)																												
$y = \frac{1}{x}$	$y = \frac{1}{x}$																												
شكل التمثيل البياني	قطع زائد																												
المجال	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر																												
المدى	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر																												
النقطة	متمثل حول المنظم $x = y$																												
المقطعان	لا يوجد																												
خطا التقارب	المحور x والمحور y																												
صورة للمعادلة	صورة للمعادلة																												
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ حيث الدالة الرئيسة (الأ) هي $y = \frac{1}{x}$																												
إزاحة أفقية	ينتقل خط التقارب الرأسي إلى $x = h$																												
إزاحة رأسية	ينتقل خط التقارب الأفقي إلى $y = k$																												
انعكاس	يتعكس الشكل حول المحور x إذا كانت $a < 0$																												
تضييق واتساع	يتغير التمثيل البياني رأسياً عندما $ a < 1$ ويتسع رأسياً عندما $ a > 1$																												
تدريبات المهارات (18) الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-3 تدريبات المهارات تمثيل دوال المقلوب بيانياً حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين: (1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (2) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 4$ خطوط التقارب: $x = 1$، $y = 0$ المجال: $\{x x \neq 1\}$ المدى: $\{y y \neq 0\}$ مثال: كل دالة $y = \frac{a}{x-h} + k$ بيانياً، وحدد مجالها ومدنها: (3) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 3$ خطوط التقارب: $x = -3$، $y = -3$ المجال: $\{x x \neq -3\}$ المدى: $\{y y \neq -3\}$ (4) $f(x) = \frac{-1}{x+5} - 6$ خطوط التقارب: $x = -5$، $y = -6$ المجال: $\{x x \neq -5\}$ المدى: $\{y y \neq -6\}$ (5) $f(x) = \frac{-1}{x+1} + 3$ خطوط التقارب: $x = -1$، $y = 3$ المجال: $\{x x \neq -1\}$ المدى: $\{y y \neq 3\}$ (6) $f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$ خطوط التقارب: $x = -4$، $y = -2$ المجال: $\{x x \neq -4\}$ المدى: $\{y y \neq -2\}$ الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية	تدريبات حل المسألة (19) الاسم: _____ التاريخ: _____ 5-3 تدريبات حل المسألة تمثيل دوال المقلوب بيانياً (1) رحلة: استأجرت أسرة سيارة للذهاب في رحلة. استأجرت السيارة بكلفة 375 ريالاً بالإضافة إلى 1.2 ريال لكل كيلو متر. (a) اكتب معادلة تربط متوسط التكلفة لكل كيلومتر واحد بعدد الكيلومترات المقطوعة. $C = \frac{375}{n} + 1.2$ (b) وقّص آية قيود يمكنك وضعها على كل من المجال والمدى في هذه الحالة. (ج) المجال والمدى هما الأعداد الحقيقية الموجبة، فلا يمكن أن تكون المسافة صفراً أو عدداً سالباً. (2) طائرات، من المقرر أن تقلع طائرة من جازان في رحلة مسافتها 800 ميل إلى الدمام عند الوقت $t = 0$. وقد تأخر موعد إقلاع الطائرة ساعتين. المعادلات: $r = \frac{800}{t}$، $r = \frac{800}{t-2}$ على صورة دالة بالنسبة للزمن، مثل هاتين المعادلتين على المستوى الإحداثي أدناه على أن يمثل المحور الأفقي الزمن t، ويمثل المحور الرأسي السرعة r. ما العلاقة بين المنحنيين؟ (3) علم الحياة: تغير عدد الأرانب في تجمع ما تبعاً للدالة: $P(t) = \frac{40}{t+2} + 10$، على أن تثل $P(t)$ عدد الأرانب بعد t شهراً، ماذا يحدث لعدد الأرانب على المدى البعيد؟ يثبت عدد الأرانب عند 10 أرانب. (4) حاسب آلي: تنق شركة تصنع أجهزة حاسب آلي مبلغ 20000 ريال على صورة أجور وثققات تشغيل، بالإضافة إلى 1740 ريالاً لقطع غيار كل جهاز. (a) اكتب معادلة تربط متوسط تكلفة صنع جهاز الحاسب الواحد بعدد الأجهزة التي تصنعها الشركة. $C = \frac{20000}{n} + 1740$ (b) مثل الدالة التي وجدتها في الفرع 4 بيانياً. (c) ما الحد الأدنى لعدد أجهزة الحاسب الآلي التي تبين أن تصنعها الشركة حتى يكون متوسط تكلفة الجهاز الواحد أقل من 2740 ريالاً؟ الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية																												



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق
ضمن
دون

كتاب التمارين (6)

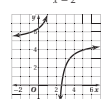
فوق
ضمن

التدريبات الإثرائية (20)

5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

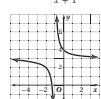
حدّد خطوط التقارب، والمجال والمدى لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = \frac{-3}{x-2} + 5 \quad (3)$$



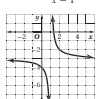
خطوط التقارب: $x = 2, y = 5$
المجال: $\{x \mid x \neq 2\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 5\}$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + 3 \quad (2)$$



خطوط التقارب: $x = -1, y = 3$
المجال: $\{x \mid x \neq -1\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 3\}$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - 3 \quad (1)$$



خطوط التقارب: $x = 1, y = -3$
المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$
المدى: $\{y \mid y \neq -3\}$

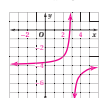
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منها:

$$f(x) = \frac{3}{x-2} + 4 \quad (6)$$



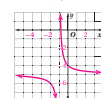
المجال: $\{x \mid x \neq 2\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 4\}$

$$f(x) = \frac{-1}{x-3} - 4 \quad (5)$$



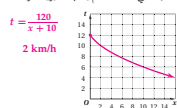
المجال: $\{x \mid x \neq 3\}$
المدى: $\{y \mid y \neq -4\}$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - 5 \quad (4)$$



المجال: $\{x \mid x \neq -1\}$
المدى: $\{y \mid y \neq -5\}$

(7) سباق، شارك سعود في سباق للدراجات الهوائية مسافته 120 km. إذا كانت سرعته 10 km/h، وأراد أن يزيد بها بمقدار x km/h، فاكتب دالة تربط بين x والزمن اللازم لإنهاء السباق، ومثلها بيانياً، وإذا أراد سعود أن ينهي السباق في 10 h، فكم يجب أن يزيد سرعته؟



6

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 التدريبات الإثرائية

خصائص المقلوب والتمثيل البياني لدوال مقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، $a(x) \neq 0$

يمكنك استعمال الخصائص الأساسية والتمثيل البياني للدالة الخطية $h(x)$ لتمثيل الدالة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، $a(x) \neq 0$

بيانياً بشكل تقريبي.

بعض الخصائص الأساسية للمقلوب عدد:

- مقلوب العدد 0 غير معرف.
- للمقلوب إشارة العدد نفسه.
- مقلوب العدد 1 هو العدد 1.
- كلما كبر العدد الموجب بدرجة كبيرة جداً كلما اقترب مقلوبه من العدد 0.



مثال
متممًا على الشكل الجاور
مثل الدالة $f(x) = \frac{10}{a(x)}$ بيانياً بشكل تقريبي.

كون جدولاً يتضمن بعض النقاط لتساعدك في التمثيل البياني، ثم صل بينها:

x	10	5	0.1	0	-0.1	-5	-10
f(x)	1	2	100	غير معرف	-10	-2	-1

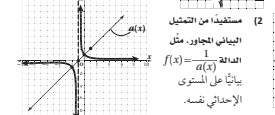
وبالاستفادة من الخصائص الأساسية للمقلوب

والتمثيل البياني للدالة $h(x)$ ، فإن التمثيل البياني

للدالة $f(x) = \frac{10}{a(x)}$ يكون كما هو موضح

جانباً.

تمارين:



(1) مثل الدالة $f(x) = \frac{20}{a(x)}$ مستقيماً من

البياني الجاور. مثل

الدالة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ بيانياً على المستوى

الإحداثي نفسه.

20

الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية

ملاحظات المعلم

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

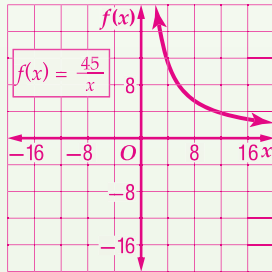
اختبار منتصف الفصل، ص (13).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 5-1 إلى 5-3 من خلال مطوياتهم.

إجابة

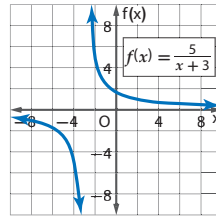
(22b)



(16) **سفر:** سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 mi عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 mi/h.

- (a) إذا كانت x تمثل السرعة الأولى، فاكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة. $\frac{50}{x}$ ساعة
- (b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة. $\frac{50}{x-15}$ ساعة
- (c) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة. $\frac{50(2x-15)}{x(x-15)}$

(17) حدد خطوط التقارب والمجال والمدى للدالة الآتية:



$x = -3, y = 0$
المجال: $\{x | x \neq -3\}$ ، المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

مثل كل دالة مما يأتي بياناً، وحدد مجال ومدى كل منها:

(18-21) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{6}{x-1} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{-2}{x} + 4 \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 5 \quad (20)$$

$$f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2 \quad (21)$$

(22) **شطائر:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

- (a) اكتب دالة تمثل هذا الموقف. $f(x) = \frac{45}{x}$
- (b) مثل هذه الدالة بياناً. انظر الهامش

$$\frac{(m+2)(m+5)}{3} (4)$$

$$\frac{2a^4b^2}{5} \cdot \frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c} \quad (2) \quad \frac{2y^4z}{9x^4} \cdot \frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y} \quad (1)$$

$$\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15} \quad (4) \quad \frac{2}{x+3} \cdot \frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18} \quad (3)$$

$$\frac{2y(y-2)}{3(y+2)} \cdot \frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}} \quad (6) \quad \frac{r^2+3r}{r+1} \cdot \frac{r+3}{3r} \quad (5)$$

(7) **اختيار من متعدد:** إذا كانت $r \neq \pm 2$ ، فأَيُّ مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$ ؟ B

$$\frac{r+2}{r-4} \quad C \quad \frac{r-2}{r+4} \quad A$$

$$\frac{r+4}{r+2} \quad D \quad \frac{r+4}{r-2} \quad B$$

(8) **اختيار من متعدد:** ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرفة ؟ C

$$-3, -1, 9 \quad C \quad -3, -1 \quad A$$

$$-1 \quad D \quad -9, 1, 3 \quad B$$

(9) أوجد LCM لكثيرتي الحدود x^2-x ، $3-3x$ $-3x(x-1)$

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{3y^2+2x}{6xy^3} \cdot \frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3} \quad (10)$$

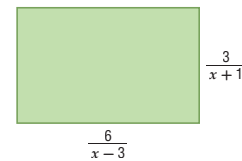
$$\frac{9n^2+8-48mn}{12mn^2} \cdot \frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n} \quad (11)$$

$$\frac{5r-6}{(r-6)(r+3)(r-2)} \cdot \frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6} \quad (12)$$

$$\frac{3x}{x+y} \cdot \frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y} \quad (13)$$

$$\frac{x^2+4x-7}{2(x-4)(x+1)} \cdot \frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8} \quad (14)$$

(15) أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه.



$$\frac{18x-6}{(x-3)(x+1)}$$

مخطط المعالجة

دون المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط	المستوى 1
أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا
أحد المصدرين الآتين:	فاختر	المصادر الآتية:	فاختر
تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).		مراجعة الدروس من 5-1 إلى 5-3.	
www.obeikaneducation.com		تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).	
		www.obeikaneducation.com	

تمثيل الدوال النسبية بيانياً Graphing Rational Functions



لماذا؟

اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالاً، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

$$C(p) = \frac{1.5p + 1350}{p}$$

يمكن استعمال الدالة النسبية لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
لتمثيل الدالة النسبية بيانياً يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصغار الدالة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

أضف إلى
مطوياتك

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مفهوم أساسي

التعبير اللغوي: إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x)$ ، $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما

عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

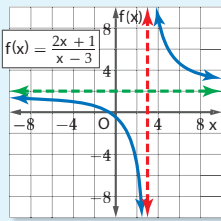
- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ ، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ ، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$$

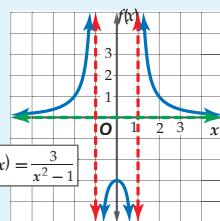
أمثلة:

يوجد خط تقارب أفقي واحد

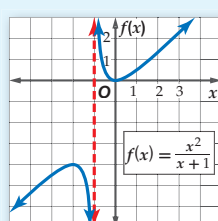
لا يوجد خط تقارب أفقي



خط التقارب الرأسي:
 $x = 3$
خط التقارب الأفقي:
 $y = 2$



خطا التقارب الرأسية:
 $x = -1, x = 1$
خط التقارب الأفقي:
 $y = 0$



خط التقارب الرأسي:
 $x = -1$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-4

تمثيل دوال المقلوب بيانياً.

الدرس 5-4

تمثيل دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية بيانياً.

تمثيل دوال نسبية لها نقاط انفصال بيانياً.

ما بعد الدرس 5-4

حل معادلات نسبية بيانياً.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- علام تعتمد تكلفة طباعة الصور؟
- تعتمد على عدد الصور المطبوعة.
- ماذا يحصل لقيمة الدالة $C(p)$ عندما تزداد قيمة p ؟ تناقص.
- هل يمكن أن تكون قيمة $C(p)$ صفراً؟

نعم، يوجد صفر للدالة عندما

$$p = \frac{-1350}{1.5}$$

غير منطقية بالنسبة لهذا الموقف.

مصادر الدرس 5-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (33, 37)	• تنويع التعليم، ص (34, 37)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

يمكن استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالة النسبية بيانياً، كما يمكن استعمالها لتوضيح عدد الأجزاء التي ينقسم إليها التمثيل البياني للدالة.

مثال 1

التمثيل البياني لدالة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانياً.

الخطوة 1: أوجد أصفار الدالة.

$$a(x) = 0 \quad x^2 = 0$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \quad x = 0$$

يوجد للدالة صفر عندما $x = 0$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يقطع المحور x عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 2: ارسم خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

$$b(x) = 0 \quad x - 1 = 0$$

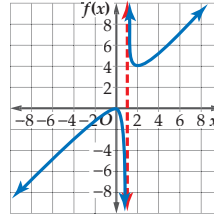
$$\text{بإضافة العدد 1 لكلا الطرفين} \quad x = 1$$

يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x = 1$.

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالة.

الخطوة 3: مثل بيانياً.

أنشئ جدول قيم للدالة لتجد أزواجاً مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.



x	$f(x)$
-3	-2.25
-2	-1.33
-1	-0.5
0	0
0.5	-0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5

تحقق من فهمك

1) مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$ بيانياً. انظر الهامش

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مثال 1 يبين طريقة تمثيل دالة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي.

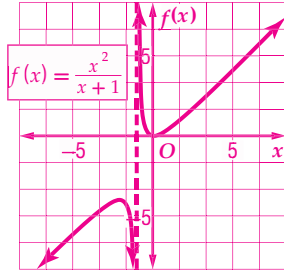
مثال 2 يبين أن المجال المنطقي للدالة التي تمثل موقعاً من واقع الحياة هو جزء من مجال الدالة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

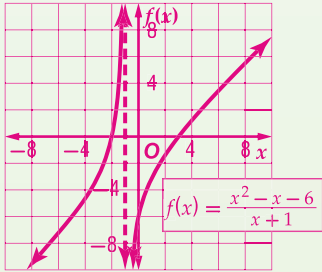
مثال إضافي

1) مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ بيانياً.



إجابة (تحقق من فهمك):

(1)



التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلبة إظهار خطوات تمثيل دالة نسبية بيانياً من خلال عرض تقديمي بعد أن يصفوا كيف يمكنهم إيجاد خطوط التقارب، مع استعمال جدول القيم لتمثيل الدالة.

تنويع التعليم

المتعلمون اللغويون / اللفظيون اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا قائمة من الإرشادات لمساعدة أي شخص يريد أن يمثل دالة نسبية بيانياً.

متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h وخلال عودته إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالصيغة $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

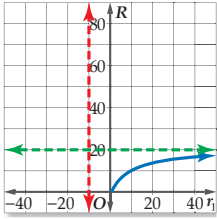
(a) إذا كان r_1 هو المتغير المستقل، و R هو المتغير التابع، فمثل الصيغة بيانياً عندما $r_2 = 10$ mi/h.

$$R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + 10} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$$

وتكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$.

و خط التقارب الأفقي هو $R = 20$.

مثل خطي التقارب والدالة بيانياً.



(b) ما مقطع المحور للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

(c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب؛ لذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية منطقية، وقيم R المنطقية هي بين 0 و 20.

تحقق من فهمك

(2) **رواتب:** تستعمل إحدى الشركات الدالة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثل هذه الدالة بيانياً. وحدد القيم المنطقية لمجال الدالة ومدىها في سياق المسألة، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟ **انظر الهامش**

نقطة الانفصال: يوجد في بعض الأحيان **نقطة انفصال** في التمثيل البياني للدالة النسبية، وتظهر هذه النقطة على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالة؛ لأن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقاط ومعرفة حولها.

مفهوم أساسي

نقطة الانفصال

التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث

$b(x) \neq 0$ وكان $x = c$ عاملاً

مشتركاً بين $a(x)$ و $b(x)$ ، فإنه

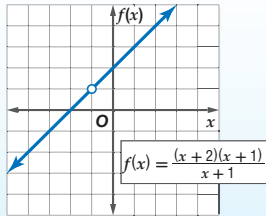
توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$

$$= x+2, x \neq -1$$

نقطة الانفصال هي:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$



الربط مع الحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

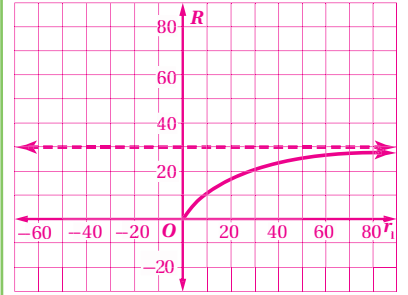
مثال إضافي

متوسط السرعة: استعمل

المعادلة في مثال 2 للإجابة عن الفقرات الآتية:

(a) مثل الصيغة بيانياً عندما

$$r_2 = 15 \text{ mi/h}$$



(b) ما مقطع المحور R ؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

(c) ما قيم المجال والمدى المنطقية

في سياق هذه المسألة؟ قيم r_1

الأكبر من أو تساوي صفراً، أما

قيم R فتتراوح بين 0, 30.

المحتوى الرياضي

نقطة الانفصال بما أن الانفصال

يكون عند نقطة والنقطة ليس لها أبعاد

فإننا نضع دائرة مفرغة على التمثيل

البياني لتوضيح نقطة الانفصال.

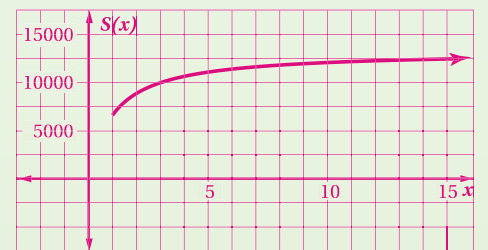
إجابة (تحقق من فهمك):

(2) سنوات الخبرة تبدأ من سنة وراتب

الموظف يبدأ 6875 ريالاً وخط

التقارب الأفقي يدل على أن سقف

راتب الموظف لا يتعدى 13500 ريال.



تنويع التعليم

فوق

توسّع حفّز الطلبة ليفسروا قواعد إيجاد خطوط التقارب الأفقية؛ لأن الدرس يذكر هذه القواعد ويترك

تفسيرها للطلبة ذوي القدرات العليا. ثم دّعم هذه المهمة بأن تطلب إليهم اختبار أشكال مختلفة من التمثيلات

البيانية لدوال نسبية تتغير فيها درجات كثيرات الحدود في كل من البسط والمقام، ومن ثم البحث عن أنماط

معينة لهذه الخطوط.

مثال 3

التمثيل البياني لدالة تتضمن نقطة انفصال

مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانياً .

لاحظ أن مجال الدالة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = x + 4$$

لذا فإن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو نفسه

التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$ ، مع وجود فجوة في

التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$ عندما $x = 4$.

تحقق من فهمك (3A, 3B) انظر الهامش

مثل كلا من الدالتين الآتيتين بيانياً:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5} \quad (3A)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9} \quad (3B)$$

تنبيه !

فجوات التمثيل

البياني تذكر أن

وجود عامل مشترك

بين البسط والمقام

يدل على وجود فجوة

في التمثيل البياني

للدالة .

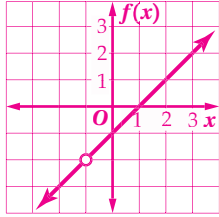
تأكد

نقط الانفصال

مثال 3 يوضح طريقة تمثيل الدالة بيانياً عند وجود نقطة انفصال لها .

مثال إضافي

مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ بيانياً .



التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-5 للتأكد من فهم الطلبة .

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم .

تنبيه لحل أسئلة

ورق الرسم البياني تحتاج الأسئلة 1-18, 22-25, 32-34 إلى ورق رسم بياني لتمثيلها بيانياً .

مثال 1

مثل الدالتين الآتيتين بيانياً: (1, 2) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2} \quad (2)$$

مثال 2

(3) كرة سلة: في بداية تدريب لفريق كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثلة بالدالة $P(x) = \frac{7+x}{11+x}$ ، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها .

(a) مثل هذه الدالة بيانياً . انظر ملحق الإجابات

(b) أي جزء من التمثيل البياني للدالة منطقي في سياق المسألة؟ الجزء الواقع في الربع الأول من

المستوى الإحداثي

(c) ماذا يمثل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني؟

(d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

مثال 3

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً: (4, 5) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} \quad (5)$$

تدريب وحل المسائل

مثال 1

مثل كلا من الدالتين الآتيتين بيانياً: (6-13) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{x^2}{6x + 12} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 1} \quad (7)$$

مثال 2

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

$$f(x) = \frac{x}{x + 2} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x + 4)^2} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{5}{(x - 1)(x + 4)} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 1} \quad (13)$$

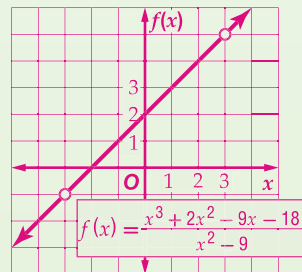
$$f(x) = \frac{4}{(x - 2)^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{2x}{(x + 2)(x - 5)} \quad (11)$$

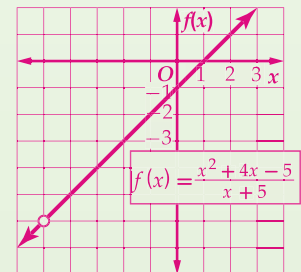
الدرس 4-5 تمثيل الدوال النسبية بيانياً 35

إجابات (تحقق من فهمك) :

(3B)



(3A)



(14) **كهرباء:** دائرة كهربائية تحتوي على 3 مقاومات موصولة على التوالي، وتُعطى شدة التيار الكهربائي بالأُمبير فيها بالمعادلة $I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$ ، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_1, R_2, R_3 المقاومات بالأُوم.

(a) إذا كان R_1 هو المتغير المستقل، و I هو المتغير التابع، فمثل المعادلة بيانيًا عندما تكون $V = 120 \text{ v}, R_2 = 25 \Omega, R_3 = 75 \Omega$. **انظر ملحق الإجابات**

(b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1 ، ومقطع المحور I للتمثيل البياني.

(c) أوجد قيمة I عندما تكون $R_1 = 140 \Omega$. **0.5 Amp** **(14b)** $R_1 = -100$

(d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟ $0 < I \leq 1.2, R_1 \geq 0$ **لا يوجد تقاطع مع المحور R ، مقطع I هو 1.2**

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا: (15-18) **انظر ملحق الإجابات**

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} \quad (16) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8} \quad (17)$$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5} \quad (21) \quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x} \quad (20) \quad f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20} \quad (19)$$

لا يوجد خط تقارب رأسي، نقطة انفصال عند $x = 5$

مثال 3

(19) معادلة خط التقارب

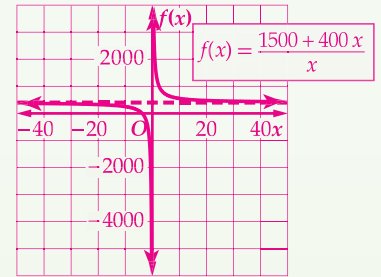
الرأسي $x = -5$ ، ونقطة انفصال عند $x = -4$

(20) معادلة خطي التقارب

الرأسيين $x = -3, x = 0$ ، لا يوجد نقطة انفصال

إجابة:

$$f(x) = \frac{1500 + 400x}{x} \quad (22a)$$



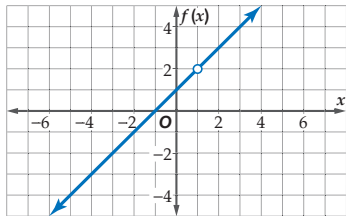
الرابط مع الحياة

تطورت تقنية الاتصالات بشكل مطّرد في الآونة الأخيرة، فأصبح بالإمكان الاتصال عبر الإنترنت من أي مكان في العالم، عن طريق الهاتف المحمول. وفي المملكة أكثر من مزود لهذه الخدمة.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (26)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(25) **مسألة مفتوحة:** مثل بيانيًا بشكل تقريبي دالة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$ ، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$. **انظر ملحق الإجابات**



(26) **تحذّر:** اكتب دالة نسبية لها التمثيل البياني المجاور.

(27) **تبرير:** ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالتين:

$$f(x) = x - 2, g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$$

التمثيل البياني للدالة $g(x)$ فيه فجوة عند $x = -3$.

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	27-39, 25, 6-18
ضمن المتوسط	27-39, 22-25, 7-17 فردي
فوق المتوسط	22-39

(28) **برهان:** إذا علمت أن الدالة النسبية هي دالة على الصورة: $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$ ، فأثبت أن $f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ دالة نسبية.

إجابة ممكنة:

$$f(x) = \frac{x}{a-b} + c$$

$$= \frac{x}{a-b} + \frac{c(a-b)}{(a-b)}$$

$$= \frac{x + ca - cb}{a-b}$$

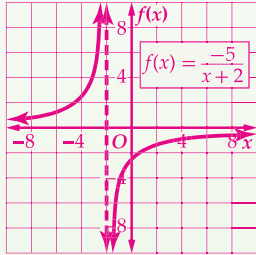
(29) **اكتب:** وضح كيف يمكن استعمال تحليل البسط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالة نسبية. **انظر الهامش**

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يذكروا أمثلة على الدوال النسبية، ثم يمثلوها بيانياً، وناقش معهم خطوط التقارب ونقاط الانفصال (إن وجدت).

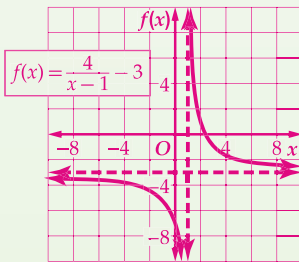
إجابات:

(29) إجابة ممكنة: يمكن تحديد خطوط التقارب الرأسية لدالة نسبية بتحليل البسط والمقام إلى عواملهما. وإذا وجد عامل مشترك بين البسط والمقام مثل $x - c$ فهذا يعني وجود نقطة انفصال عند $x = c$. ثم مساواة بقية عوامل المقام بالصفر.



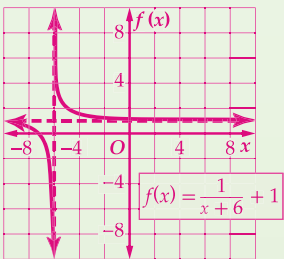
المجال $\{x | x \neq -2\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

(32)



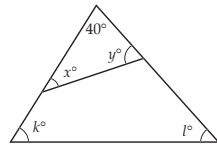
المجال $\{x | x \neq 1\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq -3\}$

(34)



المجال $\{x | x \neq -6\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq 1\}$

تدريب على اختبار



(31) **هندسة:** في الشكل المجاور، ما قيمة $x + y + k + l$ ؟ **B**

- 140 **A**
280 **B**
320 **C**
360 **D**

(30) يريد علي أن يختار كتابين معاً من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك ؟ **C**

- 48 **A**
18 **B**
15 **C**
12 **D**

مراجعة تراكمية

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منها: (الدرس 5-3) (32-34) **انظر الهامش**

(34) $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

(33) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

(32) $f(x) = \frac{-5}{x+2}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 5-2)

(36) $\frac{2(d^2-4d+6)}{(d-2)(d+4)(d-4)} \cdot \frac{d-4}{d^2+2d-8} + \frac{d+2}{d^2-16}$

(35) $\frac{5m-4}{3(m+2)(m-2)} \cdot \frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6}$

(38) $\frac{7x+38}{2(x+4)(x-7)} \cdot \frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14}$

(37) $\frac{y(y-9)}{(y-3)(y+3)} \cdot \frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9}$

المسافة (mi)	الزمن (h)
0	0
55	1
110	2
165	3
165	4
225	5

(39) **سفر:** يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

(a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق. **55 mi/h**

(b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق. **45 mi/h**

37 **الدرس 5-4** تمثيل الدوال النسبية بيانياً

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ارسم مستقيماً في المستوى الإحداثي، وارسم فجوة على المستقيم تقابل قيمة صحيحة للمتغير x . فمثلاً ارسم المستقيم $y = x - 2$ وارسم فجوة عليه عند النقطة $(1, -1)$. ثم اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا دالة نسبية تمثل بيانياً بهذا المستقيم. **هناك العديد من الإجابات الممكنة التي تكون فيها $x=1$ قيمة مستثناة وتعطي الدالة $f(x) = x-2$ بعد تبسيطها.**

إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$ أو $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية.

1 التركيز

الهدف استكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.

المواد اللازمة

• الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

من الممكن أن يجرب الطلبة ميزة التمثيل البياني للدوال قبل البدء بتمثيل الدوال النسبية، وتتبع مساره لتحديد خطوط التقارب ونقط الانفصال.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات؛ لتنفيذ النشاطين 1 و 2.

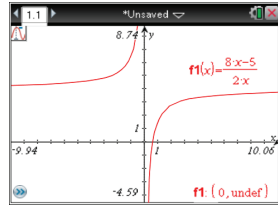
- قد يحتاج الطلبة إلى تتبع تمثيل الدالة خارج الشاشة الظاهرة؛ لتحديد خطوط التقارب بصورة دقيقة.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1-6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-3 لتقويم مدى قدرة الطلبة على استعمال الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدوال النسبية بيانياً.



نشاط 1 التمثيل البياني لدالة لها خطوط تقارب

مثل الدالة $y = \frac{8x-5}{2x}$ بيانياً في نافذة العرض القياسية، وأوجد معادلات خطوط التقارب:

الخطوة 1: لتمثيل الدالة اضغط على المفاتيح:

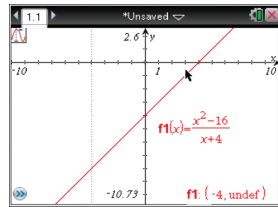
اضغط على المفاتيح: 2: Add Graphs، ثم اكتب الدالة واضغط enter، ولتحديد خط التقارب الرأسي

اضغط على المفاتيح: 1: Graph Trace، 5: Trace، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك

الأسم، ستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عندما $x = 0$ ، وستظهر النقطة (0, undef) وخط التقارب الرأسي.

الخطوة 2: اختبر التمثيل البياني.

بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرفة أن الدالة غير معرفة عندما $x = 0$ ، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.



نشاط 2 التمثيل البياني لدالة تتضمن نقطة انفصال

مثل الدالة $y = \frac{x^2-16}{x+4}$ بيانياً.

الخطوة 1: لتمثيل الدالة اضغط على المفاتيح:

اضغط على المفاتيح: 2: Add Graphs، ثم اكتب الدالة واضغط enter، ولتحديد نقاط الانفصال

اضغط على المفاتيح: 3: Trace Step...، 5: Trace، وحول إلى القيمة 0.1، ثم اضغط

على المفاتيح: 1: Graph Trace، 5: Trace، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عند $x = -4$ وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال (-4, undef).

الخطوة 2: اختبر التمثيل البياني.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بفجوة عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفراً عندما $x = -4$ ، مما يعني أن الدالة غير معرفة عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانياً، ثم اكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

$$x = -2, y = 1 \quad f(x) = \frac{x}{x+2} \quad (2)$$

$$x = 0, y = 0 \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$x = 2, y = \frac{2}{3} \quad f(x) = \frac{2x}{3x-6} \quad (4)$$

$$x = 4, y = 0 \quad f(x) = \frac{2}{x-4} \quad (3)$$

$$x = -3 \quad \text{نقطة انفصال عند } f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \quad (6)$$

$$x = 1, y = 4 \quad f(x) = \frac{4x+2}{x-1} \quad (5)$$

التوسع في المفهوم

• لتوضيح خط التقارب الأفقي في النشاط 1، اطلب إلى الطلبة تمثيل الدالة $y = \frac{8x-5}{2x}$ وعلى الشاشة نفسها تمثيل $y = 4$ ، وتتبع التمثيلين باستعمال ميزة 3: Intersection Point(s)، فستلاحظ أن التمثيلين البيانيين لا يتقاطعان، وأن التمثيل البياني لـ $y = \frac{8x-5}{2x}$ يتقارب أفقيًا من المستقيم $y = 4$.

• عند التحضير لدراسة التناسب العكسي اطلب إلى الطلبة تمثيل الدوال: $y = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{2}{x}$ ، $y = \frac{4}{x}$ على الشاشة نفسها، ووصف أوجه التشابه بين تمثيلاتها البيانية.

محورًا الإحداثيات هما خطا تقارب لكل من التمثيلات البيانية الأربعة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 5

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

تدريبات إعادة التعليم - تمته (22)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-4 تدريبات إعادة التعليم تمثيل الدوال التنسبية

نقطة الانفصال يوجد في بعض الأحيان نقاط انفصال في التمثيل البياني للدالة التنسبية، وتظهر هذه النقاط على صورة فجوات في التمثيل البياني للدالة لأن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقطة، ولكنها معرفة حولها.

نقطة الانفصال إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $b(x) \neq 0$ وكان $a(x) = 0$ عاملاً مشتركاً بين $a(x)$ و $b(x)$ ، فإن تزد نقطة انفصال عندما $x=0$.

مثال الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

وعندما فإن للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عند $x=-3$ ، وله نقطة انفصال عندما $x=1$.

كُنْ جدول قيم للدالة وعيّن النقاط في المستوى الإحداثي وصل بينها.

x	-2.5	-2	-1	-3.5	-4	-5
f(x)	2	1	0.5	-2	-1	-0.5

تصاريح

مثل كل دالة بما يأتي بيانياً:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2} \quad (2)$$

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية

22

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية

تدريبات إعادة التعليم (21)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-4 تدريبات إعادة التعليم تمثيل الدوال التنسبية بيانياً

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

الدالة التنسبية	دالة تكتب على الصورة $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ على أن تكون $p(x)$ و $q(x) \neq 0$ حدوداً.
المجال	يتكون مجال الدالة التنسبية من الأعداد التي تكون الدالة معرفة عندها.
خط التقارب الرأسي	خط التقارب مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة. إذا كانت الدالة التنسبية في أبسط صورة لها غير معرفة عند $x=a$ فإن المستقيم $x=a$ خط تقارب رأسي لهذه الدالة.
خط التقارب الأفقي	يكون للدالة التنسبية خط تقارب أفقي أحياناً عندما تُشتق قيمة من المدى.

مثال الدالة $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$

هذه الدالة صفراء عند $x=2$ ، $x=-3$ ، ولها خط تقارب رأسي عند $x=-1$. ولما كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإنه لا يوجد لهذه الدالة خط تقارب أفقي. كُنْ جدول قيم للدالة، وعيّن النقاط في المستوى الإحداثي، وصل بينها.

x	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
f(x)	-3.5	-2	0	4	-6	-2	0	1.5	2.8

تصاريح

مثل كل دالة بما يأتي بيانياً:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{4}{x^2+3x-10} \quad (1)$$

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية

21

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية

تدريبات حل المسألة (24)

دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-4 تدريبات حل المسألة

تمثيل الدوال التنسبية بيانياً

(b) حدد موقع خطي التقارب الأفقي والرأسي للتمثيل البياني لهذه المعادلة:

خط التقارب الرأسي عند $x=-3226$
خط التقارب الأفقي عند $y=0$

(c) ما معنى خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني لهذه المعادلة؟

كما زاد عدد المحاولات يقترب معدل التسجيل من الصفر لأن عدد مرات التسجيل يبقى ثابتاً.

يجب مسح النقطة (4,4) من التمثيل البياني ووضع دائرة صغيرة حولها

(2) فووتن، درس إسحق نيوتن الدالة التنسبية:

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x}$$

مفترضاً أن $ad \neq 0$ أين يقع خط التقارب الرأسي للتمثيل البياني لهذه الدالة؟ $x=0$ عند

(3) معدل تسجيل الأهداف، معدل تسجيل الأهداف لأحد لاعبي كرة السلة خلال سنوات مشاركته في هذه اللعبة حتى بداية موسم 1432 هجرية يساوي 0.305. فقد سجل 984 مرة من 3226 محاولة. وفي موسم 1432 هجرية سجل 183 مرة.

(a) اكتب معادلة نصف معدل تسجيل الأهداف لهذا اللاعب في نهاية موسم 1432 هجرية مستخدماً x لعدد محاولات التسجيل في هذا الموسم.

$$y = \frac{(984+183)(x-3226)}{(x-3226)}$$

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية

24

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية

تدريبات المهارات (23)

دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-4 تدريبات المهارات

تمثيل الدوال التنسبية بيانياً

مثل كل دالة بما يأتي بيانياً:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{10}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{-3}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2-2x-8} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{2x^3+4x^2-10x-12}{2x^2+8x+6} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2+x+6} \quad (10)$$

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية

23

الفصل 5: العلاقات والدوال التنسبية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 5

فوق المتوسط

ضمن

دون

فوق

ضمن

دون

كتاب التمارين (7)

فوق

ضمن

التدريبات الإثرائية (25)

الاسم: _____

التاريخ: _____

5-4 التدريبات الإثرائية

خصائص التمثيلات البيانية للدوال النسبية

يلخص الجدول الآتي بعض المعلومات المتعلقة لتمثيل الدوال النسبية بيانياً.

الخاصية	مناحها	طريقة إيجادها
خطوط التقارب الرأسية	خط رأسي عند قيم x التي تكون الدالة غير معرفة عندها.	مسواة المقام بالصفر، وحل المعادلة بالنسبة لـ x .
خطوط التقارب الأفقية	خط أفقي عند قيم y التي يقترب منها التمثيل البياني عندما تأخذ x قيماً موجبة أو سالبة كبيرة جداً.	أدرس سلوك طرفي التمثيل البياني.
سلوك الطرف الأيمن	كيف يبدو التمثيل البياني عندما تأخذ x قيماً موجبة كبيرة.	احسب قيمة العبارة النسبية بالتعويض عن x بقيم موجبة كبيرة متزايدة.
سلوك الطرف الأيسر	كيف يبدو التمثيل البياني عندما تأخذ x قيماً سالبة صغيرة جداً ($x \rightarrow -\infty$).	احسب قيمة العبارة النسبية بالتعويض عن x بقيم سالبة صغيرة جداً ($x \rightarrow -\infty$).
الجذور أو الأصفار أو المقاطع x	النقطة (أو النقاط) التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور x .	مسواة البسط بالصفر، وحل المعادلة بالنسبة لـ x .
المقاطع y	النقطة التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور y .	عوض $x=0$ في العبارة النسبية لتجد قيمة المقطع y .

وتمثل خطوط الإشارات من الأدوات المفيدة في تمثيل الدوال بيانياً.

استعمل في مخطط الإشارات قيمة للمتغير x على يمين كل قيمة حرجة (القيم التي تجعل البسط أو المقام صفراً) وقيمة على يسارها، لتحديد ما إذا كان التمثيل البياني موجباً أو سالباً في تلك الفترة.

بين المخطط أدناه إشارات الدالة

$$y = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

x	y
$-\infty$	0^-
-3	$+$
-2	$+$
-1	$+$
0	$+$
1	$+$
2	$+$
3	$+$
4	$+$
6	$+$
$+\infty$	0^+

والشكل المجاور هو التمثيل البياني للدالة

$$\frac{x-1}{x^2-x-6}$$

تعرين

أشرك مخطط إشارات للدالة $y = \frac{x-1}{x^2-x-6}$ مستعملاً قيمة لـ x على يمين كل قيمة حرجة، وقيمة على يسارها لتحديد ما إذا كان التمثيل البياني موجباً أو سالباً في تلك الفترة، ثم مثل الدالة بيانياً.

المصدر: المثنى الثاني

25

المصدر: المثنى الثاني

5-4 تمثيل الدوال النسبية بيانياً

مثل كل دالة بما يأتي بيانياً:

(1) $f(x) = \frac{-4}{x-2}$

(2) $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$

(3) $f(x) = \frac{3x}{(x+3)^2}$

(4) $f(x) = \frac{2x^2+5}{6x-4}$

(5) $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x-2}$

(6) $f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x-3}$

(7) **ملاءم**، يستطيع عامر طلاء غرفة في 6 ساعات إذا عمل وحده، على حين يستطيع عاطف طلاء الغرفة نفسها في x ساعة إذا عمل وحده، والدالة $f(x) = \frac{6+x}{6x}$ تمثل جزءاً من العمل يمكنهما إنجازهما معاً في ساعة واحدة. مثل هذه الدالة بيانياً، حيث $f(x) > 0$ ، وإذا كان عاطف يستطيع طلاء الغرفة وحده في 4 ساعات، فما مقدار الجزء من العمل الذي يستطيع الاثنان إنجازهما معاً في ساعة واحدة؟ $\frac{5}{12}$

7

ملاحظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-5

كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانياً.

الدرس 5-5

تمييز مسائل التغير الطردي والتغير

المشترك وحلها.

تمييز مسائل التغير العكسي والتغير

المركب وحلها.

ما بعد الدرس 5-5

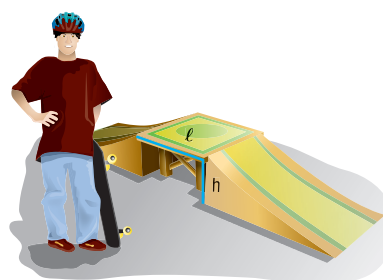
تمثيل دوال القطع الزائد بيانياً.

2 التدريس

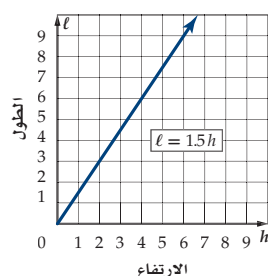
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- إذا زاد ارتفاع المنصة، ماذا يحدث لطولها؟ **يزداد.**
- إذا نقصت قيمة h ، ماذا يحدث لقيمة l ؟ **تنقص.**
- ما القيمة التي تبقى ثابتة ولا تتغير؟ **النسبة $\frac{l}{h}$ وتساوي 1.5**



الطول (l)	الارتفاع (h)	النسبة ($\frac{l}{h}$)
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5



لماذا؟

وجد عبدالله خلال بناءه منحدرًا للترحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصة l مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى النسبة ثابتة.

المعادلة $\frac{l}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $l = 1.5h$ ، وبهذا فإن طول المنصة يتغير طرديًا مع ارتفاعها.

التغير الطردي والتغير المشترك إن العلاقة المعطاة بالمعادلة $l = 1.5h$ مثال على التغير الطردي، حيث يعبر عن

التغير الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغير**.

لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $l = 1.5h$ هو مستقيم يمر بنقطة الأصل، لذا فالتغير الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغير الطردي هو ثابت التغير.

وللتعبير عن التغير الطردي، فإننا نقول إن y تتغير طرديًا مع x . وبمعنى آخر كلما زادت x ، فإن y تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان معامل التغير سالبًا.

فيما سبق:

درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانياً.

والآن:

- أميز مسائل التغير الطردي والتغير المشترك وأحلها.
- أميز مسائل التغير العكسي والتغير المركب وأحلها.

المفردات:

التغير الطردي

direct variation

ثابت التغير

constant of variation

التغير المشترك

joint variation

التغير العكسي

inverse variation

التغير المركب

combined variation

www.obeikaneducation.com

أضف إلى
مطوبتك

التغير الطردي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: تتغير y طرديًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
ويسمى العدد k ثابت التغير.

مثال: إذا كانت $y = 3x$ ، فإن y تتغير طرديًا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$ ، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = kx_2 \quad , \quad y_1 = kx_1$$

$$\frac{y_2}{x_2} = k \quad \frac{y_1}{x_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا طرديًا؛ أي أن y تتناسب طرديًا مع x).

يمكن استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y .

إرشادات للدراسة

ثابت التغير

في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغير موجب، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين، بينما المستقيم الذي له ثابت تغير سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

مصادر الدرس 5-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (42)	• تنويع التعليم، ص (44، 42)	• تنويع التعليم، ص (44)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26)	• تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات المهارات، ص (28)
	• تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (29)
	• تدريبات حل المسألة، ص (29)	• التدريبات الإثرائية، ص (30)	• التدريبات الإثرائية، ص (30)

مثال 1 المتغير الطردي

إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

استعمل تناسباً يربط بين القيم.

تناسب طردي	$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
	$\frac{15}{5} = \frac{y_2}{7}$
بالضرب التبادلي	$15(7) = 5(y_2)$
بالتبسيط	$105 = 5y_2$
بقسمة كلا الطرفين على 5	$21 = y_2$

تحقق من فهمك

1 إذا كانت r تتغير طردياً مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$. 30

هناك نوع آخر من التغير يُسمى **التغير المشترك**، ويحدث عندما تتغير كمية ما طردياً مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = -15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 3$. -9

2 إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما تكون $x = 10$ و $z = 5$ ، علماً بأن $y = 12$ عندما $x = 3$ و $z = 8$. 25

إرشادات للدراسة

التغير المشترك

يصنف بعض الرياضيين التغير المشترك بوصفه حالة خاصة من التغير المركب الذي ستدرسه لاحقاً.

مفهوم أساسي

التغير المشترك

التعبير اللفظي: تتغير y تغيراً مشتركاً مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
مثال: إذا كانت: $x = 6, z = -2, y = -60$ ، وكانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، حيث $x = 4, z = -5$ عندما $y = -60 = 5(6)(-2) = kxy \Rightarrow k = 5$ ؛
تكون: $y = 5 \times -5 \times 4 = -100$.

إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم المجهولة الأخرى.

$$\frac{y_1}{x_1 z_1} = k, \quad \frac{y_2}{x_2 z_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسباً مشتركاً، أي أن y تتناسب طردياً مع حاصل ضرب x, z).

مثال 2 التغير المشترك

إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$ ، إذا علمت أن $y = 20$ عندما $x = 5$ و $z = 3$.

استعمل تناسباً يربط القيم بعضها ببعض.

تناسب مشترك	$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$
	$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$
بالضرب التبادلي	$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$
بالتبسيط	$360 = 15y_2$
بقسمة كلا الطرفين على 15	$24 = y_2$

تحقق من فهمك

2 إذا كانت r تتغير تغيراً مشتركاً مع t و v ، وكانت $r = 70$ عندما $t = 4$ و $v = 10$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = 8$ و $v = 2$. 28

التغير الطردي والتغير المشترك

مثال 1 يبين طريقة استعمال تناسب لحل مسألة تغير طردي.

مثال 2 يبين طريقة حل مسائل التغير المشترك.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = -15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 3$. -9

2 إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما تكون $x = 10$ و $z = 5$ ، علماً بأن $y = 12$ عندما $x = 3$ و $z = 8$. 25

تنبيه

تجنب الأخطاء: ناقش الطلبة في كيفية كتابة معادلة تغير تتضمن ثابت التغير.

المحتوى الرياضي

التغير الطردي والتغير العكسي يمكن تحديد نوع التغير في بعض المسائل من خلال جدول يربط بين قيم x وقيم y . فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فإن التغير طردي. أما إذا كانت xy قيمة ثابتة فإن التغير عكسي.

التغير العكسي والتغير المركب هناك نوع آخر من التغير هو **التغير العكسي** ، فإذا تغيرت الكميتان عكسيًا فحاصل ضربيهما يساوي ثابتًا هو k .

نقول إن كميتين تتغيران عكسيًا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغير السرعة والزمن اللازم لقطع مسافة ثابتة تغيرًا عكسيًا؛ فكلما زادت السرعة قل الزمن اللازم لقطع المسافة.

التغير العكسي والتغير المركب

المثال 3 يبين طريقة استعمال تناسب لحل مسألة تغير عكسي.

المثال 4 يبين تطبيقًا حياتيًا على التغير العكسي.

المثال 5 يبين طريقة حل مسائل التغير المركب.

مثال إضافي

إذا كانت r تتغير عكسيًا مع t ، وكانت $r = -6$ عندما $t = 2$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -7$. $\frac{12}{7}$

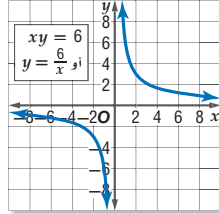
أضف إلى
مطوياتك

التغير العكسي

التعبير اللفظي: تتغير y عكسيًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث

$$y = k \text{ أو } x = \frac{k}{y} \text{ ، حيث } y \neq 0 \text{ و } x \neq 0$$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًا مع x . فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ ، بينما عندما $x = 3$ فإن قيمة y تصبح 4 .



إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$ ،

فإن التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور .

وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغير العكسي يشبه التمثيل البياني لدالة المقلوب تمامًا

يمكن استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيرًا عكسيًا مُعطى فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1 y_1 = k , x_2 y_2 = k$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$$

بالتعويض عن قيمة k من إحدى المعادلتين في الأخرى

بقسمة كلا الطرفين على $y_1 y_2$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًا؛ أي أن y تتناسب عكسيًا مع x).

إرشادات للدراسة

التغير الطردي

والتغير العكسي

يمكن تحديد نوع التغير من خلال جدول قيم x و y . فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغير طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغير عكسي.

مثال 3

التغير العكسي

إذا كانت a تتغير عكسيًا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = -2$ ، فأوجد قيمة a عندما $b = -10$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1}$$

$$\frac{28}{-10} = \frac{a_2}{-2}$$

$$28(-2) = -10(a_2)$$

$$-56 = -10(a_2)$$

$$5\frac{3}{5} = a_2$$

تناسب عكسي

$$a_1 = 28, b_1 = -2, b_2 = -10$$

بالضرب التبادلي

بالتبسيط

بقسمة كلا الطرفين على -10

تحقق من فهمك

(3) إذا كانت x تتغير عكسيًا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = 4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 12$. 8

إرشادات للمعلم الجديد

تطوير الحس الرياضي ساعد الطلبة

على أن يفهموا الفرق بين نوعي التغير

(الطردي والعكسي) باستعمال مثال السرعة

والمسافة والزمن، فعندما يقود الشخص

سيارته بسرعة معينة فإن المسافة المقطوعة

تزداد بزيادة الزمن، ويُعد هذا تغيرًا طرديًا،

أما إذا أردنا قطع مسافة معينة فإن الزمن

اللازم يقل مع زيادة السرعة، ويُعد هذا تغيرًا

عكسيًا.

كتابة التغير العكسي وحله

مثال 4 من واقع الحياة

موجات الصوت: يتغير التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود عكسياً مع طول السلك. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in.

افترض أن $l_1 = 10, f_1 = 512, l_2 = 8$ وأوجد قيمة f_2 .

$$\begin{array}{ll} \text{المعادلة الأصلية} & l_1 f_1 = l_2 f_2 \\ f_1 = 512, l_1 = 10, l_2 = 8 & 10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2 \\ \text{بقسمة كلا الطرفين على 8} & \frac{5120}{8} = f_2 \\ \text{بالتبسيط} & 640 = f_2 \end{array}$$

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

تحقق من فهمك

(4) يتغير الطول الظاهري لجسم عكسياً مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريباً، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟ **5.2 مرة**

هناك نوع آخر من التغير هو **التغير المركب**، ويحدث عندما تتغير كمية ما طردياً أو عكسياً أو كليهما معاً مع كميتين أخريين أو أكثر. إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، و y تتغير عكسياً مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$\begin{array}{ll} y_1 = \frac{kx_1}{z_1} & y_2 = \frac{kx_2}{z_2} \\ \frac{y_1 z_1}{x_1} = k & \frac{y_2 z_2}{x_2} = k \end{array}$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمى هذا التناسب تناسباً مركباً، أي أن y تتناسب طردياً مع x وعكسياً مع z).

مثال 5 التغير المركب

إذا كانت f تتغير طردياً مع g وعكسياً مع h . وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $h = -3$ و $f = 18$.

كوّن أولاً تناسباً صحيحاً للمعلومات المعطاة.

$$\begin{array}{ll} g \text{ تتغير طردياً مع } f, \text{ لذا فإن } g \text{ تكون في البسط} & f_1 = \frac{kg_1}{h_1} \text{ و } f_2 = \frac{kg_2}{h_2} \\ h \text{ تتغير عكسياً مع } f, \text{ لذا فإن } h \text{ تكون في المقام} & k = \frac{f_1 h_1}{g_1} \text{ و } k = \frac{f_2 h_2}{g_2} \\ \text{بحل كلٍّ من المعادلتين بالنسبة لـ } k & \frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2} \\ \text{بمساواة النسبتين} & \frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2} \\ f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3 & 24(18)(-3) = 6(2)(g_2) \\ \text{بالتبسيط} & -1296 = 12g_2 \\ \text{بقسمة كلا الطرفين على 12} & -108 = g_2 \end{array}$$

عندما تكون $f = 18$ ، و $h = -3$ ، تكون قيمة g هي -108 .

تحقق من فهمك

(5) إذا كانت p تتغير طردياً مع r وعكسياً مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$ ، فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟ **-80**

مثالان إضافيان

4 قضاء: استعمال المعلومات

الواردة في فقرة "تحقق من فهمك" علماً بأن بعد كوكب الزهرة عن الشمس 67 مليون ميل تقريباً، وحدها كم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من كوكب الزهرة مقارنة مع طول قطرها عند النظر إليها من الأرض. **1.39 مرة**

تقريباً

5 إذا كانت f تتغير تغيراً طردياً مع g وعكسياً مع h ، فأوجد قيمة g عندما $f = 6$ و $h = -5$ ، علماً بأن $g = 18$ عندما $h = 3$ و $f = 5$. **-36**

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي: سجل بصوت واضح شريطاً صوتياً تتناول فيه مسائل مختلفة على التغير، ثم شغله ليستمع الطلبة إليه، أو حمّله على أجهزتهم الصوتية، واطلب إليهم كتابة هذه المسائل وحلها.

إرشادات للدراسة

التغير المركب

في العلاقة $y = \frac{kx}{z}$ تظهر الكميات التي تتغير طردياً مع y في البسط. أما التي تتغير عكسياً فتظهر في المقام.

تنوع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حفظ معادلات التغير المختلفة،

فاطلب إليهم أن يكتبوا المعادلات مستعملين لوناً مختلفاً لكل متغير ولوناً آخر للثابت k . فمثلاً: يكون التغير الطردي:

$$y = kx \text{، والتغير المشترك: } y = kxz \text{، والتغير العكسي: } y = \frac{k}{x}$$

الأمثلة 1-3

- (1) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$. 21
- (2) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$. -27
- (3) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$. -32
- (4) **خراطة:** إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخراطة تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما. 90 mi
- (5) إذا كانت a تتغير طرديًا مع b ، وعكسيًا مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$. -48

مثال 4

مثال 5

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-5 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه!

تجنب الأخطاء المفاهيمية:

تحقق من أن الطلبة يفهمون الفرق الأساسي بين نوعي التغير: الطردي والعكسي، من خلال طرح أسئلة مثل: هل يتغير دخل الشخص طرديًا أم عكسيًا مع عدد أيام العمل؟ هل يتغير زمن إنجاز عمل محدد طرديًا أم عكسيًا مع عدد العاملين؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1

- (6) إذا كانت $x = 6$ عندما $y = 32$. 1.5
- (7) إذا كانت $x = 11$ عندما $y = -3$. $-\frac{88}{3}$

(8) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلاً، ووزنه على سطح القمر 60 رطلاً، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر. $m = \frac{1}{6}w$

مثال 2

- إذا كانت a تتغير تغيرًا مشتركًا مع b و c ، فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:
- (9) إذا كانت $a = -108$ عندما $b = 2$ و $c = 9$. 72 (10) إذا كانت $a = 24$ عندما $b = 8$ و $c = 12$. -3

مثال 3

- إذا كانت f تتغير عكسيًا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:
- (11) إذا كانت $f = -12$ عندما $g = 19$. 38 (12) إذا كانت $f = 0.6$ عندما $g = -21$. 2.1

مثال 4

(13) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام، فإنه يقطع مسافة تتغير طرديًا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

- (a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h، فاكتب معادلة تغير طردي تمثل هذا الموقف. $d = 50t$
- (b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه. 60 h

مثال 5

- (14) إذا كانت x تتغير طرديًا مع y ، وعكسيًا مع z ، وكانت $z = 20$ عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$. -6

حدد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيرًا طرديًا، أو تغيرًا عكسيًا، أو غير ذلك:

غير ذلك

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

(17)

عكسي

x	y
8	2
4	4
-2	-8
-8	-2

(16)

طردي

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

(15)

- (18) إذا كانت x تتغير عكسيًا مع y ، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$. 4
- حدد إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل تغيرًا طرديًا، أو عكسيًا، أو مشتركًا، أو مركبًا، ثم أوجد ثابت التغير (التناسب) في كلٍّ منها:

$$m = 20cd \quad (22)$$

$$-10 = gh \quad (21)$$

$$c = \frac{7}{d} \quad (20)$$

$$a = 27b \quad (19)$$

43 الدرس 5-5 دوال التغير

عكسي، -10

عكسي، 7

طردي، 27

تنويع الواجب المنزلي

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	13-6، 22-19، 23، 36-29
ضمن المتوسط	36-7
فوق المتوسط	36-14

(23) **كيمياء:** يتغير حجم غاز معين v طردياً مع درجة حرارته t ، وعكسياً مع ضغطه p حيث $(v = \frac{kt}{p})$.

(a) هل تمثل المعادلة تغيراً طردياً، أم عكسياً أم مشتركاً أم مركباً؟

(b) عينة من الغاز حجمها 8 L، ودرجة حرارتها 275°K ، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 L وتسخينها إلى درجة حرارة 300°K . كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

(24) **جاذبية:** ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغير طردياً مع حاصل

ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2 ، وعكسياً مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. (24a) $2 \times 10^{20} \text{ N}$ تقريباً

(a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ تقريباً، وكتلة القمر $7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$ وكتلة الأرض $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ ، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

(b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ تقريباً، وكتلة الشمس $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ تقريباً، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟ (24b) $3.5 \times 10^{22} \text{ N}$ تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا

(25) **اكتشف الخطأ:** يحل كل من يوسف وتركى مسألة عن التغير المركب، تتغير فيها z طردياً مع x وعكسياً مع y . أيهما توصل إلى التناسب الصحيح؟ وضع إجابتك.

انظر الهامش

تركى

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$

$$k = \frac{z_1 y_1}{x_1}, k = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

$$\frac{z_1 y_1}{x_1} = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

يوسف

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$

$$k = \frac{z_1 y_1}{x_1}, k = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

$$\frac{z_1 y_1}{x_1} = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

(26) **تبير:** وضع لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغير المشترك تغيراً مركباً، ولكنهم لا يعدون التغير المركب مشتركاً. انظر الهامش

(27) **مسألة مفتوحة:** صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغير تغيراً مشتركاً فيما بينها. انظر الهامش

(28) **اكتب:** حدد أنواع التغيرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. وضع إجابتك. انظر الهامش

تدريب على اختبار

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

(30) ما التغير الذي تمثله العلاقة الموضحة بالجدول المجاور؟ **A**

A طردي **C** مشترك
B عكسي **D** مركب

(29) إذا كانت a تتغير طردياً مع b ، وعكسياً مع c ، وكانت $b=15$ عندما $a=4$ ، $c=2$ ، فما قيمة b عندما $a=7$ ، $c=-8$ ؟ **B**

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$
B -105 **D** 105

مراجعة تراكمية

حدد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالة نسبية مما يأتي: (الدرس 5-4)

(31) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ خطوط التقارب: $x = -2, x = -3$ (32) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 3x - 4}$ خطوط التقارب: $x = -4, x = 1$ (33) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x+3}$ نقطة الانفصال عند: $x = -3$

أوجد LCM لكل مما يأتي: (الدرس 5-2)

(34) $2a(a+1)$, $a, 2a, a+1$ (35) $24x, 8, 24x, 12$ (36) $6x^4y, x^4, 3x^2, 2xy$

44 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

تنبيه

اكتشف الخطأ اقترح على الطلبة

لحل السؤال 25 أن يكتبوا المسألة على الصورة:

$$\frac{z_2}{1} = \frac{kx_2}{y_2} \text{ و } \frac{z_1}{1} = \frac{kx_1}{y_1}$$

وبالضرب التبادلي سيحصلون على

$$z_2 y_2 = kx_2 \text{ و } z_1 y_1 = kx_1$$

الوصول صيغة لـ k .

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلبة أن يكتب

كل منهم معادلة تغير من واقع حياته على ورقة (مثل: زمن الدراسة، ساعات النوم، ... إلخ)، ويبين نوعه، وأن يسلموك أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-5، 5-4، بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12)

(25) يوسف؛ لأن تركي قام بعملية الضرب في الوقت الذي كان يجب عليه أن يقوم بعملية القسمة.

(26) إجابة ممكنة: كل تغير مشترك هو تغير مركب بسبب وجود تغيرين طرديين في الوقت الذي يمكن أن يحتوي فيه التغير المركب على تغير طردي وآخر عكسي، مما لا يجعله تغيراً مشتركاً.

(27) إجابة ممكنة: القوة تتغير تغيراً مشتركاً مع كتلة الجسم وتسارعه.

(28) إجابة ممكنة: التغير العكسي، وبعض أنواع التغير المركب لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها؛ لأن القسمة على الصفر غير معرفة.

تنوع التعليم

ضمن شوق

توسع اكتب المعادلة $y = kx^3$ على السبورة، واسأل الطلبة عن نوع التغير الذي تمثله هذه المعادلة.

واطلب إليهم وصف ما يحصل لقيمة y عندما تتضاعف قيمة x مرتين، ثلاث مرات أو عندما تصل إلى النصف.

تمثل المعادلة تغيراً طردياً بين y و x . فعندما تتضاعف قيمة x فإن قيمة y تضرب في العدد 8، وعندما تصبح قيمة x ثلاثة أمثال قيمتها الأصلية فإن قيمة y تضرب في العدد 27، وعندما تُنصف قيمة x فإن قيمة y تقسم على العدد 8.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

دون دون المتوسط

ضمن **فوق**

دون **ضمن** **فوق**

_____ التاريخ:

5-5 دوال التغير

حدد إذا كانت المعادلة في كل $\mathbb{M}$ يأتي تمثل تغيراً طردياً، أو عكسياً، أو مشتركاً، أو مركباً، ثم أوجد ثابت التغير (الناسب) في كل منها:

وعليه فإن هناك متغيرين تعتمد عليهما القوة وهما: السرعة والارتفاع عن سطح الأرض. ويوضح قانون نيوتن الثاني،

حيث $F = \frac{I}{h}$ يمثل ارتفاع القمر الصناعي عن سطح الأرض .

ولذا فإن التسارع يتغير عكسياً مع مربع ارتفاع القمر عن سطح الأرض . $ma = \frac{k}{h^2} \rightarrow a = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{h^2} = \frac{K}{h^2}$

تقدير طردي: السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} \leftarrow \text{السرعة} = \frac{(2\pi r)}{\text{يوم واحد}}$ حيث r يساوي $h+R$ ارتفاع القمر عن سطح الأرض و R نصف قطر الأرض.

المجلد 30 : العلاقات والدبلوماسية
المجلد 30 : العلاقات والدبلوماسية

التحصيل، © : العلاقات والدوافع النفسية

30

44B الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-6
تبسيط عبارات نسبية.

الدرس 5-6
حل معادلات نسبية.
حل متباينات نسبية.

ما بعد الدرس 5-6
حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- إذا زار أحد الأعضاء النادي 10 مرات في أحد الأشهر، فما التكلفة الفعلية لكل زيارة؟ **30 ريالاً**
- إذا زار أحد الأعضاء النادي 10 مرات في أحد الأشهر، فكم تزيد التكلفة الفعلية لكل زيارة على الرسم المقرر للزيارة الواحدة؟ **20 ريالاً**
- ما مقدار الزيادة على الرسم المقرر للزيارة الواحدة إذا زار أحد الأعضاء النادي x مرة في أحد الأشهر؟ **$\frac{200}{x}$ ريال لكل زيارة.**



لماذا؟

يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهرياً بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهرياً، فإنه سيدفع مبلغاً مقداره $(200+10x)$ ريالاً في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة:

$$\frac{200+10x}{x}$$

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالاً، عليك أن تحل المعادلة $\frac{200+10x}{x} = 30$.

حل المعادلات النسبية تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها. ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات لذا فإنه من الضروري التحقق من صحة الحل.

مثال 1 حل معادلة نسبية

$$\text{حل المعادلة } \frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}, \text{ وتحقق من صحة حلك.}$$

LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

المعادلة الأصلية

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\text{بضرب المعادلة في LCM للمقامات } \frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$$

$$\text{باختصار العوامل المشتركة } \frac{(x+3)\cancel{(x+5)}(2x)}{\cancel{x+5}} - \frac{(x+3)\cancel{(x+5)}(x^2-x-10)}{\cancel{x^2+8x+15}} = \frac{(x+5)\cancel{(x+3)}3}{\cancel{x+3}}$$

بالتبسيط

$$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$$

خاصية التوزيع

$$2x^2+6x-x^2+x+10=3x+15$$

بالتبسيط

$$x^2+7x+10=3x+15$$

ب طرح $3x+15$ من كلا الطرفين

$$x^2+4x-5=0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$(x+5)(x-1)=0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x-1=0 \text{ أو } x+5=0$$

$$x=1 \text{ أو } x=-5$$

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات نسبية.

والآن:

- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المفردات:

المعادلة النسبية
rational equation

المتباينة النسبية
rational inequality

www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

الحل الدخيل

هو الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

مصادر الدرس 5-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (48, 50)	• تنويع التعليم، ص (48, 50)	• تنويع التعليم، ص (48, 50)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$$

$$\times \frac{-10}{0} - \frac{25 + 5 - 10}{25 - 40 + 15} \neq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$$

$$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\checkmark \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

تحقق: $x = -5$ اختبر

اختبر $x = 1$

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل. وبما أن $x = -5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x = 1$.

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$(1A) \quad 8 \frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$$

$$(1B) \quad \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$$

$$(1C) \quad -\frac{1}{2}, 3 \quad \frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$$

$$(1D) \quad \frac{7}{3} \quad \frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$$

يمكنك استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعاً لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكن استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $r = \frac{d}{t}$, $t = \frac{d}{r}$.

مثال 2 من واقع الحياة مسألة مسافة

تجديف: ركب سعيد قارباً سرعته 6 mi/h في المياه الراكدة وسار به دون توقف مسافة 10 mi؛ نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمناً قدره 3 h، أوجد سرعة التيار.

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة التي قطعها ذهاباً وإياباً والزمن المستغرق في قطع المسافة كاملةً. والمطلوب إيجاد سرعة التيار (v).

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه التيار، و 5 mi عكس اتجاه التيار. والمعادلة التي تُستعمل للحل هي: $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r السرعة، d المسافة، t الزمن.

الزمن الكلّي	الزمن مع اتجاه التيار	الزمن عكس اتجاه التيار
3h	$\frac{5}{6+v}$	$\frac{5}{6-v}$

إرشادات للدراسة

جداول تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة، فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

حل المعادلات النسبية

مثال 1 يبين طريقة حل معادلة نسبية مع استبعاد الحلول الدخيلة (إن وجدت).

المثالان 2, 3 يبين طريقة استعمال المعادلات النسبية لحل مسائل تتعلق بالكيمياء والمسافات والأعمال.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حل المعادلة:

$$\frac{p^2 - p - 5}{p+1} = \frac{p^2 - 7}{p-1} + p$$

وتحقق من صحة حلك.

$$p = -3, -2, 2$$

المحتوى الرياضي

حل المعادلات النسبية تتحول المعادلة النسبية إلى نوع آخر من المعادلات (خطية، تربيعية أو غيرهما) خلال خطوات حلها. لذا؛ فإن حل المعادلة النسبية يتطلب حل معادلة جديدة من نوع آخر.

$$\text{حل: } \frac{5}{6+v} + \frac{5}{6-v} = 3$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في LCM للمقامات } (6+v)(6-v) \quad \frac{5}{6+v} + \frac{5}{6-v} = (6+v)(6-v)(3)$$

$$\text{باختصار العوامل المشتركة} \quad \frac{5}{1} + \frac{5}{1} = (6+v)(6-v)(3)$$

بالتبسيط

$$(6-v)(5) + (6+v)(5) = (36-v^2)(3)$$

خاصية التوزيع

$$30 - 5v + 30 + 5v = 108 - 3v^2$$

بالتبسيط

$$60 = 108 - 3v^2$$

ب طرح 60 من كلا الطرفين

$$0 = -3v^2 + 48$$

بالتحليل إلى العوامل

$$0 = -3(v+4)(v-4)$$

بقسمة كلا الطرفين على -3

$$0 = (v+4)(v-4)$$

خاصية الضرب الصفري

$$v = 4 \quad \text{أو} \quad v = -4 \quad (\text{مرفوض})$$

المعادلة الأصلية

$$\text{تحقق: } \frac{5}{6+v} + \frac{5}{6-v} = 3$$

بالتبسيط

$$\frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} = 3$$

بالتبسيط

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{2} = 3$$

بالتبسيط وتوحيد المقامات

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$$

وبما أن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة، فإن سرعة التيار هي 4 mi/h.

تحقق من فهمك

(2) **طيران:** إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7h، وكانت سرعة الرياح 20 mi/h، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟ **339.5 mi/h**

يمكن حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.



الربط مع الحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل اللعب البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها. وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار علبة سنوياً.

مسألة تتعلق بالعمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الثاني المتوسط والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معاً، فكم ساعة يحتاج طلاب الصف الثاني المتوسط للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معاً لإتمام العمل. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني المتوسط لإتمام العمل.

خطط: يستطيع طلاب الصف الثاني الثانوي إتمام العمل في 24h. وعليه فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة الواحدة.

معدل عمل طلاب الصف الثاني المتوسط	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصفين معاً
$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الثاني المتوسط $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة الواحدة، أما معدل عمل طلاب الصفين معاً فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة الواحدة.

الدرس 5-6 حل المعادلات النسبية 47

تنبيه

تجنب الأخطاء المفاهيمية:

ذكر الطلبة بالتحقق دائماً من الحلول، وذلك بتعويضها في المعادلة الأصلية وليس في المعادلات الناتجة في أي خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي

سباحة: يسبح أحمد في نهر سرعة التيار فيه 1 mi/h. فإذا قطع 4 mi دون توقف نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر في عكس اتجاهه في 5 ساعات. أوجد سرعته في المياه الراكدة. **1.5 mi/h تقريباً**

2

تنبيه

تجنب الأخطاء المفاهيمية:

يجب أن يتنبه الطلبة في المثال 2 إلى الفرق بين حل المعادلة التربيعية التي لها حلان، وحل المسألة التي لها حل واحد فقط.

تجنب الأخطاء عند حل

المعادلات النسبية، ينسى بعض الطلبة في أغلب الأحيان أن يضربوا حدود المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات للحصول على معادلة مكافئة. لذا ذكرهم بذلك.

كتابة المعادلة

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$

بضرب كلا الطرفين في LCM للمقامات وهو 72j

$$72j \cdot \frac{1}{24} + 72j \cdot \frac{1}{j} = 72j \cdot \frac{1}{18}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$3j \cdot \frac{1}{1} + 72j \cdot \frac{1}{j} = 72j \cdot \frac{1}{18}$$

بالتبسيط

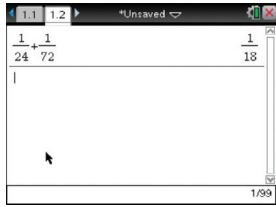
$$3j + 72 = 4j$$

بطرح 3j من كلا الطرفين

$$72 = j$$

تحقق: هناك طريقتان للتحقق:

الطريقة 2: استعمال الحاسبة



الطريقة 1: تعويض القيم

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$

$$j = 72 \quad \frac{1}{24} + \frac{1}{72} = \frac{1}{18}$$

$$\text{LCM للمقامات هو 72} \quad \frac{3}{72} + \frac{1}{72} = \frac{4}{72}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad \frac{4}{72} = \frac{4}{72}$$

يحتاج طلاب الصف الثاني المتوسط إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

تحقق من فهمك

3) يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملاً معاً، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟ 15h

حل المتباينات النسبية المتباينات النسبية، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

حل المتباينات النسبية

أضف

مطويتك

الخطوة 1: حدد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفراً.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 4

حل متباينة نسبية

$$\text{حل المتباينة النسبية} \quad \frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$$

الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$$

$$\text{بالضرب في LCM للمقامات: } 12(x-2) \cdot \frac{x}{3} - 12(x-2) \cdot \frac{1}{x-2} = 12(x-2) \cdot \frac{x+1}{4}$$

المعادلة المرتبطة

خاصية التوزيع

بطرح 6 - 3x من كلا الطرفين

بالتحليل إلى العوامل

خاصية الضرب الصفري

$$4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 3x - 6$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x-6)(x+1) = 0$$

$$x = 6 \text{ أو } x = -1$$

إرشادات للدراسة

أكد للطلبة ضرورة

استعمال القيم

المستثناة وحلول

المعادلة المرتبطة

جميعها عند تقسيم

خط الأعداد إلى فترات.

إرشادات للمعلم الجديد

طريقة بديلة

يمكن حل المعادلة في المثال 3 بطريقة أخرى، وذلك بطرح $\frac{1}{24}$ أولاً من كلا الطرفين، ثم إيجاد حاصل الضرب التبادلي، للوصول إلى الحل.

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية اختر طالباً

ليشرح خطوات حل متباينة نسبية، مؤكداً عليه ضرورة شرح خطوة التحقق بعد الحل، وتوثيق ذلك باستعمال آلة التصوير.

حل المعادلات النسبية

مثال 4 يبين طريقة حل متباينة نسبية.

مثال إضافي

$$\text{حل المتباينة: } \frac{1}{3k} + \frac{2}{9k} < \frac{2}{3}$$

$$k < 0 \text{ أو } k > \frac{5}{6}$$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة أن يفكروا في الفرق بين الرياضيات البحتة مثل حل المعادلات، والرياضيات التطبيقية مثل حل مسائل من واقع الحياة، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين النوعين.

الخطوة 3: ارسم خطأً رأسياً عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات



الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x = 8$	اختبر $x = 4$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = -3$
$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \geq \frac{8+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \geq \frac{4+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \geq \frac{0+1}{4}$	$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \geq \frac{-3+1}{4}$
$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \geq \frac{27}{12}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$	$-1 + \frac{1}{5} \geq \frac{-2}{4}$
$\frac{30}{12} \not\geq \frac{27}{12}$	$\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$ ✓	$\frac{1}{2} \not\geq \frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$ ✓

الجملة صحيحة عندما $x = -3$, $x = 4$ ؛ لذا فإن الحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تحقق من فهمك ✓

حل كلاً من المتباينتين الآتيتين:

(4A) $\frac{5}{x} + \frac{6}{5x} > \frac{2}{3}$ $0 < x < 9.3$ (4B) $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$ أو $x > 15$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل أسئلة

ورق الرسم البياني

يحتاج الطلبة إلى ورق الرسم البياني لحل السؤالين 15, 25.

إجابات:

- (7) $x < 0$ أو $x > 1.75$
 (8) $2 < x < 14$ أو $x < -2$
 (9) $-4 < x < 3$

تأكد

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(1) $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$ (2) $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

(3) $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2 - 9x + 20}$ (4) $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2 - 4}$

مثال 2

(5) **مسافة:** قطع وليد مسافة 40 mi ذهاباً وعودة مستعملاً دراجته التي سرعتها 11.5 mi/h عندما تكون الرياح ساكنة، فإذا سار في اتجاه الرياح زمناً قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة عكس اتجاه الرياح.

(a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الرياح. $\frac{20}{11.5+x}$

(b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره عكس اتجاه الرياح. $\frac{20}{11.5-x}$

(c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الرياح. $\frac{20}{11.5+x} + \frac{20}{11.5-x} = \frac{23}{6}$, 3.5 mi/h

مثال 3

(6) يعمل كل من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يوماً يحتاجان إليه إذا عملاً معاً في تبليط هذا الفناء؟ $2\frac{8}{11}$ يوم

مثال 4

حل كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: **انظر الهامش**

(7) $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$ (8) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$ (9) $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

(10) $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2 - 13x + 42}$ (11) $\frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2 - 9y - 5}$

الدرس 5-6 حل المعادلات النسبية 49

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	10-15, 18, 20-26
ضمن المتوسط	12-26 زوجي
فوق المتوسط	15-26

$0 < x < 1.15$ (14)

مثال 4 (14) حل المتباينة: $\frac{3}{5x} + \frac{1}{6x} > \frac{2}{3}$ وتحقق من صحة حلك.

(15) تمثيلات متعددة : افترض أن $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x-3}$. (15b) انظر الهامش

(15d) مثل كلاً من طرفي المعادلة
ببيانياً، وعند نقطة تقاطعها يكون
للمعادلة حل. وإذا لم يتقاطعا
فالحل الممكن يكون دخيلاً.

(d) نفيًا: استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع (c)؛ لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل الباني للمعادلة لتحديد ما إذا كان أحد الحلول حلًا دعيًا.

16) كيمياء: كم مللترًا من محلول حمضي تركيزه 20% يجب إضافته إلى 40 ml من محلول حمضي آخر تركيزه 75%؛ للحصول على محلول حمضي تركيزه 30% ؟ **180 mL**

(17) **حلّ المعادلة:** $\frac{2}{y+3} - \frac{3}{4-y} = \frac{2y-2}{y^2-y-12}$ ، وتحقق من صحة حلك. **-1**

(18) **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً على معادلة نسبية يمكن حلها بضرب طرفي المعادلة في $(x-4)(x+3)$. **انظر الهامش**

(19) **تحذّر:** حلّ المعادلة $\frac{1 + \frac{9}{x} + \frac{20}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{x+4}{x-5}$ كل الأعداد الحقيقية ما عدا $5, -5, 0$

(20) تبرير: وضح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية. **إجابة ممكنة:** لأن ضرب طرفي معادلة نسبية في LCM للمقامات قد ينتج حلًا خياليًا

(21) **اكتب:** عند استعمال ميزة TABLE في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ ، إجابة ممكنة: قيم الدالة تكون غير معرّفة عند العددين -2 و 3 ويكون عندهما خطأ تقارب رأسيان.

23 ما قيمة x في المعادلة $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$ ؟

A -7 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{7}$ **D** 7

22 ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟ **D**

A -1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1

عکسی

x	14	28	56	112
y	3	1.5	0.75	0.375

24) حدد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغيرًا طرديًا، أم تغيرًا عكسيًا، أم غير ذلك: (الدرس 5-5)

(25) مثلّ الدالة $f(x) = \frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانياً. (الدرس 4-5) انظر الهامش

26 اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: $2, 8, 14, 20, \dots$ (مهارة سابقة) **26, 32, 38**

50 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة كتابة
و حل مسائل من واقع الحياة شبيهة بما هو
موجود في هذا الدرس مستعملين بياناتهم
الخاصة.

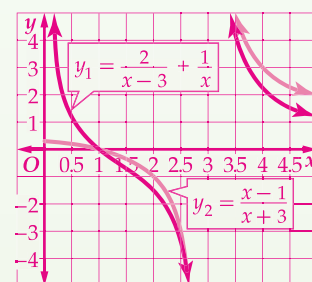
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-6
بإعطائهم:

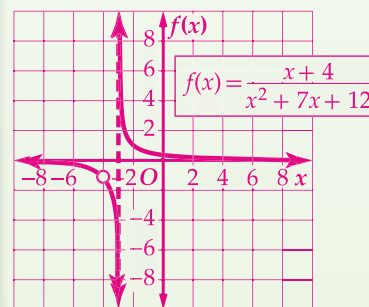
الاختبار القصير 4، ص (12)

إجابات :

(15b)



(18) إجابة ممكنة: $\frac{7}{4} + \frac{x}{x-4} = \frac{4}{x+3}$



تنويع التعليم

توسّع تُسمى المعادلة: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{i}$ بمعادلة العدسات أحياناً. إذ توضح العلاقة بين البعد البؤري للعدسة f والمسافتين d و i بين كل من الجسم وصورته عن العدسة على الترتيب. اطلب إلى الطلبة أن يحسبوا البعد البؤري لعدسة f إذا كانت $d = 20 \text{ cm}$ و $i = 12 \text{ cm}$. واطلب إليهم أن يجدوا f بدلالة d و i .

$$f = \frac{di}{d+i}, 7.5 \text{ cm}$$

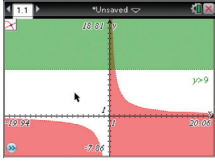
توسع 5-6 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات النسبية

يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحل متباينات نسبية مستعملًا الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} > 9$.

الخطوة 1 مثل المتباينتين



أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين؛ المتباينة الأولى هي $y < \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ ، والثانية $y > 9$ بالضغط على المفاتيح: 2: Add Graphs ، واكتب $\frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ ثم اضغط enter فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح 9 واكتب 9 ثم اضغط enter ولإظهار التمثيل اضغط على المفاتيح 4: Window/Zoom 4: Zoom - Out واضغط على الشاشة الرئيسة مرتين تصغر ويظهر التظليل فوق التمثيل البياني.

الخطوة 3 استعمال ميزة Table

تحقق من صحة حلك باستعمال ميزة Table. اعمل جدولاً يبين قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ كل مرة، وذلك

بالضغط على المفاتيح:

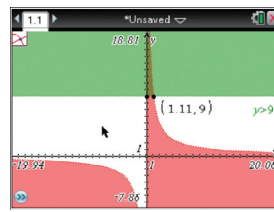
$\text{4: Add Lists & Spreadsheet}$

واكتب $Y_1 = \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ في العمود الثاني، و $Y_2 = 9$ في العمود الثالث.

x	y1	y2
0.888889	11.25	9
1	10	9
1.111111	9	9
1.222222	8.18182	9
1.333333	7.5	9

تنقل بال مؤشر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من $1.11 \approx \frac{10}{9}$ ، يكون عندها $Y_1 > Y_2$. وهذا يؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x | 0 < x < 1.11\}$

الخطوة 2 استعمال ميزة Intersection Point(s)



اضغط على المفاتيح:

7: Points & Lines $\text{3: Intersection Point(s)}$

واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع $(1.11, 9)$ ، كرر ذلك مرة أخرى، واضغط على محور y ، والتمثيل البياني لـ $y = 9$ ؛ فتظهر نقطة التقاطع لتتوصل إلى أن مجموعة الحل هي $\{x | 0 < x < 1.11\}$.

تمارين (7) $\{x | x < 0 \text{ أو } \frac{2}{3} < x < 1\}$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي: (4) جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 1 (5) لا يوجد حل في الأعداد الحقيقية

$$1.5 \frac{4}{x} = \frac{6}{x^2} \quad (3)$$

$$6 \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2} \quad (2)$$

$$2 \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \quad (1)$$

$$\{x | 0 < x < 0.3\} \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5 \quad (6)$$

$$\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x} \quad (5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1} \quad (4)$$

$$\{x | x \leq 0.5 \text{ أو } x > 1\} 2 + \frac{1}{x-1} \geq 0 \quad (9)$$

$$\{x | -4 \leq x < 1\} 1 + \frac{5}{x-1} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0 \quad (7)$$

النشاط 2

- بما أن التمثيل البياني للمتباينة $y > 9$ في النشاط 2 يقع في أعلى الشاشة القياسية، فقد يرغب بعض الطلبة في تغيير الشاشة لقيم y باستعمال المفاتيح:

4: Window/Zoom

4: Zoom - Out

3 التقييم

التقييم التكويني

استعمل التمرين 2 لتقويم مدى فهم الطلبة لطريقة إيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين لطرفي المعادلة النسبية.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين

2-5, 7-9

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة حل المعادلة $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$

وسيلاحظون أن التمثيلين البيانيين لكل من $y = \frac{x}{2}$ و $y = \frac{8}{x}$ يتقاطعان في نقطتين. ومن المهم جداً في مثل هذه الحالة أن يستعمل الطلبة ميزة Intersection Point(s) بصورة صحيحة. ويتعين على الطالب أن يختار إحدى نقطتي التقاطع أولاً، ثم يقوم بإعادة استعمال ميزة Intersection Point(s) واختيار نقطة التقاطع الثانية.

الحلان هما: $x = 4$ و $x = -4$.

مراجعة الدروس

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 5 ص (8)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عما كانت عليه عند بدايته.

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 10-17

مثال 1

بسط العبارة $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$

$$\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{a} \cdot 3 \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b \cdot b}{\cancel{3} \cdot \cancel{b} \cdot 2 \cdot \cancel{a} \cdot a} = \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

بسط العبارة $\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12}$

$$\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12} = \frac{r^2 + 5r}{2r} \cdot \frac{6r - 12}{r^2 - 25} = \frac{r(r+5)}{2r} \cdot \frac{6(r-2)}{(r+5)(r-5)} = \frac{3(r-2)}{r-5}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(10) $-\frac{10yz^2}{9x} \cdot \frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

(11) $\frac{x-4}{x+4} \cdot \frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

(12) $\frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

(13) $\frac{x}{5(x-y)} \cdot \frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

(14) $\frac{x-3}{x+1} \cdot \frac{x^2+3x-18}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x^2+7x+6}$

(15) **هندسة:** مثلث مساحته $(3x^2 + 9x - 54) \text{ cm}^2$ ، وارتفاعه $(x+6) \text{ cm}$. أوجد طول قاعدته. $6x - 18 \text{ cm}$

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 18-23

مثال 3

بسط العبارة $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$

بتحليل المقام $a^2 - 4$

$$\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$$

بتوحيد المقامين

$$= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

ب طرح البسطين

$$= \frac{3a - 2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

خاصية التوزيع

$$= \frac{3a - 2a - 4}{(a-2)(a+2)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(16) $\frac{27b+10a^2}{12ab^2} \cdot \frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

(17) $\frac{-x+10}{4(x-2)(x+2)} \cdot \frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

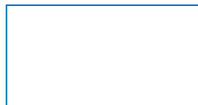
(18) $\frac{3xy^3+8y^3-5x}{6x^2y^2} \cdot \frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

(19) $\frac{-4x-18}{(x-5)(x+2)(x-3)} \cdot \frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

(20) $\frac{12x^2-10x+6}{2(x+2)(3x-4)(x+1)} \cdot \frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

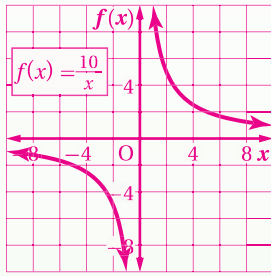
(21) $\frac{-2x^2+3}{4x^2+11x+5} \cdot \frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}$

(22) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه.

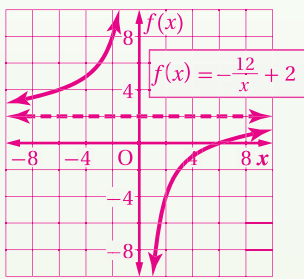
$\frac{10x+20}{(x+6)(x+1)}$  $\frac{1}{x+1}$

$\frac{4}{x+6}$

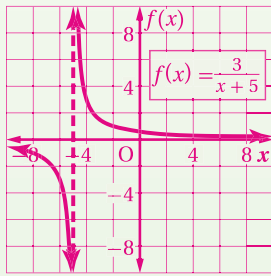
إجابات:



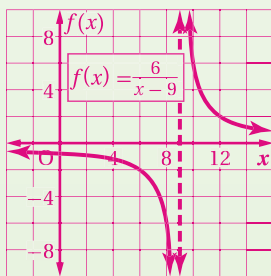
المجال $\{x | x \neq 0\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



المجال $\{x | x \neq 0\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$



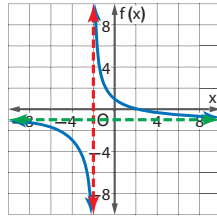
المجال $\{x | x \neq -5\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



المجال $\{x | x \neq 9\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

مثال 4

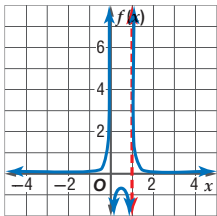
مثّل الدالة $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومدىها.
بما أن $a = 3$: إذن يتسع التمثيل البياني للدالة الأم رأسيًا.
ثم $h = -2$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين.
وَيُوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$.
و $k = -1$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى أسفل بمقدار وحدة.
وَيُوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$.



المجال: $\{x | x \neq -2\}$
المدى: $\{f(x) | f(x) \neq -1\}$

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.
 $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$
الدالة غير معرفة عندما $x = 1$ ، وعندما $x = -3$.
وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$ فإن $x = -3$ هي معادلة خط التقارب الرأسي وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.



مثّل الدالة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًا.
الدالة غير معرفة عند $x = 0$ وعند $x = 1$.
وبما أن الدالة في أبسط صورة،
فإن $x = 0$ و $x = 1$ هما
خطّ تقارب رأسيان للدالة.

ارسم الخططين والدالة بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

تمثيل دوال المقلوب بيانيًا ص 30-24

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كلّ منها: (23-28) انظر الهامش

(23) $f(x) = \frac{10}{x}$ (24) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

(25) $f(x) = \frac{3}{x+5}$ (26) $f(x) = \frac{6}{x-9}$

(27) $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$ (28) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$

(29) أشجار: يقوم طلاب الصف الأول الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

(a) اكتب دالة تمثل هذا الموقف. $f(x) = \frac{28}{x}$

(b) مثّل هذه الدالة بيانيًا. انظر الهامش

تمثيل الدوال النسبية بيانيًا ص 37-32

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

(30) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$ ، $x = -4$ ، $x = 0$ نقطة انفصال عند: $x = -2$

(31) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$ ، $x = -4$ ، $x = -2$ نقطة انفصال عند: $x = -3$

(32) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$ ، $x = 8$ ، $x = -3$ نقطة انفصال عند: $x = -3$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا: (33-36) انظر ملحق الإجابات

(34) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ (35) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

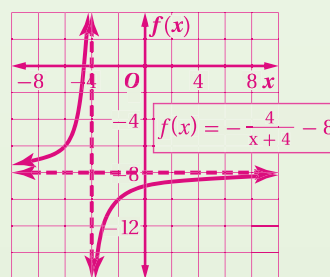
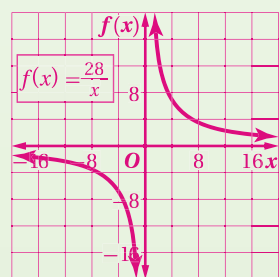
(36) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$ (37) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$

(37) مبيعات: يبيع عليّ اشتراكات في إحدى الصحف إلى مؤسسات إحدى المدن. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى وبيع لكل منها اشتراكًا. فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد المؤسسات التي زارها باستعمال الدالة $P(x) = \frac{10+x}{15+x}$.

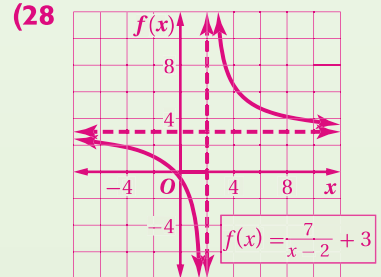
(a) مثّل هذه الدالة بيانيًا. انظر ملحق الإجابات

(b) ما القيم المنطقية لكل من المجال والمدى في سياق المسألة؟

المجال $\{x | x \geq 0\}$ ، المدى $\{P(x) | 0.6667 \leq P(x) < 1\}$



المجال $\{x | x \neq -4\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq -8\}$



المجال $\{x | x \neq 2\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \neq 3\}$

5-5 دوال التغير ص 39-44

مثال 7

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

$$\begin{aligned} \text{تناسب عكسي} \quad \frac{x_1}{y_2} &= \frac{x_2}{y_1} \\ x_1 = 24, y_1 = -8, y_2 = 15 \quad \frac{24}{15} &= \frac{x_2}{-8} \\ \text{بالضرب التبادلي} \quad 24(-8) &= 15(x_2) \\ \text{بالتبسيط} \quad -192 &= 15x_2 \\ \text{بقسمة كلا الطرفين على 15} \quad -12\frac{4}{5} &= x_2 \\ \text{عندما تكون } y = 15, \text{ فإن قيمة } x \text{ هي } -12\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

(38) إذا كانت a تتغير طردياً مع b ، وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$ ، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$. $a = 15$

(39) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -5$. $y = -10.5$

(40) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$. $y = -\frac{1}{3}$

(41) إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وكانت $x = 8$ و $z = 3$ عندما $y = 72$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$. $y = 30$

(42) إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وكانت $y = 18$ عندما $x = 6$ و $z = 15$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 12$ و $z = 4$. $y = \frac{48}{5}$

(43) **مهن:** يتغير أجر أحد العمال طردياً مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالاً مقابل 8 h، فكم ريالاً يتقاضى إذا عمل 5 h؟ **75 ريالاً**

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 45-50

مثال 8

حل المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$ ، وتحقق من صحة حلّك.

$$\begin{aligned} \text{LCM للمقامات هو } x(x+2) \\ \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} &= 0 \\ x(x+2) \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} \right) &= x(x+2)(0) \\ x(x+2) \left(\frac{3}{x+2} \right) + x(x+2) \left(\frac{1}{x} \right) &= 0 \\ 3(x) + 1(x+2) &= 0 \\ 3x + x + 2 &= 0 \\ 4x + 2 &= 0 \\ 4x &= -2 \\ x &= -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} &= 0 \quad \text{تحقق:} \\ \frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} &= 0 \\ \frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 &= 0 \\ \frac{3}{2} - 2 &= 0 \\ \checkmark \quad 2-2 &= 0 \end{aligned}$$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلّك:

$$(44) \quad x = \frac{46}{17} \quad \frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$$

$$(45) \quad x = 13 \quad \frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$$

$$(46) \quad x = -7 \quad \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$$

$$(47) \quad x = -4, x = -\frac{1}{2} \quad \frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$$

$$(48) \quad x = 8 \quad \frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$$

$$(49) \quad x < 1 \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$$

$$(50) \quad x = 1.5 \quad \frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$$

(51) **عمل:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع عليّ زراعتها في 4 h. فكم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معاً؟ **$1\frac{5}{7} h$**

المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل

استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدياً للطلبة.

اختبار الفصل: نماذج متعددة

ص (15-22)

إجابات:

$$(5) \frac{x+7}{3(2x+1)}$$

$$(6) \frac{-x+3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$(7) \frac{4y^2+14y-21}{14y^2}$$

$$(9) x = -2; y = -5$$

$$\text{المجال} = \{x \mid x \neq -2\}$$

$$\text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

$$(17) \text{خط تقارب رأسي: } x = 7, f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$$

$$(18) \text{نقطة انفصال عند: } x = -5, f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$$

$$\text{نقطة انفصال عند: } x = -3$$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

$$(19) x = -5, \frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$$

$$(20) m = -108, \frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$$

$$(21) -1 < x < 0, 7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$$

$$(22) r = 2, 3, r + \frac{6}{r} - 5 = 0$$

$$(23) -\frac{8}{5} \leq m < \frac{1}{2}, \frac{6}{7} - \frac{3}{2m-1} \geq \frac{11}{7}$$

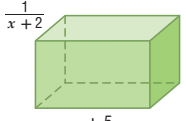
$$(24) r = -\frac{1}{4}, \frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$$

(25) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = -10$.

(26) إذا كانت m تتغير طردياً مع n ، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$ ، فأوجد قيمة n عندما $m = 30$.

(27) إذا كانت r تتغير تغيراً مشتركاً مع s و t ، وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$ و $t = -5$ ، فأوجد قيمة s عندما $r = 7$ و $t = 2.5$.

(28) **درجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية، فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طردياً مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟ **4h**

(29) ما حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟

 وحدة مكعبة $\frac{1}{x+1}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (3) $\frac{m+3}{n-3}$ (5-7) انظر الهامش

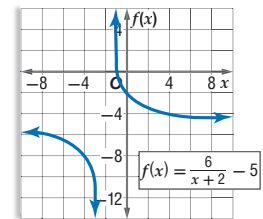
$$(1) 8r^2 \cdot \frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2} = -\frac{2(m+2)}{m} \cdot \frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$$

$$(3) \frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3} = \frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-x-20}$$

$$(4) \frac{x+4}{x-1} = \frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$$

$$(5) \frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1} = \frac{2x+1}{5x-1} \cdot \frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$$

(9) حدّد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالة الممثلة بيانياً أدناه. انظر الهامش



(10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$ ؟ **A**

$$\begin{array}{ll} x = 1 & \text{C} \\ x = -2 & \text{A} \\ x = 2 & \text{D} \\ x = -1 & \text{B} \end{array}$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً: (11-16) انظر ملحق الإجابات

$$(12) f(x) = \frac{2}{x+4} \quad (13) f(x) = -\frac{8}{x} - 9$$

$$(14) f(x) = \frac{5x}{x+1} \quad (15) f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$$

$$(16) f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1} \quad (17) f(x) = \frac{x}{x-5}$$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
	الدروس: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6		تدريبات إعادة التعليم،
	تدريبات المهارات،		ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
	ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)		
	مشروع الفصل، ص (8)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com



التخمين والتحقق

من المهم جداً أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختبار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقمّ معقولة كل منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة، واسأل نفسك:

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- معادلات: إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة، فعوّض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- أنظمة المعادلات: عوّض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

- اختر أحد البدائل، وتأكد ممّا إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثم حدد الإجابة الصحيحة.
- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيداً وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

$$\text{ما حل المعادلة } \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9} ?$$

- | | |
|-----|------|
| 5 C | -1 A |
| 7 D | 1 B |

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية التخمين والتحقق؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- لماذا تعد استراتيجية التخمين والتحقق مناسبة للاستعمال في الاختبارات المعيارية؟
- إجابة ممكنة: من المعروف أن الإجابة الصحيحة موجودة في البدائل، وعندئذٍ يمكنك التحقق من خلال معطيات السؤال، وإلا فعليك اختيار إجابة أخرى. وبهذه الطريقة تكون متأكداً من إجابتك.
- متى تستعمل استراتيجية التخمين والتحقق؟
- إجابة ممكنة: يمكن استعمال هذه الاستراتيجية في أي اختبار معياري، وبخاصة عندما تكون البدائل عبارة عن أعداد؛ إذ يمكنك عندئذٍ تعويض الأعداد بدلاً من المتغيرات في المعادلة المعطاة.

مثال إضافي

تدريب اختبار معياري:

إذا كانت y تتناسب تناسباً مشتركاً مع x ، z ، وأن $y = 40$ عندما $x = 28$ و $z = 15$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 12$ ، $z = 7$ **A**.

- A** 8
B 20
C 80
D 200

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية، فإن كلاً منها إجابة محتملة الاختيار، ويجب التحقق من كلٍّ منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

تحقق،	
$\frac{2}{(-1)-3} - \frac{4}{(-1)+3} = \frac{8}{(-1)^2-9}$	خمن، -1
$-\frac{5}{2} \neq -1$	

تحقق،	
$\frac{2}{1-3} - \frac{4}{1+3} = \frac{8}{(1)^2-9}$	خمن، 1
$-2 \neq -1$	

تحقق،	
$\frac{2}{5-3} - \frac{4}{5+3} = \frac{8}{(5)^2-9}$	خمن، 5
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x = 5$ ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

3 التقويم

استعمل التمارين 1-4؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

(1) ما حل المعادلة $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$ ؟ **B**

- A** $\frac{1}{10}$
B $\frac{1}{5}$
C $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{2}$

(2) مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عمر محمد يزيد على مثلي عمر محمود بسنة واحدة، وعمر علي أكبر من عمر محمد بثلاث سنوات، فما عمر محمد؟ **H**

- F** 7
G 14
H 15
J 18

(3) ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+4}{3}$ ؟ **D**

- A** -5
B 4
C 3 أو 2
D 2 أو -5

(4) تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات بسعر 10 ريالات. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر. فإذا زاد سعر النسخة الواحدة، فإن عدد النسخ المباعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل ريالين زيادة. فما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟ **H**

- F** 10 ريالات
G 13 ريالاً
H 15 ريالاً
J 20 ريالاً

اختيار من متعدد

(4) ما أبسط صورة للكسر المركب $\frac{(x+3)^2}{\frac{x^2-16}{x+3}}$ ؟ C

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

(5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ تساوي: A

77 A

45 B

13 C

-77 D

(6) ما حل المعادلة: $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ ؟ C

-13 A

$\frac{7}{3}$ B

5 C

7 D

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

(1) تتغير تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طردياً مع عدد أيام استئجارها كما هو موضح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أيُّ المعادلات الآتية تمثل ذلك التغير الطردي؟ B

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

(2) في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$ للحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟ A

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

(3) أيُّ مما يأتي ليس خط تقارب للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$ ؟ D

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة عن كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

(1)

A تم إيجاد ثابت التغير بصورة صحيحة، ولكن تمت إضافته بدلاً من الضرب فيه.

B إجابة صحيحة.

C طبق التناسب العكسي بدلاً من الطردي.

D استعملت عملية الضرب، ولكن كان ثابت التغير خطأ.

(2)

A إجابة صحيحة.

B لم تُستعمل إشارة + في تحديد اتجاه الإزاحة.

C فسّر العدد 2 على أنه المقطع من المحور x ، وهذا خطأ.

D خمن.

(3)

A تم تجاهل النفي في المسألة.

B تم تجاهل النفي في المسألة.

C تم تجاهل النفي في المسألة.

D إجابة صحيحة.

(4)

A لم يحلل العبارة $x^2 - 16$ بصورة صحيحة.

B تم تبسيط الكسر بصورة غير صحيحة.

C إجابة صحيحة.

D تم قلب الكسر بعد تبسيطه.

(5)

A صحيحة.

B أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

C أوجد $45 - 32$.

D طرح حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي من حاصل ضرب عناصر القطر الآخر.

(6)

A ضرب بسط ومقام الكسر الأول بـ $x - 3$ وبسط ومقام الكسر الثاني بـ $x + 3$.

B جمع الكسرين في الطرف الأيسر بدلاً من طرحهما.

C صحيحة.

D خمن.

التقويم التكويني

لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 5
يمكنك استعمال:

اختبار تراكمي: ص (60, 61)

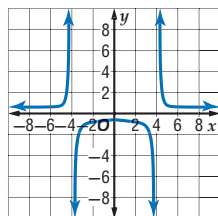
اختبار تراكمي، ص (24)

بدل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 6: حدد الأسئلة
ص (63) واجباً منزلياً لتقويم مهارات
المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضحاً خطوات الحل :



(11) استعمل التمثيل البياني للدالة
النسبية المجاور، وأوجد خطوط
التقارب الرأسية والأفقية للتمثيل
البياني.

(12) أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$
للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي:

(a) $f(x) = x^2$ انظر الهامش
 $g(x) = x - 5$

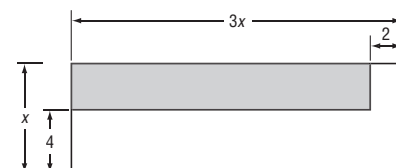
(b) $f(x) = 6 - x^2$ انظر الهامش
 $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة
حدود في أبسط صورة.

$$3x^2 - 14x + 8$$



(8) إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = -3$ ،
فأوجد قيمة y عندما $x = 16$. -64

(9) إذا كانت x تتغير طردياً مع y وعكسياً مع z ، وكانت $z = 26$ عندما
 $x = 8$ و $y = 13$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 8$ و $y = -6$. -12

(10) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y = 4$ عندما $x = 12$ ،
فأوجد قيمة y عندما $x = 5$. 9.6

إجابات:

(11) إجابة ممكنة: يوجد خط تقارب رأسي
عندما $x = -4$ و $x = 4$ ، وخط تقارب
أفقي عندما $y = 0$

$$(f+g)(x) = x^2 + x - 5 \quad (12a)$$

$$(f-g)(x) = x^2 - x + 5$$

$$(f \cdot g)(x) = x^3 - 5x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-5}, x \neq 5$$

$$(f+g)(x) = x^2 + 3x + 1 \quad (12b)$$

$$(f-g)(x) = -3x^2 - 3x + 11$$

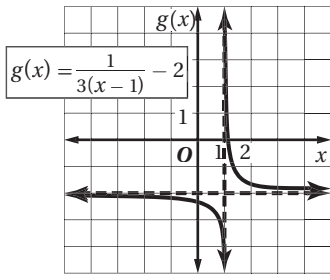
$$(f \cdot g)(x) = -2x^4 - 3x^3 + 17x^2 + 18x - 30$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{6-x^2}{2x^2+3x-5}, x \neq 1, x \neq -\frac{5}{2}$$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

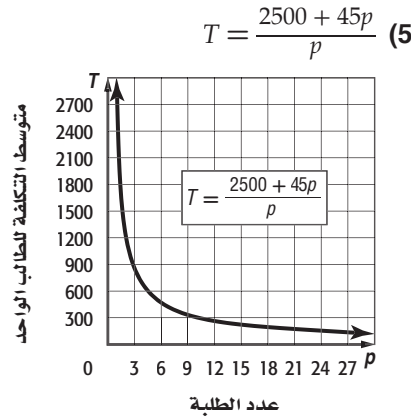
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع حل سؤال...
4-1	5-4	5-5	5-5	5-5	3-3	5-6	2-4	5-1	5-4	5-3	5-5	فعد إلى الدرس...

الدرس 5-2 ص 23



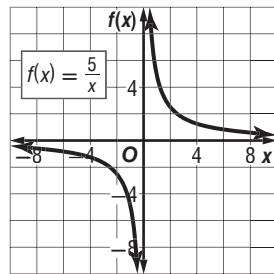
(4B)

المجال = $\{x \mid x \neq 1\}$ ؛ المدى = $\{g(x) \mid g(x) \neq -2\}$



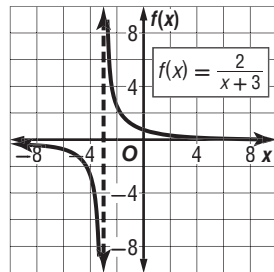
لا يمكن للصفر أن ينتمي إلى المجال؛ لأن عدد الطلبة لا يمكن أن يساوي صفراً. وكذلك لا ينتمي الصفر إلى المدى؛ لأن متوسط التكلفة لا يمكن أن يكون صفراً. ولا يمكن لأي من المجال أو المدى أن يحوي قيمة سالبة، لأنه لا يمكن وجود متوسط تكلفة سالبة لعدد سالب من الطلاب.

الدرس 5-3 ، ص 28، 29



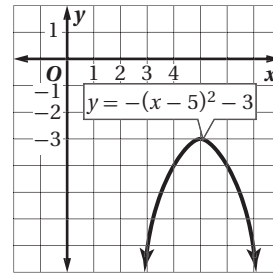
(2)

المجال = $\{x \mid x \neq 0\}$
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

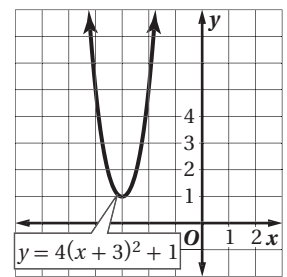


(3)

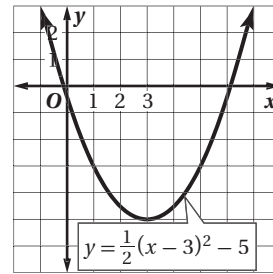
المجال = $\{x \mid x \neq -3\}$
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



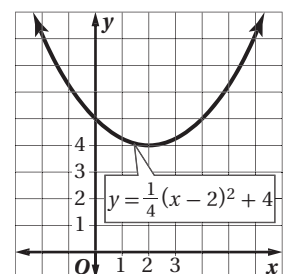
(69)



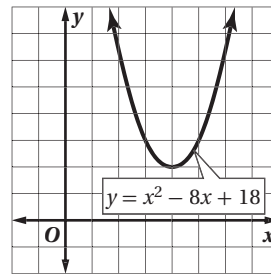
(68)



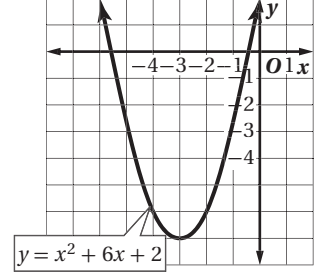
(71)



(70)

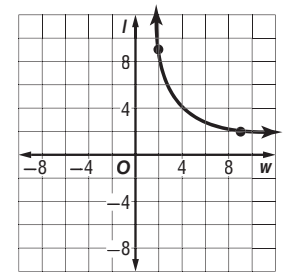


(73)

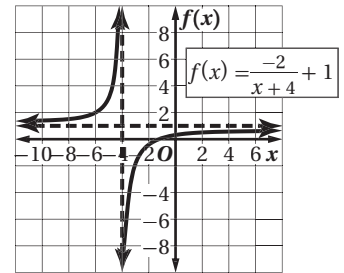


(72)

الدرس 5-3 (تحقق من فهمك) ، ص 25-28

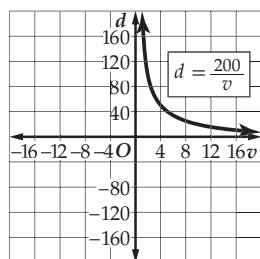


(2)

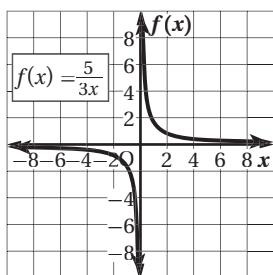


(4A)

المجال = $\{x \mid x \neq -4\}$ ؛ المدى = $\{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$



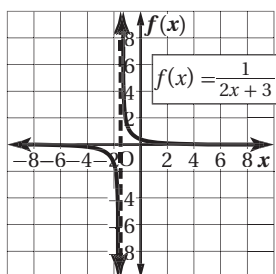
(18b)



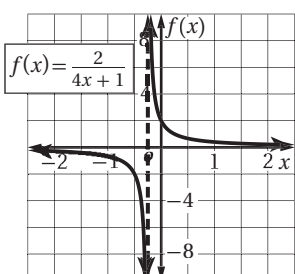
(19)

المجال = $\{x | x \neq 0\}$;

المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



(21)



(20)

المجال = $\{x | x \neq -\frac{3}{2}\}$;

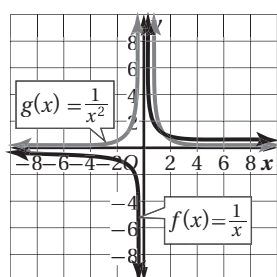
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

المجال = $\{x | x \neq -\frac{1}{4}\}$;

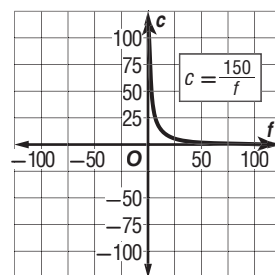
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$		$f(x) = \frac{1}{x}$	
x	$g(x)$	x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{9}$	-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$\frac{1}{4}$	-2	$-\frac{1}{2}$
-1	1	-1	-1
0	غير معرفة	0	غير معرفة
1	1	1	1
2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{9}$	3	$\frac{1}{3}$

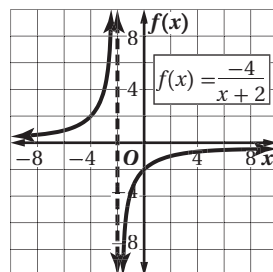
(22a)



(22b)



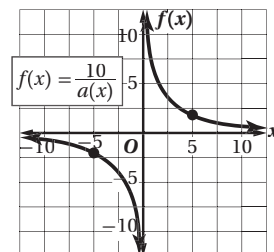
(6b)



(11)

المجال = $\{x | x \neq -2\}$;

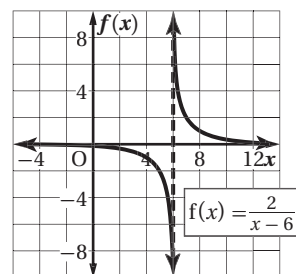
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



(10)

المجال = $\{x | x \neq 0\}$;

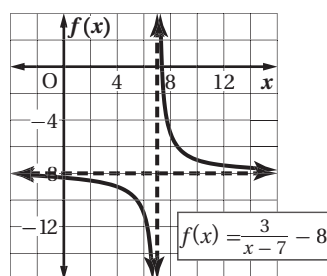
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



(12)

المجال = $\{x | x \neq 6\}$;

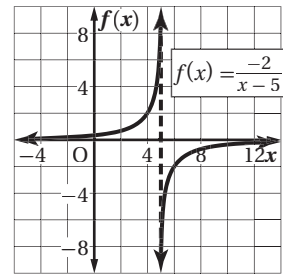
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



(14)

المجال = $\{x | x \neq 7\}$;

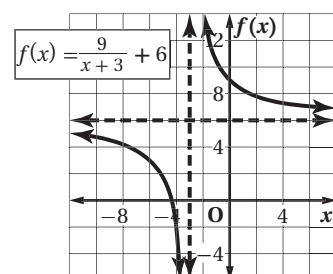
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq -8\}$



(13)

المجال = $\{x | x \neq 5\}$;

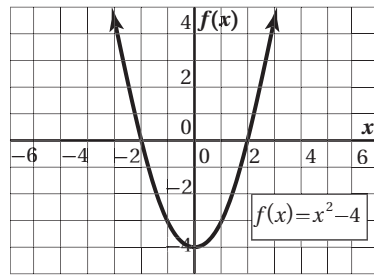
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$



(15)

المجال = $\{x | x \neq -3\}$;

المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 6\}$

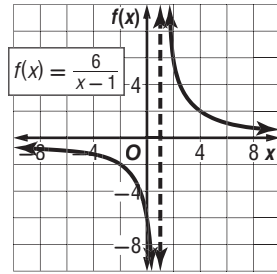


(38)

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

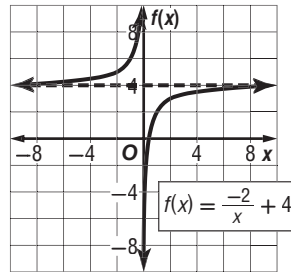
$$\{f(x) \mid f(x) \geq -4\} = \text{المدى}$$

اختبار منتصف الفصل ، ص 31



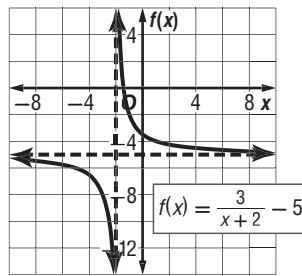
(18)

$$\{f(x) \mid f(x) \neq 0\} = \text{المدى}, \{x \mid x \neq 1\} = \text{المجال}$$



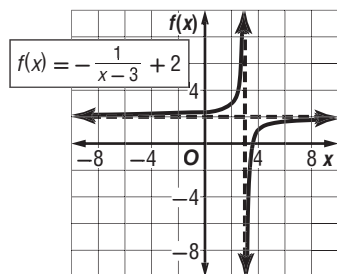
(19)

$$\{f(x) \mid f(x) \neq 4\} = \text{المدى}, \{x \mid x \neq 0\} = \text{المجال}$$



(20)

$$\{f(x) \mid f(x) \neq -5\} = \text{المدى}, \{x \mid x \neq -2\} = \text{المجال}$$



(21)

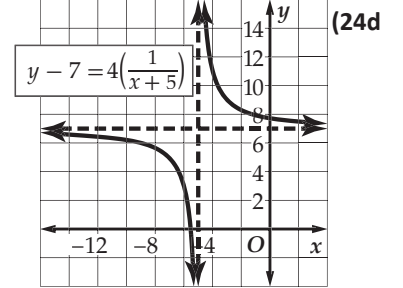
$$\{f(x) \mid f(x) \neq 2\} = \text{المدى}, \{x \mid x \neq 3\} = \text{المجال}$$

(22c) الجزء الأيمن من التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ يشبه التمثيل

البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$. بحيث تعطي قيم x الموجبة قيمًا موجبة

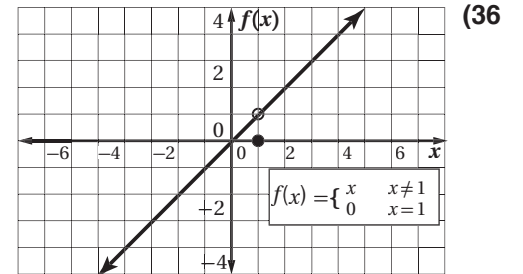
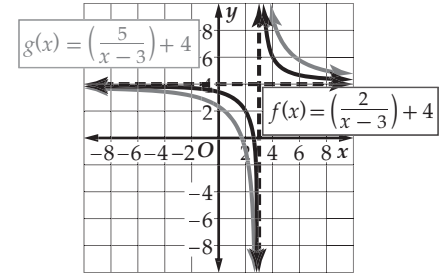
للدالة $f(x)$. والجزء الأيسر من التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ يشبه الانعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ حول المحور x . بحيث تعطي جميع قيم x قيمًا موجبة للدالة $g(x)$.

(22d) إجابة ممكنة: يكون التمثيل البياني متماثلًا حول المحور y عندما تكون n عددًا زوجيًا، ومتماثلًا حول نقطة الأصل عندما يكون n عددًا فرديًا.



(24d)

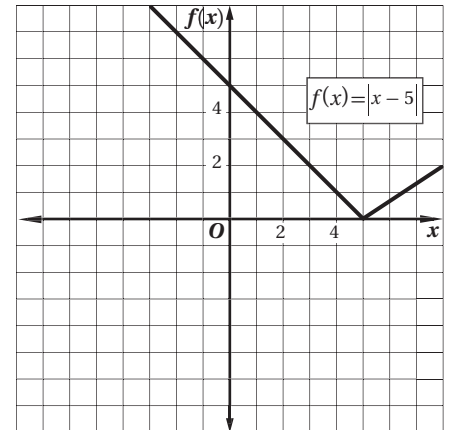
(26) إجابة ممكنة: $g(x) = \frac{5}{x-3} + 4$ و $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$



(36)

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

$$\{f(x) \mid f(x) \neq 1\} = \text{المدى}$$

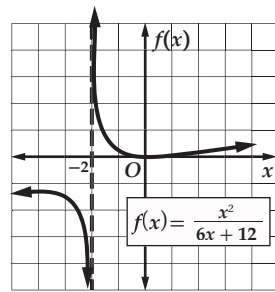


(37)

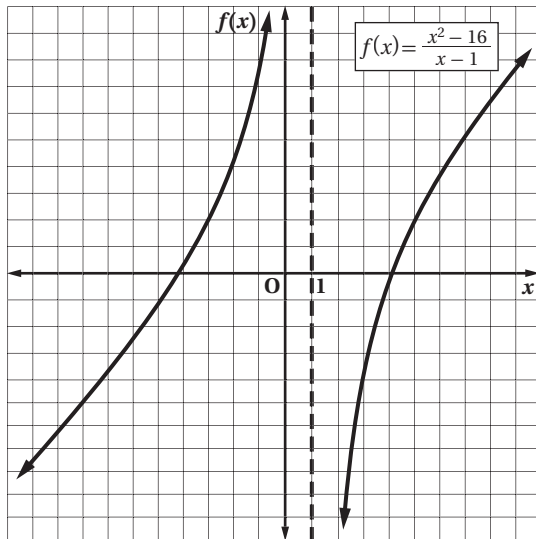
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

$$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\} = \text{المدى}$$

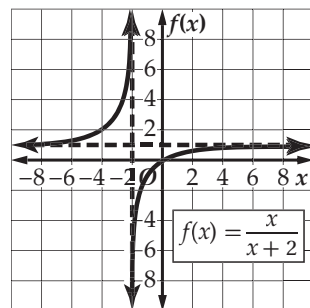
(6)



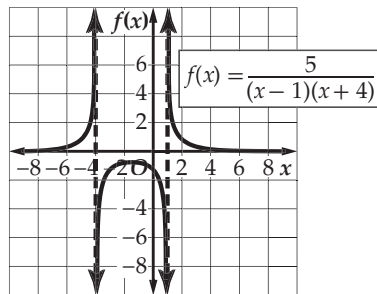
(7)



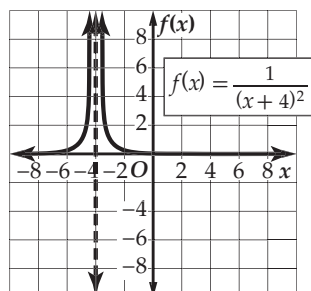
(8)



(9)

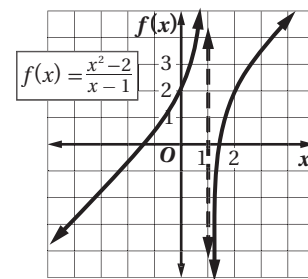


(10)

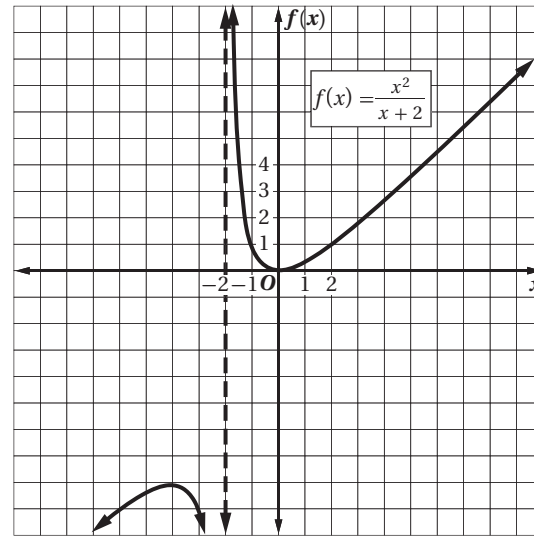


الدرس 5-4، ص 35-37

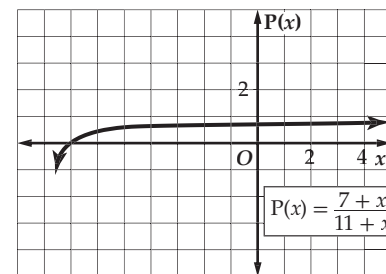
(1)



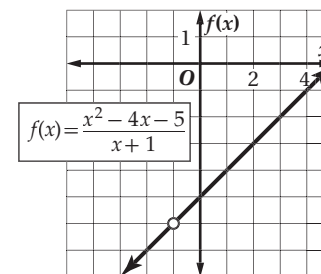
(2)



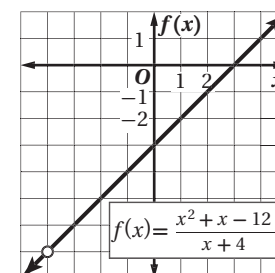
(3a)



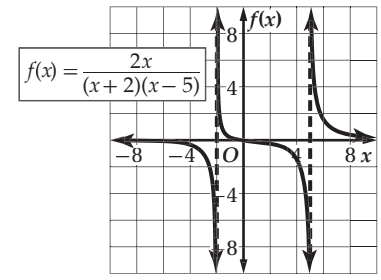
(4)



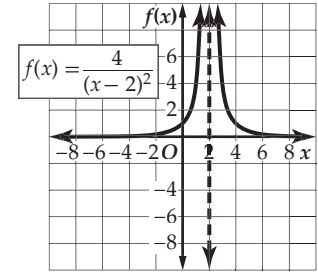
(5)



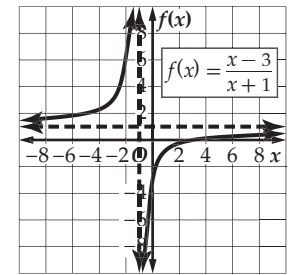
(11)



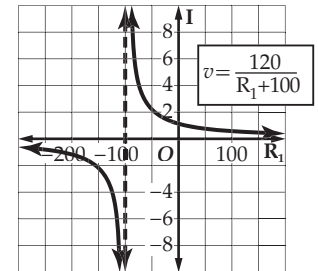
(12)



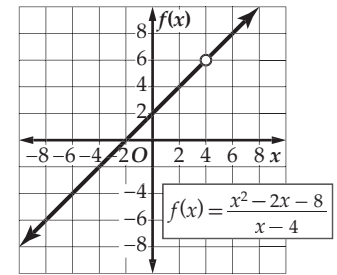
(13)



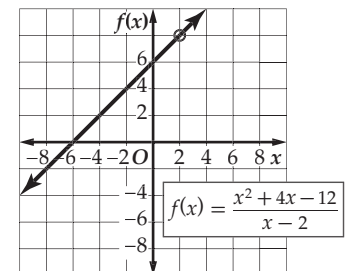
(14a)



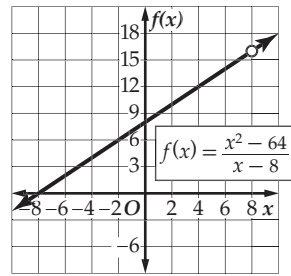
(15)



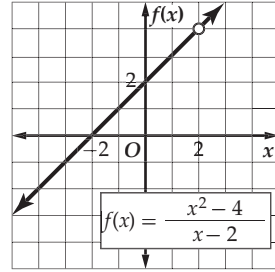
(16)



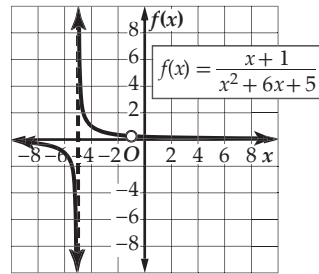
(17)



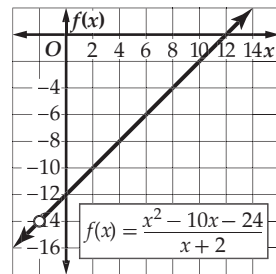
(18) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$



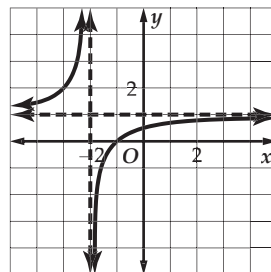
(23)

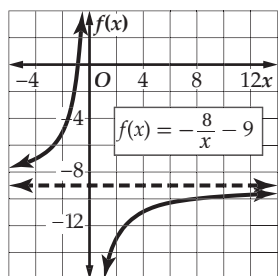


(24)

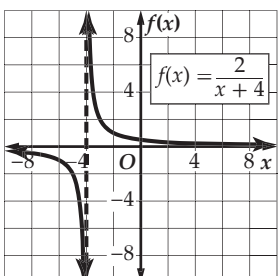


(25) إجابة ممكنة:

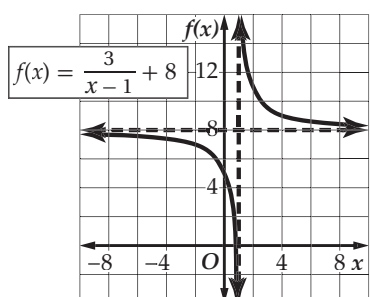




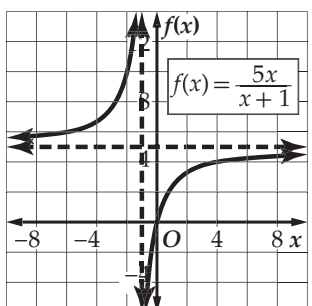
(11)



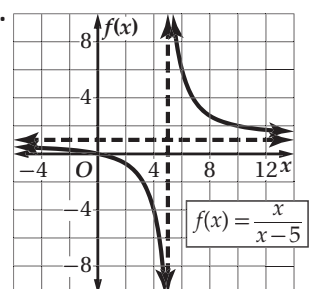
(12)



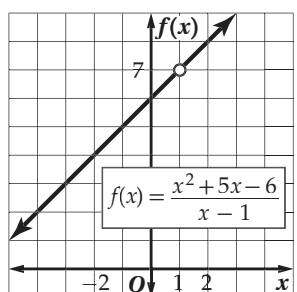
(13)



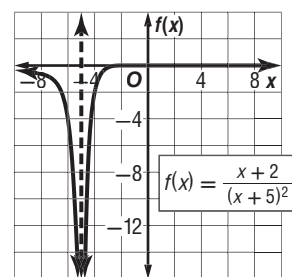
(14)



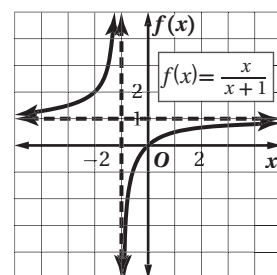
(15)



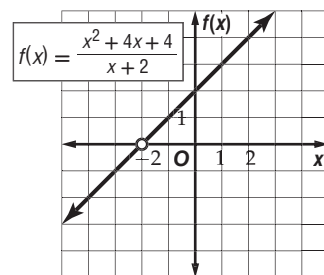
(16)



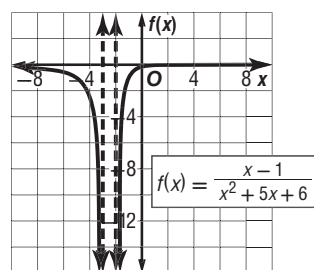
(33)



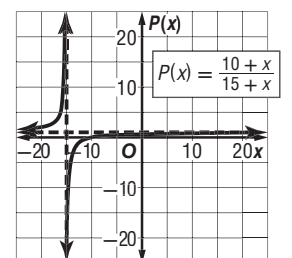
(34)



(35)



(36)



(37a)

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (61)

العنوان	الدرس 6-1 حصتان	الدرس 6-2 (3) حصص	الدرس 6-3 (3) حصص	الدرس 6-4 حصتان
الأهداف	- ربط المتتابعات الحسابية بالدوال الخطية. - ربط المتتابعات الهندسية بالدوال الأسية.	- استعمال المتتابعات الحسابية. - إيجاد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.	- استعمال المتتابعات الهندسية. - إيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية.	- إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية. - كتابة الكسر العشري الدوري على صورة كسر اعتيادي.
المفردات	المتتابعة الحد المتتابعة المنتهية المتتابعة غير المنتهية المتتابعة الحسابية أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) المتتابعة الهندسية أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة)	الأوساط الحسابية المتسلسلة المتسلسلة الحسابية المجموع الجزئي رمز المجموع	الأوساط الهندسية المتسلسلة الهندسية	المتسلسلة الهندسية غير المنتهية المتسلسلة المتقاربة المتسلسلة المتباعدة مالانهاية
التمثيلات المتعددة		ص (76)		ص (89)
مصادر الدرس	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون - تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (10) دون ضمن فوق - كتاب التمارين، ص (10) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون - تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (15) دون ضمن فوق - كتاب التمارين، ص (11) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون - تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (20) دون ضمن فوق - كتاب التمارين، ص (12) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون - تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (25) دون ضمن فوق - كتاب التمارين، ص (13) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	الرسائل الفورية، ص (67)	السبورة التفاعلية، ص (72)	عرض تقديمي، ص (81)	الرسائل النصية، ص (87)
تنويع التعليم	ص (67, 69)	ص (72, 75)	ص (80, 83)	ص (87, 90)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (84)

المفاتيح: **دون** : دون المتوسط **ضمن** : ضمن المتوسط **فوق** : فوق المتوسط

الخطة الزمنية		
المجموع	المراجعة والتقويم	التدريس
22 حصة	4	18

توسع 6-4 حصة	الدرس 6-5 (3) حصص	توسع 6-5 حصة	الدرس 6-6 (3) حصص
معمل الحاسبة البيانية : النهايات استعمال الحاسبة البيانية لاستكشاف نهاية متتابعة.	نظرية ذات الحدين - استعمال مثلث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك $(a + b)^n$. - استعمال نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار $(a + b)^n$.	معمل الجبر: التوافق ومثلث باسكال استعمال التوافق ومثلث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.	البرهان بالاستقراء الرياضي - إثبات صحة جمل رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي. - إثبات خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضاد.
	مثلث باسكال نظرية ذات الحدين		الاستقراء الرياضي فرضية الاستقراء
المواد اللازمة الحاسبة البيانية	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون - تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (14) دون ضمن فوق	المواد اللازمة الحاسبة العلمية	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون - تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (15) دون ضمن فوق
تسجيل فيديو، ص (94)	عرض تقديمي، ص (98)		
ص (93, 95)	ص (98, 100)		

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (101-104)
- اختبار الفصل ص (105)
- اختبار تراكمي ص (108, 109)

المعالجة		التشخيص	
		التقويم التشخيصي	
		بداية الفصل 6 التهيئة للفصل 6 ، ص (63)	
		مخطط المعالجة، ص (63) بداية كل درس	
		مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب فيما سبق، والآن، لماذا؟	
		خلال كل درس وبعده التقويم التكويني	
		تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (30,31) www.obeikaneducation.com	
		تدريبات المهارات، الفصل 6 تنوع التعليم تنوع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6 www.obeikaneducation.com	
		منتصف الفصل اختبار منتصف الفصل، ص (84) اختبار منتصف الفصل، ص (32) www.obeikaneducation.com	
		تدريبات المهارات، الفصل 6 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6 www.obeikaneducation.com	
		نهاية الفصل دليل الدراسة والمراجعة، ص (101-104) اختبار الفصل، ص (105) اختبار تراكمي، ص (108, 109) www.obeikaneducation.com	
		تدريبات المهارات، الفصل 6 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6 www.obeikaneducation.com	
		بعد انتهاء الفصل 6 التقويم الختامي	
		اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B ، ص (34-39) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (40 , 41) اختبار المفردات ، ص (33) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (42) اختبار تراكمي ، ص (43-45) www.obeikaneducation.com	
		تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6 www.obeikaneducation.com	

البديل 1

جميع المستويات فوق ضمن دون

اطلب إلى الطلبة عمل مخطط يُبين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابة الحسابية والمتتابة الهندسية، مع توضيح معاني المتغيرات في كل منهما. صمّم مسابقة ودية بين مجموعتين من الطلبة : مجموعة تستعمل مفكوك ذات الحدين، ومجموعة تقوم بعملية ضرب كثيرات الحدود.

اكتب مقدارًا مثل $(2x + y)^5$ على السبورة، واطلب إلى كل مجموعة أن تجد مفكوك هذا المقدار بطريقة تعتمد على اسم المجموعة.

قارن بين النتيجتين موضّحًا الزمن اللازم لإيجاد المفكوك لدى كل من المجموعتين.

البديل 2

دون المتوسط دون

لتوضيح مفهوم الاستقراء الرياضي وكيف يتم، ضع خمس قطع من حجارة الدومينو في خط مستقيم، بحيث تكون إحداها أمام الأخرى والمسافة بين كل قطعتين متتاليتين أقل من ارتفاع القطعة، ثم أسقط القطعة الأولى. واسأل الطلبة : ماذا يلاحظون؟ أخبرهم بناءً على ما شاهدوه أن القطعة رقم 29 في مجموعة كبيرة من قطع الدومينو ستسقط إذا قمنا بإسقاط القطعة الأولى. ضع 30 قطعة للتحقق من هذا الاستنتاج.

اسأل الطلبة ماذا سيحدث للقطعة رقم 500 وأخبرهم أنهم في هذه الحالة يستعملون الاستقراء الرياضي.

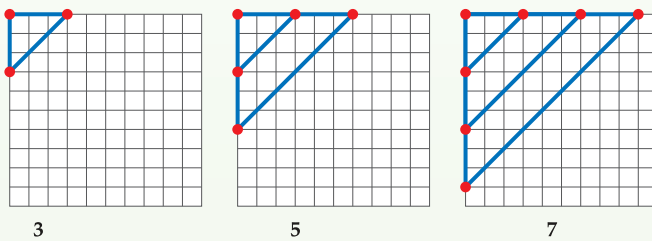
وضّح لهم أن قولهم إن الجملة الرياضية صحيحة عندما $n = 1$ ، يُشبه إثبات أنه يمكن إسقاط القطعة الأولى من قطع الدومينو، وأن إثبات أن الجملة صحيحة عند $k + 1$ إذا كانت صحيحة عند k ، يُشبه إثبات أن سقوط أي قطعة تعني سقوط القطعة التالية لها؛ أي أنه إذا سقطت القطعة رقم (1) فإن القطعة رقم (2) ستسقط، وإذا سقطت القطعة رقم (2) فإن القطعة رقم (3) ستسقط، وهكذا.

البديل 3

فوق المتوسط فوق

من خلال الرسوم والأشكال، يمكن للطلبة استعمال عناصر هندسية مختلفة لنمذجة مسائل تتعلق بالمتتابعات الحسابية والهندسية، اطلب إلى الطلبة إعطاء أمثلة، ثم كتابة قاعدة للحد العام للمتتابة.

على سبيل المثال، تُمثّل الأشكال أدناه متتابة حسابية لعدد النقاط الحمراء، وقاعدة الحد العام لها هي $a_n = 3 + 2(n - 1)$.



ملخص الدروس

6-1 المتتابعات كدوال

- المتتابعة هي مجموعة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة، ويُسمى كل عدد في المتتابعة حداً، وتكون المتتابعة:
- منتهية عندما يكون عدد حدودها محدوداً.
- غير منتهية عندما يكون عدد حدودها غير محدود.
- حسابية عندما يكون الفرق بين أي حد والحد السابق له عدداً ثابتاً، ويُسمى هذا الفرق أساس المتتابعة أو الفرق المشترك فيها.
- هندسية عندما تكون النسبة بين أي حد والحد السابق له ثابتة، ويُسمى هذه النسبة (أساس المتتابعة الهندسية) إضافة إلى تسميتها النسبة المشتركة.
- غير حسابية وغير هندسية عندما لا يكون للمتتابعة أساس.
- المتابعة دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها أعداد حقيقية.
- المتابعة الحسابية دالة خطية، أما المتابعة الهندسية ذات الأساس الموجب فهي دالة أسية.

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

- يمكن إيجاد أي حد a_n في المتتابعة الحسابية إذا عُرف الحد الأول a_1 والأساس d . باستعمال الصيغة $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ، حيث n عدد طبيعي.
- يمكن إيجاد مجموع أول n حداً من متتابعة حسابية باستعمال إحدى الصيغتين $S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ أو $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$ ، ويمكن استعمال رمز المجموع للتعبير عن مجموع المتسلسلة، فعلى سبيل المثال: $\sum_{n=1}^3 (n^2 + 2)$ يمثل مجموع ثلاثة حدود يمكن الحصول عليها بتعويض القيم 1, 2, 3 على التوالي مكان n .

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

- تُستعمل الصيغة $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ لإيجاد قيمة أي حد a_n في متتابعة هندسية؛ حيث a_1 الحد الأول، r أساس المتتابعة.
- يمكن الحصول على متسلسلة هندسية بوضع إشارة + بين كل حدين من حدود المتتابعة الهندسية. وتُستعمل الصيغتان:
- $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ ، $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$ ، حيث $r \neq 1$ لإيجاد مجموع أول n حداً من متتابعة هندسية.

الترباط الرأسي

ما قبل الفصل 6

- حساب قيمة عبارة جبرية.
- البحث عن نمط والتعبير عن التعميمات جبرياً.
- حل المعادلات.
- تبسيط كثيرات الحدود.
- استعمال التبرير الاستقرائي لصياغة تخمين.

الفصل 6

- ربط المتتابعات الحسابية بالدوال الخطية والمتتابعات الهندسية بالدوال الأسية.
- إيجاد قيمة حد معين في متتابعة ومجموع متسلسلة هندسية أو حسابية منتهية.
- إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية وكتابة الكسور الدورية على شكل كسر اعتيادي.
- استعمال مثلث باسكال ونظرية ذات الحدين، لإيجاد مفكوك قوى ذات الحدين.
- استعمال الاستقراء الرياضي لإثبات صحة جمل رياضية.

ما بعد الفصل 6

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- التعبير عن الأنماط باستعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- استعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية وغيرها في حل مسائل واقعية.
- وصف نهايات المتتابعات وتطبيق خواصها للتحقق من تقارب المتسلسلات وتباعدها.
- تطبيق المتتابعات والمتسلسلات في حل مسائل تتعلق بالمجاميع ومفكوك ذات الحدين.

6-4

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

إذا كان مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية :

- يقترب من عدد حقيقي، فإن المتسلسلة تُسمى متسلسلة متقاربة، وعند ذلك تكون القيمة المطلقة للأساس أقل من 1؛ أي أن: $|r| < 1$. وتستعمل الصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$ لإيجاد مجموع المتسلسلة.
- لا يقترب المجموع من عدد حقيقي، عندها تُسمى المتسلسلة متسلسلة متباعدة، وتكون $|r| \geq 1$.

يمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية لتحويل الكسور العشرية الدورية إلى كسور اعتيادية كما في المثال أدناه:

$0.353535... = 0.35 + 0.0035 + 0.000035 + ...$
$r = \frac{0.0035}{0.35} = 0.01$ أساس المتتابعة:
$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.35}{1-0.01} = \frac{0.35}{0.99} = \frac{35}{99}$

6-5

نظرية ذات الحدين

يمكن استعمال النمط في مثلث باسكال (الظاهر أدناه) لحساب معاملات مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$.

$(a+b)^0$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
-----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

فلإيجاد مفكوك المقدار: $(a+b)^n$ حيث n عدد صحيح غير سالب، نجد معاملات a, b وقوى كل منها في كل حد. من المفكوك، فمثلاً:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ ما يلي:

- مجموع الأسس في كل حد يساوي n .
- أس a في الحد الأول وأس b في الحد الأخير، كلاهما يساوي n .
- المعاملات هي الأعداد الظاهرة في مثلث باسكال.
- يوجد $n+1$ من الحدود.

يمكن استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(a+b)^n$. ويمكن كتابتها على الصورة: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$

6-6

البرهان بالاستقراء الرياضي

يُعدّ الاستقراء الرياضي أسلوباً فاعلاً في البرهان، ويتكوّن من جزأين:

- أولاً: برهنة أن خاصية معينة صائبة عند عدد معيّن (عادة العدد 1).
 - ثانياً: الاستقراء، ويتضمّن توضيح أنه إذا كانت خاصية معينة صائبة عند عدد صحيح، وتطلّب ذلك أن تكون صائبة عند العدد التالي، فإن ذلك يثبت أن الخاصية صائبة لكل الأعداد الصحيحة بدءاً من عدد معيّن.
- وفي هذا الدرس ومن خلال البراهين باستعمال الاستقراء الرياضي، سيتم إثبات بعض خصائص المتسلسلات وقابلية القسمة، وسيتم إثبات خطأ جملة من خلال أمثلة مضادة.

المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and Series

مشروع الفصل

محميات

- كلف الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، مع اختيار إحدى المحميات الطبيعية في المملكة (مثلاً: محمية الخنفة)، ثم اختيار أحد أنواع الحيوانات التي تعيش فيها، مثل غزال الإدمي، وجدير بالذكر أنه توجد في هذه المحمية أعداد قليلة من غزال الریم، بالإضافة إلى الثعابين والأرانب البرية وغيرها.
- على افتراض وجود زيادة أو نقصان في أعداد الحيوانات في المحمية، اطلب إلى كل مجموعة إعداد جدول إحصائي بأعداد غزال الإدمي في المحمية خلال الأعوام 1415 حتى 1432 هـ، ثم تمثيل بيانات الجدول بيانياً لاستخلاص النتائج.
- اطلب إلى كل مجموعة تحديد مقادير الزيادة أو النقصان في أعداد هذا النوع في كل عام وتوقع عدد الغزلان في المحمية في عام 1433 هـ، ثم اطلب إليهم أن يحددوا إذا كانت هذه الزيادة أو النقصان ثابتة في كل عام أم لا.

المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملاً الطريقة الآتية:

التعريف: الحد هو كل عدد في المتتابعة أو المتسلسلة.

مثال: الحد الرابع في المتتابعة

29, 20, 11, 2 هو 29

سؤال: ما الحد الأول في المتتابعة السابقة؟ 2

فيما سبق:

درست تبسيط العبارات الجبرية، وإيجاد قيمها.

والآن:

- استعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدين.
- أبرهن جملاً رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

لماذا:

بذور: تظهر المتتابعات بأشكال شتى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفاكهة والخضراوات، فمثلاً تظهر متتابعة فيبوناشي الشهيرة في بذور تباع الشمس.

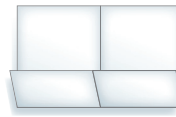
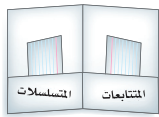


منظم أفكار

المطويات

المتتابعات والمتسلسلات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئاً بورقة واحدة A4.

- 1 اطو الورقة من المنتصف كما في الشكل.
- 2 أعد الورقة إلى وضعها ثم اطو الجانب الأطول بمقدار 5 سنتيمترات لعمل جيب كما في الشكل.
- 3 ألصق الطرفين لعمل الجيب.
- 4 ضع عنواناً لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقاً أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.



منظم أفكار

المطويات

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

■ نموذج بناء المفردات، ص (28).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها يدوّن الطلاب ملاحظاتهم في أثناء دراستهم المتتابعات والمتسلسلات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس، وحفزهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

التهيئة للفصل 6

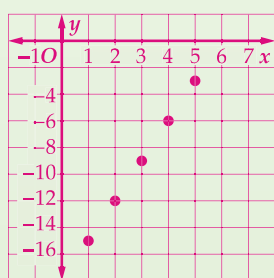
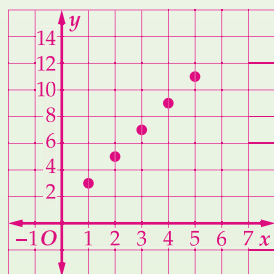
المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة، بمراجعة حل المعادلات بمتغير واحد، وإيجاد قيم العبارات الجبرية، وتمثيل الأزواج المرتبة بيانياً.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة، بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:



مراجعة سريعة

مثال 1

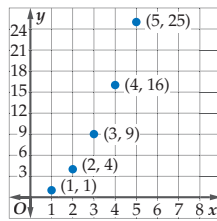
حل المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

ب طرح 400 من الطرفين
بقسمة الطرفين على 3
بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين
بالتبسيط

$$\begin{aligned} -375 &= 3x^3 \\ -125 &= x^3 \\ \sqrt[3]{-125} &= \sqrt[3]{x^3} \\ -5 &= x \end{aligned}$$

مثال 2

مثل الدالة: $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ بيانياً.



ثم حدد كلاً من المجال والمدى.
مجال الدالة هو القيم الممكنة لجميعها للمتغير المستقل (x) .
لذلك يكون مجال الدالة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
أما مدى الدالة فهي القيم الممكنة لجميعها للمتغير التابع (y) .
إذن مدى الدالة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

إذا كانت $x = -2$, $y = -3$ ، فجد قيمة: $2 \cdot 3^x + y$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^x + y &= 2 \cdot 3^{-2} + (-3) \\ &= 2 \cdot 3^{-5} \\ &= \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243} \end{aligned}$$

بالتعويض
بالتبسيط
تعريف القوة السالبة

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمتطلبات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حل كلاً من المعادلات الآتية:

(1) $x = -12$ $-6 = 7x + 78$

(2) $x = \pm 4$ $768 = 3x^4$

(3) $x = 3$ $23 - 5x = 8$

(4) $x = -3$ $2x^3 + 4 = -50$

(5) **نباتات:** يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟ **9 صفوف**

مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً: **6-9 انظر الهامش.**

(6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

(7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$

(8) $\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), (5, \frac{1}{3})\}$

(9) $\{(1, 1), (2, 2), (3, \frac{5}{2}), (4, \frac{11}{4}), (5, \frac{23}{8})\}$

(10) **حضانة:** تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضانة 14000 ريال، وتقاضي الدار عن كل طفل 1000 ريال شهرياً. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبر عن ربح الحضانة الشهري عندما تضم c طفلاً. فما ربح الحضانة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلاً؟ **16000 ريال**

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند قيم المتغيرات المعطاة.

(11) $\frac{a}{3}(b+c)$ إذا كان $a = 9$, $b = -2$, $c = -8$ **-30**

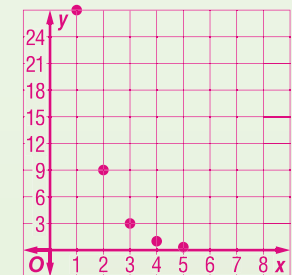
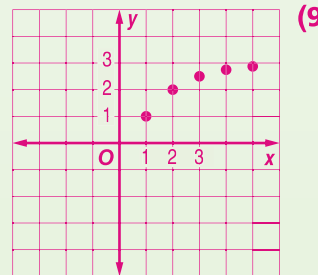
(12) $r + (n-2)t$ إذا كان $r = 15$, $n = 5$, $t = -1$ **12**

(13) $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 5$ **$-\frac{2}{729}$**

(14) $\frac{a(1-bc)^2}{1-b}$ إذا كان $a = -3$, $b = -4$, $c = 1$ **-15**

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

البديل 2



المتتابعات بوصفها دوال
Sequences as Functions

لماذا؟

خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كل صف كما يأتي: مشارك واحد في الصف الأول، وثلاثة في الصف الثاني، وخمسة في الصف الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: المتتابعة مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط محدد أو ترتيب معين ويُسمى كل عدد في المتتابعة **حدًا**. ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدد من الحدود مثل: $-2, 0, 2, 4, 6$ ، أو **غير منتهية** حيث تستمر إلى ما لا نهاية مثل $0, 1, 2, 3, \dots$. ويُرمز للحد الأول في المتتابعة بالرمز a_1 ، وللحد الثاني بالرمز a_2 ، وهكذا.

مفهوم أساسي		المتتابعات كدوال	
التعبير اللفظي: المتتابعة دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية.			
الرموز:	عناصر المجال: $1, 2, 3, \dots, n$	ترتيب الحد	
	عناصر المدى: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$	حدود المتتابعة	
أمثلة:	متتابعة منتهية $3, 6, 9, 12, 15$	متتابعة غير منتهية $3, 6, 9, 12, 15, \dots$	
	المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها	
	المدى: $\{3, 6, 9, 12, 15\}$	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3	

يُحدّد كل حد في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد الذي يسبقه مباشرة. وتُسمى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: $3, 6, 9, 12, 15$ هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقاً مشتركاً (ثابتاً) حيث يزيد كل حد على الحد الذي يسبقه بمقدار 3.

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ & \nearrow +3 & \nearrow +3 & \nearrow +3 & \nearrow +3 \end{array}$$

مثال 1 تحديد المتتابعات الحسابية

بيّن إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي حسابية أم لا:

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad 5, -6, -17, -28, \dots \\ \text{(b)} \quad -4, 12, 28, 42, \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{لـ (a):} \quad \begin{array}{ccccccc} 5 & -6 & -17 & -28 \\ & \nearrow -11 & \nearrow -11 & \nearrow -11 \end{array} \\ \text{الفرق الثابت هو } -11 \\ \text{المتتابعة حسابية} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{لـ (b):} \quad \begin{array}{ccccccc} -4 & 12 & 28 & 42 \\ & \nearrow +16 & \nearrow +16 & \nearrow +14 \end{array} \\ \text{الفرق غير ثابت} \\ \text{المتتابعة ليست حسابية} \end{array}$$

تحقق من فهمك

$$\text{(1A)} \quad 7, 12, 16, 20, \dots \quad \text{نعم} \quad \text{(1B)} \quad -6, 3, 12, 21, \dots$$

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

تحليل الدوال الخطية والدوال الأسية.

الدرس 6-1

ربط المتتابعات الحسابية بالدوال الخطية.

ربط المتتابعات الهندسية بالدوال الأسية.

ما بعد الدرس 6-1

استعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية وغيرها، في حل مسائل من واقع الحياة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"، واسأل:

- ما النمط الذي تمثله صفوف المشاركين في المهرجان؟ $1, 3, 5, 7, \dots$
- كيف يمكنك إيجاد الأعداد الأربعة التالية في هذا النمط؟ بإضافة 2 لكل صف تجد عدد الأشخاص في الصف التالي.
- ما أعداد الصفوف الأربعة التالية في النمط؟ $9, 11, 13, 15$
- هل تتوقع أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ لا؛ لأن عدد المشاركين في المهرجان الكشفي محدود.

مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (67)	• تنويع التعليم، ص (67, 69)	• تنويع التعليم، ص (69)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

مثال 2

تمثيل المتتابعة الحسابية بيانياً

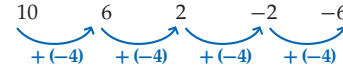
في المتتابعة الحسابية: $18, 14, 10, \dots$

(a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: لحساب أساس المتتابعة، اطرح أي حد من حدود المتتابعة من الحد اللاحق له مباشرة. فأساس المتتابعة المعطاة هو $-4 = 10 - 14$. ويُمثل هذا العدد الفرق المشترك بين حدود المتتابعة.

الخطوة 2: لإيجاد الحد التالي. أضف -4 للحد الأخير المُعطى.

وهكذا أضف -4 لكل حد من الحدود التالية.



إذن الحدود الأربعة التالية للمتتابعة هي: $6, 2, -2, -6$

(b) مثل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانياً.

مجال المتتابعة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

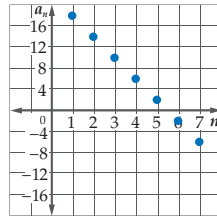
ومدى المتتابعة هو المجموعة: $\{18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, \dots\}$

ولذلك تُمثل هذه الحدود من المتتابعة بيانياً بالشكل المجاور.

تحقق من فهمك

(2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية $18, 11, 4, \dots$

ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانياً. **انظر الهامش**



لاحظ أن النقاط التي تُمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالة خطية متغيّرها المستقل هو رقم الحد n ومتغيّرها التابع هو الحد a_n والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

إيجاد حدود المتتابعة الحسابية

مثال 3 من واقع الحياة

الفرق الكشفية: بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.

افهم بما أن الفرق الثابت بين كل حد والحد السابق له هو 2، فإن أساس المتتابعة هو 2.

خطّط اكتب قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل والنقطة.

افرض أن $(x_1, y_1) = (3, 5)$ ، $m = 2$. ثم حلّ المعادلة عندما $x = 14$

حلّ $(y - y_1) = m(x - x_1)$

$m = 2, (x_1, y_1) = (3, 5)$ $(y - 5) = 2(x - 3)$

بالضرب $y - 5 = 2x - 6$

بجمع 5 إلى كل من طرفي المعادلة $y = 2x - 1$

بتعويض 14 مكان x $y = 2(14) - 1$

بالتبسيط $y = 28 - 1 = 27$

إذن عدد المشاركين في الصف الرابع عشر هو 27 مشاركاً.

تحقق يمكن إيجاد حدود المتتابعة بإضافة 2 لكل صف، بدءاً من الصف الأول حتى نصل إلى الصف الرابع عشر.

تحقق من فهمك

(3) **نقود:** يتقاضى عليّ نظير عمله أجرة مقدارها 100 ريال يومياً، ويحصل على زيادة على أجرته اليومية مقدارها 5 ريالات كل 3 شهور. فكم تصبح أجرته اليومية بعد مرور 3 سنوات؟ **160 ريالاً**

الدرس 6-1 المتتابعات بوصفها دوال 65

المتتابعات الحسابية

مثال 1 يبيّن كيفية التأكد من وجود أساس للمتتابعة؛ لتمييز المتتابعة الحسابية عن غيرها.

مثال 2 يبيّن كيفية استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها وتمثيلها بيانياً.

مثال 3 يبيّن كيفية إيجاد أحد حدود المتتابعة الحسابية؛ لحل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 يبيّن ما إذا كانت كل من المتابعتين الآتيتين حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا:

(a) $-3, -8, -13, -23, \dots$ لا

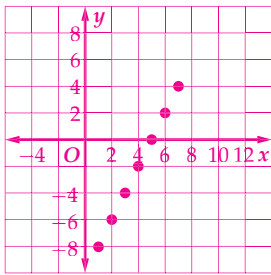
(b) $-8, -2, 4, 10, \dots$ نعم

في المتتابعة الحسابية

$-8, -6, -4, \dots$

(a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة. $-2, 0, 2, 4$

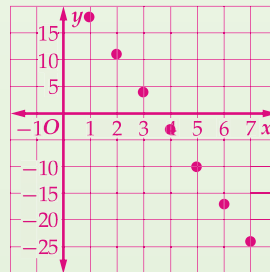
(b) مثل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانياً.



3 **فرق كشفية** استعمل المعلومات الواردة في المثال 3؛ لتحديد عدد المشاركين في الصف رقم 20. 39

إجابة (تحقق من فهمك):

(2) $-3, -10, -17, -24$



تنبيه

تجنب الأخطاء المفاهيمية: تأكد من فهم الطلبة أن n في a_n تُمثل ترتيب الحد، وليست أساً.



الربط مع الحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظمون بعمل ترتيبات خاصة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

المتتابعة الهندسية : المتتابعة الهندسية نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أي حد من حدودها بضرب الحد السابق له مباشرة في عدد ثابت يسمى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $1, 4, 16, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \dots$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أي أن كل حد في المتتابعة هو 4 أمثال الحد السابق له مباشرة.

تحديد المتتابعة الهندسية

مثال 4

بين إذا كانت كل من المتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

(a) $-2, 6, -18, 54, \dots$

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$\frac{6}{-2} = -3, \frac{-18}{6} = -3, \frac{54}{-18} = -3$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

(b) $8, 16, 24, 32, \dots$

$\frac{16}{8} = 2, \frac{24}{16} = 1.5, \frac{32}{24} = 1.3$

بما أن النسب غير متساوية؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تحقق من فهمك

(4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \dots$ نعم (4B) $1, 3, 7, 15, \dots$ لا

يمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

تمثيل المتتابعة الهندسية بيانياً

مثال 5

المتابعة: $32, 8, 2, \dots$ متتابعة هندسية.

(a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة: $\frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{8}$

الخطوة 2: لإيجاد الحد التالي، اضرب الحد السابق في العدد $\frac{1}{4}$

وهكذا بضرب كل حد في العدد $\frac{1}{4}$ نحصل على الحدود الآتية.

$2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

إذن الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

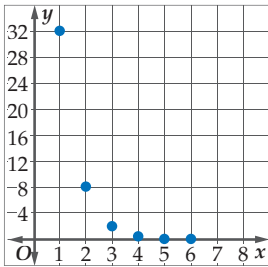
(b) مثل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانياً.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

المدى: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$

تحقق من فهمك

(5) أوجد الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية: $7, 21, 63, \dots$ ثم مثل الحدود الخمسة الأولى بيانياً. انظر الهامش



المتتابعات الهندسية

مثال 4 يبين كيفية التأكد من وجود نسبة مشتركة (أساس) بين كل حدين متتاليين من حدود المتتابعة للحكم على أن المتتابعة هندسية.

مثال 5 يبين كيفية استعمال "أساس المتتابعة الهندسية" لإيجاد حدود أخرى من المتتابعة، ومن ثم تمثيلها بيانياً.

مثال 6 يبين كيفية تحديد نوع المتتابعة حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك.

مثالان إضافيان

4 بين إذا كانت كل من المتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

(a) $8, 20, 50, 125, \dots$ نعم

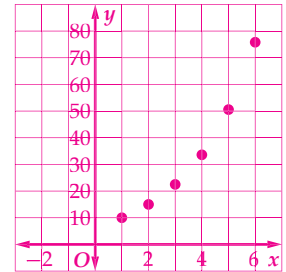
(b) $19, 30, 41, 52, \dots$ لا

5 المتابعة: $10, 15, 22.5, \dots$ متتابعة هندسية.

(a) جد الحدود الثلاثة التالية.

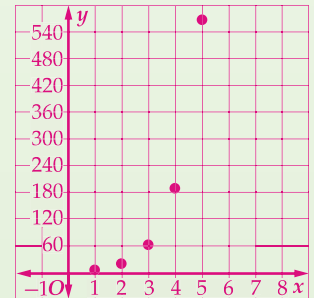
$33.75, 50.625, 75.9375$

(b) مثل الحدود الستة الأولى من المتتابعة بيانياً.



إجابة (تحقق من فهمك):

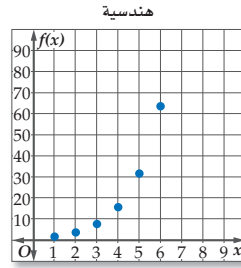
(5) $189, 567$



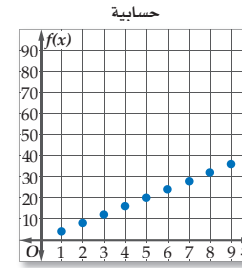
الدالة الأسية

هي الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$ ، حيث $b > 0$ ، $b \neq 1$ وهي متصلة ومتباينة ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ولها خط تقارب أفقي هو المحور x ، ويمر منحنائها بالنقطة $(0, 1)$ دائماً.

تفحص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّي وليس خطياً كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بالدالة $f(x) = r^x$ ، حيث r أساس المتتابعة الهندسية و $r > 0$ و $r \neq 1$



x	1	2	3	4	5	6
f(x)	2	4	8	16	32	64



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

يمكن استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال إضافي

6

حدّد نوع كل من المتتابعات الآتية إذا كانت حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك.

(a) 13, 25, 37, 49, ...

حسابية، الأساس = 12

(b) 2, 5, 9, 14, ... غير ذلك، لا يوجد فرق ثابت ولا نسبة ثابتة.

(c) 6, -12, 24, -48, ...

هندسية، الأساس = -2

المحتوى الرياضي

المتتابعات ليست كل القوائم العددية التي تتبع أنماطاً معينة، هي متتابعات هندسية أو متتابعات حسابية.

التعليم باستعمال التقنيات

الرسائل الفورية اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية بحيث يكتب أحدهما الحدود الأربعة الأولى في متتابعة، ثم يرسلها إلى زميله الذي سيقوم بدوره بكتابة الحدود الثلاثة التالية ثم يعيدها إلى زميله. ويمكن بعد ذلك للزميلين أن يتبادلا الأدوار.

تصنيف المتتابعات

مثال 6

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

(a) 16, 24, 36, 54, ...

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$$54 - 36 = 18 \quad 36 - 24 = 12 \quad \times$$

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$$\frac{54}{36} = \frac{3}{2} \quad \frac{36}{24} = \frac{3}{2} \quad \checkmark \quad \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

بما أن النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة؛ فإن المتتابعة هندسية.

(b) 1, 4, 9, 16, ...

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$$16 - 9 = 7 \quad 9 - 4 = 5 \quad \times$$

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$$\frac{16}{9} = 1.7 \quad \frac{9}{4} = 2.25 \quad \times$$

بما أن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس عدداً ثابتاً، وكذلك النسبة بين كل حدين متتاليين ليست ثابتة أيضاً؛ فإن المتتابعة ليست حسابية ولا هندسية.

(c) 23, 17, 11, 5, ...

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$$5 - 11 = -6 \quad 11 - 17 = -6 \quad 17 - 23 = -6 \quad \checkmark$$

بما أن الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت؛ فإن المتتابعة حسابية.

تحقق من فهمك

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

$$\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \dots \quad (6A) \quad 2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \dots \quad (6B) \quad -4, 4, 5, -5, \dots \quad (6C)$$

(6A) حسابية، أساس المتتابعة $\frac{1}{3}$

(6B) هندسية، أساس المتتابعة $-\frac{3}{4}$

(6C) غير ذلك، لا يوجد فرق ثابت ولا نسبة ثابتة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات صغيرة لمناقشة وتحديد الأخطاء التي وقعوا فيها حول المفاهيم الأساسية في المتتابعات الحسابية والهندسية. واقترح عليهم أن يساعد بعضهم بعضاً في ترتيب وإكمال ملاحظاتهم حول هذه المواضيع.

مثال 1

بين إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

(1) $8, -2, -12, -22, \dots$ نعم

(2) $-19, -12, -5, 2, 9$ نعم

مثال 2

أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانيًا:

(3) $6, 18, 30, \dots$ (3, 4) انظر الهامش

(4) $15, 6, -3, \dots$

مثال 3

(5) **توفير:** يوفر سعيد 250 ريالاً شهرياً، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:

(a) المبلغ الذي يصبح معه بعد مرور 8 أشهر. **3000 ريال**

(b) الوقت الذي يحتاجه ليصبح معه 7250 ريالاً، إذا استمر يوفّر بالطريقة ذاتها. **25 شهراً**

مثال 4

حدّد إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا.

(6) $4, 12, 36, 108, \dots$ نعم

(7) $7, 14, 21, 28, \dots$ لا

مثال 5

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانيًا:

(8) $250, 50, 10, 2, \dots$

(9) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \dots$

حدّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك. (11) **هندسية، الأساس $-\frac{1}{2}$**

(10) $5, 1, 7, 3, 9, \dots$ (11) $200, -100, 50, -25, \dots$ (12) $12, 16, 20, 24, \dots$

(12) **حسابية الأساس 4**

مثال 6

(10) غير ذلك، لا يوجد

فرق ثابت ولا نسبة ثابتة.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

بين إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

(13) $-9, -3, 0, 3, 9, \dots$ لا

(14) $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \dots$ نعم

مثال 2

أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانيًا:

(15) $-5, -11, -17, -23, \dots$ (16) $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \dots$ (17) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \dots$

مثال 3

(18) **تنظيم قاعات:** يوجد 28 مقعداً في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كل

صف تالي يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. إذا كان في هذه القاعة 24 صفًا من المقاعد، فكم مقعداً

يوجد في الصف الأخير؟ **74 مقعداً**

مثال 4

(19) **تمارين قوة:** يقوم عليّ ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويخطط لاستعمال أحد الأجهزة

الرياضية مدة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدة الاستعمال بمعدل دقيقة وثلاثين ثانية يوميًا.

(a) ما مدة استعمال عليّ للجهاز في اليوم الثامن عشر؟ **30 دقيقة و 30 ثانية.**

(b) ما أول يوم سيستعمل فيه الجهاز مدة ساعة أو أكثر؟ **في اليوم الثامن والثلاثين**

(c) هل يُعدّ استمرار عليّ في هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًا؟ لماذا؟

مثال 5

بين إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا.

(20) $21, 14, 7, \dots$ لا

(21) $-27, 18, -12, \dots$ نعم

(22) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \dots$ لا

مثال 6

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانيًا:

(23) $81, 108, 144, \dots$ (24) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$ (25) $1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots$

حدّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

(26) $3, 12, 27, 48, \dots$ (27) $1, -2, -5, -8, \dots$ **حسابية، الأساس -3**

68 الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلبة.

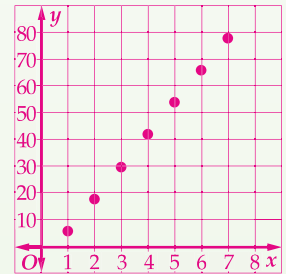
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

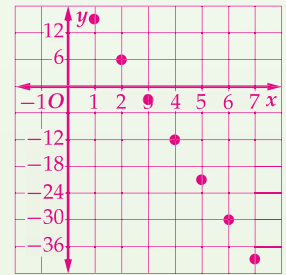
يحتاج الطلبة إلى ورق رسم بياني للإجابة عن الأسئلة 3, 4, 8, 9, 15-17, 23-25.

إجابات:

(3) 42, 54, 66, 78



(4) -12, -21, -30, -39



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	36-43, 13-30
ضمن المتوسط	39-43, 36-39, 32-34, 13-29 فردي
فوق المتوسط	22-43

(29) هندسية؛ الأساس $\frac{1}{5}$

(31) غير ذلك، لا يوجد فرق ثابت ولا توجد نسبة ثابتة.



الربط مع الحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدل 15% إلى 20% سنوياً؛ وذلك اعتماداً على نوع السيارة وعلى السائق.

(28) 12, 36, 108, 324, ... هندسية، الأساس 3 (29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \dots$

(30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$ حسابية؛ الأساس $\frac{1}{2}$ (31) 6, 9, 14, 21, ...

(32) **قراءة:** أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضم 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يومياً، إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يومياً؟ **86 صفحة**

(33) **نقص القيمة:** تنقص قيمة سيارة ماجد بمعدل 15% سنوياً. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات مقرباً الجواب إلى أقرب ريال؟ **22185 ريالاً**

(34) **طي الأوراق:** عند طي ورقة على نفسها، يتضاعف سُمكها. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm وأمكن طيها 37 مرة، فكم يصبح سمكها؟ **حوالي 13744 km**

مسائل مهارات التفكير العليا

(35) **تحذّر:** إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6، وحاصل ضربها يساوي -42، فما هي هذه الحدود؟ **3, 2, 7 -**

(36) **مسألة مفتوحة:** أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كلّ منها كما يأتي 3, 9, ... بحيث تكون إحداها حسابية والثانية هندسية والثالثة لا حسابية ولا هندسية. **انظر الهامش**

(37) **تبرير:** إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$ ، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n ؟ ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$ ؟ **انظر الهامش**

(38) **اكتب:** صف ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

تدريب على اختبار

(39) **إجابة قصيرة:** صالة مستطيلة الشكل بُعْدَها 13 متراً، و11 متراً. إذا أردنا وضع سجادة تغطي الصالة كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالاً. **8580 ريالاً**

(40) ما الحد التالي في المتتابعة الهندسية $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$ ؟ **D**

A $\frac{11}{8}$
B $\frac{27}{16}$
C $\frac{9}{4}$
D $\frac{81}{32}$

مراجعة تراكمية

(41) حل المعادلة: $\frac{3}{x-3} + 9 = 10$ (الدرس 5-6) **6**

أوجد معادلة المستقيم في كلٍّ ممّا يأتي: **مهارة سابقة**

(42) المار بالنقطة (4, 6)، وميله 0.5. **$y = 0.5x + 1$**

(43) المار بالنقطتين (3, 1)، $(-\frac{1}{2}, 8)$. **$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$**

الدرس 1-6 المتتابعات بوصفها دوال 69

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة توضيح كيفية الحصول على أي حد في متتابعة حسابية أو هندسية، بمعلومية الحدود الأولى منها.

إجابات:

(36) **إجابة ممكنة:**

حسابية:

3, 9, 15, 21, ...

هندسية:

3, 9, 27, 81, ...

لاحسابية ولاهندسية:

3, 9, 21, 45, ...

(37) **إجابة ممكنة:** إذا كان أساس المتتابعة

الهندسية r حيث $|r| < 1$ ، فإن زيادة

قيمة n تجعل القيمة المطلقة لكل حد

تقل وتقترب من الصفر؛ لأننا نضرب

الحد في كسر أصغر من الواحد.

وعندما تكون $|r| \geq 1$ ، فإن القيمة

المطلقة للحدود تزايد وتقترب من ما

لانهائية؛ لأن الضرب يتم في عدد أكبر

من 1.

ضمن فوق

تنويع التعليم

توسّع اطرح السؤال التالي على الطلبة "هل المتتابعة: 1, 2, 4, 8, 16, ... حسابية أم هندسية؟ كيف عرفت ذلك؟" **هندسية أساسها 2.** ثم اطرح السؤال: "إذا تم استبدال كل حد من حدود المتتابعة 1, 2, 4, 8, 16, ... بمقلوبه، فهل ستبقى المتتابعة هندسية؟ كيف تقرر ذلك؟" **نعم، أساس المتتابعة $\frac{1}{2}$.** اطلب إلى الطلبة كتابة متتابعات هندسية خاصة بهم، ثم اطلب إليهم تحديد إذا كانت المتتابعة الناتجة عن مقلوب كل حد هي متتابعة هندسية أيضاً أم لا.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 6

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6)

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (7)

دون

الاسم: _____

التاريخ: _____

6-1 تدريبات إعادة التعليم

المتابعات بوصفها دوال

المتابعات الحسابية: المتابعة الحسابية هي متتابعة من الأعداد ينتج كل حد فيها من إضافة أساس المتابعة (الفرق المشترك) إلى الحد السابق له.

الحد النوني في متتابعة حسابية: $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، حيث a_n هو الحد الأول، d أساس المتابعة، n أي عدد صحيح موجب.

مثال:

أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... 7, 11, 15، ثم مِثل الحدود السبعة الأولى للمتتابعة بيانيًا.

أوجد أساس المتتابعة عن طريق حلين متتاليين.

$11 - 7 = 4$ و $15 - 11 = 4$ لذا فإن $d = 4$

الآن أجمع 4 للحد الثالث من المتتابعة، ثم واصل الجمع بإضافة 4 حتى نجد الحدود الأربعة المطلوبة: الحدود الأربعة التالية هي: 19, 23, 27, 31.
مِثل كل نقطة من النقاط (7,31), (6,27), (5,23), (4,19), (3,15), (2,11), (1,7) على المستوى الإحداثي.

تمارين

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية: ثم مِثل المتتابعة بيانيًا:

(1) 106, 111, 116, ... (2) -28, -31, -34, ... (3) 207, 194, 181, ...

(4) -30, -20, -10, ... (5) 13, 7, 1, ... (6) 151, 177, 203, ...

الصف: الثاني التائي

الفصل: ٦، المتابعات والمتسلسلات

تدريبات المهارات (8)

دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (9)

دون ضمن فوق

الاسم: _____

التاريخ: _____

6-1 تدريبات المهارات

المتابعات بوصفها دوال

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية: ثم مِثل المتتابعة بيانيًا.

7, 11, 15, ... (1) -10, -5, 0, ... (2)

(3) 101, 202, 303, ... (4) 15, 7, -1, ...

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية: ثم مِثل المتتابعة بيانيًا.

$\frac{1}{2}, 2, 8, \dots$ (5) $\frac{1}{2}, 2, 10, \dots$ (6)

(7) 13, 26, 52, ...

الصف: الثاني التائي

الفصل: ٦، المتابعات والمتسلسلات

الاسم: _____

التاريخ: _____

6-1 تدريبات حل المسألة

المتابعات بوصفها دوال

(1) توهير، وقّر خالد 370 ريالًا لشترى دراجة، واستمر بتوفير 10 ريالات كل أسبوع. أوجد مجموع ما وقّره بعد 7 أسابيع.

(2) نمو الشعرة في شهر فبراير كان طول شعر سعد 47.0 سم، فوافقت على قياس طول شعرها كل شهر. لتابع نموّه، فوجدت أن طولها بلغ 50.1 سم في مارس، وفي إبريل 53.2 سم، وفي مايو 56.3 سم، وفي يونيو 59.4 سم. استعمل متسلسلة حسابية، وأوجد أساسها، وحّد معدل نموّ شعرها الشهري.

(3) بكتيريا، بكتيريا سترينوتوكوكس بنومونيا أحد أنواع البكتيريا التي تسبب مرض ذات الرئة. ويمكن أن تضاعف هذه البكتيريا عددها خلال 20 دقيقة إذا بدأت عينة بعدد 300 بكتيريا، وتضاعفت كل 20 دقيقة، فاستخدم متسلسلة هندسية لإيجاد عدد البكتيريا في العينة بعد 80 دقيقة.

(4) جوس، تحاول خلوة إيجاد مقعدها في مسرح. والمقاعد مرقّمة بالتتابع من اليسار إلى اليمين. وفي كل صف 30 مقعدًا.

مقعدًا.

بين الشكل أعلاه بعض المقاعد في الزاوية اليسرى بالقرب من النصة. تقف خلوة عند المقعد 129، وعليها أن تجد المقعد 219. لاحظت أن أرقام المقاعد في العمود الواحد تشكل متتابعة حسابية. ما أرقام المقاعد الأربعة التالية في العمود الذي يقع فيه المقعد 129 إذا تحركنا إلى أعلى بعيدًا عن النصة؟ وأين يتعين أن نذهب لتجد مقعدها؟ في أي صف وأي عمود سيكون مقعدها؟

(5) حلقه، ما عدد المربعات الصغيرة في الحلقات الثلاث الأولى في الشكل؟

(a) إذا تكرّر النمط، فاكّتب صيغة لعدد المربعات في الحلقة رقم n .

(b) ما طول ضلع الحلقة رقم n ؟

الفصل: ٦، المتابعات والمتسلسلات

الصف: الثاني التائي

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

الاسم: _____

التاريخ: _____

A portrait of a man with a high forehead, wearing a dark cap and a white clerical collar. He has a serious expression and is looking slightly to the right. The background is dark and indistinct.

70 الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغة للحد النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2

كتابة صيغة للحد النوني في المتتابعات الحسابية

اكتب صيغة للحد النوني للمتتابعة الحسابية في كل ممّا يأتي:

(a) $5, -13, -31, \dots$

$d = -13 - 5 = -18$ والحد الأول 5

الحد النوني في المتتابعة الحسابية

$d = -18$ و $a_1 = 5$

باستعمال خاصية التوزيع، ثم بالتبسيط

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_n = 5 + (n - 1)(-18)$

$a_n = -18n + 23$

(b) $a_5 = 19, d = 6$

أولاً، أوجد قيمة a_1

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$19 = a_1 + (5 - 1)(6)$

$-5 = a_1$

ثم اكتب المعادلة

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_n = -5 + (n - 1)(6)$

$a_n = 6n - 11$

تحقق من فهمك

(2B) $a_6 = 12, d = 8, a_n = 8n - 36$

(2A) $12, 3, -6, \dots, a_n = -9n + 21$

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين **أوساطاً حسابية**، ويمكن استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

مثال 3

إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $22, \dots, 2, 2, 2, 2, 8$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحد الأول والحد الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $4 + 2 = 6$ ، إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

الحد النوني في المتتابعة الحسابية

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_1 = -8, a_6 = 22, n = 6$

$22 = -8 + (6 - 1)d$

بإضافة 8 إلى الطرفين والتبسيط

$30 = 5d$

بقسمة الطرفين على 5

$6 = d$

الخطوة 3: استعمال d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.



إذن الأوساط الحسابية هي $16, 10, 4, -2$

تحقق من فهمك

(3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $18, 36$ $-9, 0, 9, 18, 27$

المتتابعات الحسابية

مثال 1 يبين طريقة الحصول على حد معين لمتتابعة حسابية، بمعلومية عدد من حدودها.

مثال 2 يبين طريقة الحصول على صيغة الحد العام للمتتابعة الحسابية بمعلومية بعض حدودها.

مثال 3 يبين طريقة الحصول على عدد من الأوساط الحسابية بين حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الحد العشرين في المتتابعة الحسابية: $3, 10, 17, 24, \dots, 136$

2 اكتب صيغة الحد النوني لكل من المتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(a) $-8, -6, -4, \dots$

$a_n = 2n - 10$

(b) $a_6 = 11, d = -11$

$a_n = -11n + 77$

3 جد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $21, \dots, 45, \dots, 27, 33, 39$

المحتوى الرياضي

صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية

يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتابعة الحسابية، من خلال معرفة قيمة الحد السابق له مباشرة، شريطة معرفة أساس المتتابعة، ولكن كتابة صيغة للحد النوني للمتتابعة تتطلب معرفة الحد الأول فيها.

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحل

تحقق من صحة الحل، باستعمال صيغة الحد النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

تنبيه

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقق دائماً من أن صيغة الحد النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي

هو معدل عددين أو أكثر. **الأوساط الحسابية** هي الحدود الواقعة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

المتسلسلات الحسابية يمكن الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع بين حدود المتتابعة؛ لذا **المتسلسلة الحسابية** هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي** ويُرمز له بالرمز S_n .

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1, a_n	$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$
بالصيغة البديلة	a_1, d	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لا بد من إيجاد إحدى القيم a_1, a_n, n ، قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحد النوني.

مثال 4 استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \dots + 180$

الخطوة 1: $a_1 = 12, a_n = 180, d = 19 - 12 = 7$
يجب إيجاد قيمة n أولاً كي نجد المجموع.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 180 &= 12 + (n-1)(7) \\ 168 &= 7n - 7 \\ 25 &= n \end{aligned}$$

الخطوة 2: استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n

$$\begin{aligned} \text{صيغة المجموع} \quad S_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \\ n = 25, a_1 = 12, d = 7 \quad S_{25} &= \frac{25}{2} [2(12) + (25-1)(7)] \\ \text{بالتبسيط} \quad S_{25} &= 12.5(192) = 2400 \end{aligned}$$

✓ **تحقق من فهمك** أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية مما يأتي.

(4A) $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ **2550** (4B) $n = 16, a_n = 240, d = 8$ **2880**

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتسلسلة الحسابية.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7, a_n = 79, S_n = 430$

الخطوة 1: أوجد قيمة n

$$\begin{aligned} \text{صيغة المجموع} \quad S_n &= n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \\ S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79 \quad 430 &= n \left(\frac{7 + 79}{2} \right) \\ \text{بالتبسيط} \quad 430 &= n(43) \\ \text{بقسمة طرفي المعادلة على 43} \quad 10 &= n \end{aligned}$$

المتسلسلات الحسابية

مثال 4 يوضح طريقة استعمال صيغة لحساب المجموع الجزئي في متسلسلة.

مثال 5 يوضح طريقة استعمال صيغ المجموع الجزئي لإيجاد حدود في متسلسلة حسابية.

مثال 6 يوضح طريقة إيجاد مجموع متسلسلة حسابية مكتوبة باستعمال رمز المجموع.

مثالان إضافيان

4 أوجد مجموع حدود المتسلسلة:

$$8 + 12 + 16 + \dots + 80$$

5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتسلسلة الحسابية التي فيها:

$$S_n = 129, a_1 = 14, a_n = 29$$

14, 17, 20

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب مثالاً على السبورة للمساعدة في توضيح صيغة مجموع حدود متسلسلة حسابية. ثم اكتب متتابعة الأعداد من 1 إلى 10، ثم قم بتشكيل المجاميع الآتية:

$1 + 10, 2 + 9, 3 + 8$ وبعد ذلك أوجد مجموع حدود المتسلسلة. وأخيراً وضّح للطلبة كيف تساعد صيغة المجموع في تبسيط إيجاد المجموع.

تنويع التعليم

ضمن

المتعلمون المتفاعلون ناقش مع الطلبة الفرق بين المتتابعة والمتسلسلة، واطلب إليهم أن يقترحوا طرقاً مختلفة للتمييز بين المفهومين.

المحتوى الرياضي

المتسلسلة المنتهية تُستعمل الصيغة
 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ لحساب مجموع
 حدود المتسلسلة الحسابية فقط عندما
 يكون عدد الحدود n منتهياً.

مثال إضافي

تدريب على اختبار:

- D أوجد $\sum_{k=3}^{10} (2k+1)$
- 23 A
 70 B
 98 C
 112 D

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 79 &= 7 + (10-1)d \\ 72 &= 9d \\ 8 &= d \end{aligned}$$

الخطوة 3: استعمل d لحساب كل من a_2, a_3

$$\begin{aligned} a_3 &= 15 + 8 = 23 & a_2 &= 7 + 8 = 15 \\ \text{إذن الحدود الثلاثة الأولى هي } & 7, 15, 23 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعات الحسابية الآتية: (5B) $-24, -16, -8$

$$(5A) \quad S_n = 120, n = 8, a_n = 36 \quad (5B) \quad S_n = 5280, a_n = 288, a_1 = -24$$

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال رمز المجموع.

مفهوم أساسي

رمز المجموع

أضف إلى طويبتك

صيغة حدود المتسلسلة

الرموز:

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12} (4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \dots + [4(12)+2]$$

$$= 6 + 10 + 14 + \dots + 50$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع:

$\sum$ يقرأ الرمز "سيجما" وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

$$\sum_{k=4}^{18} (6k-1)$$

- 1008 D 975 C 910 B 846 A

المتسلسلة المعطاة حسابية؛ لأن كل حد يزيد على الحد السابق له بمقدار 6،

ويوجد فيها 15 حداً ($n=15$)؛ لأن $n = 18 - 4 + 1$

$$a_n = 6(18) - 1 = 107 \quad a_1 = 6(4) - 1 = 23$$

أوجد المجموع

$$\text{صيغة المجموع} \quad S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$$

$$S_{15} = 15 \left(\frac{23 + 107}{2} \right)$$

$$S_{15} = 15(65) = 975$$

إذن رمز الإجابة الصحيحة هو C.

تحقق من فهمك

$$(6) \quad \sum_{m=9}^{21} (5m+6)$$

- 1701 D 1281 C 1053 B 972 A

مثال 1 أوجد قيمة الحد المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

(1) a_n علمًا بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$ (2) a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \dots$ 233

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني لكلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

(3) $13, 19, 25, \dots$ $a_n = 6n + 7$ (4) $a_5 = -12, d = -4$ $a_n = -4n + 8$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

(5) $6, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 42$ $15, 24, 33$ (6) $-4, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 8$ $-1, 2, 5$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية فيما يأتي:

(7) أول 50 عددًا طبيعيًا 1275 (8) $4 + 8 + 12 + \dots + 200$ 5100

(9) $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$ 4500 (10) $a_n = 145, d = 5, n = 21$ 1995

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(11) $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$ $8, 12, 16$ (12) $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$ $10, 16, 22$

مثال 6 (13) اختيار من متعدد: أوجد $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$ C .

342 C 45 A

410 D 78 B

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحد المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

(14) a_n علمًا بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$ 162 (15) a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$ 248

(16) a_{15} في المتتابعة $-5, -12, -19, \dots$ -103 (17) a_{24} في المتتابعة $8.25, 8.5, 8.75, \dots$ 14

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني في كل متتابعة حسابية فيما يأتي:

(18) $24, 35, 46, \dots$ $a_5 = 1.5, d = 4.5$ (19) $9, 2, -5, \dots$ $a_5 = 1.5, d = 4.5$

(21) $a_6 = 22, d = 9$ $a_8 = -8, d = -2$ (22) $-12, -17, -22, \dots$ $a_8 = -8, d = -2$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

(24) $24, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, -1$ $19, 14, 9, 4$

(25) $-6, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 49$ $5, 16, 27, 38$

(26) $-28, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 7$ $-21, -14, -7, 0$

(27) $84, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 39$ $75, 66, 57, 48$

(18) $a_n = 11n + 13$

(19) $a_n = 4.5n - 21$

(20) $a_n = -7n + 16$

(21) $a_n = 9n - 32$

(22) $a_n = -2n + 8$

(23) $a_n = -5n - 7$

تنبيه!

تجنب الأخطاء: ساعد الطلبة

على التعامل مع رمز المجموع بصورة صحيحة وذلك عن طريق قراءة عبارات مكتوبة باستعمال رمز المجموع. ووضح لهم أن رمز المجموع هو حرف S مكتوبًا بصورة كبيرة باللغة اليونانية. واطلب إلى الطلبة إعطاء أمثلة على مصطلحات رياضية أخرى تستخدم الأحرف اليونانية. إجابة ممكنة: π

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-13 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

الأُسئلة	المستوى
62-70 ، 56-60 ، 54 ، 14-41	دون المتوسط
64-70 ، 43-55 ، 14-41	ضمن المتوسط
43-70	فوق المتوسط

مثال 4

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

(28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية. **10100**

(29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية. **40000**

(30) $66 + (-12) + (-15) + (-18) + \dots + 72$ (31) $72 + (-12) + (-18) + (-24) + \dots + 408$

(32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$ (33) $n = 19, a_n = 154, d = 8$ **1272** **1558**

(34) **مسابقات ثقافية:** تبدأ جائزة مسابقة ثقافية بمبلغ 150 ريالاً، ويُضاف مبلغ 50 ريالاً إلى الجائزة كل شهر، إذا استمرت المسابقة مدة أحد عشر شهراً، فكم يكون مجموع قيم الجوائز؟ **4400 ريال**

مثال 5

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

(35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$ (36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$ **3, 6, 9**

(37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$ (38) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$ **-15, -6, 3** **انظر الهامش**

مثال 6

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

(39) $\sum_{k=1}^{16} (4k - 2)$ (40) $\sum_{k=4}^{13} (4k + 1)$ **512** **350**

(41) $\sum_{k=5}^{16} (2k + 6)$ (42) $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$ **324** **-208**

(43) **قرض حسن:** اقترض عليّ مبلغاً من المال من أحد أصدقائه، واتفقنا على أن يقوم بتسديده مَقْسَطاً كما يأتي: القسط الأول 50 ريالاً، وكل قسط تالي يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالاً. فإذا علمت أن عدد الأقساط هو 12، فما قيمة القرض؟ **2250 ريالاً.**



الربط مع الحياة

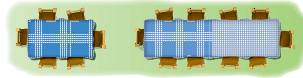
يجب على الإنسان أن يكتب عقداً بينه وبين من يقرضه المال، عملاً بقوله تعالى في سورة البقرة ﴿يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا تَدَايَنْتُمْ بِدَيْنٍ إِلَى أَجَلٍ مُّسَمًّى فَآخِذُوا بِهِ...﴾

استعمل المعلومات المعطاة في كل من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثل الحد النوني لكل متتابعة حسابية:

(44) الحد رقم 100 في المتتابعة هو 245، وأساس المتتابعة 13. **$a_n = 13n - 1055$**

(45) الحد الحادي عشر في المتتابعة هو 78، وأساس المتتابعة -9. **$a_n = -9n + 177$**

(46) الحد الخامس والعشرون في المتتابعة هو 121، والحد الثمانون 506. **$a_n = 7n - 54$**



(47) **تنظيم:** تُصَفَّ الطاولات المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورة لتُشكِّل طاولة كبيرة. الشكل المجاور يُبيِّن عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولات.

(a) ارسم شكلاً يُبيِّن عدد الأشخاص على الطاولات في كل من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كل مرة). **انظر الهامش.**

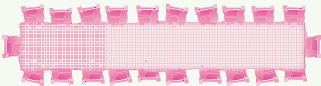
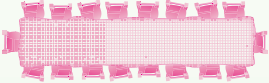
(b) اكتب معادلة تُمثل الحد النوني في هذا النمط. **$p_n = 4n + 2$**

(c) هل من الممكن ترتيب الطاولات بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضح إجابتك. **لا، لا يوجد عدد كلي n حيث $4n + 2 = 100$.**

إجابات:

(38) **-33, -21, -9**

(47a) **14, 18, 22**



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اكتب متسلسلة حسابية مثل: $21 + 17 + 13 + 9 + 5$ على السبورة، ثم اطلب إلى الطلبة كتابة المجموع باستعمال رمز المجموع بدلالة n بحيث تبدأ n من العدد 1.

$$\sum_{n=1}^5 (4n + 1)$$

تنبيه!

يحتاج الطلبة إلى أوراق رسم بياني للإجابة عن السؤال 51.



الربط مع الحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة.

(50c) إجابة ممكنة: لا، في النهاية سيكون عدد الأميال التي يقطعها في اليوم الواحد غير واقعي.

(51d) إجابة ممكنة: مع أن لتمثيليهما البيانيين المدى نفسه إلا أن مجال المتسلسلة هي مجموعة من الأعداد الطبيعية: $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ، ومجال الدالة التربيعية هو مجموعة من الأعداد الحقيقية: $\{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$

(51e) إجابة ممكنة: يوجد مع كل مجموع جزئي للمتسلسلة الحسابية دالة تربيعية بحيث يكون لكل منهما المدى نفسه.

(56) إجابة ممكنة: $9 + 18 + 27 + \dots + 72$

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في السؤال 51، طرقاً مختلفة للتعبير عن العلاقة بين الدالة التربيعية ومجموع المتتابعة الحسابية، ومن هذه الطرق: الجداول، والتمثيلات البيانية، والعبارات الجبرية.

إجابات:

(51f) بما أن:

$$g(1) = 9, g(2) = 20$$

$$s_1 = 9, s_2 = 20 - 9 = 11$$

تكون المتسلسلة الحسابية هي:

$$9 + 11 + 13 + \dots$$

والتي تكتب اختصاراً على الصورة:

$$\sum_{k=1}^n 2k + 7$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(48) **جاذبية:** عندما يسقط جسم سقوطاً حرّاً تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الرياح، فإنه يقطع مسافة 16 قدماً في الثانية الأولى، و48 قدماً إضافية في الثانية الثانية، و80 قدماً إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟ **1600 قدم**

(49) **دخل سنوي:** إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة 92000 ريال، ويزيد سنوياً بمقدار 16000 ريال، فبعد كم سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟ **السنة التاسعة عشرة**

(50) **رياضة:** خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يومياً في الأسبوع الأول، ومن ثم يقوم بزيادة المسافة بمقداره نصف ميل أسبوعياً.

(a) اكتب معادلة للحد النوني لهذه المتتابعة. **$a_n = 2.5 + 0.5n$**

(b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أي أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يومياً؟

(c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيّاً؟ وضح إجابتك.

(51) **تمثيلات متعددة:** معتبراً $\sum_{k=1}^n (2k + 2)$ أجب عما يأتي: (a-c) **انظر ملحق الإجابات**

(a) **جدولياً:** اعمل جدولاً للمجاميع الجزئية للمتسلسلة، حيث $1 \leq k \leq 10$.

(b) **بيانياً:** مثل بيانياً المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع (a) (k, S_k) .

(c) **بيانياً:** مثل الدالة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه.

(d) **لفظياً:** ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

(e) **تحليلياً:** ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

(f) **جبرياً:** أوجد المتسلسلة الحسابية التي يكون التمثيل البياني للمجاميع الجزئية فيها (k, S_k) هو نفسه للدالة $g(x) = x^2 + 8x$ **انظر الهامش.**

$$16 \sum_{k=5}^x (8k + 2) = 1032 \quad (53)$$

$$18 \sum_{k=3}^x (6k - 5) = 928 \quad (52)$$

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

(54) **تبرير:** إذا كان a هو الحد الثالث في متتابعة حسابية، و b هو الحد الخامس، و c هو الحد الحادي عشر، فعبر عن c بدلالة a, b **$4b - 3a$**

(55) **تحذّر:** يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16، فجد الوسط الحسابي للعددين a, b . **16**

(56) **مسألة مفتوحة:** اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود ومجموعها 324.

(57) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية. **انظر الهامش.**

(58) **برهان:** اشتق صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية. **انظر ملحق الإجابات.**

(59) **برهان:** اشتق قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1 . **انظر ملحق الإجابات.**

(60) **برهان:** اشتق الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

(61) **تحذ:** بالعودة إلى فقرة لماذا؟ ما الطريقة التي استعملها كارل جاوس في إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ (يمكنك البحث في الإنترنت). **انظر أعمال الطلاب.**

تنبيه!

تجنب الأخطاء: تأكد أن الطلبة يُظهرون فهمًا لرمز المجموع، وذلك بأن تطلب إليهم كتابة عدة متسلسلات حسابية باستعمال رمز المجموع.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة وصف كيف ساعدهم تعلمهم المتتابعات في الدرس السابق على فهمهم هذا الدرس.

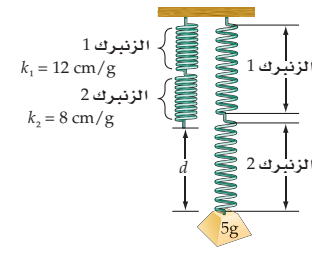
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 6-1، 6-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

إجابة

(57) **إجابة ممكنة:** المتتابعة الحسابية هي مجموعة من الحدود (الأعداد) الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقدارًا ثابتًا. والمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتابعة حسابية.



(67) **فيزياء:** ترتبط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلقة فيه. ويعبر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$ ، حيث d المسافة، و m الكتلة، و k ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج، يحسب باستعمال المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (الدرس 5-6)

(a) إذا وُصل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول 12 cm/g ، وثابت الزنبرك الثاني 8 cm/g ، فجد ثابت الزنبرك الناتج. **4.8 cm/g**

(b) إذا عُلقَت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل)، فما مقدار استطالة الزنبركين؟ **24 cm**

أوجد قيمة كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$\frac{1}{81} \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \quad (70)$$

$$\frac{1}{32} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad (69)$$

$$1458 \cdot 2 \cdot 3^6 \quad (68)$$

المعادلة العامة للمجموع

معادلة الحد النوني

بالتعويض

بالتبسيط

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \quad (60)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = [a_1 + a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$$

$$S_n = [2a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 6

دون	دون	ضمن	فوق	فوق المتوسط
تدريبات إعادة التعليم (11)		تدريبات إعادة التعليم - تنمة (12)		دون
الاسم: _____ التاريخ: _____ 6-2 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات والمتسلسلات الحسابية المتتابعة الحسابية: يستخدم الحرف اللاتيني a لتمثيل المتسلسلة. رمز المجموع للمتسلسلة $6+12+18+24+30$ هو $\sum_{k=1}^6 6n$ المصطلح: أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) $d = a_{n+1} - a_n$ الحد النوني: الحد النوني في متتابعة حسابية هو أساس المتتابعة، و n هو أي عدد صحيح موجب. حيث $d = a_1 + (n-1)d$ مثال: أوجد الحد الثالث عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 21$ و $d = -6$. استعمل صيغة الحد النوني في المتتابعة الحسابية تعويض $a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحد النوني $n = 13, a_1 = 21, d = -6$ المتتابعة $a_{13} = 21 + (13-1)(-6)$ $a_{13} = 21 + 12(-6)$ $a_{13} = 21 - 72$ $a_{13} = -51$ تقاربن: أوجد قيمة الحد المطلوب في كل متتابعة حسابية مما يأتي: (1) الحد العشرون في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 15$ و $d = 4$ و $a_n = 91$ (2) الحد السابع في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = -81$ و $d = 12$ و $a_n = -9$ (3) a_{31} في المتتابعة الحسابية ... $18, 15, 12, 9, \dots$ (4) a_{100} في المتتابعة الحسابية ... $-63, -58, -53, -48, \dots$ اكتب صيغة للحد النوني في كل متتابعة حسابية مما يأتي: (5) $a_1 = 15, d = 38, a_n = 38n - 23$ (6) $a_1 = 72, d = -13, a_n = -13n + 85$ (7) $a_1 = 5, d = -22, -39, -56, \dots, a_n = 17n - 73$ (8) $a_1 = 94, -52, -10, 32, \dots, a_n = 42n - 136$ الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات 11		الاسم: _____ التاريخ: _____ 6-2 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات والمتسلسلات الحسابية المتتابعة الحسابية: يستخدم الحرف اللاتيني a لتمثيل المتسلسلة. رمز المجموع للمتسلسلة $6+12+18+24+30$ هو $\sum_{k=1}^6 6n$ المصطلح: أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) $d = a_{n+1} - a_n$ الحد النوني: الحد النوني في متتابعة حسابية هو أساس المتتابعة، و n هو أي عدد صحيح موجب. حيث $d = a_1 + (n-1)d$ مثال: أوجد الحد الثالث عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 21$ و $d = -6$. استعمل صيغة الحد النوني في المتتابعة الحسابية تعويض $a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحد النوني $n = 13, a_1 = 21, d = -6$ المتتابعة $a_{13} = 21 + (13-1)(-6)$ $a_{13} = 21 + 12(-6)$ $a_{13} = 21 - 72$ $a_{13} = -51$ تقاربن: أوجد قيمة الحد المطلوب في كل متتابعة حسابية مما يأتي: (1) الحد العشرون في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 15$ و $d = 4$ و $a_n = 91$ (2) الحد السابع في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = -81$ و $d = 12$ و $a_n = -9$ (3) a_{31} في المتتابعة الحسابية ... $18, 15, 12, 9, \dots$ (4) a_{100} في المتتابعة الحسابية ... $-63, -58, -53, -48, \dots$ اكتب صيغة للحد النوني في كل متتابعة حسابية مما يأتي: (5) $a_1 = 15, d = 38, a_n = 38n - 23$ (6) $a_1 = 72, d = -13, a_n = -13n + 85$ (7) $a_1 = 5, d = -22, -39, -56, \dots, a_n = 17n - 73$ (8) $a_1 = 94, -52, -10, 32, \dots, a_n = 42n - 136$ الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات 11		الاسم: _____ التاريخ: _____ 6-2 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات والمتسلسلات الحسابية المتتابعة الحسابية: يستخدم الحرف اللاتيني a لتمثيل المتسلسلة. رمز المجموع للمتسلسلة $6+12+18+24+30$ هو $\sum_{k=1}^6 6n$ المصطلح: أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) $d = a_{n+1} - a_n$ الحد النوني: الحد النوني في متتابعة حسابية هو أساس المتتابعة، و n هو أي عدد صحيح موجب. حيث $d = a_1 + (n-1)d$ مثال: أوجد الحد الثالث عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 21$ و $d = -6$. استعمل صيغة الحد النوني في المتتابعة الحسابية تعويض $a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحد النوني $n = 13, a_1 = 21, d = -6$ المتتابعة $a_{13} = 21 + (13-1)(-6)$ $a_{13} = 21 + 12(-6)$ $a_{13} = 21 - 72$ $a_{13} = -51$ تقاربن: أوجد قيمة الحد المطلوب في كل متتابعة حسابية مما يأتي: (1) الحد العشرون في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 15$ و $d = 4$ و $a_n = 91$ (2) الحد السابع في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = -81$ و $d = 12$ و $a_n = -9$ (3) a_{31} في المتتابعة الحسابية ... $18, 15, 12, 9, \dots$ (4) a_{100} في المتتابعة الحسابية ... $-63, -58, -53, -48, \dots$ اكتب صيغة للحد النوني في كل متتابعة حسابية مما يأتي: (5) $a_1 = 15, d = 38, a_n = 38n - 23$ (6) $a_1 = 72, d = -13, a_n = -13n + 85$ (7) $a_1 = 5, d = -22, -39, -56, \dots, a_n = 17n - 73$ (8) $a_1 = 94, -52, -10, 32, \dots, a_n = 42n - 136$ الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات 11
تدريبات المهارات (13)		تدريبات حل المسألة (14)		دون
الاسم: _____ التاريخ: _____ 6-2 تدريبات المهارات المتتابعات والمتسلسلات الحسابية أوجد قيمة الحد المطلوب في كل من المتتابعات الحسابية الآتية: (1) $a_1 = 56, d = 13, n = 73$ (2) a_{13} في المتتابعة ... $304, 16, 32, 48, \dots$ اكتب صيغة الحد النوني في كل متتابعة حسابية مما يأتي: (3) $a_n = 14n + 50$ (4) $a_n = 93n - 509$ أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية: (5) $23, 29, 35, 17, \dots$ (6) $206, 177, 148, 119, 90, 61, 235, \dots$ أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية: (7) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 43$ (8) $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 32$ (9) $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 19$ (10) $-2 + (-5) + (-8) + \dots + (-20)$ (11) $\sum_{n=1}^{18} (2n - 3)$ (12) $\sum_{n=1}^{12} (4 - 3n)$ (13) $\sum_{n=1}^{12} (4n + 1)$ أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتتابعات الحسابية الآتية: (14) $a_1 = -3, a_n = 41, S_n = 228$ (15) $a_1 = 4, a_n = 31, S_n = 175$ (16) $a_1 = 1, a_n = 41, S_n = 760$ (17) $n = 10, a_n = 41, S_n = 230$ الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات 13		الاسم: _____ التاريخ: _____ 6-2 تدريبات حل المسألة المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (1) نوافذ: أحد جوانب مبنى مصمم على شكل درج. نوافذ مرتبة في أعمدة. يجري العمود الأول على نافذتين. والعمود الثاني على 4، والعمود الثالث على 6 وهكذا. ما عدد النوافذ على جانب الواجهة إذا كان فيها 15 عمودًا؟ (2) كتل: يمتلك عبدالله مجموعة أثقال بآلة الرفع الموزني. كتلها بالكيلوجرامات تشكل المتتابعة: $5, 10, 15, \dots, 80$. إذا كان لديه ثقلان من كل كتلة، فما كتلة الأثقال التي يمتلكها جميعها؟ (3) تدريب: يتدرب محمد ليشترك في الماراثون. إذا ركض مسافة 20 ميلًا في أسبوعه الأول من التدريب، وكان عدد الأميال التي يركضها يزيد بمقدار 4 أميال في كل أسبوع عن الأسبوع السابق له، فما عدد الأميال التي يركضها في 8 أسابيع من التدريب؟ الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات 14		الاسم: _____ التاريخ: _____ 6-2 تدريبات حل المسألة المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (1) نوافذ: أحد جوانب مبنى مصمم على شكل درج. نوافذ مرتبة في أعمدة. يجري العمود الأول على نافذتين. والعمود الثاني على 4، والعمود الثالث على 6 وهكذا. ما عدد النوافذ على جانب الواجهة إذا كان فيها 15 عمودًا؟ (2) كتل: يمتلك عبدالله مجموعة أثقال بآلة الرفع الموزني. كتلها بالكيلوجرامات تشكل المتتابعة: $5, 10, 15, \dots, 80$. إذا كان لديه ثقلان من كل كتلة، فما كتلة الأثقال التي يمتلكها جميعها؟ (3) تدريب: يتدرب محمد ليشترك في الماراثون. إذا ركض مسافة 20 ميلًا في أسبوعه الأول من التدريب، وكان عدد الأميال التي يركضها يزيد بمقدار 4 أميال في كل أسبوع عن الأسبوع السابق له، فما عدد الأميال التي يركضها في 8 أسابيع من التدريب؟ الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات 14



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 6													
دون	ضمن												
دون المتوسط	ضمن المتوسط												
فوق	فوق المتوسط												
دون	ضمن												
دون	ضمن												
فوق	فوق												
التدريبات الإثرائية (15)	كتاب التمارين (11)												
الاسم: _____ التاريخ: _____ 6-2 تدريبات إثرائية المتسلسلات الحسابية في برامج الكمبيوتر تستعمل المتسلسلات الحسابية في تحليل فاعلية برامج الكمبيوتر. وأجهزة الكمبيوتر، وبدون جهد يذكر تُشغل المهام التي تستهلك الوقت أوتوماتيكياً، والمهام المتكررة تكون عمليات جمع الأعداد وضربها غالباً. تتفقد هذه المهام المتكررة باستخدام عبارة (حلقه) ككتب بإحدى لغات البرمجة لتنفيذ الحسابات. وتكرر العبارة الحسابات عادة، ويتبعها عبارة تعين (تخصيص)، التي تخصص العدد لكان معين في ذاكرة الكمبيوتر. افترض أنك كتبت برنامجاً لحساب مجموع الأعداد من 1 إلى 10، أي $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$. يمكن استخدام خوارزميتين لحساب هذه التسلسلة، يبينها الجدول وفق تسلسل خطوات الخوارزمية في العمود الأيمن. <table border="1"> <thead> <tr> <th>رقم الخطوة</th><th>الخوارزمية</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>تخصص في الذاكرة $s = 1$</td></tr> <tr> <td>2</td><td>تخصص $j = 2$</td></tr> <tr> <td>3</td><td>إذا كان $11 < j$، فتخطّ الخطوتين 4 و 5</td></tr> <tr> <td>4</td><td>تخصص $s = s + j$</td></tr> <tr> <td>5</td><td>تخصص $j = j + 1$</td></tr> </tbody> </table> (1) اكتب جزءاً من الخوارزمية بالرموز (كما في الجدول). ولقم معطاة للرموز s و j و n الدالة على الحد الأول والأساس، وعدد الحدود على الترتيب، لحساب مجموع التسلسلة الحسابية $\sum_{i=0}^n (a + id)$ sum = a (المجموع) for i = 0 to n (لقيم) sum = a + id (المجموع) next i (القيمة التالية لـ i) (2) يستعمل المجموع الثاني في تحليل حلقات متضمنة (حلقه داخل حلقه). احسب المجموع الثاني أدناه. ابدأ بالمجموع الداخلي أولاً، ثم أكمل إلى المجموع الخارجي. $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=i}^3 ij = \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^4 6i = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$ وتذكر أيضاً أن مجموع التسلسلة الحسابية يساوي $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ حيث n عدد الحدود في التسلسلة، a_1 الحد الأول في التسلسلة و a_n الحد الأخير. ولأن احسب قيمة: $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=i}^3 (2i + 3j)$ 30 المصف، الثاني الثانوي 15 الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات	رقم الخطوة	الخوارزمية	1	تخصص في الذاكرة $s = 1$	2	تخصص $j = 2$	3	إذا كان $11 < j$ ، فتخطّ الخطوتين 4 و 5	4	تخصص $s = s + j$	5	تخصص $j = j + 1$	6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية أوجد قيمة الحد المطلوب في كلٍّ من المتابعتين الآتيتين: (1) الحد الستون في المتابعة الحسابية التي فيها $d = 12$، $a_1 = 418$، $a_{126} = 1126$ (2) $a_1, a_2, a_3, \dots$ في المتابعة، $-66, -50, -34, -18, -2, 14, 30, 46, 62, 78, 94, 110, 126, 142, 158, 174, 190, 206, 222, 238, 254, 270, 286, 302, 318, 334, 350, 366, 382, 398, 414, 430, 446, 462, 478, 494, 510, 526, 542, 558, 574, 590, 606, 622, 638, 654, 670, 686, 702, 718, 734, 750, 766, 782, 798, 814, 830, 846, 862, 878, 894, 910, 926, 942, 958, 974, 990, 1006, 1022, 1038, 1054, 1070, 1086, 1102, 1118, 1134, 1150, 1166, 1182, 1198, 1214, 1230, 1246, 1262, 1278, 1294, 1310, 1326, 1342, 1358, 1374, 1390, 1406, 1422, 1438, 1454, 1470, 1486, 1502, 1518, 1534, 1550, 1566, 1582, 1598, 1614, 1630, 1646, 1662, 1678, 1694, 1710, 1726, 1742, 1758, 1774, 1790, 1806, 1822, 1838, 1854, 1870, 1886, 1902, 1918, 1934, 1950, 1966, 1982, 1998, 2014, 2030, 2046, 2062, 2078, 2094, 2110, 2126, 2142, 2158, 2174, 2190, 2206, 2222, 2238, 2254, 2270, 2286, 2302, 2318, 2334, 2350, 2366, 2382, 2398, 2414, 2430, 2446, 2462, 2478, 2494, 2510, 2526, 2542, 2558, 2574, 2590, 2606, 2622, 2638, 2654, 2670, 2686, 2702, 2718, 2734, 2750, 2766, 2782, 2798, 2814, 2830, 2846, 2862, 2878, 2894, 2910, 2926, 2942, 2958, 2974, 2990, 3006, 3022, 3038, 3054, 3070, 3086, 3102, 3118, 3134, 3150, 3166, 3182, 3198, 3214, 3230, 3246, 3262, 3278, 3294, 3310, 3326, 3342, 3358, 3374, 3390, 3406, 3422, 3438, 3454, 3470, 3486, 3502, 3518, 3534, 3550, 3566, 3582, 3598, 3614, 3630, 3646, 3662, 3678, 3694, 3710, 3726, 3742, 3758, 3774, 3790, 3806, 3822, 3838, 3854, 3870, 3886, 3902, 3918, 3934, 3950, 3966, 3982, 3998, 4014, 4030, 4046, 4062, 4078, 4094, 4110, 4126, 4142, 4158, 4174, 4190, 4206, 4222, 4238, 4254, 4270, 4286, 4302, 4318, 4334, 4350, 4366, 4382, 4398, 4414, 4430, 4446, 4462, 4478, 4494, 4510, 4526, 4542, 4558, 4574, 4590, 4606, 4622, 4638, 4654, 4670, 4686, 4702, 4718, 4734, 4750, 4766, 4782, 4798, 4814, 4830, 4846, 4862, 4878, 4894, 4910, 4926, 4942, 4958, 4974, 4990, 5006, 5022, 5038, 5054, 5070, 5086, 5102, 5118, 5134, 5150, 5166, 5182, 5198, 5214, 5230, 5246, 5262, 5278, 5294, 5310, 5326, 5342, 5358, 5374, 5390, 5406, 5422, 5438, 5454, 5470, 5486, 5502, 5518, 5534, 5550, 5566, 5582, 5598, 5614, 5630, 5646, 5662, 5678, 5694, 5710, 5726, 5742, 5758, 5774, 5790, 5806, 5822, 5838, 5854, 5870, 5886, 5902, 5918, 5934, 5950, 5966, 5982, 5998, 6014, 6030, 6046, 6062, 6078, 6094, 6110, 6126, 6142, 6158, 6174, 6190, 6206, 6222, 6238, 6254, 6270, 6286, 6302, 6318, 6334, 6350, 6366, 6382, 6398, 6414, 6430, 6446, 6462, 6478, 6494, 6510, 6526, 6542, 6558, 6574, 6590, 6606, 6622, 6638, 6654, 6670, 6686, 6702, 6718, 6734, 6750, 6766, 6782, 6798, 6814, 6830, 6846, 6862, 6878, 6894, 6910, 6926, 6942, 6958, 6974, 6990, 7006, 7022, 7038, 7054, 7070, 7086, 7102, 7118, 7134, 7150, 7166, 7182, 7198, 7214, 7230, 7246, 7262, 7278, 7294, 7310, 7326, 7342, 7358, 7374, 7390, 7406, 7422, 7438, 7454, 7470, 7486, 7502, 7518, 7534, 7550, 7566, 7582, 7598, 7614, 7630, 7646, 7662, 7678, 7694, 7710, 7726, 7742, 7758, 7774, 7790, 7806, 7822, 7838, 7854, 7870, 7886, 7902, 7918, 7934, 7950, 7966, 7982, 7998, 8014, 8030, 8046, 8062, 8078, 8094, 8110, 8126, 8142, 8158, 8174, 8190, 8206, 8222, 8238, 8254, 8270, 8286, 8302, 8318, 8334, 8350, 8366, 8382, 8398, 8414, 8430, 8446, 8462, 8478, 8494, 8510, 8526, 8542, 8558, 8574, 8590, 8606, 8622, 8638, 8654, 8670, 8686, 8702, 8718, 8734, 8750, 8766, 8782, 8798, 8814, 8830, 8846, 8862, 8878, 8894, 8910, 8926, 8942, 8958, 8974, 8990, 9006, 9022, 9038, 9054, 9070, 9086, 9102, 9118, 9134, 9150, 9166, 9182, 9198, 9214, 9230, 9246, 9262, 9278, 9294, 9310, 9326, 9342, 9358, 9374, 9390, 9406, 9422, 9438, 9454, 9470, 9486, 9502, 9518, 9534, 9550, 9566, 9582, 9598, 9614, 9630, 9646, 9662, 9678, 9694, 9710, 9726, 9742, 9758, 9774, 9790, 9806, 9822, 9838, 9854, 9870, 9886, 9902, 9918, 9934, 9950, 9966, 9982, 9998, 10014, 10030, 10046, 10062, 10078, 10094, 10110, 10126, 10142, 10158, 10174, 10190, 10206, 10222, 10238, 10254, 10270, 10286, 10302, 10318, 10334, 10350, 10366, 10382, 10398, 10414, 10430, 10446, 10462, 10478, 10494, 10510, 10526, 10542, 10558, 10574, 10590, 10606, 10622, 10638, 10654, 10670, 10686, 10702, 10718, 10734, 10750, 10766, 10782, 10798, 10814, 10830, 10846, 10862, 10878, 10894, 10910, 10926, 10942, 10958, 10974, 10990, 11006, 11022, 11038, 11054, 11070, 11086, 11102, 11118, 11134, 11150, 11166, 11182, 11198, 11214, 11230, 11246, 11262, 11278, 11294, 11310, 11326, 11342, 11358, 11374, 11390, 11406, 11422, 11438, 11454, 11470, 11486, 11502, 11518, 11534, 11550, 11566, 11582, 11598, 11614, 11630, 11646, 11662, 11678, 11694, 11710, 11726, 11742, 11758, 11774, 11790, 11806, 11822, 11838, 11854, 11870, 11886, 11902, 11918, 11934, 11950, 11966, 11982, 11998, 12014, 12030, 12046, 12062, 12078, 12094, 12110, 12126, 12142, 12158, 12174, 12190, 12206, 12222, 12238, 12254, 12270, 12286, 12302, 12318, 12334, 12350, 12366, 12382, 12398, 12414, 12430, 12446, 12462, 12478, 12494, 12510, 12526, 12542, 12558, 12574, 12590, 12606, 12622, 12638, 12654, 12670, 12686, 12702, 12718, 12734, 12750, 12766, 12782, 12798, 12814, 12830, 12846, 12862, 12878, 12894, 12910, 12926, 12942, 12958, 12974, 12990, 13006, 13022, 13038, 13054, 13070, 13086, 13102, 13118, 13134, 13150, 13166, 13182, 13198, 13214, 13230, 13246, 13262, 13278, 13294, 13310, 13326, 13342, 13358, 13374, 13390, 13406, 13422, 13438, 13454, 13470, 13486, 13502, 13518, 13534, 13550, 13566, 13582, 13598, 13614, 13630, 13646, 13662, 13678, 13694, 13710, 13726, 13742, 13758, 13774, 13790, 13806, 13822, 13838, 13854, 13870, 13886, 13902, 13918, 13934, 13950, 13966, 13982, 13998, 14014, 14030, 14046, 14062, 14078, 14094, 14110, 14126, 14142, 14158, 14174, 14190, 14206, 14222, 14238, 14254, 14270, 14286, 14302, 14318, 14334, 14350, 14366, 14382, 14398, 14414, 14430, 14446, 14462, 14478, 14494, 14510, 14526, 14542, 14558, 14574, 14590, 14606, 14622, 14638, 14654, 14670, 14686, 14702, 14718, 14734, 14750, 14766, 14782, 14798, 14814, 14830, 14846, 14862, 14878, 14894, 14910, 14926, 14942, 14958, 14974, 14990, 15006, 15022, 15038, 15054, 15070, 15086, 15102, 15118, 15134, 15150, 15166, 15182, 15198, 15214, 15230, 15246, 15262, 15278, 15294, 15310, 15326, 15342, 15358, 15374, 15390, 15406, 15422, 15438, 15454, 15470, 15486, 15502, 15518, 15534, 15550, 15566, 15582, 15598, 15614, 15630, 15646, 15662, 15678, 15694, 15710, 15726, 15742, 15758, 15774, 15790, 15806, 15822, 15838, 15854, 15870, 15886, 15902, 15918, 15934, 15950, 15966, 15982, 15998, 16014, 16030, 16046, 16062, 16078, 16094, 16110, 16126, 16142, 16158, 16174, 16190, 16206, 16222, 16238, 16254, 16270, 16286, 16302, 16318, 16334, 16350, 16366, 16382, 16398, 16414, 16430, 16446, 16462, 16478, 16494, 16510, 16526, 16542, 16558, 16574, 16590, 16606, 16622, 16638, 16654, 16670, 16686, 16702, 16718, 16734, 16750, 16766, 16782, 16798, 16814, 16830, 16846, 16862, 16878, 16894, 16910, 16926, 16942, 16958, 16974, 16990, 17006, 17022, 17038, 17054, 17070, 17086, 17102, 17118, 17134, 17150, 17166, 17182, 17198, 17214, 17230, 17246, 17262, 17278, 17294, 17310, 17326, 17342, 17358, 17374, 17390, 17406, 17422, 17438, 17454, 17470, 17486, 17502, 17518, 17534, 17550, 17566, 17582, 17598, 17614, 17630, 17646, 17662, 17678, 17694, 17710, 17726, 17742, 17758, 17774, 17790, 17806, 17822, 17838, 17854, 17870, 17886, 17902, 17918, 17934, 17950, 17966, 17982, 17998, 18014, 18030, 18046, 18062, 18078, 18094, 18110, 18126, 18142, 18158, 18174, 18190, 18206, 18222, 18238, 18254, 18270, 18286, 18302, 18318, 18334, 18350, 18366, 18382, 18398, 18414, 18430, 18446, 18462, 18478, 18494, 18510, 18526, 18542, 18558, 18574, 18590, 18606, 18622, 18638, 18654, 18670, 18686, 18702, 18718, 18734, 18750, 18766, 18782, 18798, 18814, 18830, 18846, 18862, 18878, 18894, 18910, 18926, 18942, 18958, 18974, 18990, 19006, 19022, 19038, 19054, 19070, 19086, 19102, 19118, 19134, 19150, 19166, 19182, 19198, 19214, 19230, 19246, 19262, 19278, 19294, 19310, 19326, 19342, 19358, 19374, 19390, 19406, 19422, 19438, 19454, 19470, 19486, 19502, 19518, 19534, 19550, 19566, 19582, 19598, 19614, 19630, 19646, 19662, 19678, 19694, 19710, 19726, 19742, 19758, 19774, 19790, 19806, 19822, 19838, 19854, 19870, 19886, 19902, 19918, 19934, 19950, 19966, 19982, 19998, 20014, 20030, 20046, 20062, 20078, 20094, 20110, 20126, 20142, 20158, 20174, 20190, 20206, 20222, 20238, 20254, 20270, 20286, 20302, 20318, 20334, 20350, 20366, 20382, 20398, 20414, 20430, 20446, 20462, 20478, 20494, 20510, 20526, 20542, 20558, 20574, 20590, 20606, 20622, 20638, 20654, 20670, 20686, 20702, 20718, 20734, 20750, 20766, 20782, 20798, 20814, 20830, 20846, 20862, 20878, 20894, 20910, 20926, 20942, 20958, 20974, 20990, 21006, 21022, 21038, 21054, 21070, 21086, 21102, 21118, 21134, 21150, 21166, 21182, 21198, 21214, 21230, 21246, 21262, 21278, 21294, 21310, 21326, 21342, 21358, 21374, 21390, 21406, 21422, 21438, 21454, 21470, 21486, 21502, 21518, 21534, 21550, 21566, 21582, 21598, 21614, 21630, 21646, 21662, 21678, 21694, 21710, 21726, 21742, 21758, 21774, 21790, 21806, 21822, 21838, 21854, 21870, 21886, 21902, 21918, 21934, 21950, 21966, 21982, 21998, 22014, 22030, 22046, 22062, 22078, 22094, 22110, 22126, 22142, 22158, 22174, 22190, 22206, 22222, 22238, 22254, 22270, 22286, 22302, 22318, 22334, 22350, 22366, 22382, 22398, 22414, 22430, 22446, 22462, 22478, 22494, 22510, 22526, 22542, 22558, 22574, 22590, 22606, 22622, 22638, 22654, 22670, 22686, 22702, 22718, 22734, 22750, 22766, 22782, 22798, 22814, 22830, 22846, 22862, 22878, 22894, 22910, 22926, 22942, 22958, 22974, 22990, 23006, 23022, 23038, 23054, 23070, 23086, 23102, 23118, 23134, 23150, 23166, 23182, 23198, 23214, 23230, 23246, 23262, 23278, 23294, 23310, 23326, 23342, 23358, 23374, 23390, 23406, 23422, 23438, 23454, 23470, 23486, 23502, 23518, 23534, 23550, 23566, 23582, 23598, 23614, 23630, 23646, 23662, 23678, 23694, 23710, 23726, 23742, 23758, 23774, 23790, 23806, 23822, 23838, 23854, 23870, 23886, 23902, 23918, 23934, 23950, 23966, 23982, 23998, 24014, 24030, 24046, 24062, 24078, 24094, 24110, 24126, 24142, 24158, 24174, 24190, 24206, 24222, 24238, 24254, 24270, 24286, 24302, 24318, 24334, 24350, 24366, 24382, 24398, 24414, 24430, 24446, 24462, 24478, 24494, 24510, 24526, 24542, 24558, 24574, 24590, 24606, 24622, 24638, 24654, 24670, 24686, 24702, 24718, 24734, 24750, 24766, 24782, 24798, 24814, 24830, 24846, 24862, 24878, 24894, 24910, 24926, 24942, 24958, 24974, 24990, 25006, 25022, 25038, 25054, 25070, 25086, 25102, 25118, 25134, 25150, 25166, 25182, 25198, 25214, 25230, 25246, 25262, 25278, 25294, 25310, 25326, 25342, 25358, 25374, 25390, 25406, 25422, 25438, 25454, 25470, 25486, 25502, 25518, 25534, 25550, 25566, 25582, 25598, 25614, 25630, 25646, 25662, 25678, 25694, 25710, 25726, 25742, 25758, 25774, 25790, 25806, 25822, 25838, 25854, 25870, 25886, 25902, 25918, 25934, 25950, 25966, 25982, 25998, 26014, 26030, 26046, 26062, 26078, 26094, 26110, 26126, 26142, 26158, 26174, 26190, 26206, 26222, 26238, 26254, 26270, 26286, 26302, 26318, 26334, 26350, 26366, 26382, 26398, 26414, 26430, 26446, 26462, 26478, 26494, 26510, 26526, 26542, 26558, 26574,$
رقم الخطوة	الخوارزمية												
1	تخصص في الذاكرة $s = 1$												
2	تخصص $j = 2$												
3	إذا كان $11 < j$ ، فتخطّ الخطوتين 4 و 5												
4	تخصص $s = s + j$												
5	تخصص $j = j + 1$												

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

Geometric Sequences and Series



لماذا؟

خلال بحثه في الإنترنت وجد "أحمد" موضوعاً عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه عن طريق البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كل واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كل من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جُدد. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحد النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أي حد من حدودها.

أضف إلى

مطويتك

المفهوم الأساسي

الحد النوني في المتتابعة الهندسية
يُعطى الحد النوني في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a_1 وأساسها r بالصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{حيث } n \text{ عدد طبيعي}$$

ستبرهن صحة هذه الصيغة في السؤال رقم (39)

فيما سبق:

درست تمييز المتتابعة الهندسية.

والآن:

- استعمل المتتابعات الهندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المفردات:

الأوساط الهندسية

geometric means

المتسلسلات الهندسية

geometric series

www.oibeaneeducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3

تمييز المتتابعة الهندسية.

الدرس 6-3

استعمال المتتابعات الهندسية.

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

ما بعد الدرس 6-3

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"، واسأل:

- ما الحدود الثلاثة الأولى في هذا النمط؟
5, 25, 125

- لماذا لا تُشكّل هذه المتتابعة متتابعة

حسابية؟ لأن الفرق بين كل حدين

متتاليين ليس ثابتاً.

- ما النسبة بين كل حد، والحد السابق له

مباشرة؟ $r = 5$

- قارن بين أساس المتتابعة الحسابية،

وأساس المتتابعة الهندسية. أساس

المتتابعة الحسابية يجمع للحد للحصول

على الحد الذي يليه، بينما أساس

المتتابعة الهندسية يضرب بالحد.

إيجاد الحد النوني

مثال 1 من واقع الحياة

في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في المرحلة الثامنة؟

افهم تريد إيجاد عدد الرسائل في المرحلة الثامنة، حيث أرسل أحمد خمس رسائل في المرحلة الأولى، وفي المرحلة الثانية أرسل كل شخص من الخمسة الرسالة إلى خمسة أشخاص آخرين، وهكذا (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة).

خطط يُشكّل عدد الرسائل المرسلة في كل مرحلة متتابعة هندسية أساسها $r = 5$ ، لذا استعمل صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية.

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_1 = 5, r = 5, n = 8 \quad a_8 &= 5(5)^{8-1} \\ 5^7 = 78125 \quad a_8 &= 5(78125) = 390625 \end{aligned}$$

وعليه، فإن عدد الرسائل المرسلة في المرحلة الثامنة هو 390625 رسالة.

تحقق اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة، بالضرب في أساس المتتابعة.

5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625

تحقق من فهمك

1) بريد إلكتروني: أرسل سعيد رسالة إلى أربعة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني، ثم قام كلٌ منهم بإرسالها إلى أربعة أصدقاء آخرين، وهكذا كان كل واحد يستلم الرسالة يبعثها إلى أربعة أصدقاء جدد. إذا استمر هذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيستلمون الرسالة في المرحلة التاسعة (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة)؟ **262144**

مصادر الدرس 6-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (80, 83)	• تنويع التعليم، ص (80, 83)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية، فإنه يمكنك إيجاد صيغة الحد النوني لها.

مثال 2

إيجاد صيغة الحد النوني

اكتب معادلة الحدّ النوني لكل من المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

$$0.5, 2, 8, 32, \dots \quad (a)$$

الحد الأول 0.5، والأساس r يُستخرج كما يأتي: $r = \frac{8}{2} = 4$

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_1 &= 0.5, r = 4 \quad a_n = 0.5(4)^{n-1} \end{aligned}$$

$$a_4 = 5, r = 6 \quad (b)$$

الخطوة 1: إيجاد a_1

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_n &= 5, r = 6, n = 4 \quad 5 = a_1(6^{4-1}) \end{aligned}$$

$$\text{إيجاد قيمة } 6^3 \text{ ثم القسمة عليها} \quad \frac{5}{216} = a_1$$

الخطوة 2: كتابة الصيغة

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_1 &= \frac{5}{216}, r = 6 \quad a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$a_n = -0.25(-8)^{n-1} \quad (2A)$$

$$a_n = 1(4)^{n-1} \quad a_3 = 16, r = 4 \quad (2B)$$

$$-0.25, 2, -16, 128, \dots \quad (2A)$$

وكما في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3

إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2، 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحد الأول والحد الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $n = 5$ ، ولذلك يكون $3 + 2 = 5$

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_n &= 1250, a_1 = 2, n = 5 \quad 1250 = 2r^{5-1} \\ \text{بقسمة الطرفين على 2، ثم إيجاد الجذر الرابع} \quad \pm 5 &= r \end{aligned}$$

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \xrightarrow{\times 5} & 10 & \xrightarrow{\times 5} & 50 & \xrightarrow{\times 5} & 250 & \xrightarrow{\times 5} & 1250 \\ & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 \end{array} \quad \text{أو} \quad \begin{array}{ccccccc} 2 & \xrightarrow{\times -5} & -10 & \xrightarrow{\times -5} & 50 & \xrightarrow{\times -5} & -250 & \xrightarrow{\times -5} & 1250 \\ & & \times -5 & & \times -5 & & \times -5 & & \times -5 \end{array}$$

إذن الأوساط الهندسية هي: $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

تحقق من فهمك

(3) أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين 0.5، 512 $0.5, 128, 32, 8, 2$

المتابعات الهندسية

مثال 1 يبين طريقة إيجاد أي حد من حدود المتتابعة الهندسية، بمعلومية الحد الأول وأساس المتتابعة.

مثال 2 يبين طريقة إيجاد معادلة الحد النوني لمتتابعة هندسية.

مثال 3 يبين طريقة إيجاد عدد من الأوساط الهندسية بين عددين محددين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الحد السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها $a_1 = -3$ ، $r = -2$. $a_6 = 96$

2 اكتب معادلة الحد النوني لكل من المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

$$5, 10, 20, 40, \dots \quad (a)$$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_5 = 4, r = 3 \quad (b)$$

$$a_n = \frac{4}{81}(3^{n-1})$$

3 جد ثلاثة أوساط هندسية بين

العددين 3.12، 49.92

6.24، 12.48، 24.96

أو -6.24، 12.48، -24.96

تنبيه

تجنب الأخطاء: عند بدء حل

مسائل المتابعات الهندسية، شجّع الطلبة على كتابة قيم كل من المتغيرات n, a, r المعطاة.

المحتوى الرياضي

المتابعات الهندسية المتزايدة والمتناقصات المتناقصة العديد من المتابعات الهندسية في هذا الدرس إمّا متزايدة وإمّا متناقصة، وفي كلتا الحالتين يكون الأساس عددًا موجبًا. أمّا إذا كان الأساس عددًا سالبًا، فلا تعدّ المتتابعة متزايدة ولا متناقصة.

المتسلسلات الهندسية: يمكن الحصول على المتسلسلة الهندسية بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة الهندسية. ويرمز لمجموع أول n حدًا في المتسلسلة بالرمز S_n . ويمكن إيجاد باستعمال أي من الصيغتين الآتيتين:

مفهوم أساسي	المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية	أضف إلى مطويتك
القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

بريد إلكتروني: بالعودة إلى المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، إذا استمر النمط، فما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المُرسله حتى نهاية المرحلة الثامنة؟

أُرسلت خمس رسائل إلكترونية في المرحلة الأولى، ولدينا 8 مراحل من الرسائل.
 إذن $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$$\begin{aligned} \text{صيغة المجموع} \quad S_n &= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \\ a_1 = 5, r = 5, n = 8 \quad S_8 &= \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1 - 5} \\ \text{بالتبسيط} \quad S_8 &= 488280 \end{aligned}$$

إذن مجموع الرسائل المرسلة حتى 8 مراحل هو: 488280.

تحقق من فهمك أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

(4A) $a_1 = 2, n = 10, r = 3$ **59048** (4B) $a_1 = 2000, a_n = 125, r = \frac{1}{2}$ **3875**

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكنك استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

مثال 5 المجموع باستعمال رمز المجموع

$$\text{أوجد } \sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$$

لاحظ أن المتسلسلة المعطاة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدين متتاليين فيها ثابت وهو 2، إذن $r = 2$ ،
 والآن أوجد قيمة كل من a_1, n ، ولإيجاد الحد الأول عوض العدد 3 مكان k ، ويستخرج كما يأتي:
 $a_1 = 4 \cdot 2^{3-1} = 16$ ، وأساس المتسلسلة الهندسية هو r ، حيث $r = 2$.
 وعدد الحدود هو: $10 - 3 + 1 = 8$ إذن $n = 8$.

$$\begin{aligned} \text{صيغة المجموع} \quad S_n &= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \\ a_1 = 16, r = 2, n = 8 \quad S_8 &= \frac{16 - 16(2)^8}{1 - 2} \\ \text{باستعمال الآلة الحاسبة} \quad &= 4080 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

(5A) $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$ **66426.75** (5B) $\sum_{k=2}^9 \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$ **58253.333**

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي ربما تحتاج إلى قيام الطلبة بإيجاد مجموع حدود متسلسلة أو أكثر دون استعمال صيغة المجموع، وهذا بدوره يؤدي إلى توضيح فاعلية هذه الصيغة.

تنبيه

تجنب الأخطاء: أكد دائمًا على أهمية كتابة كل خطوة في أثناء الحل وتبريرها.

المتسلسلات الهندسية

مثال 4 يبين طريقة إيجاد مجموع أول n حدًا في متسلسلة هندسية.

مثال 5 يبين طريقة إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية كُتبت باستعمال رمز المجموع.

مثال 6 يبين طريقة إيجاد الحد الأول في متسلسلة هندسية، بمعلومية كل من المجموع وأساس المتتابعة.

مثالان إضافيان

4 بريد إلكتروني: استعمال

المعلومات الواردة في مثال 4، لإيجاد إجمالي عدد الرسائل الإلكترونية المرسلة حتى نهاية المرحلة السادسة. **19530**

5 أوجد قيمة $\sum_{n=1}^{12} 3 \cdot 2^{n-1}$ **12285**

تنويع التعليم

ضمن فوق

إذا أردت إثارة دافعية الطلبة لمعرفة كيفية ربط هذا الدرس مع مواقف من الحياة،

فاطلب إليهم البحث عن كيفية التي استعمل بها علماء الأحياء وعلماء البيئة المتسلسلات الهندسية في أبحاثهم. حيث قاموا من خلالها بحصر تزايد أو تناقص مجتمعات عامة من الكائنات الحية، والتنبؤ بأعدادها مستقبلًا.

مثال 6

إيجاد الحد الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $r = 3$, $n = 7$, $S_n = 13116$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$13116 = \frac{a_1 - a_1 (3^7)}{1 - 3}$$

$$13116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$$

$$13116 = \frac{-2186a_1}{-2}$$

$$13116 = 1093a_1$$

$$12 = a_1$$

تحقق من فهمك

(6) أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $r = -3$, $n = 8$, $S_n = -26240$

مثال إضافي

6

أوجد قيمة a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها:

$$S_n = 765, n = 8, r = 2$$

المحتوى الرياضي

صيفتان لمجموع حدود المتسلسلة الهندسية

تُستعمل الصيغة $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$ لإيجاد مجموع متسلسلة هندسية عندما يكون عدد الحدود غير معطى. أمّا الصيغة $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ ، فُتستعمل عندما يكون عدد الحدود n معلومًا؛ لأنه في هذه الحالة لا داعي لحساب قيمة الحد a_n .

تأكد

مثال 1 أرسل هاني موضوعًا عن طريقة الدراسة الجيدة إلى ثلاثة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني. ومن ثم قام كل واحد منهم بإرسال الموضوع إلى ثلاثة أصدقاء آخرين، وهكذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط. فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة السابعة (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة)؟ **2187**

مثال 2 اكتب معادلة الحد النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية: (3) $a_n = -4(-4)^{n-1}$ (4) $a_n = \frac{4}{3}(3)^{n-1}$ (2) $a_n = 2(2^{n-1})$ 2, 4, 8, ... (3) -4, 16, -64, ...

مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتابعتين الآتيتين: (5) 0.25, 2, 2, 2, 64 (6) 0.20, 2, 2, 2, 125 أو 1, 5, 25 أو -1, 5, -25

مثال 4 بالعودة إلى السؤال رقم (1) من فقرة تأكد. ما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المرسلة حتى المرحلة السابعة؟ **3279**

مثال 5 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

$$\sum_{k=1}^8 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad (9) \quad 7.96875 \quad \sum_{k=1}^6 3(4)^{k-1} \quad (8) \quad 4095$$

مثال 6 أوجد a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

$$S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2} \quad (11) \quad 512 \quad S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6 \quad (10) \quad \frac{1}{16}$$

التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-11 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

مثال 1 (12) **طقس:** نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm ، فإذا كانت الزيادة في كل يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كل من الأيام الأربعة التالية، فكم ستمتدُّ ارتفاع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟ **48 cm**

أوجد a_n لكل من المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

(13) $\frac{75}{128} = 0.5859375$ $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

(14) $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

مثال 2 اكتب معادلة الحد النوني في كل من المتابعات الهندسية الآتية:

(15) $a_n = (-3)(-2)^{n-1}$ (16) $-1, 1, -1, \dots$ (17) $-3, 6, -12, \dots$

(18) $a_n = (-1)(-1)^{n-1}$ (19) $a_3 = 28, r = 2$ (20) $a_6 = 0.5, r = 6$ (21) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \dots$

(17) $a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (19) $a_4 = -8, r = 0.5$

مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتابعات الهندسية الآتية:

(21) $810, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}, 10$

(22) $\frac{7}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{56}{81}$

(18) $a_n = 7(2)^{n-1}$

(19) $a_n = -64(0.5)^{n-1}$

(23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين $-2, 16, -8, 4$

(24) **بندول:** يقطع بندول مسافة 30 cm في الذبذبة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الذبذبة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 ذبذبة. **471 cm تقريباً**

(20) $a_n = \frac{1}{15552} (6)^{n-1}$

(21) $270, 90, 30$ أو

$-270, 90, -30$

(22) $-\frac{7}{3}, \frac{14}{9}, -\frac{28}{27}$ أو $\frac{7}{3}, \frac{14}{9}, \frac{28}{27}$

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

(25) 53.9918 $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

(26) 31.9375 $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

(27) 831.855 $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

مثال 5 أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

(28) $\sum_{k=1}^7 4(-3)^{k-1}$ (29) $\sum_{k=1}^8 (-3)(-2)^{k-1}$ (30) $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6 أوجد قيمة a_1 في كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

(31) -8 $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

(32) 64 $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

(33) **علوم:** ارتفع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كل دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق. **193.75 ft**



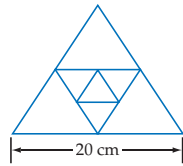
مثال 4

الربط مع الحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتز اهتزازات منتظمة تقريباً.

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	41-50 ، 36-39 ، 12-33
ضمن المتوسط	41-50 ، 12-39
فوق المتوسط	34-50



(34) **هندسة:** في الشكل المجاور، طول ضلع المثلث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلث الداخلي الذي تنصف رؤوسه أضلاع هذا المثلث. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلثات الثمانية الأولى في النمط؟ **119.5 cm تقريباً**

(35) **معالجة المياه:** يقوم نظام معين لفلتر وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب أثناء مرور عينة مياه خلاله. فإذا مرّت عينة المياه في النظام أربع مرات. فما النسبة المئوية للشوائب التي سيقوم النظام بإزالتها من العينة؟ **99.19%**

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة وصف كيف يمكن أن تساعد معرفتهم حول مجموع حدود المتسلسلة الهندسية المنتهية على إيجاد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.

إجابات:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \quad (36)$$

$$\text{خواص القوى} = \frac{a_1 - a_1 r^{n-1} \cdot r}{1 - r}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} \quad (37)$$

الصيغة البديلة للمجموع

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

صيغة الحد النوني

$$\frac{a_n}{r^{n-1}} = a_1$$

بقسمة الطرفين على r^{n-1}

$$S_n = \frac{\frac{a_n}{r^{n-1}} - a_n r}{1 - r}$$

بالتعويض

$$= \frac{\frac{a_n}{r^{n-1}} - \frac{a_n r \cdot r^{n-1}}{r^{n-1}}}{1 - r}$$

توحيد المقامين في البسط.

$$= \frac{\frac{a_n(1 - r^n)}{r^{n-1}}}{1 - r}$$

إخراج العامل المشترك a_n في البسط

$$= \frac{a_n(1 - r^n)}{r^{n-1}(1 - r)}$$

بالقسمة على $(1 - r)$.

$$= \frac{a_n(1 - r^n)}{r^{n-1} - r^n}$$

بالتبسيط

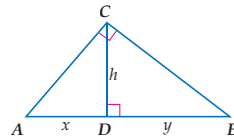
مسائل مهارات التفكير العليا

(36) **برهان:** اشتق الصيغة البديلة للمجموع الجزئي في متسلسلة هندسية. **انظر الهامش.**

(37) **برهان:** اشتق صيغة للمجموع الجزئي لا تتضمن a_1 . **انظر الهامش.**

(38) **تبرير:** وضح التغيير الذي يجب أن تجريه على $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^k - 1$ للحصول على المتسلسلة نفسها إذا غيرت $k = 1$ إلى $k = 0$. ووضح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

(39) **برهان:** اشتق صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية. **انظر ملحق الإجابات**



(40) **تحذ:** استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x و y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة $x^2 y^2$

(41) **مسألة مفتوحة:** اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252. **إجابة ممكنة: 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128**

(42) **اكتب:** وضح كيف يمكنك تحديد إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم أنها لا حسابية ولا هندسية، أم كليهما. **انظر الهامش.**

(46) **غير ذلك؛ لا يوجد أساس (فرق مشترك أو نسبة مشتركة)**

(47) **حسابية؛ الأساس $\frac{1}{50}$**

(48) **غير ذلك؛ لا يوجد أساس (فرق مشترك أو نسبة مشتركة).**

تدريب على اختبار

(43) إذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟ **D**

A 5
B 6
C 7
D 8

(44) **إجابة قصيرة** عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟ **32000 ريال**

مراجعة تراكمية

(45) **نقود:** اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدماً، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية مدة ستة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمناً للجهاز؟ **(الدرس 6-2) 4000 ريال**

حدّد إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضح إجابتك: **(الدرس 6-1)**

$$-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \dots \quad (48)$$

$$-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \dots \quad (47)$$

$$\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \dots \quad (46)$$

(49) إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ ، $z = -5$ علماً بأن $y = -90$ عندما $x = -6$ ، $z = 15$. **(الدرس 5-5) -45**

(50) أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2$ ، $c = -12$. **(مهارة سابقة) $-\frac{5}{7}$**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اكتب الحد النوني في المتتابعة الهندسية: $a_n = a_1 r^{n-1}$ ، على السبورة. واطلب إلى الطلبة كتابة عبارة للحد التالي؛ أي الحد الذي ترتيبه $(n+1)$ ، من خلال تعويض $n+1$ بدلاً من n في الحد النوني $a_n = a_1 r^{n-1}$. ثم اطلب إليهم إيضاح أن $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ يساوي أساس المتتابعة r .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 r^{(n+1)-1}}{a_1 r^{n-1}} = \frac{r^n}{r^{n-1}} = r^n - (n-1) = r^1 = r$$

(42) **إجابة ممكنة:** تكون المتسلسلة حسابية، إذا كان الفرق بين كل حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً، وهندسية إذا كانت النسبة بين كل حدين متتاليين نسبة ثابتة. وإذا كان الفرق بين كل حدين متتاليين ثابتاً، وكذلك إذا كانت النسبة ثابتة، فإن المتسلسلة تكون حسابية وهندسية في الوقت نفسه. وبغير ذلك، لا يمكن اعتبار المتسلسلة هندسية أو حسابية.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 6

دون	ضمن	دون	دون
تدريبات إعادة التعليم - تمته (17)			
الاسم: _____ التاريخ: _____ (تمته)			
6-3 تدريبات إعادة التعليم			
المتتابعات والمتسلسلات الهندسية			
المتتابعة الهندسية: المتتابعة الهندسية هي المتتابعة التي يكون فيها كل حد بعد الحد الأول حاصل ضرب الحد السابق بعدد ثابت يسمى أساس المتتابعة (النسبة المشتركة).			
الحد الثاني في متتابعة هندسية			
عدد صحيح موجب			
أوجد الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية: 1200, 480, 192, ...			
في هذه المتتابعة $a_1 = 1200, r = 0.4$ فإن أساس المتتابعة هو 0.4 والحدين التاليين في المتتابعة هما 76.8 و 30.72			
أوجد a_n في كل متتابعة هندسية بما يأتي:			
1 $a_1 = -10, r = 4, n = 2$ $a_2 = -40$			
2 $a_1 = -6, r = -\frac{1}{2}, n = 8$ $a_8 = \frac{3}{64}$			
3 $a_1 = 9, r = -3, n = 7$ $a_7 = -729$			
4 $a_1 = 16, r = 2, n = 10$ $a_{10} = 1024$			
5 $a_1 = -54, r = -3, n = 6$ $a_6 = -486$			
6 $a_1 = 8, r = \frac{2}{3}, n = 5$ $a_5 = \frac{128}{81}$			
7 $a_1 = 7, r = 3, n = 5$ $a_5 = 567$			
8 $a_1 = 46875, r = \frac{1}{5}, n = 7$ $a_7 = -34816$			
9 $a_1 = 46875, r = \frac{1}{5}, n = 7$ $a_7 = -1088$			
أكتب معادلة الحد n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:			
1 $8, 32, 128, \dots$ $a_n = 8(4^{n-1})$			
2 $500, 350, 245, \dots$ $a_n = 500(0.7^{n-1})$			
3 $9, 54, 324, 1944, \dots$ $a_n = 9(6^{n-1})$			
4 $11, -24.2, 53.24, \dots$ $a_n = 11(-2.2^{n-1})$			
5 $-53, -424, -3392, -27136, \dots$ $a_n = -53(8^{n-1})$			
6 $17, 187, 2057, 22627, \dots$ $a_n = 17(11^{n-1})$			
الفصل ٦: المتتابعات والمتسلسلات			

دون	ضمن	دون	دون
تدريبات إعادة التعليم - تمته (16)			
الاسم: _____ التاريخ: _____			
6-3 تدريبات إعادة التعليم			
المتتابعات والمتسلسلات الهندسية			
المتتابعة الهندسية: المتتابعة الهندسية هي المتتابعة التي يكون فيها كل حد بعد الحد الأول حاصل ضرب الحد السابق بعدد ثابت يسمى أساس المتتابعة (النسبة المشتركة).			
الحد الثاني في متتابعة هندسية			
عدد صحيح موجب			
أوجد الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية: 1200, 480, 192, ...			
في هذه المتتابعة $a_1 = 1200, r = 0.4$ فإن أساس المتتابعة هو 0.4 والحدين التاليين في المتتابعة هما 76.8 و 30.72			
أوجد a_n في كل متتابعة هندسية بما يأتي:			
1 $a_1 = -10, r = 4, n = 2$ $a_2 = -40$			
2 $a_1 = -6, r = -\frac{1}{2}, n = 8$ $a_8 = \frac{3}{64}$			
3 $a_1 = 9, r = -3, n = 7$ $a_7 = -729$			
4 $a_1 = 16, r = 2, n = 10$ $a_{10} = 1024$			
5 $a_1 = -54, r = -3, n = 6$ $a_6 = -486$			
6 $a_1 = 8, r = \frac{2}{3}, n = 5$ $a_5 = \frac{128}{81}$			
7 $a_1 = 7, r = 3, n = 5$ $a_5 = 567$			
8 $a_1 = 46875, r = \frac{1}{5}, n = 7$ $a_7 = -34816$			
9 $a_1 = 46875, r = \frac{1}{5}, n = 7$ $a_7 = -1088$			
أكتب معادلة الحد n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:			
1 $8, 32, 128, \dots$ $a_n = 8(4^{n-1})$			
2 $500, 350, 245, \dots$ $a_n = 500(0.7^{n-1})$			
3 $9, 54, 324, 1944, \dots$ $a_n = 9(6^{n-1})$			
4 $11, -24.2, 53.24, \dots$ $a_n = 11(-2.2^{n-1})$			
5 $-53, -424, -3392, -27136, \dots$ $a_n = -53(8^{n-1})$			
6 $17, 187, 2057, 22627, \dots$ $a_n = 17(11^{n-1})$			
الفصل ٦: المتتابعات والمتسلسلات			

دون	ضمن	دون	دون
تدريبات حل المسألة (19)			
الاسم: _____ التاريخ: _____			
6-3 تدريبات حل المسألة			
المتتابعات والمتسلسلات الهندسية			
1 تعليم: يعلّم معلم 8 طلاب كيف يطوون نموذج أوريغامي (origami). وسيعلم كل طالب من هؤلاء الطلاب 8 آخرين كيف يطوون نفس النموذج. إذا استمرت عملية التعليم هذه لعدد n من المراحل، فما عدد الأشخاص الذين سيعرفون كيف يطوون نموذج أوريغامي؟			
8^n			
2 دعوات: تريد مريم أن تقيم حفلة، فدعت إليها 3 صديقات، وطلبت من كل صديقة أن تدعو 3 صديقات أخريات، وهكذا قامت كل واحدة بدعوة 3 صديقات أخريات. إذا استمرت عملية الدعوة على 5 مراحل، فما عدد الدعوات إلى الحفلة؟			
3 قانون مور: اقترح غوردون مور، المؤسس المساعد لإنترنت، أن يتضاعف عدد الترانزستورات على الدوائر المتكاملة في شركة الكمبيوتر كل 18 شهرًا. بافتراض أن قانون مور صحيح، كم مرة توقع أن يتضاعف عدد الترانزستورات على الدوائر المتكاملة كل 18 شهر على مدى السنوات الست القادمة؟			
4 علم الأحياء: الانقسام المباشر هو عملية انقسام للخلايا ينتج عنه خليتان متماثلتان من كل خلية أم. بين الجدول الآتي عدد الخلايا الناتجة بعد كل انقسام من أول 5 انقسامات للخلايا.			
5 أول 5 انقسامات للخلايا.			
6 حل الدخيلات في صف "عدد الخلايا الناتجة" يمثل متسلسلة هندسية؟ إذا كان كذلك، فأوجد قيمة r .			
7 نعم: $r=2$			
8 أكتب عبارة لإيجاد الحد n في المتتابعة.			
9 $a_n = 2^{n-1}$			
10 أوجد عدد الخلايا بعد 100 انقسام.			
11 تقريبًا 6.34×10^{29}			
الفصل ٦: المتتابعات والمتسلسلات			

دون	ضمن	دون	دون
تدريبات المهارات (18)			
الاسم: _____ التاريخ: _____			
6-3 تدريبات المهارات			
المتتابعات والمتسلسلات الهندسية			
أوجد a_n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:			
1 $a_1 = 5, r = 2, n = 6$ $a_6 = 160$			
2 $a_1 = 18, r = 3, n = 6$ $a_6 = 4374$			
3 $a_1 = -3, r = -2, n = 5$ $a_5 = -48$			
4 $a_1 = -20, r = -2, n = 5$ $a_5 = -5120$			
5 $a_1 = 65536, r = \frac{1}{2}, n = 6$ $a_6 = 64$			
6 $a_1 = -78125, r = \frac{1}{5}, n = 9$ $a_9 = -0.2$			
أكتب معادلة الحد n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:			
7 $3, 9, 27, \dots$ $a_n = 3^n$			
8 $-1, -3, -9, \dots$ $a_n = -1(3)^{n-1}$			
9 $2, -6, 18, \dots$ $a_n = 2(-3)^{n-1}$			
10 $5, 10, 20, \dots$ $a_n = 5(2)^{n-1}$			
11 $12, 36, 108, 324, \dots$ $a_n = 12(3^{n-1})$			
12 $32768, 4096, 512, 64, \dots$ $a_n = 32768(\frac{1}{8})^{n-1}$			
13 $25, 175, 1225, 8575, \dots$ $a_n = 25(7^{n-1})$			
14 $-16384, -8192, -4096, -2048, \dots$ $a_n = -16384(\frac{1}{2})^{n-1}$			
أوجد الأساطير الهندسية المطلوبة في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:			
15 $64, 16, 4, \dots$ $a_n = 64(2)^{n-1}$			
16 $1, \dots$ $a_n = 1$			
17 $38, 228, 8208, 49248, \dots$ $a_n = 38(228)^{n-1}$			
18 $51, \dots$ $a_n = 51$			
19 $-15, \dots$ $a_n = -15$			
20 $531441, \dots$ $a_n = 531441$			
21 $S_1 = 1640, r = 3, n = 8$ $S_8 = 1295, r = 6, n = 4$			
22 $S_1 = 1640, r = 3, n = 8$ $S_8 = 1295, r = 6, n = 4$			
23 $S_1 = 1640, r = 3, n = 8$ $S_8 = 1295, r = 6, n = 4$			
24 $S_1 = 1640, r = 3, n = 8$ $S_8 = 1295, r = 6, n = 4$			
الفصل ٦: المتتابعات والمتسلسلات			

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل، شجّعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 6-1 إلى 6-3 من خلال مطوياتهم.

إجابة

(3b) نعم، عندما $2n + 2 = 84$ ، فإن $n = 41$. لذا ففي الشكل الحادي والأربعين (41) سيوجد 84 مربعاً غير مظلل.

(9) اختيار من متعدد: ما مجموع أول 50 عدداً فردياً في الأعداد الطبيعية؟ **B**

625 A

2500 B

2499 C

2401 D

أوجد الحد المطلوب في كل من المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

(10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$ **512**

(11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$ **1048576**

(12) اختيار من متعدد: ما الأوساط الهندسية في المتتابعة أدناه؟ **D**

0.5, _____, _____, _____, 2048

512.375, 1024.25, 1536.125 A

-683, 1365.5, -2048 أو 683, 1365.5, 2048 B

-2, 8, -32 أو 2, 8, 32 C

-4, 32, -256 أو 4, 32, 256 D

(13) دخل: يعمل فريد في شركة بناء مدة 4 أشهر في السنة. إذا كان راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهرياً. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر الأربعة؟ **22412.65 ريال**

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين:

(14) $\sum_{k=1}^8 3 \cdot 2^{k-1}$ **765**

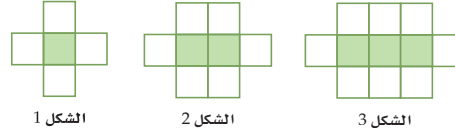
(15) $\sum_{k=1}^9 4 \cdot (-1)^{k-1}$ **4**

حدّد نوع المتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك:

(1) $5, -3, -12, -22, -33, \dots$ **غير ذلك؛ لا يوجد فرق ثابت ولا نسبة ثابتة**

(2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5}, \dots$ **متابعة حسابية؛ لأن هناك فرق ثابت وهو $\frac{1}{2}$**

(3) هندسة: الأشكال أدناه تُمثّل نمطاً من المربعات المظللة والمربعات غير المظللة.



الشكل 1

الشكل 2

الشكل 3

(a) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المظللة (الحد النوني) في هذا النمط. **$a_n = 2n + 2$**

(b) هل يمكن الحصول على 84 مربعاً (غير مظلل) بالضبط في هذا النمط؟ **انظر الهامش**

أوجد الحد التاسع في كل من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

(4) $a_1 = 10, d = -5$ **-30**

(5) $a_1 = -8, d = 4$ **24**

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

(6) $-15 + (-11) + (-7) + \dots + 53$ **342**

(7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$ **1584**

(8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية

$\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ **-3620**

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 6-1 إلى 6-3.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-4

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية
منتتهية.

الدرس 6-4

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية
غير منتتهية.

كتابة الكسر العشري الدوري على
صورة كسر اعتيادي.

ما بعد الدرس 6-4

إيجاد نهاية متتابعة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- عند كتابة متسلسلة هندسية تُمثّل هذا
الموقف. ما الحد الأول فيها؟ 5
- ما الحد الثاني؟ 2.5
- اكتب الحدود الأربعة الأولى من
المتسلسلة؟

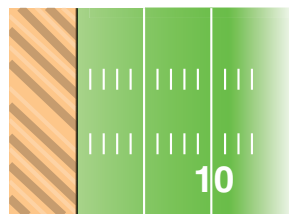
$$5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \dots$$

• لماذا تُسمّى هذه المتسلسلة متسلسلة غير
منتتهية؟

إجابة ممكنة: تستمر بلا حدود.

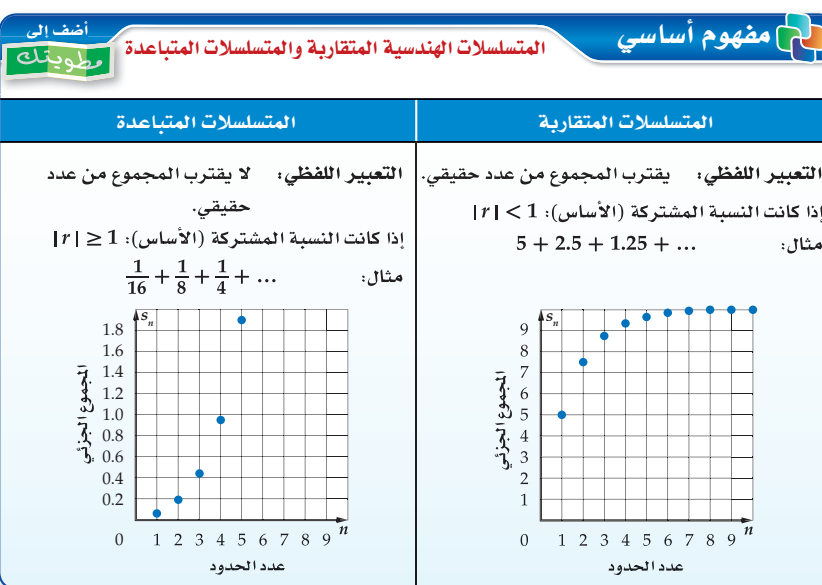
لماذا؟

إذا وضعت كرة على بُعد 10 أمتار من حائط، وبعد ذلك قمت بنقل الكرة
في اتجاه الحائط على عدة مراحل، بحيث تبلغ المسافة التي تنقل إليها
الكرة نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة، فهل تصل الكرة إلى
الحائط؟ ما عدد المراحل التي تنقل فيها الكرة؟ يمكن الإجابة عن مثل
هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهاية).



المتسلسلة الهندسية غير المنتهية: المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هي التي لها عدد لا نهائي من
الحدود، والمتسلسلة التي لها مجموع تكون متقاربة؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقي، أما إذا لم يكن
للمتسلسلة مجموع، فإنها تُسمّى متسلسلة متباعدة.

أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل
حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع المسافات التي تقطعها الكرة تعطى بالمتسلسلة غير المنتهية
 $5 + 2.5 + 1.25 + \dots$ ، وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من 10 أمتار (وهو المجموع الفعلي لها).
وبالتالي يمكن اعتبار أن الكرة تصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدودها إلى ما لا نهاية. والشكل أدناه يظهر
التمثيل البياني للمجموع S_n ، حيث $1 \leq n \leq 10$



المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

مثال 1

حدّد أي المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيها متباعدة:

$$54 + 36 + 24 + \dots \quad (a)$$

أوجد قيمة r

وبما أن $1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكر أن $|r| < 1$ تعني
أن $-1 < r < 1$

مصادر الدرس 6-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (90, 87)	• تنويع التعليم، ص (90, 87)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

$$(b) \quad 8 + 12 + 18 + \dots$$

وإذا $r = \frac{12}{8} = 1.5$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

تحقق من فهمك

$$(1B) \quad 100 + 50 + 25 + \dots \text{ متقاربة}$$

$$(1A) \quad 2 + 3 + 4.5 + \dots \text{ متباعدة}$$

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهاية)

مثال 1 يبين طريقة تحديد إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة.

مثال 2 يبين طريقة إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية لانهاية.

مثال 3 يبين طريقة إيجاد المجموع لحدود متسلسلة مكتوبة باستعمال رمز المجموع.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

حدد أي المتسلسلتين الآتيتين متقاربة وأيهما متباعدة؟

$$(a) \quad 729 + 243 + 81 + \dots \text{ متقاربة}$$

$$(b) \quad 2 + 5 + 12.5 + \dots \text{ متباعدة}$$

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين، (إن وجد):

$$(a) \quad -\frac{4}{3} + 4 - 12 + 36 - \dots$$

$$(b) \quad 108 + \dots \text{ ليس لها مجموع}$$

$$(b) \quad 2 \cdot 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \dots$$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير تأكد من فهم الطلبة للعلاقة بين $|r| < 1$ ، والمتباينة المركبة $-1 < r < 1$. إن تمثيل هذه المتباينة بيانياً على خط الأعداد يساعد الطلبة على فهم المعنى الرياضي لهما.

المحتوى الرياضي

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهاية يتم تحديد إذا كانت المتسلسلة الهندسية اللانهاية متقاربة أم لا، اعتماداً على حاصل ضرب أي حد فيها في أساس المتسلسلة r . وبما أن القيمة المطلقة لحاصل ضرب أي عدد في كسر بين -1 و 1 يكون دائماً أقل من القيمة المطلقة للعدد الأصلي، لذا يكون للمتسلسلة مجموع إذا كان الأساس r يُحقق المتباينة: $-1 < r < 1$.

يمكن استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية، وهي التي تستمر حدودها إلى ما لا نهاية ؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

$$\sum_{k=1}^{\infty} 18 \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90$$

تحقق من فهمك

$$(3) \text{ أوجد قيمة } \sum_{k=1}^{\infty} 12 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.4\overline{5} = 0.454545... = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + ...$ ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4

تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب $0.\overline{63}$ على صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + ... = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + ...$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$$

$$= \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

$$x = 0.\overline{63}$$

$$x = 0.636363...$$

$$100x = 63.636363...$$

$$99x = 63$$

$$x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

تحقق من فهمك

$$(4) \text{ اكتب } 0.\overline{21} \text{ على صورة كسر اعتيادي. } \frac{7}{33}$$

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب

في كثير من الأحيان يمكن حل المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته على صورة كسر اعتيادي.

مثال إضافي

$$(3) \text{ أوجد قيمة } \sum_{k=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

تنبيه!

تجنب الأخطاء كلف الطلبة كتابة بعض حدود المتسلسلة في المثال 3 لتأكد من فهمهم رمز المجموع.

الكسور العشرية الدورية

المثال 4 يبين طريقة تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال إضافي

$$(4) \text{ اكتب الكسر الدوري } 0.\overline{25} \text{ على صورة كسر اعتيادي. } \frac{25}{99}$$

التعليم باستعمال التقنيات

الرسائل النصية اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية بحيث يقوم الأول بإرسال رسالة إلى زميله تحتوي على كسر عشري دوري، فيرد الطالب الآخر على الرسالة بتحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي، ثم يتبادلون الأدوار.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة البحث عن إحدى الأحاجي الرياضية المشهورة، وهي أحجية زينو (Zeno's Paradox) ودعهم يناقشوا هذه القصة عن سباق السلاحف من خلال محتوى الدرس.

مثال 1

حدّد أي المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيها متباعدة:

$$(1) \quad 16 - 8 + 4 - \dots \quad \text{متقاربة} \quad (2) \quad 1 + 1 + 1 + \dots \quad \text{متباعدة}$$

مثال 2

أوجد مجموع حدود كلّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين (إن وجد):

$$(3) \quad 880 \quad 440 + 220 + 110 + \dots \quad (4) \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \dots \quad \text{غير موجود}$$

مثال 3

أوجد مجموع حدود كلّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين (إن وجد):

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1} \quad \text{غير موجود} \quad (6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1} \quad -4$$

مثال 4

اكتب كلّاً من الكسرين العشريين الدوريين الآتين على صورة كسر اعتيادي:

$$(7) \quad 0.\overline{35} \quad \frac{35}{99} \quad (8) \quad 0.\overline{642} \quad \frac{214}{333}$$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-8 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

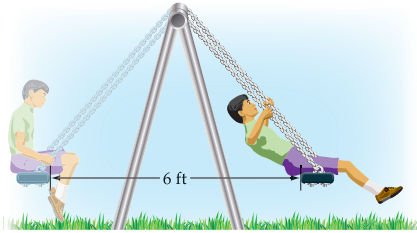
حدّد أي المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة، وأيها متباعدة:

$$(9) \quad 21 + 63 + 189 + \dots \quad \text{متباعدة} \quad (10) \quad \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots \quad \text{متباعدة} \\ (11) \quad 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots \quad \text{متقاربة} \quad (12) \quad 0.008 + 0.08 + 0.8 + \dots \quad \text{متباعدة}$$

مثال 2

أوجد مجموع حدود كلّ من المتسلسلات الهندسية الآتية (إن وجد):

$$(13) \quad 18 + 21.6 + 25.92 + \dots \quad \text{غير موجود} \quad (14) \quad -3 - 4.2 - 5.88 - \dots \quad \text{غير موجود} \\ (15) \quad \frac{24}{5} \quad \frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \dots \quad (16) \quad 32 + 40 + 50 + \dots \quad \text{غير موجود}$$



(17) أراجيح: إذا ترك سعيد نفسه عند نقطة البداية

ليتأرجح دون دفع منه، كما في الشكل، وقد بدأت المسافة تتناقص بمقدار 10% في كل تأرجح، فجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد قطعها عندما تتوقف الأرجوحة تمامًا. 60 ft

مثال 3

أوجد قيمة كلّ مما يأتي (إن وجدت):

$$(18) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1} \quad \text{غير موجودة} \quad (19) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1} \quad \frac{35}{12} \quad (20) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \quad 16$$

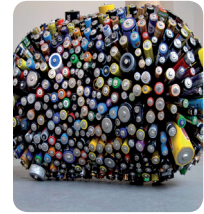
مثال 4

اكتب كلّاً من الكسور العشرية الدورية الآتية، على صورة كسر اعتيادي:

$$(21) \quad 0.\overline{321} \quad \frac{53}{165} \quad (22) \quad 4.\overline{96} \quad \frac{164}{33} \quad (23) \quad 0.12\overline{14} \quad \frac{601}{4950}$$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون	دون المتوسط 38-46 ، 36 ، 35 ، 9-23
ضمن	ضمن المتوسط 23-46
فوق	فوق المتوسط 24-46



الربط مع الحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كل عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلاً من 100 بطارية عادية.

(24) بطاريات قابلة للشحن أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن، عن بطارية تشحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟ **8000 ساعة**

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وجد):

$$(25) \quad \dots + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{15}{4} + \frac{45}{4} \quad (26) \quad \dots - 1 + \frac{4}{3} - \frac{16}{9} - \frac{64}{63} - \frac{21}{16} + \frac{7}{4} + \frac{7}{3} + \dots \quad \text{غير موجود}$$

(28) تمثيلات متعددة ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

- (a) **حسيًا:** افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. قصّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحد الأول، ثم قص النصف الآخر نصفين واعتبر أحدهما الحد الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة غير المنتهية، التي تعبر عن الأجزاء لديك. $\dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
- (b) **عدديًا:** إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى ما لا نهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع a. **1**

(c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

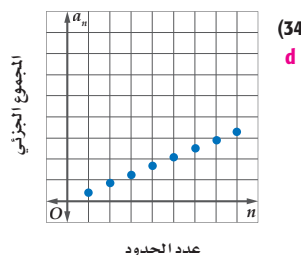
(29) فيزياء: في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وبعد ذلك تركت لتتدحرج تلقائيًا، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft، ثم بدأت تقطع في كل دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعها في الدقيقة السابقة. فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟ **200 ft**

(30) بندول: يقطع بندول مسافة 12 cm في الأرجحة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الأرجحة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقّف عن الحركة. **240 cm**

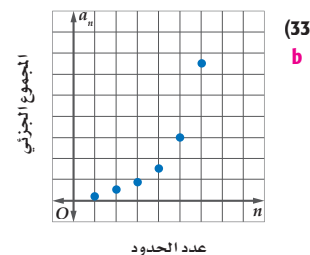
(31) ألعاب: أُسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 قدمًا، فكانت ترتدّ في كل مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فجد المسافة التي تقطعها حتى تقف. **1170 ft**

(32) متحف العلوم: يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحد الزوار بسحب جسم معلق بزنبرك إلى أسفل ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى أعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كل مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم. **6 ft**

اربط بين كل شكل والوصف المناسب له:



(34) d



(33) b

- (a) متسلسلة هندسية متقاربة. (b) متسلسلة هندسية متباعدة. (c) متسلسلة حسابية متقاربة. (d) متسلسلة حسابية متباعدة.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في السؤال 28، النماذج والتحليل العددي، والوصف اللفظي، لتمثيل متسلسلة هندسية غير منتهية ومجموعها.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (35) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ فكانت إجابتهما كما يأتي. فهل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضح تبريرك: **انظر الهامش**

أحمد	علي
لا يمكن إيجاد المجموع لأن $ r \geq 1$ ، والمتسلسلة متباعدة.	المجموع صفر، لأن مجموع كل زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.

- (36) **برهان:** اشتق معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية. **انظر الهامش.**
- (37) **تحذير:** ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة $1 + 9b + 27b^2 + 81b^3 + \dots$ ؟
- (38) **تبرير:** متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضح تبريرك.
- (39) **مسألة مفتوحة:** اكتب المتسلسلة $3 - 6 + 12 - \dots$ باستعمال رمز المجموع وبطريقتين مختلفتين.
- (40) **اكتب:** وضح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائماً. **انظر الهامش.**
- (40) $\sum_{k=1}^{\infty} 3(-2)^{k-1}$, $\sum_{k=0}^{\infty} 3(-2)^k$

تدريب على اختبار

- (41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 27 وأساسها $\frac{2}{3}$ هو: **A**
- 81 **A**
65 **B**
34 **C**
18 **D**
- (42) **هندسة:** ضرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. **C**
- ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟
- $\frac{1}{9}$ **A** حجم الكبيرة
 $\frac{1}{27}$ **B** حجم الكبيرة
 $\frac{1}{27}$ **C** حجم الكبيرة
 $\frac{1}{3}$ **D** حجم الكبيرة

مراجعة تراكمية

- (43) **مسابقات:** تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كل جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصاً، فاكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 3-6)
- $a_n = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- (44) **حياكة:** مشغلٌ فيه 9 عاملات، تنتج كلٌّ منهن فستاناً يومياً. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة التي تبين مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كل يوم. (الدرس 2-6)
- 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72
- أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)
- (45) $y^2 + 7y + 12$ $(y + 4)(y + 3)$
- (46) $27p^2 - 21p + 2$ $(9p - 1)(3p - 2)$

90 الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

$$(37) -\frac{1}{3} < b < \frac{1}{3}$$

(38) إجابة ممكنة: يكون

للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموع إذا كانت القيمة المطلقة للأساس أقل من 1، وعندما يحدث هذا فإن الحدود تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، وعندما تكون قيم الحدود قريبة من الصفر فإن المتسلسلة تقترب من عدد حقيقي، أما إذا كانت القيمة المطلقة للأساس أكبر من أو تساوي 1 فإن الحدود تزداد بصورة كبيرة وتقترب من مالانهاية مع زيادة قيمة n ، ولهذا فإن المجموع ليس له قيمة حقيقية.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3(-2)^{k-1}, \sum_{k=0}^{\infty} 3(-2)^k$$

إجابات:

- (35) إجابة ممكنة: أحمد؛ لأن أساس المتسلسلة هو $r = -1$ ، والقيمة المطلقة هي $r = 1$ ، ولذا، فإن المتسلسلة متباعدة.
- (36) إجابة ممكنة: مجموع المتسلسلة الهندسية هو $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ وبالنسبة إلى المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي فيها $|r| < 1$ ، فإن $r^n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$. وبهذا فإن:
- $$S = \frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$
- (40) لأن للمتسلسلة الحسابية أساس. حيث يزداد كل حد من حدودها إذا كان الأساس موجباً، وينقص كل حد من حدودها إذا كان الأساس سالباً. وفي كلتا الحالتين لا يصل المجموع إلى قيمة حقيقية محدّدة.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 35، ذكّر الطلبة أن قيمة r تُحدّد هل المتسلسلة متقاربة أم متباعدة.

تنبيه!

قانون ذكّر الطلبة في السؤال 42 أن قانون حجم الكرة يُعطى بالصيغة: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل عدة نسخ من ورقة فيها خمس متسلسلات هندسية مختلفة، بعضها متقاربة وبعضها متباعدة. وأعط كل طالب نسخة، واطلب إليه التمييز إذا كانت كل متسلسلة فيها متقاربة أم متباعدة وتسليمها لك قبل مغادرتك غرفة الفصل.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 3-6، 4-6، 3-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية بحيث يقوم أحدهما بكتابة كسر عشري دوري، ويقوم الآخر بتحويله إلى كسر اعتيادي، ثم اطلب إليهم أن يتبادلوا الأدوار.

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire ؛ لاستكشاف نهاية متتابعة.

المواد

- الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

يتم تمثيل المتتابعات بيانيًا من خلال البرامج الإحصائية بالطريقة نفسها التي تُمثّل بها البيانات الأخرى. ومن المهم أن يكون عدد العناصر في L_1 مساويًا لعدد العناصر في L_2 .

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم استعمال الحاسبة؛ لتنفيذ الخطوتين 1، 2 من النشاط.

- يمكن استعمال المفاتيح:

4:Window/Zoom

6:Window Settings...

لتحديد قيمًا لـ x ، y ، لزيادة توضيح التمثيل البياني للمتتابعة.

- يمكن للطلبة التحقق من التمثيل مباشرة على الشاشة الرئيسية باستعمال ميزة Table بالضغط على المفاتيح:

2:View A:Show Table

على شاشة التمثيل البياني نفسها، حيث يظهر الجدول يمين التمثيل البياني،

ويؤدي النتيجة نفسها، ويمكن اختصار العملية مباشرة من الشاشة الرئيسية

بالضغط على ctrl T لظهور الجدول.

- تأكد من فهم الطلبة أن المتتابعة يكون لها نهاية عندما تقترب قيم حدودها من عدد معين.

التدريب كلف الطلبة حل التمارين 3-6.

لعلك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحد في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويسمى "الصفر" في هذه الحالة نهاية المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$

الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

يمكن عمل جدول للمتتابعة، وذلك بالضغط على المفاتيح:

4:Add Lists & Spreadsheet وكتب في العمود الأول n ، وكتب فيه الأعداد الصحيحة الموجبة، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحد النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ، ثم اضغط على المفتاح enter .

n	a _n
1	1
2	1/4
3	1/16
4	1/64
5	1/256
6	1/1024
7	1/4096
8	1/16384
9	1/65536
10	1/262144
11	1/1048576

لاحظ أنه كلما زادت قيمة n ، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0، وإذا نزلت إلى أسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$ ، فإن قيمة كل حد تكون قريبة من 0، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0.

الخطوة 2: مثل المتتابعة.

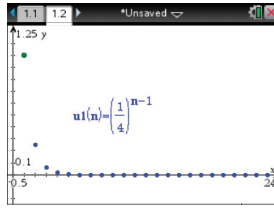
لتمثيل المتتابعة اضغط على المفاتيح:

2:Add Graphs 3:Graph Type 5:Sequence

1:Sequence ثم أدخل صيغة الحد النوني، والحد الأول للمتتابعة ثم اضغط على

المفاتيح: 4:Window/Zoom 6:Zoom - Quadrant 1

ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$ ، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، مما يعني أن نهاية المتتابعة هي 0.



تمارين:

أوجد نهاية كلٍّ من المتتابعات الآتية:

(1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(3) $a_n = 5^n$ غير موجودة

(4) $a_n = \frac{1}{n^2}$

(5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$

(6) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$ غير موجودة

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة في التمرين 5 تفحص المتتابعة: $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ ، ثم قسمة البسط والمقام على 3^n ، واستعمل النتيجة في توضيح أن النهاية هي 1.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل تمرين 6، لتقويم فهم الطلبة للحالة التي لا يوجد فيها نهاية للمتتابعة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 6

دون		ضمن		فوق المتوسط	
تدريبات إعادة التعليم (21)					
الاسم: _____ التاريخ: _____					
6-4 تدريبات إعادة التعليم					
المتسلسلات الهندسية غير المنتهية					
المتسلسلات الهندسية غير المنتهية، يطلق على المتسلسلة الهندسية التي ليس لها نهاية متسلسلة هندسية غير منتهية. وبعض المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لها مجموع، بينما البعض الآخر ليس لها مجموع؛ لأن المجاميع الجزئية تزداد دون أن تقترب من قيمة معينة.					
مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية					
إذا كانت $r > 1$ ، فإن المتسلسلة الهندسية غير المنتهية ليس لها مجموع.					
مثال 5: أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتيتين (إن وُجد):					
(a) $75 + 15 + 3 + \dots$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 48 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$					
أوجد أولًا قيمة r لتحديد ما إذا كان المجموع موجودًا، a_1 في هذه المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $a_1 = 48$ و $r = -\frac{1}{3}$. $r = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$ ، لذا $a_1 = 15$ و $r = \frac{3}{75} = \frac{1}{25}$. $r = \frac{3}{75} = \frac{1}{25}$ ، فإن المجموع موجود. الآن استخدم صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية					
صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1-r}$					
بالتبسيط $S = \frac{48}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{48}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{48}{\frac{4}{3}} = 36$					
بالتبسيط $S = \frac{15}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{15}{\frac{24}{25}} = \frac{15 \cdot 25}{24} = \frac{375}{24} = 15.625$					
إذن مجموع المتسلسلة هو 93.75					
تدريبات					
أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وُجد):					
(1) $a_1 = -7, r = \frac{5}{8}$ (2) $1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \dots$ (3) $a_1 = 4, r = \frac{1}{2}$					
(4) $18 - 9 + 4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} + \dots$ (5) $15 + 10 + 6\frac{2}{3} + \dots$ (6) $6 - 12 + 24 - 48 + \dots$ (7) $1000 + 800 + 640 + \dots$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} 24 \left(\frac{7}{12}\right)^{n-1}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty} 22 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} 50 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$					
(11) $14\frac{2}{3}$ (12) $57\frac{5}{9}$ (13) 250					
الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات					

دون		ضمن		فوق المتوسط	
تدريبات إعادة التعليم - تنمة (22)					
الاسم: _____ التاريخ: _____					
6-4 تدريبات إعادة التعليم					
المتسلسلات الهندسية غير المنتهية					
الكسور العشرية الدورية، الكسر العشري الدوري يمثل كسرًا اعتياديًا، ولإيجاد الكسر الاعتيادي، اكتب الكسر العشري في شكل متسلسلة هندسية غير منتهية، واستخدم صيغة المجموع.					
اكتب كلاً من الكسرين العشريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي.					
(a) $0.4\overline{2}$ (b) $0.5\overline{24}$					
لنكن $S = 0.5242424$					
$10S = 5.24242424$					
$1000S = 525.2424$					
$990S = 519$					
بالتبسيط $S = \frac{519}{990} = \frac{173}{330}$					
لذا فإن $0.524 = \frac{173}{330}$					
بالتبسيط $S = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$					
لنكن $S = 0.4242424$					
$10S = 4.2424242$					
$100S = 42.424242$					
$90S = 42$					
بالتبسيط $S = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$					
لذا فإن $0.4\overline{2} = \frac{7}{15}$					
تدريبات					
اكتب كلاً من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:					
(1) 0.2 (2) $0.\overline{8}$ (3) $0.3\overline{0}$ (4) $0.8\overline{7}$					
(5) $0.1\overline{0}$ (6) $0.5\overline{4}$ (7) $0.7\overline{5}$ (8) $0.1\overline{8}$					
(9) $0.8\overline{2}$ (10) $0.7\overline{2}$ (11) $0.0\overline{72}$ (12) $0.0\overline{45}$					
(13) $0.0\overline{6}$ (14) $0.01\overline{38}$ (15) $0.01\overline{38}$ (16) $0.08\overline{1}$					
(17) $0.1\overline{1}$ (18) $0.3\overline{33}$ (19) $0.3\overline{33}$ (20) $0.1\overline{1}$					
الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات					

دون		ضمن		فوق	
تدريبات المهارات (23)					
الاسم: _____ التاريخ: _____					
6-4 تدريبات المهارات					
المتسلسلات الهندسية غير المنتهية					
أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وُجد):					
(1) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$ (2) $a_1 = 5, r = -\frac{2}{5}$ (3) $a_1 = 8, r = 2$ (4) $a_1 = 6, r = \frac{1}{2}$ (5) $8 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$ (6) $405 - 180 + 60 - 20 + \dots$ (7) $5 + 10 + 20 + \dots$ (8) $-268.8 - 336 + 84 - 21 + \dots$ (9) $156.25 + 25 + 5 + \dots$ (10) $9 - 1 + \frac{1}{9} - \dots$ (11) $\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{4} + \dots$ (12) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ (13) $5 + 2 + 0.8 + \dots$ (14) $27 + 9 + 6 + 4 + \dots$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} 6 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (17) $\sum_{n=1}^{\infty} 25 \left(5\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (18) $-2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (19) 0.4 (20) $\frac{4}{9}$ (21) 0.27 (22) $\frac{3}{11}$ (23) 0.54 (24) $\frac{6}{11}$ (25) 0.641					
الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات					

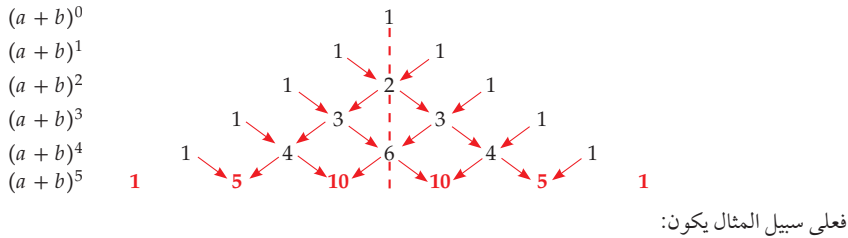
دون		ضمن		فوق	
تدريبات حل المسألة (24)					
الاسم: _____ التاريخ: _____					
6-4 تدريبات حل المسألة					
المتسلسلات الهندسية غير المنتهية					
(1) مفارقة، إذا استعملت صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية 100 جرام لمدة سنة، ويريد بعد سنة أن يبدأ باسترجاع الذهب. وبعد سنة بدأ محمد إرجاع الذهب إلى خالد بإعطائه 1 جرام من الذهب في اليوم الأول. وفي اليوم التالي أعاد له محمد 0.99 جرام من الذهب. وفي اليوم الذي تلاه أعاد 0.99 ² جرام أو 0.981 جرام من الذهب. وفي كل يوم لاحق كان محمد يعيد 0.99 مما كان يعيده في اليوم السابق.					
(a) كم استرجع خالد من الذهب بعد 10 أيام؟ 100 يوم؟ عدد لانهائي من الأيام؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من المئة من الجرام.					
(b) هل ستعود كمية الذهب كلها لخالد في يوم معين في المستقبل؟ وضع إجابتك.					
(c) لا، على هذا المعدل سيبقى دائمًا جزء صغير من الذهب لايعاد إلى خالد.					
(2) قواعده الكسرية العشرية الدوري غير المنتهي 0.999... يساوي 1، ويمكن إثبات ذلك باستخدام مجموع متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{10}$ وحدها الأول $\frac{9}{10}$. أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $\frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \frac{b-1}{b^3} + \dots$ حيث b عدد صحيح موجب أكبر من 1.					
(3) تسلق، صُمم رجل آلي يبحث يتسلق مرتفعًا في كل مرة يُضخّط فيها على زرع بعد التشغيل. وعندما تُضخّط على الزرع لأول مرة، تسلق الرجل الآلي 10 أقدام. وفي كل مرة بعدها كان يتسلق 75% مما تسلقه في المرة السابقة. ما أعلى ارتفاع يمكن أن يتسلقه الرجل الآلي؟					
40 قدمًا					
الفصل 6، المتتابعات والمتسلسلات					

نظرية ذات الحدين
The Binomial Theorem

لماذا؟

يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 6 متخصصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلاً باسكال: اكتشف الصينيون في القرن الثالث عشر الميلادي نمطاً من الأعداد سُمي لاحقاً **مثلاً باسكال**. ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a + b)^n$.



فعلى سبيل المثال يكون:

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

استعمال مثلاً باسكال

مثال 1 من واقع الحياة

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 6 مختصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية وذلك بإيجاد مفكوك $(a + b)^8$.

اكتب ثلاثة صفوف إضافية، مستعملاً النمط أعلاه.

5		1		5		10		10		5		1												
6			1		6		15		20		15		6		1									
7				1		7			21		35		35		21		7			1				
8					1		8			28		56		70		56		28		8				1

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

كما تبين من فقرة "لماذا؟" أعلاه ومن الصف الثامن في مثلاً باسكال، فإن عدد حدود مفكوك $(a + b)^8$ هو 9، ومجموع الأسس في كل حد هو 8، وأن أس الحد الأول a يتناقص بمقدار 1 في كل مرة، بينما يتزايد أس الحد الثاني. لذا فعند جمع قيم معاملات كثيرة الحدود، نجد أنه يوجد 256 توفيقاً من مختصّي المنطقتين يمكن استئجارهم، وبما أن العدد 28 في المقدار $28a^6b^2$ يُمثّل عدد التوفيقات التي فيها 6 مختصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية، لذلك فإن احتمال استئجار 6 مختصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية يساوي $\frac{28}{256}$ أو 11% تقريباً، وذلك حسب تعريف الاحتمال النظري لحادثة، حيث إن عدد الطرائق الممكنة للحادثة هو 28 وعدد الطرائق جميعها 256.

$$c^9 + 9c^8d + 36c^7d^2 + 84c^6d^3 + 126c^5d^4 + 126c^4d^5 + 84c^3d^6 + 36c^2d^7 + 9cd^8 + d^9$$

تحقق من فهمك

(1) أوجد مفكوك $(c + d)^9$.

فيما سبق:

درست التوافيق واستعمالاتها.

والآن:

- أستعمل مثلاً باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a + b)^n$
- أستعمل نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار $(a + b)^n$.

المفردات:

مثلاً باسكال

Pascal's triangle

نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-5

استعمال التوافيق.

الدرس 6-5

استعمال مثلاً باسكال في إيجاد معاملات مفكوك $(a + b)^n$.

استعمال نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار $(a + b)^n$.

ما بعد الدرس 6-5

إيجاد احتمالات تجارب ذات حدين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"، واسأل:

- افترض أن اثنين فقط من كل منطقة تم اختيارهم. فكم عدد المتتابعات الممكنة تكونها من 2 من المنطقة الأولى (M_1)، و2 من المنطقة الثانية (M_2)، حدّد قائمة بالخيارات. 6؛
- أوجد مفكوك $(a + b)^4$. ما الحد الذي معاملته 6 في المفكوك؟

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4$$

- ما عدد المتتابعات التي يكون فيها 3 أشخاص من المنطقة الأولى وشخص واحد من المنطقة الثانية؟ استعمل مفكوك $(a + b)^4$. ثم سجّل النتائج. 4؛

$$M_1M_1M_1M_2, M_1M_2M_1M_1, M_1M_2M_2M_1, M_2M_1M_1M_2, M_2M_1M_2M_1, M_2M_2M_1M_1$$

مصادر الدرس 6-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (93، 95)	• تنويع التعليم، ص (95)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)
مصادر المعلم لأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (90)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (90)

نظرية ذات الحدين: يمكن استعمال **نظرية ذات الحدين** لإيجاد مفكوك ذات الحدين بدلاً من استعمال مثلث باسكال (تذكر أن: ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$).

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

إذا كان n عدداً طبيعياً، فإن:

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

عند استعمال النظرية استبدل n بقيمة الأس. ولاحظ كيف ستتع الحدود النمط نفسه في مثلث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدين سالبة $(a-b)^n$ ، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

استعمال نظرية ذات الحدين

مثال 2

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافيق.

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدين.

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7C_1 a^6 b + {}_7C_2 a^5 b^2 + {}_7C_3 a^4 b^3 + {}_7C_4 a^3 b^4 + {}_7C_5 a^2 b^5 + {}_7C_6 a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + \frac{7!}{6!1!} a^6 b + \frac{7!}{2!5!} a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!} a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!} a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!} a^2 b^5 + \frac{7!}{6!1!} a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

الطريقة الثانية: استعمال مثلث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد القوى، وبدلاً من إيجاد المعاملات باستعمال التوافيق، استعمل الصف السابع من مثلث باسكال.

6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

تحقق من فهمك

(2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

عندما يكون معامل الحدين في ذات الحدين يختلف عن العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدين.

استعمال نظرية ذات الحدين عندما يختلف المعاملان عن 1

مثال 3

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4C_1 (5a)^3 (-4b) + {}_4C_2 (5a)^2 (-4b)^2 + {}_4C_3 (5a) (-4b)^3 + {}_4C_4 (-4b)^4$$

$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!1!} (125a^3) (-4b) + \frac{4!}{2!2!} (25a^2) (16b^2) + \frac{4!}{1!3!} (5a) (-64b^3) + 256b^4$$

$$= 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280a b^3 + 256b^4$$

تحقق من فهمك

(3) أوجد مفكوك $(3x+2y)^5$. $243x^5 + 810x^4 y + 1080x^3 y^2 + 720x^2 y^3 + 240x y^4 + 32y^5$

مثلث باسكال

المثال 1 يبين طريقة استعمال مثلث باسكال لإيجاد معاملات مفكوك قوى ذات الحدين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

أوجد مفكوك $(p+t)^5$.

$$p^5 + 5p^4 t + 10p^3 t^2 + 10p^2 t^3 + 5p t^4 + t^5$$

نظرية ذات الحدين

مثال 2 يبين طريقة استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد المفكوك.

مثال 3 يبين طريقة إيجاد المفكوك عندما يختلف المعاملان عن 1.

مثال 4 يبين طريقة استعمال نظرية ذات الحدين، لإيجاد حد معين في المفكوك.

مثالان إضافيان

أوجد مفكوك $(t-w)^8$.

$$t^8 - 8t^7 w + 28t^6 w^2 - 56t^5 w^3 + 70t^4 w^4 - 56t^3 w^5 + 28t^2 w^6 - 8t w^7 + w^8$$

أوجد مفكوك $(3x-y)^4$.

$$81x^4 - 108x^3 y + 54x^2 y^2 - 12x y^3 + y^4$$

قراءة الرياضيات

كُتب عدد التوافيق لعناصر عددها n مأخوذة من عناصر كل مرة سابقاً بالرمز ${}_nC_r$ ، وسيرمز له في هذا الكتاب بالرمز ${}_nC_r$.

إرشادات للدراسة

توافيق

$$0! = 1$$

$$({}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{1}{1} = 1)$$

$${}_nC_n = 1$$

$$({}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{1}{1} = 1)$$

$$2)x^{10} + 10x^9 y + 45x^8 y^2 + 120x^7 y^3 + 210x^6 y^4 + 252x^5 y^5 + 210x^4 y^6 + 120x^3 y^7 + 45x^2 y^8 + 10x y^9 + y^{10}$$

إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية

يمكن حساب قيمة ${}_nC_r$ باستعمال الحاسبة البيانية. اضغط على الزر **MATH** ثم اختر 3 PRB

تنوع التعليم

ضمن

إذا أردت إعطاء الطلبة الفرصة ليكونوا مبدعين،

فاطلب إليهم العمل في مجموعات ثنائية لكتابة أنشودة أو عدد من أبيات الشعر، يصفون فيها الأنماط في نظرية ذات الحدين.

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك؛ لذا استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك ذات الحدين $(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k)$.

مثال 4 إيجاد قيمة حد معين

أوجد الحد الخامس في مفكوك $(y + z)^{11}$.

الخطوة 1: استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك نظرية ذات الحدين؛ لكتابة المفكوك.

$$(y + z)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^k$$

الخطوة 2:

$$\begin{aligned} \text{عند الحد الخامس، تكون } k = 4 \\ \frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^k = \frac{11!}{4!(11-4)!} y^{11-4} z^4 \\ = 330y^7z^4 \end{aligned}$$

$${}_{11}C_4 = 330$$

تحقق من فهمك

(4) أوجد الحد السادس في مفكوك $(c + d)^{10}$. $252c^5d^5$



تاريخ الرياضيات

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي

عالم رياضي مسلم، وهو أول من أوجد المثلث المشهور الذي يسمى الآن مثلث باسكال.

ملخص المفاهيم

مفكوك ذات الحدين

في مفكوك ذات الحدين $(a + b)^n$:

- عدد الحدود $n + 1$.
- أس a في الحد الأول هو n ، وكذلك أس b في الحد الأخير هو n .
- يقل أس a بمقدار واحد، ويزيد أس b بمقدار واحد في أي حدين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حد يساوي n دائماً.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

تأكد

$$1) g^7 + 7g^6h + 21g^5h^2 + 35g^4h^3 + 35g^3h^4 + 21g^2h^5 + 7gh^6 + h^7$$

أوجد مفكوك كل مما يأتي:

$$(y - 4z)^4 \quad (3)$$

$$(x + 3)^5 \quad (2)$$

$$(g + h)^7 \quad (1)$$

(4) **ولادة:** إذا كان احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى عند المرأة، فاستعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد احتمال أن يكون عدد الإناث 5 في ست ولادات. (لا تحسب التوائم). $\frac{3}{32} = 0.09375$

أوجد الحد المطلوب في مفكوك كل مما يأتي:

$$(2c - 3d)^8 \quad (5) \text{ الحد السادس في مفكوك}$$

$$(5x + y)^5 \quad (6) \text{ الحد الأخير في مفكوك}$$

$$(3a + 8b)^5 \quad (7) \text{ الحد الأول في مفكوك}$$

الأمثلة 1-3

$$2) x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$$

$$3) y^4 - 16y^3z + 96y^2z^2 - 256yz^3 + 256z^4$$

مثال 4

$$5) -108864c^3d^5$$

$$6) y^5$$

$$7) 243a^5$$

$$8) c^7 - 7c^6d + 21c^5d^2 - 35c^4d^3 + 35c^3d^4 - 21c^2d^5 + 7cd^6 - d^7$$

أوجد مفكوك كل مما يأتي:

$$(3a - 4b)^5 \quad (10)$$

$$(2a + 4b)^4 \quad (9)$$

$$(c - d)^7 \quad (8)$$

الأمثلة 1-3

تدرب وحل المسائل

94 الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل فيديو اطلب إلى الطلبة

العمل في مجموعات لإنتاج شريط

فيديو يوضح كيفية إيجاد مفكوك

ذات الحدين. وأن يوضحوا من خلال

عملهم كيفية استعمال كل من مثلث

باسكال، ونظرية ذات الحدين في

إيجاد المفكوك.

المحتوى الرياضي

الأنماط ونظرية ذات الحدين

لإيجاد مفكوك $(a + b)^n$ ، فإن إشارة

كل حد في المفكوك تعتمد على إشارة

كل من a, b . فتكون إشارة الحدود

كلها موجبة إذا كانت إشارة a وإشارة b

موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية

سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

مثال إضافي

4 أوجد الحد الرابع في مفكوك

$$108ab^3. (a + 3b)^4$$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-7 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة

لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب

مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	22-29 ، 8-17
ضمن المتوسط	22-29 ، 8-21
فوق المتوسط	17-29

(11) **لجان:** إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلبة الصفين الأول والثاني الثانويين في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الأول الثانوي، علمًا بأن عدد طلاب الصفين متساو وأن الاختيار يتم عشوائيًا.

(12) **كرة سلة:** إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلة لأحد اللاعبين، يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محددة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرة من بين 12 محاولة.

$$\frac{12}{4096} \approx 0.00293$$

أوجد الحد المطلوب في كلِّ ممَّا يأتي:

(13) الحد الرابع في مفكوك $(y - 3x)^6$ $(14 - 540y^3x^3)$ الحد السادس في مفكوك $(4x + 5y)^6$ $75000xy^5$

(15) الحد الخامس في مفكوك $(x - 4)^9$ $(16 - 32256x^5)$ الحد الرابع في مفكوك $(c + 6)^8$ $12096c^5$

أوجد مفكوك كلِّ ممَّا يأتي: **للسؤالين 17، 18 انظر الهامش**

$$(17) \left(x - \frac{1}{3}\right)^4 \quad (18) \left(2b + \frac{1}{4}\right)^5$$

(19) **كرة قدم:** إذا كان احتمال أن يسجل خالد هدفًا من ضربة جزاء هو 70%، فأوجد احتمال أن يسجل 9 أهداف من 10 ضربات. **0.121 تقريبًا**

$$(11) \frac{120}{1024} = \frac{15}{128} \approx 0.117$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(20) **تحذ:** أوجد الحد السادس في مفكوك $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{12}$ ، ووضِّح إجابتك. $792a^3b^2\sqrt{ab}$

(21) **تبرير:** وضح كيف تشابه الحدود في مفكوك كلِّ من $(x - y)^n$ ، $(x + y)^n$ وكيف تختلف.

(22) **مسألة مفتوحة:** اكتب قوة لذات حدين، الحد الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$. **إجابة ممكنة:** $(x + \frac{6}{5}y)^5$

(23) **اكتب:** وضح كيف يمكنك كتابة حدود مثلث باسكال. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

(24) **احتمال:** يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تم سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون القلم أصفر، علمًا بأنه من الأقلام المبرية؟ **A**

$$\frac{1}{5} \text{ D} \quad \frac{5}{10} \text{ C} \quad \frac{7}{15} \text{ B} \quad \frac{5}{12} \text{ A}$$

(25) أيُّ العلاقات التالية تُمثِّل دالة خطية؟ **C**

$$\begin{array}{ll} y = \frac{x+3}{2} & \text{C} \quad y = \frac{x+3}{x+2} \quad \text{A} \\ y = |3x| + 2 & \text{D} \quad y = (3x+2)^2 \quad \text{B} \end{array}$$

إجابات:

$$(17) x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{27}x + \frac{1}{81}$$

$$(18) 32b^5 + 20b^4 + 5b^3 + \frac{5}{8}b^2 + \frac{5}{128}b + \frac{1}{1024}$$

(23) **إجابة ممكنة:** الصف الأول فيه فقط

العدد 1، والصف الثاني فيه العدد 1

مرتان، وكل صف تالي يبدأ وينتهي

بالعدد 1. وكل عدد بينهما هو مجموع

المعاملين الواقعين أعلاه في الصف

السابق.

(30) الطرف الأيمن 2، والطرف الأيسر هو:

$$\frac{(1+1)(1+1)}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

إذن، فالجملة صحيحة عندما $n = 1$.

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلِّ من المتتابعين الحسابيين الآتيتين: (الدرس 2-6)

$$a_6 = -7, a_7 = -1 \quad (27) \quad a_1 = -2, a_{n+1} = a_n + 5 \quad (26)$$

$$-37, -31, -25, -19, -13 \quad (28) \quad -2, 3, 8, 13, 18$$

$$-4 \quad (\text{الدرس 4-6}) \quad -6 + 3 - \frac{3}{2} + \dots \quad (29) \quad \text{بين إذا كانت الجملة } \frac{(n+1)(n+1)}{2} = 2 \text{ صحيحة عندما } n = 1, \text{ أم لا، وفَسِّر إجابتك. (مهارة سابقة) انظر الهامش}$$

4 التقويم

بطاقة مكافأة أعطِ الطلبة قصاصات

من الورق، واطلب إليهم كتابة الصفوف

السبعة الأولى من مثلث باسكال على هذه

القصاصات، ثم اطلب إليهم تسليمها لك

قبل مغادرتك غرفة الفصل.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-6

بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31)

تنويع التعليم

فوق ضمن

توسّع اكتب العدد $(1.002)^5$ على السبورة، واسأل الطلبة كيف يمكنهم كتابة هذا العدد على شكل القوة الخامسة لذات حدين. ثم اطلب إليهم استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد قيمة $(1.002)^5$ مقربة إلى خمس منازل عشرية. **1.01004**

1 التركيز

الهدف استعمال التوافيق ومثلث باسكال، لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.

إرشادات التدريس

الفرق الرئيس بين التوافيق والتباديل، هو في أهمية الترتيب. ففي التباديل يكون الترتيب مهماً، أمّا في التوافيق فإن الترتيب غير مهم. ولتوضيح هذا الفرق ومساعدة الطلبة على فهمه يمكنك استعمال مثال الشطائر حيث يختار الطالب قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط، ثم وجه الأسئلة الآتية:

• ماذا تلاحظ في ${}_5C_2$, ${}_5C_3$ ؟

لهما القيمة نفسها: 10.

• هل يمكن حساب ${}_5C_6$ ؟ لا يمكن.

• كيف يمكنك توسيع مثلث باسكال

للحصول على صفوف أكثر؟ إجابة

ممكنة: استعمال النمط الموجود في مثلث

باسكال، كل من العددين الأول والآخر

في أي سطر هو 1. وكل عدد بينهما هو

مجموع العددين القريبين له في السطر

السابق، وعدد العناصر في كل سطر يزيد

على عدد العناصر في السطر السابق له

بمقدار 1.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمرينين

1, 2 من فقرة حلّ النتائج.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 2 من فقرة حلّ النتائج لتقويم مدى فهم الطلبة لكل من التوافيق ومثلث باسكال، واستعمال كل منهما في إيجاد عدد طرق اختيار الجائزة.

تذكر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهم يُسمّى توفيقاً. فعلى سبيل المثال، اختيار قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذ مثنى مثنى في كل مرة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة على الصورة: ${}_6C_2$ أو ${}_6C_2$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهندس في المسابقة، فإن عدد الجوائز التي يمكن الحصول عليها هو 5 أو 4 أو 3 أو 2 أو 1 أو 0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1:

إذا لم يفز المتسابق في أية مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثّل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرة.

وتعلم مسبقاً أن ${}_nC_0 = 1$ ؛ لذا فإن ${}_5C_0 = 1$.

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيّاً من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أي جائزتين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أي 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلث باسكال.

الخطوة 2:

تفحص مثلث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلث باسكال من 0 إلى 5

			1			0 الصف
			1	1		1 الصف
		1	2	1		2 الصف
	1	3	3	1		3 الصف
	1	4	6	4	1	4 الصف
1	5	10	10	5	1	5 الصف

يمكن الحصول على عدد طرق اختيار الجوائز من الصف الخامس. فالعدد الأول في الصف الخامس يُمثّل عدد طرق الحصول على 0 جائزة، والعدد الثاني يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزة واحدة، والعدد الثالث يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزتين وهكذا.

حلّ النتائج:

(1) اكتب تخميناً حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار 0, 1, 2, 3, 4, ..., n من العناصر من بين n من العناصر. (1) إجابة ممكنة، يوجد n من العناصر ولذلك نستعمل الصف n لإيجاد عدد الخيارات الممكنة، فالعدد الأول يُمثّل اختيار صفر من العناصر، والعدد الثاني يُمثّل اختيار عنصر واحد وهكذا.

(2) على فرض أن قواعد المسابقة تغيّرت، بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 جوائز. 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة استعمال مثلث باسكال لإثبات أن ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$. عندما يتم إثبات أن مثلث باسكال حول مستقيم رأسي يمر في المنتصف، فإن الأعداد تتطابق فيطبق العنصر في الرتبة K مع العنصر في الرتبة $n - k$ من أي سطر (صف).

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 6

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26)

دون

الاسم: _____

التاريخ: _____

6-5 تدريبات إعادة التعليم

نظرية ذات الجدين

مثلت باسكال، مثلث باسكال نمط المعاملات لقوى ذات الجدين معروضة على شكل مثلث، يبدأ كل سطر وينتهي بالعدد 1، وكل عدد هو مجموع للعددين الواقعين فوقه في الصف السابق.

$(a+b)^0$ $(a+b)^1$ $(a+b)^2$ $(a+b)^3$ $(a+b)^4$ $(a+b)^5$	
--	--

مثال 1: استعمل مثلث باسكال في إيجاد عدد الحالات الممكنة التي تحتوي على a^3 و b^2 .

العامل 10 للحد a^3b^2 في متفكوك $(a+b)^5$ يعطي عدد الحالات التي تحتوي a^3 و b^2 .

تعاريف

أوجد متفكوك كل مما يأتي:

$$(a+5)^4 \quad (1)$$

$$(x-2y)^6 \quad (2)$$

$$(j-3k)^5 \quad (3)$$

$$(2r+t)^7 \quad (4)$$

$$(2p+3m)^6 \quad (5)$$

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^4 \quad (6)$$

(7) رمي الصلعة النحاسية، يرمي عبد الرحمن قطعة نقود 15 مرة. ما عدد الحالات المختلفة للقطعة التي تتضمن ظهور 4 كتابة و 11 شعاراً؟
1365

الصف: الثاني الثانوي

الفصل: ٦، التمارين والتدريبات

26

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27)

دون

الاسم: _____

التاريخ: _____

6-5 تدريبات إعادة التعليم

نظرية ذات الجدين

إذا كانت n عدداً طبيعياً، فإن:

$$(a+b)^n = C_0 a^n b^0 + C_1 a^{n-1} b^1 + C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n a^0 b^n$$

$$C_k a^k b^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$$

مثال: أوجد متفكوك $(a-3b)^4$

$$(a-3b)^4 = \sum_{k=0}^4 \frac{4!}{k!(4-k)!} a^k (-3b)^{4-k}$$

$$= \frac{4!}{40!} a^4 + \frac{4!}{36!} a^3 (-3b) + \frac{4!}{24!} a^2 (-3b)^2 + \frac{4!}{12!} a (-3b)^3 + \frac{4!}{0!4!} (-3b)^4$$

$$= a^4 - 12a^3b + 54a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4$$

تعاريف

أوجد متفكوك كل مما يأتي:

$$(a-3)^6 \quad (1)$$

$$(r+2t)^7 \quad (2)$$

$$(4x+y)^4 \quad (3)$$

$$\left(2-\frac{m}{2}\right)^5 \quad (4)$$

$$(j+2k)^6 \quad (5)$$

$$(a+1)^7 \quad (6)$$

$$(3x-y)^5 \quad (7)$$

$$(10-3t)^7 \quad (8)$$

$$(m+\frac{2}{3})^{10} \quad (9)$$

$$(5x-2)^{11} \quad (10)$$

$$6m^8$$

$$92400000x^5$$

$$35a^3$$

$$448j^3k^3$$

$$270x^2y^2$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$

$$510300t^6$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 6

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30)

ضمن فوق

كتاب التمارين (14)

دون ضمن فوق

الاسم: _____

التاريخ: _____

6-5 تدريبات إثرائية

الألعاب في مثلث باسكال

لقد درست أن المثلثات في مفكوك $(x+y)^n$ تتج نبطاً من الأعداد يُسمى مثلث باسكال .

_____	1	_____						
_____	1	1	_____					
_____	1	2	1	_____				
_____	1	3	3	1	_____			
_____	1	4	6	4	1	_____		
_____	1	5	10	10	5	1	_____	
_____	1	6	15	20	15	6	1	_____

يمكن إضافة صفوف لقاعدة الهرم بالعدد الذي تريد.

يستكشف هذا النشاط بعض الخصائص المثيرة للاهتمام في نمط الأعداد المشهور هذا.

(1) اختر أحد صفوف مثلث باسكال.

(a) ما مجموع الأعداد في كل الصفوف الواقعة فوق الصف الذي اخترته.

انظر أعمال الطلاب.

(b) ما مجموع كل الأعداد في الصف الذي اخترته.

انظر أعمال الطلاب.

(c) ما العلاقة بين إجاباتك للفرعين a, b ؟

إجابة الفرع b تزيد بمقدار 1 عن إجابة الفرع a.

(d) كرر الفروع من a إلى c على الأقل لثلاثة صفوف أخرى في مثلث باسكال. ما التعميم الذي يبدو أنه صحيح ؟

يبدو أن مجموع الأعداد في كل صف في مثلث باسكال يزيد بمقدار 1 عن مجموع الأعداد في الصفوف السابقة له كلها.

(e) حاول أن تكتب صيغة تعميمك.

مجموع الأعداد في الصف n هو $1 - 2^n + 2^n = 2^n$. وفي صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية يكون $1 - 2^n + 2^n = 2^n$.

(2) اختر أحد صفوف مثلث باسكال التي تأتي بعد الصف الأول.

(a) ابتداءً من النهاية اليسرى للصف، ثم اجمع الأعداد الأول والثالث والخامس وهكذا. واكتب الناتج.

انظر أعمال الطلاب.

(b) اجمع الأعداد الثاني والرابع في نفس الصف وهكذا. واكتب الناتج.

انظر أعمال الطلاب.

(c) قارن بين النتائج في الفرعين a, b .

الجوابان متساويان.

(d) كرر الفروع من a إلى c على الأقل لثلاثة صفوف أخرى في مثلث باسكال. ما التعميم الذي يبدو أنه صحيح ؟

يكون مجموع العدود ذات الترتيب الفردي مساوياً لمجموع العدود ذات الترتيب الزوجي في أي صف من مثلث باسكال بعد الصف الأول.

بعد الصف الأول.

الاسم: _____

التاريخ: _____

6-5 نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك كلٍّ مما يأتي:

$$(n + v)^3 \quad n^3 + 5n^2v + 10n^2v^2 + 10nv^3 + 5nv^4 + v^3$$

$$(x - y)^4 \quad x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^4 \quad x^4 + 6x^3y + 15x^2y^2 + 20xy^3 + 15x^2y^2 + 6xy^3 + y^4$$

$$(r + 3)^5 \quad r^5 + 15r^4 + 90r^3 + 270r^2 + 405r + 243$$

$$(m - 5)^5 \quad m^5 - 25m^4 + 250m^3 - 1250m^2 + 3125m - 3125$$

$$(x + 4)^5 \quad x^5 + 16x^4 + 96x^3 + 256x^2 + 256x + 256$$

$$(3x + y)^4 \quad 81x^4 + 108x^3y + 54x^2y^2 + 12xy^3 + y^4$$

$$(2m - y)^4 \quad 16m^4 - 32m^3y + 24m^2y^2 - 8my^3 + y^4$$

$$(w - 3z)^4 \quad w^4 - 9w^3z + 27w^2z^2 - 27wz^3 + 81z^4$$

$$(2d + 3)^4 \quad 64d^4 + 576d^3 + 2160d^2 + 4320d + 4860d^2 + 2916d + 729$$

$$(x + 2y)^5 \quad x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$$

$$(2x - y)^4 \quad 32x^4 - 80x^3y + 80x^2y^2 - 40xy^3 + 10xy^4 - y^4$$

$$(a - 3b)^4 \quad a^4 - 12a^3b + 54a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4$$

$$(3 - 2z)^4 \quad 16z^4 - 96z^3 + 216z^2 - 216z + 81$$

$$(3m - 4p)^3 \quad 27m^3 - 108m^2p + 144mp^2 - 64p^3$$

$$(5x - 2y)^4 \quad 625x^4 - 1000x^3y + 600x^2y^2 - 160xy^3 + 16y^4$$

أوجد قيمة الحد المطلوب في مفكوك كلٍّ مما يأتي:

$$(17) \text{ الحد السادس في مفكوك } (x + 4y)^3 \quad 6144xy^2 \quad (18) \text{ الحد الرابع في مفكوك } (5x + 2y)^3 \quad 2000x^2y^2$$

$$(19) \text{ الحد الثامن في مفكوك } (x - y)^{11} \quad -330x^4y^7 \quad (20) \text{ الحد الثالث في مفكوك } (x - 2)^4 \quad 112x^4$$

$$(21) \text{ الحد السابع في مفكوك } (a + b)^{10} \quad 210a^4b^6 \quad (22) \text{ الحد السادس في مفكوك } (m - p)^3 \quad -252m^2p^3$$

$$(23) \text{ الحد العاشر في مفكوك } (2x + y)^{10} \quad 1760x^4y^6 \quad (24) \text{ الحد الرابع في مفكوك } (x - 3y)^4 \quad -540x^3y^4$$

$$(25) \text{ هندسة، ما عدد القطع المستقيمة التي يمكن رسمها بين 10 نقاط، لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة، بحيث تُشتمل نقطتان فقط لرسم كل قطعة؟} \quad 45$$

$$(26) \text{ طريق العدد، إذا رميت قطعة نقد 4 مرات. فما عدد المرات المختلفة من الرميات التي ينتج عنها 3 كتابات وصورة واحدة، أو كتابة واحدة وثلاث صور؟} \quad 8$$

14

المجلد ٦، الفصل ٦، التمارين والتحديات

30

الصف: الثاني الثانوي

ملاحظات المعلم

البرهان بالاستقراء الرياضي Proof by Mathematical Induction



لماذا؟

إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الشكل المجاور، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى. وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضي.

الاستقراء الرياضي: الاستقراء الرياضي هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

فيما سبق:

درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية.

والآن:

- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضاد.

المفردات:

الاستقراء الرياضي
mathematical induction

فرضية الاستقراء
induction hypothesis

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربط الراسي

ما قبل الدرس 6-6

إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية.

الدرس 6-6

برهنة صحة جمل رياضية باستعمال

الاستقراء الرياضي

إثبات خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضاد.

ما بعد الدرس 6-6

إيجاد نهايات المتتابعات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- تخيل أن كل حجر من أحجار الدومينو أعطي رقمًا من الأعداد الطبيعية، فما الذي يجعل الحجر رقم 2 يسقط؟
- سقوط الحجر رقم 1.
- ما الذي يجعل الحجر رقم 3 يسقط؟
- سقوط الحجر رقم 2.
- إذا سقط الحجر رقم n فما الذي سيحدث للحجر رقم $n + 1$ ؟ سيسقط.

الاستقراء الرياضي

المثالين 1, 2 يوضحان الخطوات الثلاث للبرهان، باستعمال الاستقراء الرياضي.

مفهوم أساسي

الاستقراء الرياضي

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n اتبع الخطوات الآتية:

- الخطوة 1:** برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.
- الخطوة 2:** افرض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمى **فرضية الاستقراء**.
- الخطوة 3:** برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 برهان المجموع

برهن أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ؛ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افرض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

أي برهن أن الجملة $\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3$ صحيحة.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \quad \text{بجمع } (k+1)^3 \text{ لكلا الطرفين}$$

بالجمع

بالتحليل

بالتبسيط

بالتحليل

$$\begin{aligned} &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$ ، وبهذا فإن العلاقة صحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

تحقق من فهمك

(1) برهن أن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **انظر ملحق الإجابات**

الدرس 6-6 البرهان بالاستقراء الرياضي 97

مصادر الدرس 6-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (98)	• تنويع التعليم، ص (98, 100)	• تنويع التعليم، ص (100)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31)	• تدريبات المهارات، ص (33)	• تدريبات المهارات، ص (33)
	• تدريبات المهارات، ص (33)	• تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات حل المسألة، ص (34)
	• تدريبات حل المسألة، ص (34)	• التدريبات الإثرائية، ص (35)	• التدريبات الإثرائية، ص (35)

وكما في برهان المجموع فإن الاستقراء الرياضي يمكن استعماله لبرهنة قابلية القسمة أيضًا.

برهان قابلية القسمة

مثال 2

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن $8^1 - 1 = 7$ ، وبما أن 7 يقبل القسمة على 7، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 حيث k عدد طبيعي، وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث $8^k - 1 = 7r$ إن $8^k - 1 = 7r$

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

أي برهن أن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7؛

$$8^k - 1 = 7r \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$8^k = 7r + 1 \quad \text{بإضافة 1 لكلا الطرفين}$$

$$8(8^k) = 8(7r + 1) \quad \text{بضرب كلا الطرفين في 8}$$

$$8^{k+1} = 56r + 8 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$8^{k+1} - 1 = 56r + 7 \quad \text{بطرح 1 من كلا الطرفين}$$

$$8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1) \quad \text{بالتحليل}$$

وبما أن r عدد طبيعي، فإن $8r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7؛ إذن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7.

وهذا يبرهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

تحقق من فهمك

(2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n . انظر ملحق الإجابات

الأمثلة المضادة يمكن إثبات خطأ جملة رياضية من خلال الاستقراء الرياضي، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضاد تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

استعمال المثال المضاد لإثبات خطأ جملة رياضية

مثال 3

أعط مثلاً مضاداً يبين أن الجملة $2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 حيث n أي عدد طبيعي، هي جملة خاطئة.

اختبر قيمًا مختلفة للعدد n

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

إذن، فالقيمة $n = 3$ تعد مثلاً مضاداً للجملة.

تحقق من فهمك

(3) أعط مثلاً مضاداً يبين خطأ الجملة: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ حيث n أي عدد طبيعي. $n = 3$

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

العدد r هو عدد طبيعي يُستعمل لتوضيح قابلية القسمة. فمثلاً إذا ساوى عدد ما المقدار $4r$ ، فهذا يعني أن هذا العدد يقبل القسمة على 4.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي جهّز عرضاً تقديمياً عن الاستقراء الرياضي، يتضمن العديد من الأمثلة. ثم انشره في موقع على شبكة الإنترنت كي يستطيع الطلبة الوصول إليه.

مثالان إضافيان

$$\text{برهن أن: } 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 1، الطرف الأيمن

هو $\frac{1[3(1) - 1]}{2}$ ويساوي 1، ولذلك فإن العبارة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$$

صحيحة حيث k عدد طبيعي

الخطوة 3:

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2]$$

$$= \frac{k(3k - 1)}{2} + [3(k + 1) - 2]$$

$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)(3k + 2)}{2}$$

والجملة الأخيرة هي الطرف

الأيمن في المعادلة المطلوب إثبات

صحتها. عندما $n = k + 1$.

برهن أن $6^n - 1$ يقبل القسمة على

العدد 5 لكل عدد طبيعي n . تُستعمل

في البرهان خطوات شبيهة بخطوات

حل المثال 2 في كتاب الطالب.

تنويع التعليم

دون ضمن

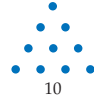
المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة تمثيل الاستقراء الرياضي وذلك بتنظيم أنفسهم في صف واحد. أخبر الطالب الموجود في بداية الصف رسالة شفوية ما، ثم اطلب إليه نقل الرسالة التي سمعها إلى زميله الذي يليه في الصف وهكذا. وضح للطلبة أن إخبار الطالب الأول لزميله التالي تُمثّل أن $n = 1$ عبارة صحيحة. وأن تعليماتك لنقل الرسائل جميعها للزميل التالي تُمثّل أن $k + 1$ عبارة صحيحة.

مثال 1

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

$$(1) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (2) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(3) نظرية الأعداد يُسمى العدد عدداً مثلثياً، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلث كما في الشكل أدناه.



(a) إذا علمت أن العدد المثلثي الأول هو 1. فجد الأعداد المثلثية الخمسة التالية.

(b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلثي الذي ترتيبه n .(c) برهن أن مجموع أول n من الأعداد المثلثية يساوي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$$3, 6, 10, 15, 21 \quad (3a)$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3b)$$

(3c) انظر ملحق الإجابات

مثال 2

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها: للسؤالين 4, 5 انظر ملحق الإجابات

$$(4) \quad 10^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 9 \quad (5) \quad 4^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 3$$

أعط مثلاً مضاداً يُبين خطأ كل من الجملتين الآتيتين، حيث n أي عدد طبيعي:

$$(6) \quad 3^n + 1 \text{ يقبل القسمة على } 4 \quad n = 2 \quad (7) \quad 2^n + 3^n \text{ يقبل القسمة على } 4 \quad n = 1$$

مثال 3

تدرب وحل المسائل

مثال 1

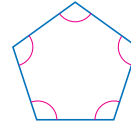
برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها: 8-11 انظر ملحق الإجابات

$$(8) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$(9) \quad 2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$$

$$(10) \quad 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$(11) \quad 3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$$

(12) هندسة: برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب $((n-2) \cdot 180)$ ، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$ باستعمال الاستقراء الرياضي والهندسة. انظر ملحق الإجابات.

مثال 2

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

$$(13) \quad 9^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 8.$$

$$(14) \quad 12^n + 10 \text{ يقبل القسمة على } 11.$$

مثال 3

أعط مثلاً مضاداً يُبين خطأ كل من الجملتين الآتيتين، حيث n أي عدد طبيعي:

$$(15) \quad 1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = (2n + 2)^2 \quad n = 3$$

$$(16) \quad n^2 + n + 23 \text{ عدد أولي. } n = 1$$

تنبيه!

ورق رسم بياني من المفيد للطلبة أن يرسموا الأشكال الخمسة الأولى في السؤال 17 على ورقة رسم بياني.

أمثلة مضادة

مثال 3 يوضح كيفية إثبات خطأ جملة معينة عن طريق إعطاء مثال مضاد.

مثال إضافي

3 أعط مثلاً مضاداً يبين خطأ الجملة $(n^2 + n + 5)$ عدد أولي لكل عدد طبيعي n . إجابة ممكنة: $n = 4$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-7 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

(1) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 1، أما الطرف الأيمن فهو $1^2 = 1$ ؛ أي أن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3:

$$1 + 3 + 5 + \dots +$$

$$(2k - 1) + (2(k + 1) - 1)$$

$$= k^2 + (2(k + 1) - 1)$$

$$\text{بجمع } 2(k + 1) - 1 \text{ للطرفين}$$

$$= k^2 + (2k + 2 - 1) \text{ بالتبسيط}$$

$$= k^2 + 2k + 1 \text{ بالتحليل}$$

$$= (k + 1)^2$$

العبرة الأخيرة هي الطرف الأيمن من

المعادلة المطلوبة إثبات صحتها عندما

$$n = k + 1 \text{؛ أي أن المعادلة صحيحة}$$

$$\text{عندما } n = k + 1. \text{ إذن}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

لكل عدد طبيعي n .

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8-16 ، 25-26 ، 28-36
ضمن المتوسط	8-17 ، 25-26 ، 28-36
فوق المتوسط	18-36



الربط مع الحياة

تظهر حدود متتابعة فيبوناتشي كثيراً، كما في بذور قرص تباع الشمس.

4 التقويم

فهم الرياضيات اكتب معادلة في متغير واحد على السبورة، بحيث لا تكون صحيحة لقيم المتغير جميعها. واطلب إلى الطلبة أن يعدّ كل منهم قصاصة ورق مكتوب عليها أمثلة مضادة، توضّح أن المعادلة ليست صحيحة دائماً.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 6-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابة:

17 الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف

الأيسر من المعادلة هو f_1 . وأما

الطرف الأيمن فهو $f_3 - 1$ وبما

$f_1 = 1, f_3 = 2$ فإن المعادلة تصبح

$1 = 2 - 1$ وهي صحيحة عندما

$n = 1$.

الخطوة 2: افرض أن

$f_1 + f_2 + \dots + f_k = f_{k+2} - 1$

صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1} = f_{k+2} - 1 + f_{k+1}$

$= f_{k+1} + f_{k+2} - 1$

$= f_{k+3} - 1$

وذلك لأن كل عدد من أعداد متتابعة

(فيبوناتشي) ينتج عن جمع العددين

السابقين. العبارة الأخيرة هي الطرف

الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها،

حيث $n = k + 1$ ؛ لذا، تكون المعادلة

صحيحة عندما $n = k + 1$ ؛ أي أن:

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$

لكل الأعداد الطبيعية n .

17 متتابعة فيبوناتشي: تبدأ متتابعة فيبوناتشي بالحدود $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ويكون الحد التالي فيها مساوياً لمجموع الحدين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحد الثاني). فإذا كان f_n يمثل عدد فيبوناتشي ذا الرقم n ، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كل جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعط مثلاً مضاداً يثبت خطأها:

18 $7^n + 5$ يقبل القسمة على 6 **انظر ملحق الإجابات 19** $18^n - 1$ يقبل القسمة على 17 **انظر ملحق الإجابات**

20 $n^2 + 21n + 7$ عدد أولي. **21** $n^2 + 3n + 3$ عدد أولي. **22** $500 + 100 + 20 + \dots + 4 \cdot 5^4 - n = 625 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ **انظر ملحق الإجابات**

مسائل مهارات التفكير العليا

23 **انظر ملحق الإجابات**

23 تحدد: اكتب قاعدة تمثّل المجموع $2n + 6 + 4 + 2$ ، ثم برهنها باستعمال الاستقراء الرياضي.

تبرير: حدّد إذا كانت كلّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأ. وضح إجابتك.

24 إذا لم تستطع إيجاد مثال مضاد في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

25 إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$ وعند $n = k + 1$ ، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

26 تحدد: برهن أن: $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **انظر ملحق الإجابات**

27 مسألة مفتوحة: اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال الاستقراء الرياضي.

انظر ملحق الإجابات

28 اكتب: وضح الاستقراء الرياضي بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

تدريب على اختبار

29 أي الأعداد الآتية يُعدّ مثلاً مضاداً لإثبات خطأ الجملة: **B**

$n^2 + n - 11$ عدد أولي

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

30 مبدأ العد يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكونة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكونة من أحرف اسمه والرموز الأربعة التالية مكونة من أرقام العدد 1986 والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟ **B**

A 72 **C** 288

B 144 **D** 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد المطلوب في كل ممّا يأتي: (الدرس 5-6)

32 $160x^3y^3$

15a²b⁴

31 الحد الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$ **32** الحد الخامس في مفكوك $(a + b)^6$ **33** الحد الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

$-84x^6y^3$

أوجد مجموع كلّ من المتسلسلتين الآتيتين:

34 $1000 + 20 + 15 + 10 + 5$ (الدرس 2-6) **100500** **35** $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \dots$ (الدرس 4-6) **3/20**

100 الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

تنويع التعليم

ضمن هوك

توسّع أخبر الطلبة أن العدد $n!$ يُعرف على أنه حاصل ضرب الأعداد الطبيعية جميعها الأصغر من أو تساوي n . اطلب إليهم أن يبرهنوا: أن: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)(n) = n!$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيمن من المعادلة هو $1!$ والطرف الأيسر 1، إذن الجملة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)(k) = k!$ لأي عدد طبيعي k .

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)(k)(k+1) = k!(k+1)$$

$$= [k(k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1](k+1)$$

$$= (k+1)k(k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (k+1)!$$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 6

دون ضمن فوق المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-6 تدريبات إعادة التعليم البرهان بالاستقراء الرياضي

الاستقراء الرياضي، الاستقراء الرياضي طريقة برهان تُستخدم لإثبات حل حول الأعداد الطبيعية.

الخطوة 1: برهن على أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.	الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k هذا الافتراض يسمى فرضية الاستقراء.	الخطوة 3: برهن على أن الجملة صحيحة للعدد الطبيعي التالي $k+1$.
--	--	---

مثال
أثبت أن $2n + 3n^2 = 3n^2 + 2n + 1$ (6n-1) + ... + 5 + 11 + 17 + ...
الخطوة 1: عندما $n=1$ يكون الحد الأيسر من المعادلة المعطاة هو $5 = 6(1) - 1$ ، والحد الأيمن هو $5 = 3(1)^2 + 2(1)$.

لذا فإن المعادلة صحيحة في حالة $n=1$.

الخطوة 2: افترض أن $2k + 3k^2 = 3k^2 + 2k + 1$ ، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن على أن الجملة صحيحة للعدد $n = k+1$. أضف $6(k+1) - 1$ إلى كلا الطرفين.

$5 + 11 + 17 + \dots + (6k-1) + [6(k+1) - 1] = 3k^2 + 2k + 1 + [6(k+1) - 1]$

بإضافة $6k + 5 = 3k^2 + 2k + 6k + 5$

إعادة كتابة $= 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2$

بإخراج عامل مشترك $= 3(k^2 + 2k + 1) + 2(k+1)$

بالتحليل إلى العوامل $= 3(k+1)^2 + 2(k+1)$

العبارة الأخيرة أعلاه هي الطرف الأيمن من المعادلة المراد إثباتها، حيث استبدلت k بـ $k+1$ ، لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n = k+1$.

وهذا يثبت أن $2n + 3n^2 = 3n^2 + 2n + 1$ لكل الأعداد الطبيعية n .

تمارين

برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

الخطوة 1: $n^2 + 2n = 2n^2 + n + 3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)$

الخطوة 2: افترض أن $n = k$ $2k^2 + k = 4k - 1 + 3 + 7 + 11 + \dots + (4k-1)$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$

$n = k+1$ $2(k+1)^2 + (k+1) = 4(k+1) - 1 + 3 + 7 + 11 + \dots + (4(k+1)-1)$

بتبسيط الطرف الأيمن نحصل على $1 + 2(k+1)^2 + (k+1) = 4(k+1) - 1 + 3 + 7 + 11 + \dots + (4(k+1)-1)$

إذن العبارة صحيحة عندما $n = k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية n .

2. $625 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = 4 \times 5^{n-1} + 100 + 20 + \dots + 4 \times 5^{n-1} = 625$

الخطوة 1: الجملة صحيحة عندما $n = 1$ لأن $4 \times 5^{1-1} = 4 \times 5^0 = 4$ و $625 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} \times 625 = 500$ و $500 + 100 + 20 + \dots + 4 \times 5^{n-1} = 625 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 2: افترض أن $n = k$ $625 \left(1 - \frac{1}{5^k}\right) = 500 + 100 + 20 + \dots + 4 \times 5^{k-1}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$

$n = k+1$ $625 \left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right) = 4 \times 5^{k+1-1} + 100 + 20 + \dots + 4 \times 5^{k+1-1} = 4 \times 5^k + 100 + 20 + \dots + 4 \times 5^{k+1-1}$

وبتبسيط الطرف الأيمن نحصل على $625 \left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right) = 4 \times 5^k + 100 + 20 + \dots + 4 \times 5^{k+1-1}$

إذن العبارة صحيحة عندما $n = k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية n .

المصف: الثاني الثانوي الفصل ٦، المتكاملات والمتكاملات 31

تدريبات إعادة التعليم - تمته (32)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-6 تدريبات إعادة التعليم الإثبات بالاستقراء الرياضي

أمثلة مضادة: لإثبات أن صيغة أو تعميماً غير صحيحين، أوجد مثالاً مضاداً، وذلك بتعويض قيم للمعين.

أوجد مثالاً مضاداً لنفي صحة الجملة $2n^2 + 2n + 3 = 2^{n+2} - 1$.

تحقق من الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى.

n	صيغة الطرف الأيسر	صيغة الطرف الأيمن
1	$2(1)^2 + 2(1) + 3 = 2 + 2 + 3 = 7$	$2^{1+2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ صحيحة
2	$2(2)^2 + 2(2) + 3 = 8 + 4 + 3 = 15$	$2^{2+2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$ صحيحة
3	$2(3)^2 + 2(3) + 3 = 18 + 6 + 3 = 27$	$2^{3+2} - 1 = 2^5 - 1 = 31$ خطأ

مثال 2
أوجد مثالاً مضاداً لنفي صحة العبارة $4n^2 + 4n = 4^{n+1}$ أولية أو قابلة للقسمة على 4.

n	$4n^2 + 4n$	صحيحة؟	n	$4n^2 + 4n$	صحيحة؟
1	$4 + 4 = 8$	أولية	6	$36 + 4 = 40$	تقسم على 4
2	$16 + 8 = 24$	تقسم على 4	7	$49 + 4 = 53$	أولية
3	$36 + 12 = 48$	أولية	8	$64 + 4 = 68$	تقسم على 4
4	$64 + 16 = 80$	تقسم على 4	9	$81 + 4 = 85$	خطأ
5	$100 + 20 = 120$	أولية			

تمة $n = 9$ تعطي مثالاً مضاداً.

تمارين

أعط مثالاً يبين خطأ كل من الجمل الآتية:

1. $4n - 3 = 4n - 3$ لأن $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = 2n^2$

2. $5n^2 + 95 = 5n^2 + 100 + 110 + 120 + \dots + (10n + 90)$ لأن $n = 2$

3. $900 + 300 + 100 + \dots + 100(3^{n-1}) = 900 + \frac{2n}{n+1}$ لأن $n = 3$

4. $n^2 + n + 1$ عدد أولي لأن $n = 4$

5. $2n + 1$ عدد أولي لأن $n = 4$

6. $7n - 5$ عدد أولي لأن $n = 2$

7. $n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{1}{2}$ لأن $n = 3$

8. $5n^2 + 1$ تقبل القسمة على 3 لأن $n = 3$

9. $n^2 - 3n + 1$ عدد أولي لكل $n > 2$ لأن $n = 9$

10. $4n^2 - 1$ تقبل القسمة على 3 لأن $n = 6$

المصف: الثاني الثانوي الفصل ٦، المتكاملات والمتكاملات 32

تدريبات المهارات (33)

دون

ضمن

فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-6 تدريبات المهارات البرهان بالاستقراء الرياضي

برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.

1. $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ يكون $1^2 = 1 = 1$ و $2(1) - 1 = 1$ ، إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $n = k$ $k^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$

$n = k+1$ $(k+1)^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] = k^2 + [2(k+1) - 1] = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

إذن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

2. $n^2 + 2n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ يكون $1^2 + 2(1) = 3 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2(1)$ ، إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $n = k$ $k^2 + 2k = 2 + 4 + 6 + \dots + 2k$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$

$n = k+1$ $(k+1)^2 + 2(k+1) = k^2 + 2k + 1 + 2k + 2 = k^2 + 4k + 3 = (k+1)^2 + 2(k+1)$

إذن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

3. $6^{n-1} - 1$ قابل للقسمة على 5

الخطوة 1: عندما $n = 1$ يكون $6^{1-1} - 1 = 6^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ، وهو يقبل القسمة على 5، إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $n = k$ $6^{k-1} - 1$ يقبل القسمة على 5، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$

$n = k+1$ $6^{(k+1)-1} - 1 = 6^k - 1 = 5r$

$6^k - 1 = 5r$

$6^k = 5r + 1$

$6(6^{k-1}) = 6(5r + 1)$

$6^{k+1} = 30r + 6$

$6^{k+1} - 1 = 30r + 5$

$6^{k+1} - 1 = 5(6r + 1)$

وهو يقبل القسمة على 5، إذن الجملة صحيحة عندما $n = k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

4. أعط مثالاً مضاداً يبين خطأ الجملة: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 + 4 + 8 + \dots + 2n$

إجابة ممكنة: $n = 2$

المصف: الثاني الثانوي الفصل ٦، المتكاملات والمتكاملات 33

تدريبات حل المسألة (34)

دون

ضمن

فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-6 تدريبات حل المسألة البرهان بالاستقراء الرياضي

1. أعدد، يدعي زيد أنه يوجد أربعة أزواج فقط من الأعداد الأولية الفردية المتتالية، هي (3, 5)، (5, 7)، (11, 13)، (17, 19). أم خطأ؟ وإذا كان صحيحاً فأثبت ذلك، وإذا كان خطأً فأعط مثالاً مضاداً.

خطأ: (29, 31)

2. البرهان، كتب المعلم عبدالله البرهان التالي على السبورة. وطلب إلى طلابه التحقق من صحته:

لحل الأعداد الطبيعية n

$2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = n^2 + n + 1$

برهان المعلم عبدالله هو:

"افترض أن المتطابقة صحيحة لـ $n = k$ أي أن $k + 1 = k^2 + k + 1 + (2k) = k^2 + 2k + 1 + 1$

بإضافة $2k + 2$ إلى الطرفين.

$2 + 4 + 6 + \dots + (2k) + (2k + 2) = k^2 + k + 1 + (2k + 2) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 1 = (k+1)^2 + (k+1) + 1$

المسألة الأخيرة تظهر أن المتطابقة صحيحة لـ $n = k+1$ أيضاً، وأخيراً عن طريق الاستقراء نجد أن المتطابقة صحيحة لكل n ، ما الاستجابة التي تعين أن يعطيها الطالب؟

لقد نسي المعلم أن يبين صحة العبارة عند $n = 1$ ، وهو غير صحيح؛ لأن العبارة غير صحيحة أصلاً.

المصف: الثاني الثانوي الفصل ٦، المتكاملات والمتكاملات 34

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

دون دون المتوسط

ضمن فوق

دون ضمن فوق

35

فصل ٦ : المتتابعات والمتسلسلات

$$n =$$

100B الفصل 6 المتتاعات والمتسلسلات

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1-9، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات كمرجع ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

المفردات

المتتابعة	64 ص	المجموع الجزئي	72 ص
الحد	64 ص	رمز المجموع	73 ص
المتتابعة المنتهية	64 ص	الأوساط الهندسية	79 ص
المتتابعة غير المنتهية	64 ص	المتسلسلة الهندسية	80 ص
المتتابعة الحسابية	64 ص	المتسلسلة الهندسية غير المنتهية	85 ص
أساس المتتابعة الحسابية	64 ص	المتسلسلة المتقاربة	85 ص
الفرق المشترك	64 ص	المتسلسلة المتباعدة	85 ص
المتتابعة الهندسية	66 ص	ما لا نهاية	87 ص
أساس المتتابعة الهندسية	66 ص	مثلث باسكال	92 ص
النسبة المشتركة	66 ص	نظرية ذات الحدين	93 ص
الأوساط الحسابية	71 ص	الاستقراء الرياضي	97 ص
المتسلسلة	72 ص	فرضية الاستقراء	97 ص
المتسلسلة الحسابية	72 ص		

اختبار المفردات

حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعُدّل المصطلح الذي تحته خط لتصبح صحيحة:

- تُسمى المتسلسلة غير المنتهية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة. **صحيحة**
- الاستقراء الرياضي هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية. **صحيحة**
- الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية. **صحيحة**
- الحد هو سلسلة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة. **خطأ، المتتابعة**
- يُسمى مجموع أول n حدًا من متسلسلة، المجموع الجزئي. **صحيحة**
- المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حد فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. **خطأ، المتتابعة الحسابية**
- تُسمى المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة. **خطأ، متسلسلة متباعدة**
- 11، 17، 23، 5، 17، 23، 5، 17، 23 **خطأ، وسطان حسابيان**
- باستعمال نظرية ذات الحدين فإن: $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. **صحيحة**

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرس 2-6، 1-6)

- الحد النوني a_n في متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 + (n-1)d$ حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًا في متتابعة حسابية: S_n يُعطى بإحدى الصيغتين: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ، $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرس 4-6، 3-6)

- الحد النوني a_n في متتابعة هندسية حدها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين: $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$ ، $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ حيث $r \neq 1$
- مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية يُعطى بالصيغة: $S = \frac{a_1}{1 - r}$ ، حيث $|r| < 1$

نظرية ذات الحدين (الدرس 5-6)

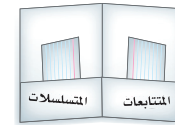
- نظرية ذات الحدين: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} b^k$

الاستقراء الرياضي (الدرس 6-6)

- الاستقراء الرياضي هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات

منظم أفكار



تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المطويات

منظم أفكار

وبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

مراجعة الدروس

معالجة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 6 ص (27)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عما كانت عليه عند بدايته.

6-1 المتتابعات بوصفها دوال ص 64-69

مثال 1

أوجد الحد الحادي عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها:

$$a_1 = -15, d = 6$$

الحد النوني

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$n = 11, a_1 = -15, d = 6$$

$$a_{11} = -15 + (11 - 1)6$$

بالتبسيط

$$a_{11} = 45$$

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

$$(10) \quad a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ? \quad 48$$

$$(11) \quad a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ? \quad 123$$

$$(12) \quad a_1 = 10, d = -4, a_9 = ? \quad -22$$

$$(13) \quad a_1 = -1, d = -5, a_{18} = ? \quad -86$$

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 70-77

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابين بين العددين 3, 39.

الحد النوني

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$n = 4, a_1 = 3$$

$$a_4 = 3 + (4 - 1)d$$

$$a_4 = 39$$

$$39 = 3 + 3d$$

بالتبسيط

$$12 = d$$

الوسطان الحسابيان هما: $3 + 12 = 15$, $15 + 12 = 27$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:

$$a_1 = 18, a_n = 56, n = 8$$

صيغة المجموع

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$$

بالتبسيط

$$= 296$$

مثال 4

$$\sum_{k=3}^{15} (5k + 1) \quad \text{أوجد قيمة}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{استعمل الصيغة}$$

في المتسلسلة 13 حدًا، وحدها الأول $a_1 = 5(3) + 1 = 16$

$$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$$

$$= 598$$

أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتابعات الآتية:

$$(14) \quad -12, _, _, _, 8 \quad -7, -2, 3$$

$$(15) \quad 15, _, _, 29 \quad \frac{59}{3}, \frac{73}{3}$$

$$(16) \quad 12, _, _, _, -8 \quad 8, 4, 0, -4$$

$$(17) \quad 72, _, _, _, 24 \quad 60, 48, 36$$

(18) **توفير:** يوفر باسل 160 ريالاً كل شهرين. إذا استمر في التوفير بهذا المعدل مدة سنتين، فما المبلغ الذي سيوفره في نهاية السنتين؟

$$1920 \text{ ريالاً}$$

أوجد S_n كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

$$(19) \quad a_1 = 16, a_n = 48, n = 6 \quad 192$$

$$(20) \quad a_1 = 8, a_n = 96, n = 20 \quad 1040$$

$$(21) \quad 9 + 14 + 19 + \dots + 74 \quad 581$$

$$(22) \quad 16 + 7 + (-2) + \dots + (-65) \quad -245$$

(23) **مسرح:** لكي يؤدي أيمن دوره بإتقان في مسرحية تاريخية، بدأ بالتدرب على النص مرتين في اليوم الأول، وأربع مرات في اليوم الثاني، وست مرات في اليوم الثالث وهكذا. ما عدد المرات التي سيتدربها في اليوم السادس؟

$$12$$

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

$$(24) \quad \sum_{k=5}^{21} (3k - 2) \quad 629$$

$$(25) \quad \sum_{k=0}^{10} (6k - 1) \quad 319$$

$$(26) \quad \sum_{k=4}^{12} (-2k + 5) \quad -99$$

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 78-83

مثال 5

أوجد الحد السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها:
 $a_1 = 9, r = 4$

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني} \quad a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ n=6, a_1=9, r=4 \quad a_6 &= 9 \cdot 4^{6-1} \\ a_6 &= 9216 \end{aligned}$$

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني} \quad a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ n=4, a_1=1 \quad a_4 &= 1 \cdot r^{4-1} \\ a_4=27 \quad 27 &= r^3 \\ \text{بالتبسيط} \quad 3 &= r \end{aligned}$$

الوسطان الهندسيان هما: $1(3) = 3, 3(3) = 9$

مثال 7

$$\begin{aligned} \text{أوجد قيمة} \quad \sum_{k=1}^6 2 \cdot (4)^{k-1} \\ n=6, a_1=2, r=4 \quad S_6 &= \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4} \\ \text{بالتبسيط} \quad &= \frac{-8190}{-3} = 2730 \end{aligned}$$

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

320 $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$ (27)

99 $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$ (28)

8 $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$ (29)

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتتابعات الآتية:

18, 54 $6, _, _, 162$ (30)

$\pm 24, 72, \pm 216$ $8, _, _, _, 648$ (31)

12, -36 $-4, _, _, 108$ (32)

(33) **توفير** مع سعيد 1000 ريال، إذا بدأ يصرف يومياً نصف المبلغ الموجود. فكم سيكون المبلغ المتبقي بعد مرور 4 أيام؟ **62.5 ريالاً**

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين:

$129 \sum_{k=1}^7 3 \cdot (-2)^{k-1}$ (34)

$-\frac{6305}{2187} \sum_{k=1}^8 -1 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ (35)

6-4 المتسلسلات الهندسية غير المنتهية ص 85-90

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي فيها:
 $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{صيغة المجموع} \quad S &= \frac{a_1}{1-r} \\ a_1=15, r=\frac{1}{3} \quad &= \frac{15}{1-\frac{1}{3}} \\ \text{بالتبسيط} \quad &= \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5 \end{aligned}$$

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية فيما يأتي (إن وجد):

32 $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$ (36)

$\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \dots$ **غير موجود** (37)

$6 \sum_{k=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ (38)

(39) **رياضة:** أسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها 60 ft، فارتدت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمر ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟ **300 ft**

6-5 نظرية ذات الحدين ص 95-92

مثال 9

أوجد مفكوك $(x - 3y)^4$.

$$\begin{aligned}(x - 3y)^4 &= x^4 + {}_4C_1 x^3(-3y) + {}_4C_2 x^2(-3y)^2 + \\ & {}_4C_3 x(-3y)^3 + {}_4C_4 (-3y)^4 \\ &= x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4\end{aligned}$$

مثال 10

أوجد الحد الرابع في مفكوك $(x + y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدين لكتابة المفكوك

$$(x + y)^8 = \sum_{k=0}^8 \frac{8!}{k!(8-k)!} x^{8-k} y^k$$

بالنسبة للحد الرابع فإن $k = 3$ ، لذلك يكون الحد الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!} x^{8-3} y^3 = 56x^5y^3$$

أوجد مفكوك كل مما يأتي: 41-44 انظر الهامش

$$(40) \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a + b)^3$$

$$(41) \quad (y - 3)^7$$

$$(42) \quad (3 - 2z)^5$$

$$(43) \quad (4a - 3b)^4$$

$$(44) \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^5$$

أوجد الحد المطلوب في كل مما يأتي:

$$(45) \quad \text{الحد الثالث في مفكوك } (a + 2b)^8 \quad 112a^6b^2$$

$$(46) \quad \text{الحد السادس في مفكوك } (3x + 4y)^7 \quad 193536x^2y^5$$

$$(47) \quad \text{الحد الثاني في مفكوك } (4x - 5)^{10} \quad -13107200x^9$$

6-6 البرهان بالاستقراء الرياضي ص 100-97

مثال 11

برهن أن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n **الخطوة 1** عندما $n = 1$ ، فإن: $9^1 + 3 = 12$.وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n = 1$.**الخطوة 2** افرض أن $9^k + 3$ يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب؛ إذن $9^k + 3 = 4r$ حيث r عدد كلي.**الخطوة 3** $9^k + 3 = 4r$

$$9^k = 4r - 3$$

$$9^{k+1} = 36r - 27$$

$$9^{k+1} + 3 = 36r - 27 + 3$$

$$9^{k+1} + 3 = 36r - 24$$

$$9^{k+1} + 3 = 4(9r - 6)$$

وبما أن r عدد كلي فإن $9r - 6$ عدد كلي، وهذا يعني أن: $9^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند $n = k + 1$ إذن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n .

برهن صحة كل جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

$$(48) \quad 2 + 6 + 12 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{انظر الهامش}$$

$$(49) \quad 5^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 4.$$

49 انظر ملحق الإجابات.أعط مثلاً مضاداً يبين أن كلاً من الجمل الآتية خطأ، حيث n أي عدد طبيعي:

$$(50) \quad 8^n + 3 \text{ يقبل القسمة على } 11. \quad n = 2$$

$$(51) \quad 6^{n+1} - 2 \text{ يقبل القسمة على } 17. \quad n = 2$$

$$(52) \quad n^2 + 2^n + 4 \text{ عدد أولي.} \quad n = 2$$

$$(53) \quad n + 19 \text{ عدد أولي.} \quad n = 1$$

إجابات

$$(41) \quad y^7 - 21y^6 + 189y^5 - 945y^4 + 2835y^3 - 5103y^2 + 5103y - 2187$$

$$(42) \quad -32z^5 + 240z^4 - 720z^3 + 1080z^2 - 810z + 243$$

$$(43) \quad 256a^4 - 768a^3b + 864a^2b^2 - 432ab^3 + 81b^4$$

$$(44) \quad x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{256}x - \frac{1}{1024}$$

(48) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف

الأيسر من المعادلة يساوي 2 وكذلك

الطرف الأيمن من المعادلة يساوي

2 أيضاً. إذن المعادلة صحيحة عند

$$n = 1$$

الخطوة 2: افترض أن

$$2 + 6 + 12 + \dots + k(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

صحيحة حيث k عدد صحيح موجب.**الخطوة 3:**

$$2 + 6 + 12 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[k(k+2) + 3(k+2)]}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1) + 1][(k+1) + 2]}{3}$$

والعبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن

من المعادلة المطلوب إثبات صحتها

عندما $n = k + 1$ ؛ إذن المعادلةصحيحة عندما $n = k + 1$ ؛ أي أن

$$2 + 6 + 12 + \dots$$

$$+ k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1} \quad \text{لا يوجد مجموع}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$$

(3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية

$$54, 45, 36, 27, 81, 72, 63, \dots$$

(4) أوجد الحد الخامس والعشرين في المتتابعة الحسابية التي فيها

$$129 \quad a_1 = 9, d = 5$$

(5) اختيار من متعدد ما الحد الثامن في المتتابعة الحسابية

$$D \quad 18, 20.2, 22.4, 24.6, \dots$$

$$31.2 \quad C \quad 26.8 \quad A$$

$$33.4 \quad D \quad 29 \quad B$$

(6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين 11, -9, -1, 3, 7, -5

(7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها

$$231 \quad a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$$

(8) اختيار من متعدد ما الحد التالي في المتتابعة الهندسية

أدناه؟ C

$$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32}, \dots$$

$$\frac{5}{128} \quad C \quad \frac{13}{32} \quad A$$

$$\frac{5}{8} \quad D \quad \frac{5}{32} \quad B$$

(9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين 6, 1536, 24, 96, 384

(10) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها

$$\frac{1055}{27} \quad a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$$

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

$$(11) \sum_{k=2}^{12} (3k - 1) \quad 220$$

$$136 \quad 45 + 37 + 29 + \dots + -11 \quad (12)$$

$$\frac{65}{99} \quad (13) \text{ اكتب الكسر الدوري } 0.\overline{65} \text{ على صورة كسر اعتيادي.}$$

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كل من المتابعتين الآتيتين:

$$-1, 2, 11, 38, 119 \quad a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5 \quad (14)$$

$$4, 5, 7, 10, 14 \quad a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n \quad (15)$$

$$(16) \text{ أوجد مفكوك } (2a - 3b)^4$$

$$16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$$

$$(17) \text{ أوجد معامل الحد الخامس في مفكوك}$$

$$1215 \quad (m + 3n)^6$$

$$(18) \text{ أوجد الحد الرابع في مفكوك } (c + d)^9 \quad 84c^6d^3$$

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين، للأعداد الطبيعية جميعها:

(19, 20) انظر ملحق الإجابات.

$$1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5} (6^n - 1) \quad (19)$$

$$11^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 10 \quad (20)$$

(21) أوجد مثالاً مضاداً يُبين خطأ الجملة الآتية،

حيث n أي عدد طبيعي:

$$2^n + 4^n \text{ يقبل القسمة على } 4 \quad n = 1$$

(22) مدرسة إذا كان عدد طلبة الصف الأول الثانوي يساوي عدد

طلبة الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم

اختيار 8 طلبة عشوائياً من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة

للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلبة الثمانية من الصف

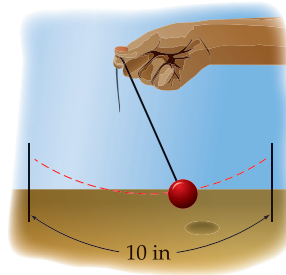
الأول الثانوي؟ **21.9% تقريباً**

(23) بندول يقوم سعد بأرجحة بندول، بحيث تتناقص المسافة التي

يقطعها البندول في كل أرجحة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة

قطعها البندول 10 in، فجد المسافة الكلية التي يكون البندول

قد قطعها عندما يتوقف عن الحركة. **حوالي 66.7 in**



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
	الدروس: 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6		تدريبات إعادة التعليم،
	تدريبات المهارات،		ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
	ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)		
	مشروع الفصل، ص (62)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية البحث عن نمط؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة تعزيز

اسأل:

- ما الأسئلة التي تعتقد أن أفضل طريقة لحلها هي استعمال استراتيجية البحث عن نمط؟ **إجابة ممكنة: أسئلة مثل "ما الحد التالي في المتتابعة؟" أو "ما التعبير الذي يُمثل هذا النمط؟"**
- كيف نجد النمط؟ **إجابة ممكنة: بالبحث عن العلاقة بين حدود النمط، وتحديد العمليات المشتركة التي تُعبّر عن النمط.**

البحث عن نمط

تعتبر استراتيجية البحث عن نمط من أكثر استراتيجيات حل المسألة استعمالاً. وتعَدُّ القدرة على تمييز النمط، ونمذجته جبرياً وتوسيع النمط أداة مهمة جداً في حل المسألة.

استراتيجيات البحث عن نمط

خطوة 1

تعرف النمط.

- قارن بين الأعداد، والأشكال، والتمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما العلاقة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل توجد عمليات مشتركة تتوصل من خلالها من حدٍّ إلى الحد الذي يليه في النمط؟

خطوة 2

عمّم النمط.

- باستعمال الكلمات اكتب قاعدة تصف طريقة الحصول على الحدود المختلفة في النمط.
- حدّد متغيرات، ثم اكتب عبارة جبرية لنمذجة النمط، إن كان ذلك مناسباً.

خطوة 3

أوجد الحدود المفقودة، وتوسّع في النمط وحلّ المسألة.

- استعمل النمط أو القاعدة التي حصلت عليها في إيجاد الحدود المفقودة، و/أو في توسيع النمط لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك لتتأكد من أن إجابتك منطقية.

مثال

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، واستعمل المعلومات المعطاة في حل المسألة:

انظر إلى متتابعة الأشكال المربعة المعطاة.
ما عدد المربعات التي تحتاجها لتكوين الشكل التاسع من المتتابعة؟

				
شكل 1	شكل 2	شكل 3	74 C	55 A
			82 D	65 B

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

فتح سعيد حساباً مصرفياً في أحد البنوك، وأودع فيه مبلغ 2100 ريال، إذا أضاف إليه 0.3% من المبلغ الموجود في الحساب شهرياً. فكم سيصبح رصيده في نهاية السنة الأولى إلى أقرب ريال. **D**

- 2170 **A**
2177 **B**
2107 **C**
2994 **D**

3 التقويم

استعمل التمرينين 1, 2؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية. معك 3 أشكال من متتابعة، وتريد إيجاد عدد المربعات التي تحتاج إليها لعمل الشكل التاسع. ابحث عن نمط في الأشكال المكوّنة من مربعات. عدّ المربعات في كل شكل.



اكتب عبارة جبرية تُمثّل نموذجاً لهذا النمط.

عدد المربعات في الشكل يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.

افتراض أن n يُمثّل رقم الشكل.

$$a_n = n^2 + 1$$

التعبير
اللفظي

متغير

المعادلة

استعمل العبارة التي حصلت عليها لتوسيع النمط، ثم أوجد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذن الشكل التاسع سيكون فيه 82 مربعاً. الإجابة الصحيحة هي D.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة. استعمل نمطاً لحل المسألة.

(1) الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات كما تعلم وهي: "متتابعة فيبوناشي". ما الحد التالي في هذه المتتابعة؟ **B**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

- 36 **A**
34 **B**
31 **C**
29 **D**

(2) ما العدد المفقود في الجدول أدناه؟ **B**

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

- 18 **C** 17 **A**
21 **D** 20 **B**

اختيار من متعدد

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد إجابات الطلبة عن كل سؤال، فقد تُشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة، وأخطاء مفاهيمية مثل:

- 1 A لم يتم إضافة الأساس إلى العدد 31 في المتتابعة بصورة صحيحة
B إجابة صحيحة
C اعتبر أساس المتتابعة يساوي العدد 7
D لاحظ أن النمط هو: كل عدد ثالث ينتهي بالرقم 9.

2 A تم إيجاد قيمة $8k - 1$ فقط للقيمة $k = 15$

- B تم إيجاد المجموع من $k = 1$ إلى 14
C إجابة صحيحة
D تم إيجاد المجموع من $k = 1$ إلى 16

3 A اعتبر $r = 5$
B إجابة صحيحة
C تبديل الثابت بالأساس.
D عوض في القانون n بدل $n - 1$

- 4 A تم إيجاد نسبة الشوائب الباقية بعد المرور في المصفاة مرتين.
B تم إيجاد نسبة الشوائب الباقية بعد المرور في المصفاة 3 مرات
C تم إيجاد نسبة الشوائب التي تمت إزالتها بعد المرور في المصفاة 4 مرات.
D إجابة صحيحة

5 A القيمة المطلقة لأساس المتسلسلة أقل من 1
B إجابة صحيحة
C القيمة المطلقة لأساس المتسلسلة أقل من 1.
D القيمة المطلقة لأساس المتسلسلة أقل من 1.

- 6 A معامل k
B معامل x
C إجابة صحيحة
D خمن

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 أوجد الحد التالي في المتتابعة الحسابية: B

7, 13, 19, 25, 31, ...

- 36 A
37 B
38 C
39 D

2 أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15} (8k - 1)$ C

- 119 A
826 B
945 C
1072 D

3 صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية الممثلة في الجدول المجاور هي: B

- A $a_n = (5)^n$
B $a_n = 5(2)^{n-1}$
C $a_n = 2(5)^{n-1}$
D $a_n = 5(2)^n$

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

4 تدعي شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرات متتالية، فما نسبة الشوائب التي سوف تزال؟ D

- 0.1% A
0.01% B
99.99% C
99.9% D

5 أي المتسلسلات الهندسية الآتية غير متقاربة؟ B

- A $\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$
B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$
C $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
D $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

6 إذا علمت أن $x - 5$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + k$ فما قيمة k ؟ C

- 1 A
7 B
15 C
35 D

إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضحًا خطوات الحل :

(12) برهن صحة الجملة الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.
 $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6. **انظر الهامش**

التقويم التكويني

لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 6
يمكنك استعمال:

اختبار تراكمي: ص (108, 109)

اختبار تراكمي، ص (43)

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(7) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين أدناه؟ 4×1

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(8) أوجد مفكوك $(c + d)^6$ باستعمال نظرية ذات الحدين.

$$c^6 + 6c^5d + 15c^4d^2 + 20c^3d^3 + 15c^2d^4 + 6cd^5 + d^6$$

بسّط كلّاً من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{15a^3b^2}{2c} \cdot \frac{12a}{5b} \cdot \frac{25a^2b^3}{8c} \quad (9)$$

$$\frac{3}{2}x \cdot \frac{x^2 - x - 20}{2x + 8} \cdot \frac{3x}{x - 5} \quad (10)$$

(11) إذا كان $x^2 + 5 = g(x)$ ، $f(x) = 2x + 4$ ، فما قيمة $f[g(6)]$ ؟ **86**

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل السابع تعطى

الأسئلة الواردة في صفحة (11) واجبًا منزليًا للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم للمتطلبات السابقة للفصل 7.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟											
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
5-5	6-6	4-1	5-1	5-1	6-5	2-3	3-7	6-4	6-3	6-3	6-2

الفصل 6 اختبار تراكمي 109

إجابة:

(12) الخطوة 1: عندما $n = 1$: $7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$.

وبما أن 6 يقبل القسمة على 6؛ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $7^k - 1$ يقبل القسمة على 6 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $7^k - 1 = 6r$ لعدد طبيعي r .

الخطوة 3: $7^k - 1 = 6r$

$$7^k = 6r + 1$$

$$7^{k+1} = 42r + 7$$

$$7^{k+1} - 1 = 42r + 7 - 1$$

$$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$$

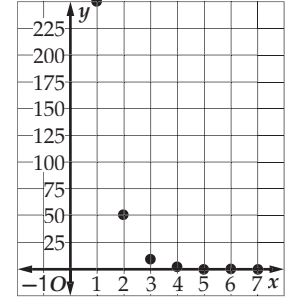
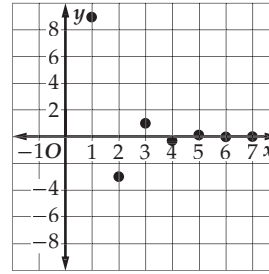
$$7^{k+1} - 1 = 6(7r + 1)$$

وبما أن r عدد طبيعي فإن $7r + 1$ عدد طبيعي. إذن $7^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 6؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. لذا فإن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد صحيح موجب n .

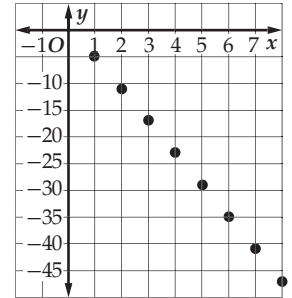
الدرس 6-1، ص 68، 69

(8) $\frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}$

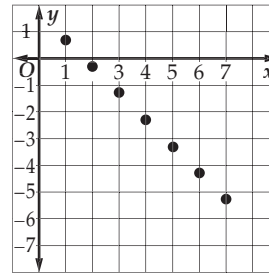
(9) $\frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}$



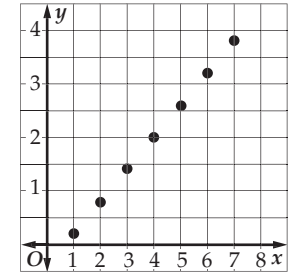
(15) $-29, -35, -41, -47$



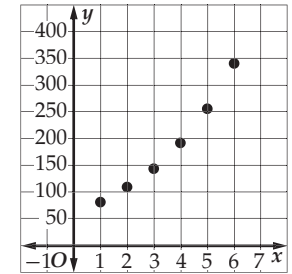
(17) $-\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}$



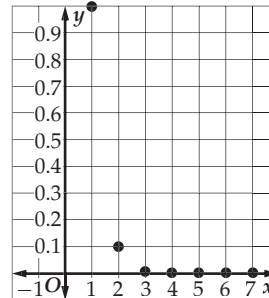
(16) $2, \frac{13}{5}, \frac{16}{5}, \frac{19}{5}$



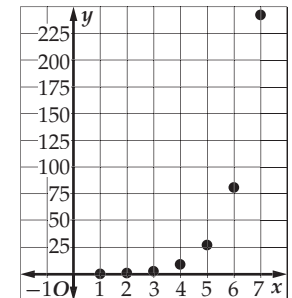
(23) $192, 256, \frac{1024}{3}$



(25) $0.0001, 0.00001, 0.000001$



(24) $27, 81, 243$

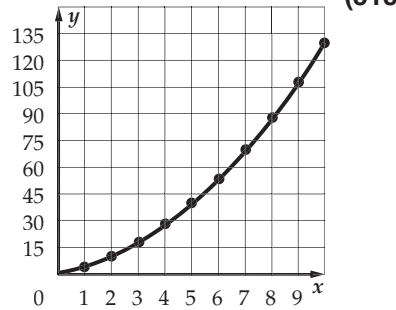
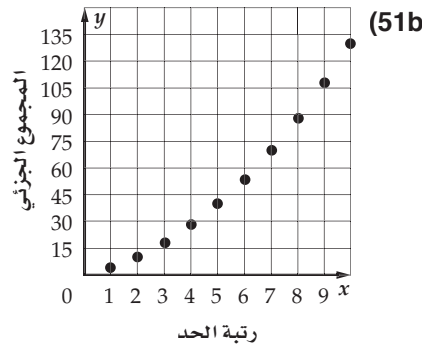


(38) إجابة ممكنة: عندما يصبح الأساس مثلي قيمته فإن قيمة a_2 الجديدة تصبح $2 \times a_2$ ، وقيمة a_3 تصبح $4a_3$ ، وقيمة a_4 تصبح $8a_4$ ، وقيمة a_5 تصبح $16a_5$ ، وهكذا تكون الحدود الجديدة هي $b_n = a_n \cdot 2^{n-1}$. وعندما تُضرب قيمة r في نصف قيمتها السابقة فإن:

$$b_n = a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

الدرس 6-2، ص 76، 77

n	S_n
1	4
2	10
3	18
4	28
5	40
6	54
7	70
8	88
9	108
10	130



(58) إجابة ممكنة:

افترض a_n هو الحد النوني في المتتابعة، التي أساسها d
 تعريف الحد الثاني في المتتابعة الحسابية $a_2 = a_1 + d$
 تعريف الحد الثالث في المتتابعة الحسابية $a_3 = a_2 + d$
 بالتعويض $a_3 = (a_1 + d) + d$
 خاصية التجميع في الجمع $a_3 = a_1 + 2d$
 $3 - 1 = 2$ $a_3 = a_1 + (3 - 1)d$
 وهكذا
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

$$7^k - 1 = 6r \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$7^k = 6r + 1 \quad \text{يُضاف 1 إلى الطرفين}$$

$$7^{k+1} = 7(6r + 1) \quad \text{بضرب كلا الطرفين في 7}$$

$$7^{k+1} - 1 = 42r + 6 \quad \text{بالتبسيط وطرح 1 من كلا الطرفين}$$

$$7^{k+1} - 1 = 6(7r + 1) \quad \text{بالتحليل}$$

بما أن r عدد طبيعي، فإن $7r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 6؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. ولذا فإن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n .

الدرس 6-6، ص 100، 99

(2) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، الطرف الأيسر من المعادلة هو 1، والطرف

$$\text{الأيمن هو } 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{، إذن المعادلة صحيحة عند } n = 1.$$

الخطوة 2: افترض أن $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1)$

$$\text{بجمع } k + 1 \text{ إلى كلا الطرفين} \quad = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$\text{بالجمع} \quad = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$\text{بالتحليل} \quad = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوبة إثبات صحتها، عندما $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$.

وعليه فإن $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة للأعداد الطبيعية n جميعها.

(3c) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، الطرف الأيسر من المعادلة

$$\text{هو } 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

الطرف الأيمن من المعادلة هو $1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6}$ إذن المعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن:

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{3(k+1)(k+2)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوبة إثبات صحتها، عندما $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما

$$n = k + 1 \text{، وعليه، فإن المعادلة صحيحة؛ أي أن}$$

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

للاعداد الطبيعية n جميعها.

الصيغة العامة للمجموع

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \quad (59)$$

صيغة الحد النوني

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ب طرح $(n-1)d$ من الطرفين

$$a_n - (n-1)d = a_1$$

$$\text{بالتعويض} \quad S_n = [a_n - (n-1)d + a_1] \left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad S_n = [2a_n - (n-1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$$

الدرس 3-6، ص 83

(38) إجابة ممكنة: يجب تغيير $k - 1$ إلى k والعدد 10 إلى العدد 9. وعندها تصبح حدود المتسلسلتين متطابقة (a_1 في المتسلسلة الأولى يتطابق مع a_0 في المتسلسلة الثانية، وهكذا)، وتصبح المتسلسلتان متطابقتين.

(39) إجابة ممكنة:

افترض a_n هو الحد النوني في المتتابعة، التي أساسها r .

$$\text{تعريف الحد الثاني في المتتابعة الهندسية} \quad a_2 = a_1 \cdot r$$

$$\text{تعريف الحد الثالث في المتتابعة الهندسية} \quad a_3 = a_2 \cdot r$$

$$\text{بالتعويض} \quad a_3 = a_1 \cdot r \cdot r$$

$$\text{خاصية التجميع في الضرب} \quad a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$3 - 1 = 2 \quad a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}$$

بصورة عامة

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

الدرس 6-6، ص 98، 97 (تحقق من فهمك)

(1) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^2 = 1$.

والطرف الأيمن هو $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$

$$\text{بجمع } (k+1)^2 \text{ الطرفين} \quad = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\text{بالجمع} \quad = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$\text{بإخراج العامل المشترك} \quad = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$\text{بالتحليل} \quad = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، عندما $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عند $n = k + 1$.

وبهذا فإن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

صحيحة للأعداد الطبيعية n جميعها.

(2) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن $7^1 - 1 = 6$ وهو عدد يقبل القسمة على 6.

إذن الجملة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض $7^k - 1$ يقبل القسمة على 6 حيث k عدد طبيعي.

وهذا يعني أنه يوجد عدد كلي r بحيث إن $7^k - 1 = 6r$

الخطوة 1: $10^1 - 1 = 9$ ، وهو عدد يقبل القسمة على 9. فالجملة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $10^k - 1$ يقبل القسمة على 9 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $10^k - 1 = 9r$ ، حيث r يمثل عدداً كلياً.

الخطوة 3: $10^k - 1 = 9r$ فرضية الاستقراء

بإضافة 1 إلى كلا الطرفين $10^k = 9r + 1$

بضرب كلا الطرفين بـ 10 $10^{k+1} = 90r + 10$

بطرح 1 $10^{k+1} - 1 = 90r + 9$

بالتحليل $10^{k+1} - 1 = 9(10r + 1)$

بما أن r عدد كلي، فإن $10r + 1$ عدد كلي. إذاً $10^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 9، أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. لذا، فإن $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: $4^1 - 1 = 3$ وهذا العدد يقبل القسمة على 3. فالجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $4^k - 1$ يقبل القسمة على 3 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أن $4^k - 1 = 3r$ ، حيث r عدد كلي.

الخطوة 3: $4^k - 1 = 3r$ فرضية الاستقراء

بإضافة 1 $4^k = 3r + 1$

بالضرب في 4 $4^{k+1} = 12r + 4$

بطرح 1 $4^{k+1} - 1 = 12r + 3$

بالتحليل $4^{k+1} - 1 = 3(4r + 1)$

بما أن r عدد كلي، فإن $4r + 1$ أيضاً عدد كلي. إذن $4^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 3 أي أن الجملة صحيحة عند $n = k + 1$. لذا فإن $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $\frac{1}{2}$ والطرف الأيمن من المعادلة هو $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ ، لذا، فإن المعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 - \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$

بجمع $\frac{1}{2^{k+1}}$ $= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$

$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}$

$= 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثبات صحتها، عند $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عند $n = k + 1$. وبهذا فإن $1 - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ صحيحة لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 2. والطرف الأيمن من المعادلة هو $\frac{1[3(1) + 1]}{2} = 2$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $[2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) + [3(k + 1) - 1]]$

$$= \frac{k(3k + 1)}{2} + [3(k + 1) - 1]$$

$$= \frac{k(3k + 1) + 2[3(k + 1) - 1]}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + k + 6k + 6 - 2}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1]}{2}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، عندما $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$.

لذا فإن $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$ صحيحة لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 1.

والطرف الأيمن هو $2^1 - 1 = 1$ إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2^k - 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي:

الخطوة 3: $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} + 2^{k-1+1}$

$$= 2^k - 1 + 2^{k-1+1} \text{ بجمع } 2^{k-1} \text{ للطرفين}$$

$$= 2^k + 2^k - 1 \text{ بالتبسيط وإبدالية الجمع}$$

$$= 2(2^k) - 1$$

$$= 2^{k+1} - 1$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$. لذا، فإن:

$$2^n - 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} \text{ لكل عدد طبيعي } n.$$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $3 = 4(1) - 1$. والطرف الأيمن $2(1)^2 + 1 = 3$ ، لذا، فإن المعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2k^2 + k = 3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $[3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1]]$

$$= 2k^2 + k + [4(k + 1) - 1]$$

$$= 2k^2 + k + 4k + 3$$

$$= 2k^2 + 5k + 3$$

$$= 2k^2 + 4k + 2 + k + 1$$

$$= [2(k + 1)^2] + (k + 1)$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، عند $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عند $n = k + 1$. وبهذا فإن $2n^2 + n = 3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)$ صحيحة لكل عدد طبيعي n .

$$\text{الخطوة 3: } 7^k + 5 = 6r$$

$$7^k = 6r - 5$$

$$7^{k+1} = 7(6r - 5)$$

$$7^{k+1} = 42r - 35$$

$$7^{k+1} + 5 = 42r - 30$$

$$7^{k+1} + 5 = 6(7r - 5)$$

بما أن r عدد طبيعي فإن $7r - 5$ عدد طبيعي؛ أي أن: $7^{k+1} + 5$ يقبل القسمة على 6؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $7^n + 5$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n .

(19) الخطوة 1: $17 = 18^1 - 1$ ، وهو يقبل القسمة على 17. إذا الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $18^k - 1$ يقبل القسمة على 17 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $17r = 18^k - 1$ لعدد طبيعي r .

$$\text{الخطوة 3: } 18^k - 1 = 17r$$

$$18^k = 17r + 1$$

$$18^{k+1} = 18(17r + 1)$$

$$18^{k+1} = 306r + 18$$

$$18^{k+1} - 1 = 306r + 17$$

$$18^{k+1} - 1 = 17(18r + 1)$$

بما أن r عدد طبيعي فإن $18r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $18^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 17؛ أي أن الجملة صحيحة عند $n = k + 1$. إذن: $18^n - 1$ يقبل القسمة على 17 لكل عدد طبيعي n .

(22) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو

$$500 = 4 \cdot 5^{4-1} \text{ والطرف الأيمن هو } 500 \left(1 - \frac{1}{5^1}\right)$$

إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2:

افترض أن $625 \left(1 - \frac{1}{5^k}\right) = 4 \cdot 5^{4-k} + 4 \cdot 5^{4-k} + \dots + 100 + 500$ حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $500 + 100 + 20 + \dots + 4 \cdot 5^{4-k} + 4 \cdot 5^{4-(k+1)}$

$$= 625 \left(1 - \frac{1}{5^k}\right) + 4 \cdot 5^{4-(k+1)}$$

$$= 625 \left(\frac{5^k - 1}{5^k}\right) + 4 \cdot 5^{3-k}$$

$$= 625 \left(\frac{5^{k+1} - 5}{5^{k+1}}\right) + 4 \cdot \frac{5^4}{5^{k+1}}$$

$$= \frac{5^4(5^{k+1} - 5)}{5^{k+1}} + 4 \cdot \frac{5^4}{5^{k+1}}$$

$$= \frac{5^4(5^{k+1} - 5 + 4)}{5^{k+1}}$$

$$= 625 \left(\frac{5^{k+1} - 1}{5^{k+1}}\right)$$

$$= 625 \left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right)$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. لذا فإن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن:

$$500 + 100 + 20 + \dots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$$

لكل عدد طبيعي n .

(12) الخطوة 1: عندما $n = 3$ ، $180(3 - 2) = 180$. وبما أن هذا يتفق مع نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث، إذن فالجملة صحيحة عندما $n = 3$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند $n = k$ حيث $k \geq 3$ ، أي أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه k هو $180(k - 2)$.

الخطوة 3: افترض أن المضلع المحدب له $k + 1$ رأسًا. بما أن $k + 1 \geq 4$ ، وإذا أخذنا أحد الرؤوس x ، فيمكن إيجاد الرأس y بحيث يقع بين الرأسين رأس ثالث في أحد الاتجاهات و $(k - 2)$ رأس في الاتجاه الآخر، صل الرأسين x, y بقطر يقسم المضلع الجديد إلى مضلعين. مجموع زوايا المضلع الجديد يساوي مجموع زوايا المثلث الذي يُشكّله الرأسان x, y والرأس الثالث بينهما والمضلع ذو الرؤوس $(k - 2)$ إضافة إلى الرأسين x, y . وتعلم أن مجموع زوايا المثلث 180° ، ومجموع زوايا المضلع الأصلي المحدب بالرؤوس $k - 2$ إضافة إلى الرأسين x, y يساوي $180(k - 2)$ وبالجمع ينتج أن مجموع زوايا المضلع الجديد ذي الرؤوس $k + 1$ يساوي $180(k - 2) + 180 = 180(k - 1)$ وهذا يبرهن صحة هذه القاعدة.

(13) الخطوة 1: $9^1 - 1 = 8$ وهو يقبل القسمة على 8؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $9^k - 1$ يقبل القسمة على 8 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أنه يوجد عدد كلي r يحقق العلاقة $9^k - 1 = 8r$.

$$\text{الخطوة 3: } 9^k - 1 = 8r \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$9^k = 8r + 1 \quad \text{بجمع 1 للطرفين}$$

$$9^{k+1} = 72r + 9 \quad \text{بضرب الطرفين بـ 9}$$

$$9^{k+1} - 1 = 72r + 8 \quad \text{بطرح 1 من الطرفين}$$

$$9^{k+1} - 1 = 8(9r + 1) \quad \text{بالتحليل}$$

بما أن r عدد كلي فإن $9r + 1$ عدد كلي، وهذا يعني أن $9^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 8؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8 لكل عدد طبيعي n .

(14) الخطوة 1: $12^1 + 10 = 22$ وهو يقبل القسمة على 11. إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $12^k + 10$ يقبل القسمة على 11 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r يحقق

$$12^k + 10 = 11r$$

$$\text{الخطوة 3: } 12^k + 10 = 11r \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$12^k = 11r - 10 \quad \text{بطرح 10 من الطرفين}$$

$$12^{k+1} = 132r - 120 \quad \text{بضرب كلا الطرفين بـ 12}$$

$$12^{k+1} + 10 = 132r - 110 \quad \text{بجمع 10 للطرفين}$$

$$12^{k+1} + 10 = 11(12r - 10) \quad \text{بالتحليل}$$

بما أن r عدد طبيعي فإن $12r - 10$ عدد طبيعي أيضًا لذا فإن $12^{k+1} + 10$ يقبل القسمة على 11 أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11 لكل عدد طبيعي n .

(18) الخطوة 1: $7^1 + 5 = 12$ وهو يقبل القسمة على 6. إذن العبارة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $7^k + 5$ يقبل القسمة على 6 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r يحقق المساواة $7^k + 5 = 6r$.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1) \quad (23)$$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $2(1) = 2$ والطرف الأيمن هو $1(1 + 1) = 2$ إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1)$ حيث k عدد طبيعي.

$$\begin{aligned} \text{الخطوة 3: } 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)[(k + 1) + 1] \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$ إذن $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ صحيحة لكل عدد طبيعي n .

(26) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة هو $1^3 = 1$.

الطرف الأيمن هو $1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ، إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 8 + 27 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3:

$$\begin{aligned} 1 + 8 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 [k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{2^2} \\ &= \left(\frac{(k+1)[(k+1) + 1]}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. لذا فإن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

إذن $1 + 8 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ لكل عدد طبيعي n .

$$6 + 10 + 14 + \dots + (4n + 2) = 2n(n + 2) \quad (27)$$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $4(1) + 2 = 6$ والطرف الأيمن هو $2(1)(1 + 2) = 6$ إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $6 + 10 + 14 + \dots + 4k + 2 = 2k(k + 2)$ حيث k عدد طبيعي.

$$\begin{aligned} \text{الخطوة 3: } 6 + 10 + 14 + \dots + 4k + 2 + 4(k + 1) + 2 &= 2k(k + 2) + 4(k + 1) + 2 \\ &= 2k^2 + 4k + 4k + 4 + 2 \\ &= 2k^2 + 8k + 6 \\ &= 2(k + 1)(k + 3) \\ &= 2(k + 1)[(k + 1) + 2] \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيسر من المعادلة المطلوب إثباتها، عندما $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$.

إذن $6 + 10 + 14 + \dots + (4n + 2) = 2n(n + 2)$ لكل عدد طبيعي n .

دليل الدراسة والمراجعة ص 104

(49) الخطوة 1: عندما $n = 1$: $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$ وبما أن 4 يقبل القسمة على 4، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $5^k - 1$ يقبل القسمة على 4 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $5^k - 1 = 4r$ لعدد طبيعي r .

الخطوة 3:

$$\begin{aligned} 5^k - 1 &= 4r \\ 5^k &= 4r + 1 \\ 5^{k+1} &= 20r + 5 \\ 5^{k+1} - 1 &= 20r + 5 - 1 \\ 5^{k+1} - 1 &= 20r + 4 \\ 5^{k+1} - 1 &= 4(5r + 1) \end{aligned}$$

وبما أن r عدد طبيعي فإن $5r + 1$ عدد طبيعي لذا فإن $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

إذن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n .

(19) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 1، وكذلك الطرف الأيمن هو $1 = \frac{1}{5} \times 5 = \frac{1}{5} (6^1 - 1)$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{k-1} = \frac{1}{5} (6^k - 1)$ حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 6 + 36 + \dots + 6^{k-1} + 6^{k+1-1} &= \frac{1}{5} (6^k - 1) + 6^{k+1-1} \\ &= \frac{1}{5} (6^k - 1) + 6^k \\ &= \frac{1}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5} + 6^k \\ &= \frac{6}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 6^{k+1} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot (6^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من الجملة المطلوب إثباتها. حيث $n = k + 1$. لذا فإن $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5} (6^n - 1)$ لكل عدد طبيعي n .

(20) الخطوة 1: $11^1 - 1 = 10$

10 يقبل القسمة على 10. فالجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $11^k - 1$ يقبل القسمة على 10 حيث k عدد صحيح موجب. وهذا يعني أن $11^k - 1 = 10r$ لعدد كلي r .

الخطوة 3: $11^k - 1 = 10r$

$$11^k = 10r + 1$$

$$11(11^k) = (10r + 1) 11$$

$$11^{k+1} = 110r + 11$$

$$11^{k+1} - 1 = 110r + 11 - 1$$

$$11^{k+1} - 1 = 110r + 10$$

$$11^{k+1} - 1 = 10(11r + 1)$$

بما أن r عدد كلي، فإن $11r + 1$ هو عدد كلي أيضًا، لذا، فإن $11^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 10، وهذا يعني أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 لكل عدد صحيح موجب n .

التقويم التشخيصي
التهيئة ص (107)

العنوان	الدرس 7-1 (3) حصص	الدرس 7-2 (4) حصص	الدرس 7-3 (4) حصص
الأهداف	- استعمال القوائم، والجداول، والرسوم الشجرية لتمثيل فضاء العينة. - استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.	- استعمال التباديل في حساب الاحتمال. - استعمال التوافيق في حساب الاحتمال.	- إيجاد الاحتمالات باستعمال الطول. - إيجاد الاحتمالات باستعمال المساحة.
المفردات	فضاء العينة الرسم الشجري تجربة ذات مرحلتين تجربة متعددة المراحل مبدأ العد الأساسي	التباديل المضروب التباديل الدائرية التوافيق	الاحتمال الهندسي
التمثيلات المتعددة	ص (116)		
مصادر الدرس	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون - تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (16) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون - تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (17) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون - تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (18) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	آلة التصوير الرقمية، ص (114)		آلة التصوير الرقمية، ص (127)
تنويع التعليم	ص (113, 117)	ص (121, 124)	ص (126, 129)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (131)

المفاتيح: **دون** دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

الخطة الزمنية		
المجموع	المراجعة والتقييم	التدريس
22 حصة	4	18

الدرس 7-4	الدرس 7-5
(4) حصص	(3) حصص
احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة	احتمالات الحوادث المتنافية
- إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة. - إيجاد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى.	- إيجاد احتمالات الحوادث المتنافية، والحوادث غير المتنافية. - إيجاد احتمال متممة حادثة.
- الحادثة المركبة - الحوادث المستقلة - الحوادث غير المستقلة - الاحتمال المشروط - شجرة الاحتمال	- الحوادث المتنافية - الحادثة المتممة
مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون - تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (19) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون - تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق كتاب التمارين - ص (20) دون ضمن فوق
السبورة التفاعلية، ص (134)	السبورة التفاعلية، ص (140)
ص (133, 135, 137)	ص (143, 145)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (146-148)
- اختبار الفصل ص (149)
- اختبار تراكمي ص (152, 153)

المعالجة	التشخيص	
مخطط المعالجة، ص (111)	بداية الفصل 7 التهيئة للفصل 7، ص (111)	تقويم التشخيصي
مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	بداية كل درس فيما سبق، والآن، لماذا؟	
تدريبات المهارات، الفصل 7 تنوع التعليم تنوع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7 www.obeikaneducation.com	خلال كل درس وبعده تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة، ص (49, 50) www.obeikaneducation.com	تقويم التكويني
تدريبات المهارات، الفصل 7 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7 www.obeikaneducation.com	منتصف الفصل اختبار منتصف الفصل، ص (131) اختبار منتصف الفصل، ص (51) www.obeikaneducation.com	
تدريبات المهارات، الفصل 7 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7 www.obeikaneducation.com	نهاية الفصل دليل الدراسة والمراجعة، ص (146-148) اختبار الفصل، ص (149) اختبار تراكمي، ص (152, 153) www.obeikaneducation.com	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7 www.obeikaneducation.com	بعد انتهاء الفصل 7 اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B، ص (53-58) اختبار الفصل، النموذج 3، ص (59 - 60) اختبار المفردات، ص (52) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة، ص (61) اختبار تراكمي، ص (62-64) www.obeikaneducation.com	تقويم الختامي

البديل 1

جميع المستويات

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اكتب السؤالين الآتيين على السبورة، ثم اطلب إلى بعض الطلبة الإجابة عنهما:

- 1) عندما تشتري الآيس كريم، أي حجم تفضل: الصغير، أم الوسط، أم الكبير؟
 - 2) بأي طعام تفضله: الفانيلا، أو الشوكولاتة و/ أو الفراولة؟
- ثم اطلب إلى الطلبة جميعاً أن يكونوا الرسم الشجري؛ لتوضيح جميع بدائل الآيس كريم الممكنة.

المتعلمون الاجتماعيون ارسم لوحة لعبة السهام على السبورة. واطلب إلى الطلبة أن يقيسوا قطر الدائرة الداخلية في اللوحة، ومقدار الزيادة في نصف قطر كل دائرة عن الأخرى، ثم استعمال هذه المعلومات لتحديد احتمال إصابة الدائرة الداخلية إذا نفذوا هذه اللعبة.

البديل 2

دون المتوسط

دون

اكتب السؤال الآتي على السبورة: وضع في حقيبة أربعة مكعبات زرقاء، ومكعبان أحمران، ومكعب أصفر، وآخر أخضر. افترض أن مكعباً سُحب من الحقيبة ثم أُعيد، وسحب مكعب آخر ثم أُعيد، واستمر سحب المكعبات وإعادتها، فما احتمال سحب مكعب أحمر كل مرة إذا استمر السحب لعشر مرات؟ اطلب إلى الطلبة أن يحلوا هذه المسألة ويبينوا كيف توصلوا إلى الإجابة.

البديل 3

فوق المتوسط

اطلب إلى الطلبة أن يعملوا في مجموعات ثنائية لتصميم محاكاة وتنفيذها باستعمال المكعب المرقم، أو النقود أو القرص ذي المؤشر الدوار، ثم يقرروا السؤال الذي يريدون الإجابة عنه، والخطوات التي سيتبعونها، ويسجلوا بياناتهم ويعرضوها على طلاب الفصل.

ملخص الدروس

تمثيل فضاء العينة

7-1

فضاء العينة لتجربة هو مجموعة جميع النواتج الممكنة. ويمكن تمثيل فضاء العينة باستعمال قائمة منظمة أو جدول رسم شجري. وعند كتابته تسجل نواتج المراحل أو الأحداث المتكررة. وعندما يكون هناك أكثر من مرحلة تسمى التجربة متعددة المراحل. وينص مبدأ العد الأساسي على أنه: "يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة".

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

7-2

يرمز إلى مضروب العدد الصحيح الموجب n ، بالرمز $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي n . ويستعمل المضروب لعدّ ترتيب العناصر. أما التبديل فهو تنظيم لمجموعة من العناصر يُعدّ الترتيب فيها مهمًا. ويُعبّر عن عدد تباديل n من العناصر المتميزة مأخوذة r في كل مرة بالصيغة:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات، والآخر r_2 من المرات... وهكذا، هو $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$ وعدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n مرتبة في دائرة دون نقطة مرجع ثابتة يساوي $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

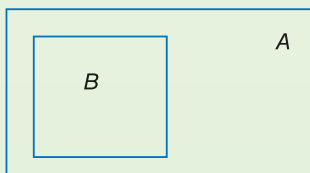
التوافق هي تنظيم لمجموعة من العناصر الترتيب فيها ليس مهمًا. وتُحسب توافق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة أو ${}_nC_r$ ، بقسمة عدد التباديل ${}_nP_r$ على عدد الترتيب التي تحتوي العناصر نفسها $r!$. ويعبّر عن عدد التوافق بالصيغة ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

الاحتمال الهندسي

7-3

يسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسات هندسية مثل الطول أو المساحة احتمالاً هندسياً. ويمكنك إيجاد احتمال وقوع نقطة في جزء من شكل بمقارنة طول الجزء بالطول الكلي للشكل أو مساحة الجزء بالمساحة الكلية للشكل. إذا اختيرت نقطة E في المنطقة A عشوائياً، فإن احتمال وقوع النقطة E في المنطقة B ، التي تقع داخل المنطقة A هو:

$$P(B \text{ في المنطقة } E) = \frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$



الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 7

- استعمال الاحتمال النظري والمعاينة في التنبؤ بالحوادث.
- تمثيل العلاقات بالجدول وبيانياً.

الفصل 7

- فهم فضاء العينة.
- حساب احتمالات الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة، والحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية والحوادث المشروطة.
- حساب الاحتمالات الهندسية.

ما بعد الفصل 7

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- استعمال التوزيعات الاحتمالية.
- المقارنة بين مجموعات من البيانات باستعمال مقاييس النزعة المركزية والتشتت.

7-5 احتمالات الحوادث المتنافية

7-5

بُحث في الدرس 7-5 موضوع وقوع حادثتين في وقت واحد. وسيتم في هذا الدرس دراسة وقوع إحدى الحادثتين أو كليهما. ولإيجاد احتمال وقوع حادثة أو حادثة أخرى يجب أن نعلم العلاقة بينهما. فإذا استحال وقوع الحادثتين في آن معاً، فإنهما متنافيتان؛ أي أنه لا يوجد نواتج مشتركة بينهما. وإذا كان A و B متنافيتين، فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمالي الحادثتين.

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$$

أما إذا كانت الحادثتان A و B غير متنافيتين فإن مجموع احتمالي كل منهما أكبر من $P(A \text{ أو } B)$ ، وذلك لإضافة احتمال وقوع الحادثتين معاً مرتين. وعليه، فإنه إذا كان A و B حادثتين غير متنافيتين فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمالي كل منهما مطروحاً منه احتمال وقوع A و B معاً.

$$P(A \text{ و } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

عند تحديد الاحتمال الهندسي افرض أن النقطة تقع ضمن منطقة الهدف، وأن فرص وقوعها في أي منطقة متساوية.

7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

7-4

تتكون الحادثة المركبة من حادثتين بسيطتين. وتكون الحادثتين A و B مستقلتين إذا كان احتمال وقوع A لا يؤثر في احتمال وقوع B . واحتمال وقوع حادثتين مستقلتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمالي كل حادثة على حدة.

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$$

تكون الحادثتان A و B غير مستقلتين إذا كان احتمال وقوع A بطريقة ما يؤثر في احتمال وقوع B . واحتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية شرط وقوع الحادثة الأولى.

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

يقدم القانون السابق فكرة الاحتمال المشروط. ويمكن استعمال الاحتمال المشروط إذا عُلمت معلومات إضافية عن حادثة معينة. والاحتمال المشروط لوقوع B شرط وقوع A يساوي:

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

مشروع الفصل

ألعاب وتسلية

يستعمل الطلبة ما تعلموه حول الرسم الشجري والاحتمال؛ لإيجاد فضاء العينة للنواتج التي يحصلون عليها خلال لعبهم في ألعاب التسلية في المهرجانات.

- ابحث عن جميع الألعاب المختلفة الشائعة في المهرجانات. وكيف تؤدي هذه الألعاب؟ وهل تعتقد أنها جميعاً عادلة؟ وما هي فرص الفوز بالجائزة في كل من هذه الألعاب حسب اعتقادك؟ وأي الألعاب تعتقد أن الفوز فيها صعب جداً؟ وأيها الفوز فيها أسهل؟
- صمّم لعبتك الخاصة التي تحتوي على جوائز متنوعة للربح. كوّن الرسم الشجري الذي يبين النواتج الممكنة عند القيام بهذه اللعبة. وما احتمال أن تربح في لعبتك؟ وما احتمال أن تربح مرتين متتاليتين؟ وثلاث مرات؟ وهل لعبتك عادلة؟ وما احتمال ربح الجائزة الكبرى؟

- اعرض لعبتك على طلاب الصف، وكوّن نموذجاً لها ليؤديها الآخرون، إن كان ذلك ممكناً.

المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملاً الخطوات الآتية:

التعريف: تتكون الحادثة المتممة A' من جميع نواتج فضاء العينة غير الموجودة في الحادثة A .

مثال: إذا تكونت الحادثة A من العددين 1, 5 عند رمي حجر نرد فإن متممة A تتكون من 2, 3, 4, 6 من

سؤال: ما احتمال وقوع A أو متممتها؟ 1

فيما سبق:

درست النواتج والحوادث، واحتمالات الحوادث البسيطة في التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثل فضاء العينة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

لماذا؟

ألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع النواتج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.



منظم أفكار

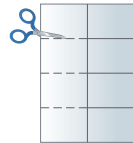
المطويات

الاحتمالات اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الاحتمالات مستعملاً ورقة A3.

4 اكتب العناوين كما في الشكل.



3 قص كل خط طي أفقياً في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.



2 اطو الورقة نصفين مرتين.



1 اطو الورقة طولياً.



وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

منظم أفكار

المطويات

غرضها يدوّن الطلاب ملاحظاتهم أثناء دراستهم الاحتمالات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس وحفزهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة.
فقم	بمراجعة العمليات على الكسور، وحساب الاحتمالات النظرية والتجريبية لبعض الحوادث.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

اختبار سريع

بسّط كلّاً مما يأتي: للأسئلة 1-6 انظر الهامش

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{8} & \quad (2) \quad \frac{7}{9} + \frac{2}{6} & (3) \quad \frac{2}{5} + \frac{7}{8} \\ (4) \quad \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} & \quad (5) \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{21}{24} & (6) \quad \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(7) كرة قدم: لدى فريق كرة قدم 54 L من الماء البارد في قوارير سعة كلّ منها 500 ml. كم قارورة لديهم؟ 108

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{بضرب البسط في البسط} \\ \text{والمقام في المقام} \\ \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 1}{9 \cdot 2} \\ = \frac{6}{18} \\ \text{بالتبسيط} \\ = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

مثال 2

إذا ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$\begin{aligned} P(5) &= \frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 هو $\frac{2}{3}$ ، ويساوي 67% تقريباً

مثال 3

النتيجة	الإشارات	التكرار
1		4
2		7
3		8
4		4
5		2
6		5

في تجربة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5.

$$\begin{aligned} P(5) &= \frac{\text{عدد مرات ظهور 5}}{\text{عدد جميع النواتج}} = \frac{2}{30} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

الاحتمال التجريبي للحصول على 5 هو $\frac{1}{15}$ ويساوي 6.7% تقريباً

إذا ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كلّ مما يأتي: للأسئلة 8-11 انظر الهامش

- (8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1
(9) أن يكون العدد الظاهر فردياً
(10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2
(11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6)

(12) احتمالات: ألقي مجسم ذو 20 وجهاً متطابقاً، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 26 ما عدا الأعداد 4، 8، 12، 16، 20، 24. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عدداً أولياً؟ $\frac{9}{20}$ أو 45%

يبين الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 1-4.

(14) $\frac{9}{20}$ أو 45%

(15) $\frac{11}{20}$ أو 55%

$\frac{1}{5}$ أو 20%

النتيجة	الإشارات	التكرار
1		3
2		7
3		6
4		4

- (13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟
(14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟
(15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

إجابات:

- (1) $\frac{7}{8}$
(2) $1\frac{1}{9}$
(3) $1\frac{11}{40}$
(4) $\frac{1}{9}$
(5) $\frac{3}{8}$
(6) $\frac{1}{15}$
(8) $\frac{5}{6}$ ويساوي 83% تقريباً
(9) $\frac{1}{2}$ أو 50%
(10) $\frac{1}{6}$ ويساوي 17% تقريباً
(11) $\frac{1}{3}$ أو 33%

تمثيل فضاء العينة Representing Sample Spaces



لماذا؟

في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أي الفريقين سيختار المكان في الملعب أولاً. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العينة

لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

مثال	التعريف
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقاً جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

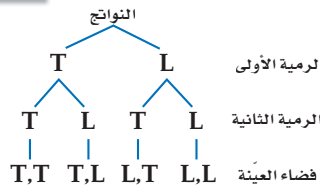
فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1 تمثيل فضاء العينة

ألقيت قطعة نقد مرتين، مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري. هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

الجدول	القائمة المنظمة
اكتب أزواج النواتج الممكنة من الرمية الأولى مع النواتج الممكنة من الرمية الثانية. في الصف العلوي.	L, L L, T T, L T, T

الناتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T



تحقق من فهمك

1 أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضاً. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري. **انظر ملحق الإجابات**

فيما سبق؟

درستُ حساب الاحتمال التجريبي.

والآن؟

- أستعمل القوائم، والجدول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات؟

فضاء العينة
sample space

الرسم الشجري
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العدّ الأساسي
Fundamental Counting Principle

www.oibeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

إيجاد النواتج والحوادث لتجربة ما.

الدرس 7-1

استعمال القوائم، والجدول، والرسوم الشجرية لتمثيل فضاء العينة.

استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

ما بعد الدرس 7-1

استعمال التباديل والتوافيق مع الاحتمال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- ما الذي يجعل تجربة إلقاء قطعة النقد عادلة؟

فرصة ظهور أي من وجهي قطعة النقد متساوية.

- ما الطرق الأخرى العادلة التي تحدّد من يبدأ اللعب أولاً؟ **رمي مكعب مرقم.**

إرشادات للدراسة

المكعب المرقم

هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6



مصادر الدرس 7-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (113)	• تنوع التعليم، ص (113, 117)	• تنوع التعليم، ص (113, 117)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمّت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من واقع الحياة



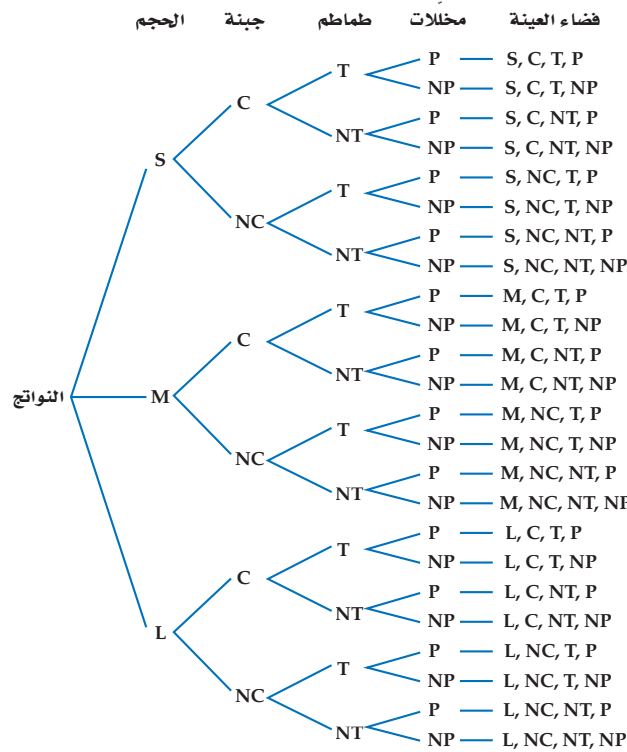
شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر اللحم بثلاثة أحجام (صغير - وسط - كبير)، بالجينة والبطاطم والمخللات، أو باثنين منها، أو بأحدها، أو بدونها.

مثل فضاء العينة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تتكون التجربة من أربع مراحل هي:

- اختيار حجم شطيرة اللحم (S: صغير، M: وسط، L: كبير).
- اختيار الجينة (مع جينة C، بدون جينة NC).
- اختيار البطاطم (مع بطاطم T، بدون بطاطم NT).
- اختيار المخلّلات (مع مخلّلات P، بدون مخلّلات NP).

أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



تحقق من فهمك

(2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي (S) أو أسود (B) أو أحمر (R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/أو غطاء للجهاز (W). مثل فضاء العينة لهذا الموقف بالرسم الشجري. **انظر ملحق الإجابات**

الدرس 7-1 تمثيل فضاء العينة 113

تمثيل فضاء العينة

المثالان 1، 2 يبيّنان كيفية إيجاد مجموعة النواتج الممكنة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو رسم شجري.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

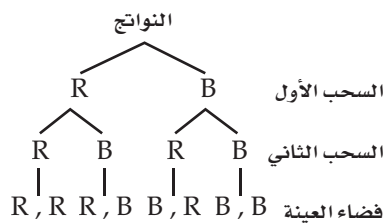
1

وضعت قطعة معدنية حمراء (R) وأخرى سوداء (B) في حقيبة. وسحبت قطعة واحدة وسجل لونها، ثم أعيدت إلى الحقيبة وسحبت قطعة مرة أخرى. مثل فضاء العينة لهذه التجربة بعمل قائمة منظمة، و جدول، ورسم شجري. **القائمة المنظمة هي BB, BR, RB, RR.**

الجدول

الناتج	أحمر (R)	أسود (B)
أحمر (R)	RR	RB
أسود (B)	BR	BB

الرسم الشجري



طعام: يقدم أحد المطاعم الكبسة بلحم الضأن أو لحم العجل أو الدجاج، ويضاف إليها حسب رغبة الزبون الصنوبر والزبيب والبيض أو اثنين منها، أو أحدها، أو بدونها. مثل بالرسم الشجري النواتج الممكنة لاختيار وجبة الكبسة. **انظر إجابات الطلبة**

2

تنويع التعليم

دون ضمن هون

المتعلمون المنطقيون ورّع الطلبة في مجموعات ثلاثية أو رباعية، وزوّد كل مجموعة بأربع أو ست أدوات مختلفة. وحفّز المجموعات لتكوين أكبر عدد ممكن من الطرق المختلفة التي يمكن تجميع الأدوات فيها. واطلب إليهم أن يرسموا هذه التجمعات ويسجلوا عددها وذلك باستعمال أداة واحدة كل مرة ثم اثنين ثم ثلاث وهكذا. وحفّز بعض المجموعات أن تجد العدد الكلي لجميع التجمعات الممكنة عندما يكون الترتيب مهمًا (أي أن ABC تختلف عن BCA)، وعندما لا يكون الترتيب مهمًا (أي أن ABC و BCA تمثل تجمعًا واحدًا). ثم اطلب إلى المجموعات أن تعرض على طلاب الفصل الرسوم التي أعدتها وعدد التجمعات التي أوجدتها.

مبدأ العد الأساسي قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العينة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عملياً أو ضرورياً. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي **مبدأ العد الأساسي**

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز:

في تجربة عدد مراحلها k ، افترض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

$\vdots$

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب

يُسمى مبدأ العد الأساسي أحياناً قاعدة الضرب للعد.

تنبيه!

اختيارات ذكّر الطلبة في المثال 2، أن اختيار أحد البدائل يُعدّ ناتجاً واحداً، وأن عدم اختياره يكون أيضاً ناتجاً يجب أن يسجل في فضاء العينة.

مبدأ العد الأساسي

مثال 3 يبيّن كيفية إيجاد عدد النواتج الممكنة دون كتابتها.

عدد الخيارات	البدائل
5	القماش
6	اللون
3	الأكمام
3	القبة
2	الفتحة الأمامية
2	الأزرار

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوب من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوباً مناسباً؟

استعمل مبدأ العد الأساسي.

$$1080 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 6 \times 5$$

الأزرار الفتحة الأمامية القبة الأكمام اللون القماش

إذن لدى سعد 1080 خياراً ليختار ثوباً مناسباً.

تحقق من فهمك

- نموذج الإجابة
- (A) (B) (C) (D)
 - (A) (B) (C) (D)
 - (A) (B) (C) (D)
 - (A) (B) (C) (D)
 - (A) (B) (C) (D)
 - (A) (B) (C) (D)
 - (T) (F)
 - (T) (F)
 - (T) (F)
 - (T) (F)

- (3) أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:
- (A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور. **65536**
- (B) رمي مكعب مرقم أربع مرات. **1296**
- (C) أحذية: اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء. **168**



الربط مع الحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

مثال إضافي

سيارات: توجد في السيارات الجديدة إضافات عديدة موضحة في الجدول أدناه، فما عدد النواتج الممكنة لاختيار سيارة من بينها؟

عدد البدائل	الإضافات
11	اللون الخارجي
7	اللون الداخلي
2	مواد المقاعد
2	المحرك
4	الإطارات
3	الأبواب

3696

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية اطلب إلى الطلبة تسمية مجموعات مختلفة من إعدادات التصوير المتوافرة (أبعاد الصورة، جودة الصورة، الإضاءة، ... إلخ). واستعمل هذه الإعدادات لإيجاد عدد البدائل المختلفة الممكنة لإعدادات آلة التصوير. ثم اطلب إلى الطلبة أن يلخصوا نتائجهم باستعمال جدول أو أساليب عرض أخرى.

المحتوى الرياضي

التباديل هي توسيع لمبدأ العد الأساسي على أن يُعدّ كل ترتيب وحيد من النواتج حادثة وحيدة.

إرشادات للمعلم الجديد

مبدأ العد الأساسي يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي للتحقق من أنه قد تم إدراج جميع النواتج الممكنة في فضاء العينة لتجربة ما.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-4 للتأكد من فهم الطلبة.
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة
لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب
مستوياتهم.



عدد البدائل	قائمة المأكولات
8	المقبلات
4	الحساء
6	السلطة
12	الطبق الرئيس
9	الحلوى

(4) عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكل صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كل صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟ **20736**

مثال 1

للأسئلة 1-3 انظر ملحق
الإجابات

مثال 2

مثال 3

تدرب وحل المسائل

مثال 1

للأسئلة 5-7 مثل فضاء العينة لكل تجربة ممّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:
(5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.
(6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تبادل ثقافي خلال كل من السنتين الأخيرتين في الكلية، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.
(7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلثات؛ أحدهما يشتمل على مثلث منفرج الزاوية (O) أو مثلث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلث متطابق الضلعين (E) أو مثلث مختلف الأضلاع (N).



(8) **رسم:** ينقذ بعض الطلاب مشروعات للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

مثال 2

مثل فضاء العينة مستعملًا الرسم الشجري في كل ممّا يأتي:
(9) **سيارات:** يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاح (N) و/ أو سقف متحرك (R).
(10) **حقائب:** يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحجام، وقد يكون لون الحقبة أسود أو بنيًا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح أو قفل أرقام.

حقائب سفر	
الحجم	اللون
كبير (H)	أسود (B1)
صغير (S)	بني (B2)
	أزرق (B3)
الحماية: مفتاح (K) أو قفل أرقام (N)	

الدرس 7-1 تمثيل فضاء العينة 115

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	11-5، 17-29
ضمن المتوسط	11-5، 13-15، 17-29
فوق المتوسط	12-29

مثال 3 (11) تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الأول و 4 طلاب للنشاط الثاني و 5 طلاب للنشاط الثالث و طالبان للنشاط الرابع، على أن لا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟ **120**

(12) **فن:** أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثل فضاء العينة باستعمال الجدول والرسم الشجري. **انظر ملحق الإجابات**



(13) **إفطار:** الإعلان المجاور، يوضح قائمة وجبة الإفطار في أحد المطاعم، حيث يقدم البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز التخلالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز، إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟ **18**

(14) **دراجات:** اشترى عصام قفلاً رقمياً لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9.

- (a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟ **10000**
(b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضح إجابتك. **انظر الهامش**

(15) **تمثيلات متعددة:** تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولاً دور المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقي مكعباً مرقماً، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدور المؤشر 2.



- (a) **هندسياً:** استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة للتجربة. **انظر ملحق الإجابات**
(b) **منطقيًا:** ارسم شكل فن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة. **انظر ملحق الإجابات**
(c) **تحليليًا:** ما عدد النواتج الممكنة؟ **20**
(d) **لفظيًا:** هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضح إجابتك.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في السؤال 15 الرسم الشجري وأشكال فن، لتمثيل فضاء العينة للتجربة.

إجابات:

(14b) 5040؛ إجابة ممكنة: يوجد 10

خيارات للرقم الأول في المجموعة. وبما أنه لا يمكن لعصام أن يستعمل الرقم إلا مرة واحدة فإن هناك 9 خيارات للرقم الثاني و 8 للرقم الثالث و 7 للرقم الرابع. ويكون عدد الطرق الممكنة مساوياً لـ $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

(15d) إجابة ممكنة: لا؛ بما أن المرحلة الثانية تعتمد على ما يحدث في المرحلة الأولى من التجربة فلا يمكن ضرب عدد نواتج كل مرحلة، بل يجب أن تجد عدد النواتج الممكنة لكل مرحلة ثم تجمعها.

(16) **تحذّر:** يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع،

فما عدد النواتج الممكنة؟ برر إجابتك. **لأسئلة 16-20 انظر الهامش**

(17) **مسألة مفتوحة:** قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صف تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرر إجابتك.

(18) **تبرير:** تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p ، ووضح إجابتك.

(19) **اكتب:** وضح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العد الأساسي.

(20) **اكتب:** وضح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

(21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟ **B**

A 4
B 6
C 8
D 9

(22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسيًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟ **C**

A 12
B 35
C 60
D عدد لانهائي

مراجعة تراكمية

أوجد الحد التالي في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

(23) $3, 12, 48, 192, \dots$ (الدرس 3-6) **768**

(24) $-10, -6, -2, 2, \dots$ (الدرس 6-2) **6**

حل كلًا من المعادلتين الآتيتين (الدرس 5-6)

(25) $1 + \frac{3}{x-1} = \frac{10}{7}$ **8**

(26) $1 - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{3}$ **768**

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

(27) $\frac{9}{2} \cdot \frac{3^3}{3 \cdot 2}$ **12**

(28) $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$ **96**

(29) $\frac{4^4 \cdot 3}{2 \cdot 4}$ **96**

الدرس 7-1 تمثيل فضاء العينة 117

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا حول العلاقة بين ما تعلموه عن تمثيل فضاء العينة واستعمال مبدأ العد الأساسي مع التباديل والتوافيق.

إجابات:

(16) $2n + 3n^2 - n^3$ ؛ إجابة ممكنة:

يوجد n من العناصر في الصندوق

عند سحب العنصر الأول. لذا

يوجد $n - 1$ من النواتج الممكنة

بعد سحب العنصر الأول، ويوجد

$(n - 2)$ من النواتج الممكنة بعد

سحب العنصر الثاني. إذن، عدد

النواتج الممكنة يساوي حاصل

ضرب أعداد النواتج الممكنة لكل

تجربة، أو $n(n - 1)(n - 2)$

(17) إجابة ممكنة: في تجربة اختيار واحد

من صندوقين أحدهما أزرق والآخر

أحمر. ثم سحب كرة من الصندوق

الذي اخترته عشوائيًا دون النظر فيه،

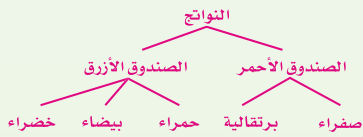
فإذا كان في الصندوق الأزرق كرة

حمراء وكرة بيضاء وكرة خضراء،

وفي الصندوق الأحمر كرة صفراء

وكرة برتقالية. فإن النواتج تمثل على

النحو الآتي:



(18) $p = n^k$ ؛ إجابة ممكنة: المجموع

الكلي لعدد النواتج الممكنة

يساوي حاصل ضرب عدد النواتج

لكل مرحلة من 1 إلى k . وبما أنه

يوجد k من المراحل، فإنك توجد

$n \times n \times \dots \times n$ من المرات وهذا

يساوي n^k .

(19) إجابة ممكنة: يكون الرسم الشجري

ضروريًا إذا أردت عرض فضاء العينة

لتجربة أو إذا أردت أن تعرف عدد

مرات ظهور ناتج معين. أما في حال

معرفة عدد النواتج الممكنة فيمكن

استعمال مبدأ العد الأساسي.

(20) في الجدول يوجد أسطر وأعمدة

فقط للمرحلتين الأولى والثانية، فإذا

كانت التجربة أكثر من مرحلتين فلا

يوجد مكان لوضع المرحلة الثالثة

وما بعدها.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 7

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6)

دون

الاسم: التاريخ:

7-1 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل فضاء العيننة

تمثيل فضاء العيننة: فضاء العيننة لتجربة ما هو مجموعة النتائج الممكنة لجميعها، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

مثال
بنتار كمال بدلة وقميصاً وربطة عنق مناسبة للعمل وفق قائمة الملابس المجاورة. استعمال الرسم الشجري لتمثيل فضاء العيننة للملابس العمل التي يلبسها كمال.

- يتكون فضاء العيننة من ثلاث مراحل هي:
- لون البدلة (G, B, K)
- لون القميص (W, L)
- الربطة (T, NT)

مثل بالرسم الشجري الذي يتكون من ثلاث مراحل.

تساويين، مثل فضاء العيننة لكل تجربة كما يأتي مستعملاً القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

- 1) يمكن أن يلبس فريق كرة السلة قمصاناً زرقاء أو بيضاء مع بنطالين زرقاء أو بيضاء.
- 2) مشاهدة طلاب مدرسة مباراة كرة قدم أو كرة سلة على ملاعب الجامعة أو ملاعب النادي الرياضي.
- 3) يمكن أن يشرط طلق مصير الفلاح أو الحليب من قبتنة أو فتجان.
- 4) يتكون الجزء الأول من اختبار من سؤالين من نوع الصواب أو الخطأ.

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

6

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (7)

دون

الاسم: التاريخ:

7-1 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل فضاء العيننة

مبدأ العد الأساسي: يمكن إيجاد عدد النتائج الممكنة لتجربة ما، بقسمة عدد النتائج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

مثال
يتكوّن نمط لوحة سيارة من ثلاثة أحرف إنجليزية متبوعاً بثلاثة أرقام على ألا يكون الحرف O أحد الحروف المستعملة، ولا يكون الرقم 0 أحد الأرقام المستعملة في اللوحة. ويمكن استعمال أي حرف آخر، أو أي رقم آخر أكثر مرة في اللوحة الواحدة.

ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها بهذا النمط؟

استعمل مبدأ العد الأساسي.

عدد النتائج الممكنة	الرقم الثالث	الرقم الثاني	الرقم الأول	الحرف الثالث	الحرف الثاني	الحرف الأول
11390625	$\times 9$	$\times 9$	$\times 9$	$\times 25$	$\times 25$	$\times 25$

لذا يمكن عمل 11390625 لوحة من هذا النمط.

تساويين،

أوجد عدد النتائج الممكنة في كل من الحالات الآتية:

- 1) زُيّن غرفة باختيار واحد من كل صنف .
- 2) يتكوّن طعام الغداء في مطعم من اختيار واحد من كل صنف.

ديكور غرفة النوم	عدد الخيارات
لون الدعان	8
مجموعة الفراش	6
السجاد	5
الأضياء	3
الستائر	5

288

3600

- 3) يريد عادل أن يزيّن حديقة منزله، فوجد في كُتُبًا حول خططات الحدائق والمساحات أربعة أنواع من البلاط وثلاثة أنواع من الأرضية و 5 أنواع من أقنعة المقاعد، وسوف يطلب نوعاً واحداً من كل صنف من الأصناف المذكورة. 60

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

7

تدريبات المهارات (8)

دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

7-1 تدريبات المهارات

تمثيل فضاء العيننة

مثل فضاء العيننة لكل تجربة كما يأتي مستعملاً القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

- 1) حصول سليم على وظيفة في الرياض أو جلة في فندق أو مطعم.
- 2) التحاق سامي في خيم كرة السلة أو كرة القدم مستشاراً أو إدارياً.
- 3) يمكن أن يشتري عابر ساعاً أو نظارة بـ 100 ريال أو 200 ريال.
- 4) 100 س، 100 ن، 200 س، 200 ن

الوقت	عدد
باقات القترات	16
نظام التسجيل	3
مدة الاتفاقية	3
اتفاقية الصيانة	2
الحافلات	2
الإنترنت	2

1152

- 6) يوجد في متجر لبيع الهدايا 4 أنواع مختلفة من الشمي، و 8 أنواع من الحلوى و 5 تصميمات مختلفة من البالونات و 3 ألوان من الورود، وتتكوّن الهدية من اختيار واحد من كل من هذه الأصناف الأربعة.
- 7) يلبس سمير زياً يتكون من بنطال وقميص وجاكيت وجوارب وحذاء. ويوجد لديه 6 بنطالين و 6 قمصان و جاكيتان و 6 أزواج من الجوارب و 3 أزواج من الأحذية.

480

1296

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

8

تدريبات حل المسألة (9)

دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

7-1 تدريبات حل المسألة

تمثيل فضاء العيننة

- 1) **لوزم مدرسية:** تسوّق هند لشراء متعلّقات مدرسية. إذا كان لديها بدل واحد من كل مما يأتي: 6 حقائب مدرسية و 8 دقائق ملاحظات. 3 حافظات أقلام. و 3 أنواع من أقلام الرصاص و 8 أنواع من أقلام الحبر. و 4 أنواع من الآلات الحاسبة، فما عدد البدائل المختلفة المتاحة هند؟

13824

- 2) **حاسوب محمول:** تريد سامية أن تشتري حاسوباً محمولاً، ولديها بدل واحد من كل مما يأتي: 3 أحجام لشغل القرص الصلب، و 3 سرعات لوحة المعاغة المركزية، و 4 ألوان للجهاز، وقياسات للشاشة. ونوعين من الكفالة. و 4 حقائب. إذا رغبنا سامية في شراء جهاز أزرق اللون مع أطول مدة كفالة. فما عدد الخيارات المتاحة لها؟

72

- 3) **القرص المضغوط:** الموشر في الشكل أدناه في القرص الدوار. إذا أدير الموشر 4 مرات، فما عدد النتائج الممكنة؟

1296

- 5) **الاستجمام في الإجازات:** تصف نشرّة سياحية إمكانية الاستجمام في الإجازات في جدة والطائف. ويمكن اختيار الإقامة مدة أسبوع أو أسبوعين في الطائف في شقة فيها غرفة نوم واحدة أو غرفتا نوم. ويمكن الإقامة مدة أسبوع أو أسبوعين أو ثلاثة أسابيع في جدة، في شقة فيها غرفتا نوم أو ثلاث غرف نوم على الشاطئ أو بعيداً عنه.

- a) ما عدد النتائج الممكنة في الطائف؟
- b) ما عدد النتائج الممكنة في جدة؟

4

12

- 6) يوجد في متجر لبيع الهدايا 4 أنواع مختلفة من الشمي، و 8 أنواع من الحلوى و 5 تصميمات مختلفة من البالونات و 3 ألوان من الورود، وتتكوّن الهدية من اختيار واحد من كل من هذه الأصناف الأربعة.
- 7) يلبس سمير زياً يتكون من بنطال وقميص وجاكيت وجوارب وحذاء. ويوجد لديه 6 بنطالين و 6 قمصان و جاكيتان و 6 أزواج من الجوارب و 3 أزواج من الأحذية.

480

1296

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

9

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 7

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)

ضمن فوق

كتاب التمارين (16)

دون ضمن فوق

الاسم: _____

التاريخ: _____

7-1 التدرّيبات الإثرائية

مسألة مندوب المبيعات المتجول

يخطط مندوب مبيعات لبيع منتج في عدة مدن مختلفة. ويرغب أن يحدد أقصر مسار يسلكه لزيارة كل مدينة والعودة إلى المكان الذي بدأ منه. فكيف يجد المندوب أقصر مسار يسلكه لیسافر إلى كل مدينة؟

تسمى هذه المسألة مسألة مندوب المبيعات المتجول، ويبدو أنها بسيطة، ولكن ثبت أن إيجاد حل فعال لهذه المسألة صعب جداً في الحقيقة. أثراً الآن فقد تمّ التوصل إلى حل باستعمال الحاسوب، ويتصل في البحث عن جميع الحلول الممكنة للمسألة. يبحث الحاسوب عن جميع التوافيق الممكنة لزيارة المدن، ويحسب طول كل توفيق، ثم يجد المسافة الأقصر. وعلى الرغم من مساعدة الحاسوب، إلا أنه من غير الواضح أنه قد توصل إلى الحل العام الأكثر فاعلية.

أوجد عدد الطرق التي يمكن أن يزورها شخص 5 مدن مختلفاً، ثم يعود إلى المدينة الأولى.

إذا بدأ شخص من إحدى المدن، فإنه يبقى 4 مدن أخرى عليه أن يزورها. ثم 3 مدن وبعدها مدينتان وأخيراً مدينة واحدة. بعد ذلك يتعين أن يعود إلى المدينة الأساسية لذا:

الرابعة: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

يوجد 24 طريقة مختلفة لزيارة 5 مدن.

تمارين:

أوجد عدد عناصر فضاء العينة لزيارة n من المدن على أن يعود إلى المدينة الأولى.

(1) $n = 7$	(2) $n = 3$	(3) $n = 8$
720	2	5040
(4) $n = 11$	(5) $n = 12$	(6) $n = 4$
3628800	39916800	6

الفصل السابع: الاحتمالات

7-1 تمثيل فضاء العينة

مثل فضاء العينة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:

(1) يمكن أن ينهي راشد العطلة الصيفية مع أبناء عمه (C) أو مع جديته (G)، في البيت (L) أو على الشاطئ (B).

النتيجة	الحدث (A)	الحدث (B)	الحدث (C)	الحدث (D)
1	C, L	C, B	G, L	G, B
2	B, L	B, B	L, L	L, B
3	L, L	L, B	B, L	B, B

C, L; C, B; G, L; G, B

(2) يمكن أن يكتب هشام مقالته الأخيرة في المكتبة (L) أو في البيت (H)، حول موضوع علمي (S) أو تاريخي (T).

النتيجة	الحدث (A)	الحدث (B)	الحدث (C)	الحدث (D)
1	S, L	S, H	T, L	T, H
2	L, L	L, H	H, L	H, H
3	H, L	H, H	L, L	L, H

S, C; S, H; T, C; T, H

(3) يمكن أن يلتحق فراس بسلاح الطيران (A) أو بسلاح البحرية (B)، قبل التخرج في الكلية (C) أو بعد ذلك (S).

النتيجة	الحدث (A)	الحدث (B)	الحدث (C)	الحدث (D)
1	A, C	A, S	B, C	B, S
2	C, C	C, S	S, C	S, S
3	S, C	S, S	C, C	C, S

A, C; A, S; B, C; B, S

أوجد عدد التوافيق الممكنة لكل موقف مما يأتي:

(4) ينتج أحد المصانع أحياناً للأطفال على النحو الآتي:

(5) يقدم أحد محال المتعلجات كروب الأيسكريم على النحو الآتي:

عدد الطائرات	نوع الطائرات
3	شغل القلوب
10	الصفافي
4	إضافة المصبرات
8	إضافة الفواكه
960	المجمعة

عدد الطائرات	نوع الطائرات
3	شغل القلوب
10	الصفافي
4	إضافة المصبرات
8	إضافة الفواكه
960	المجمعة

(6) توزع مؤسسة هدايا للأطفال مكونة من نوع واحد من كل مما يأتي:

4 ملاقات من رقائق البطاطس، 4 أنواع من البسكويت، 4 أنواع من العصائر، 8 أنواع من الحلوى. 512

(7) تقويم، يختار مروان برنامجاً تدريبياً من بين 4 برامج في تخصصه، تنظمها 3 مؤسسات تدريبية. ما عدد الخيارات المتاحة أمامه لاختيار برنامجاً مناسباً؟ 12

16

10

الفصل 7: الاحتمالات

الفصل: التفاضل والتكامل

ملاحظات المعلم

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

Probability with Permutations and Combinations



لماذا؟

وقف يوسف وعليّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليسار، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العد الأساسي يوجد $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء. يمكن كتابة العبارة $4 \times 3 \times 2 \times 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4.

أضف إلى
مطوبتك

المضروب

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $0! = 1$ ، وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$ ، $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

مثال 1

الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة: نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌ منهم قميصًا مرقمًا من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العينة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحادثة، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية، إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 ويساوي $18! = (20 - 2)!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

$$\begin{aligned} \text{عدد نواتج الحادثة} &= \frac{18!}{20!} = P(2 \text{ نواف و 1 ماجد}) \\ \text{عدد النواتج الممكنة} &= \frac{18!}{20 \cdot 19 \cdot 18!} \\ &= \frac{1}{380} \end{aligned}$$

بإيجاد مفكوك $20!$ والقسمة على العوامل المشتركة

بالتبسيط

تحقق من فهمك

1 تصوير: ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟ $\frac{1}{12}$

فيما سبق:

درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن:

- استعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- استعمل التوافيق في حساب الاحتمال.

المفردات:

التباديل
permutations

المضروب
factorial

التباديل الدائرية
circular permutation

التوافيق
combinations

www.oibeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

استعمال مبدأ العد الأساسي.

الدرس 7-2

استعمال التباديل في حساب الاحتمال.

استعمال التوافيق في حساب الاحتمال.

ما بعد الدرس 7-2

إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال والمساحات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- لماذا يكون الترتيب في الصورة مهمًا؟ **إجابة ممكنة:** أطوال الأشخاص، تناسق ألوان الملابس، الأصدقاء.
- أيّ المواقف الأخرى قد يكون فيها ترتيب الأشياء مهمًا؟ **إجابة ممكنة:** عند إعداد بعض أنواع الحلوى يكون الترتيب مهمًا عند خلط المكونات.
- أيّ المواقف قد لا يكون فيها ترتيب الأشياء مهمًا؟ **إجابة ممكنة:** وضع التوابل والمقبلات على الطعام.

مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (121)	• تنوع التعليم، ص (121, 124)	• تنوع التعليم، ص (124, 121)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)



ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائياً ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العد الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360.

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

الاحتمال باستعمال التباديل

الأمثلة 1-4 تبين كيفية استعمال التباديل لإيجاد عدد الطرق الممكنة لترتيب العناصر.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 مسابقة مواهب: تقدم عبدالله

وفصل من ضمن 30 طالباً إلى مسابقة في الشعر. وقد دُعي الطلاب عشوائياً لتقديم أشعارهم أمام لجنة التحكيم. ما احتمال أن يدعى عبدالله أولاً وفصل ثانياً؟ $\frac{1}{870}$

2

عُرض 12 رأساً من الخيل للبيع؛ أربعة منها لونها بني، وأربعة لونها أسود، وثلاثة منقط، وواحدة بيضاء اللون. ما احتمال بيع جميع الخيول البنية أولاً؟ $\frac{1}{495}$

مفهوم أساسي

التباديل

أضف إلى مطوبتك

بالرموز: يرمز إلى عدد تباديل n من العناصر المتميزة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$$

2 مثال الاحتمال والتباديل

يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيساً، ونائباً للرئيس، وأميناً للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائياً؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جداً. عدد النواتج الممكنة في فضاء العينة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي ${}_{10}P_3$

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيساً ومحمد نائباً ومهند أميناً للسر يساوي $\frac{1}{720}$

تحقق من فهمك

(2) تستعمل الأرقام 1-9 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

(A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟ 362880

(B) إذا اخترت بطاقة جامعية عشوائياً، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976، 67953124؟ $\frac{2}{362880}$



قراءة الرياضيات

متمايز يعني مصطلح عناصر متميزة أن العناصر مختلفة بطريقة ما.

إرشادات للدراسة

العشوائية: عندما يتم اختيار النواتج عشوائياً تتساوى فرص وقوعها، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

المحتوى الرياضي

التباديل عند كتابة التباديل على الصورة ${}_nP_r$ ، تدل r على عدد العوامل المتتالية المضروبة في بعضها، و n على العامل الأول. فمثلاً الرمز ${}_6P_4$ يدل على أخذ 4 عوامل متتالية تبدأ بالعدد 6 وهي $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. وهذا هو الناتج نفسه من تطبيق قانون التباديل والاختصار. ويستعمل الرمز ${}_nP_r$ أحياناً بدلاً من الرمز ${}_nP_r$.

تكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المتميزة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

أضف إلى
مطويتك

التباديل مع التكرار

مفهوم أساسي

عدد التباديل المتميزة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ... فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$



الربط مع الحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة "فاسقيناموه" من الآية 22 من سورة الحجر.

الاحتمال والتباديل مع التكرار

مثال 3

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفاً مبعثرة، ويطلب منه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلاً لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المتميزة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

وذلك باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائياً يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$

تحقق من فهمك

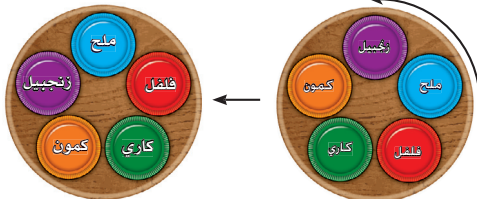
(3) **أرقام هواتف:** ما احتمال أن يكون رقمًا لهاتف مكون من 8 أرقام هي 5, 1, 6, 5, 2, 1, 5, 3

$$\frac{1}{3360}$$

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعاً واحداً نحو اليسار (مثلاً)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولاً من اليمين بدلاً من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي 5!



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى الترتيب الممكنة **تباديل دائرية**، فإذا وضعت عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلاً) موضعاً واحداً لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضاً.



لذا فإن تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5} \cdot 5!$ الكلي عندما توضع العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5 - 1)!$$

مثال إضافي

3

بلاط: يحتوي صندوق على

5 بلاطات زرقاء (bl)، وبلاطتين

ذهبيتين (gd)، وبلاطتين خضراوين

(gr) موضوعة عشوائياً دون

ترتيب. والنمط المطلوب هو

bl, gd, bl, gr, bl, gd, bl, gr, bl

إذا اخترت تبديلاً من هذه

البلاطات عشوائياً، فما احتمال

اختيار البلاطات في التسلسل

المطلوب؟ $\frac{1}{756}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي ذكر الطلبة بإعادة قراءة السؤال الذي سيجيبون عنه، وأن يتحققوا من معقولية إجاباتهم. فمثلاً في المثال 3 يمكن أن يحسب الطلبة عدد التباديل ويكتبوا الإجابة 1260، وإذا أعادوا قراءة المسألة سيلاحظون أن المطلوب هو احتمال تبديل معين والذي يساوي $\frac{1}{1260}$

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجع ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدّد مسبقاً في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستعامل خطئاً وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

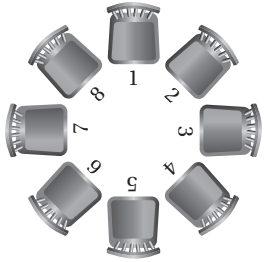
عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر يساوي عدد التباديل الخطية لها مقسوماً على عددها.

مثال إضافي

4

أوجد الاحتمال المشار إليه في كل مما يأتي، ووضح تبريرك:

(a) إذا جلس 8 طلاب عشوائياً على مقاعد موضوعة بشكل دائري كما في الشكل أدناه. فما احتمال أن يجلس الطلاب حسب الترتيب المبين؟



$\frac{1}{5040}$ ؛ بما أنه لا يوجد نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل دائري.

(b) إذا اشترت صندوقاً فيه 8 أقلام تلوين مرتبة عشوائياً. فما احتمال أن يكون قلم التلوين الذي في أقصى اليسار أحمر؟

$\frac{1}{8}$ ؛ بما أن الأقلام مرتبة في صف فإن هذا تبديل خطي.

مثال 4

الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

(a) **زينة:** إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائياً، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن

احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.



(b) **طعام:** جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟ بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6. لذا فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

تحقق من فهمك

(4) **كرة قدم:** تجمع فريق كرة قدم مكون من 11 لاعباً على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة.

(A) ما احتمال أن يقف قلب الهجوم عن يمين حارس المرمى مباشرة، إذا تجمع الفريق بشكل عشوائي؟ وضح تبريرك. **انظر الهامش**

(B) إذا وقف حاكم المباراة تماماً خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضح تبريرك.



الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق** هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظفين من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظفين غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظفين.

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{، حيث } {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

إجابة (تحقق من فهمك):

(4A) $\frac{1}{10}$ ؛ بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل دائري. يوجد

$(11-1)!$ أو $10!$ من التباديل

المتمايزة للاعبين. عدد النواتج التي يتكون منها الحدث المطلوب يساوي عدد تباديل اللاعبين التسعة الآخرين في التجمع أو $9!$. لذا، فإن احتمال أن يقف قلب الهجوم عن يمين حارس المرمى يساوي $\frac{9!}{10!}$ ، أو $\frac{1}{10}$.

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون قسّم الطلبة إلى مجموعات ثلاثية أو رباعية، وزوّد كل مجموعة بكمية من أربعة أشياء مختلفة، مثل حبوب الفاصولياء، أقراص ملونة أو خرز بلاستيك، ثم اطلب إلى إحدى المجموعات أن تكون جميع التوافيق الممكنة المكونة من شيئين، وأن تنفذ مجموعة أخرى النشاط نفسه بإيجاد عدد التباديل. وأن تجد مجموعات أخرى عدد التوافيق والتباديل لمجموعات مكونة من ثلاثة أو أربعة أشياء. واطلب إلى كل مجموعة أن تسجل على الورق جميع الطرق المختلفة التي رتبوا بها الأشياء. وعرض ما توصلت إليه على باقي طلبة الصف. وجه الطلبة إلى أن ينتهوا بصورة خاصة إلى الفرق بين عدد التوافيق والتباديل التي كوّنت من العدد نفسه من الأشياء.

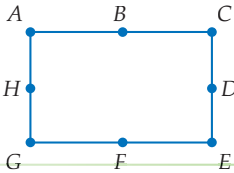
كرة طائرة: يريد مدرب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العينة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة أي ${}^{10}C_6$

$${}^{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي ${}_6C_1 = 1$ ، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_1}{{}^{10}C_6} = \frac{1}{210}$



هندسة: إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟ $\frac{1}{14}$

تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق
استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

الاحتمال باستعمال التوافيق

مثال 5 يبين كيفية إيجاد عدد طرق تنظيم مجموعة من الأشياء عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

مثال إضافي

5 وضعت في وعاء أحرف ممغنطة تمثل الحروف الهجائية العربية جميعها. إذا سُحبت 5 حروف من الوعاء عشوائيًا، فما احتمال أن تكون ب، هـ، ع، ل، م؟ $\frac{1}{98280}$

تأكد

هندسة: إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلث هو الأول والمربع هو الثاني؟

مثال 1

$$\frac{1}{20} = 0.05$$

معرض علمي: تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 15 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟ $\frac{1}{2730}$

مثال 2

أعداد: يتكون عدد من الأرقام 5, 6, 6, 3, 3, 3, 1. ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133؟ $\frac{1}{420}$

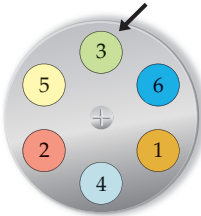
مثال 3

كيمياء: في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رُتبت عشوائيًا على منضدة دائرية.

مثال 4

(a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟ $\frac{1}{120}$

(b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟ $\frac{1}{6}$



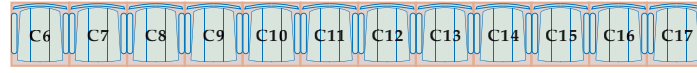
مسابقات: اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبد العزيز وخالد وفوزي؟ $\frac{1}{1365}$

مثال 5

تنوع الواجبات المنزلية

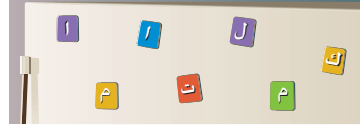
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	19-33، 16، 6-12
ضمن المتوسط	19-33، 17، 7-15 فردي
فوق المتوسط	13-33

- مثال 1 (6) محاضرات: ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟ $\frac{1}{132}$



- (7) حفلات: وُزعت بطاقات مرقمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزيد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزيد البطاقة رقم 23؟ $\frac{1}{2450}$

- مثال 2 (8) مجموعات: تم اختيار شخصين عشوائيًا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أو أولًا ثم سليم ثانيًا؟ $\frac{1}{90}$ أو 1% تقريبًا



- مثال 3 (9) أحرف ممغنطة: اشترى عدنان أحرفًا ممغنطة يمكن ترتيبها على باب ثلاجه، بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار تبديلًا من الأحرف المبنية في الشكل المجاور عشوائيًا، فما احتمال أن تشكل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟ $\frac{1}{1260}$

- (10) رموز بريدية: ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 39372375 إذا تم تكوينه عشوائيًا من الأرقام 3, 7, 3, 9, 5, 7, 2, 3؟ $\frac{1}{3360}$

- مثال 4 (11) مجموعات: يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟ $\frac{1}{7}$

- (12) مدينة ألعاب: ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟ $\frac{1}{8}$

- (13) ألعاب: رُتبت 8 كرات مرقمة بالأرقام 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 عشوائيًا في صف:

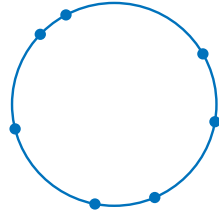
- (a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار؟ $\frac{1}{56}$
(b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًا، فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبين في الشكل أدناه؟ $\frac{1}{40320}$



- (c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًا بحيث شكلت دائرة، فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟ $\frac{2}{7}$

- (14) إذا وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8، وثلاث أرقامها 9، وكررة واحدة رقمها 6. فما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 عن يسار الكرة 6، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟ $\frac{1}{140}$

- مثال 5 (15) ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضح إجابتك. انظر الهامش



- (16) اختيرت 7 نقاط تقع على دائرة عشوائيًا كما في الشكل المجاور.
(a) إذا استعملت الأحرف من A إلى G، فما عدد الطرق التي يمكن أن تسمي بها النقاط على الدائرة؟ 5040
(b) إذا أعطيت إحدى النقاط حرفًا معينًا، فما عدد الترتيبات الممكنة؟ 720

إجابة:

(15) 45؛ إجابة ممكنة: عدد المستقيمات هو توافق 10 نقاط مأخوذة 2 في كل مرة، وهي $\frac{10!}{8!2!} = 45$

(17) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم أنها غير صحيحة أبداً ؟ برر إجابتك.

$nP_r = nC_r$ انظر ملحق الإجابات

(18) **تحذير:** يدعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: $r! \cdot nC_r = nP_r$.

بين صحة هذه العلاقة جبرياً، ثم وضح لماذا يختلف nC_r و nP_r بعامل مقداره $r!$. انظر الهامش

(19) **مسألة مفتوحة:** صف وضعاً يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{7C_3}$. انظر ملحق الإجابات

(20) **برهان:** برهن أن $nC_{n-r} = nC_r$. انظر الهامش

(21) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق. انظر الهامش

تدريب على اختبار

(24) **احتمال:** ألقى مكعب مرقم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقى المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟ **C**

- 1 **A**
 $\frac{9}{10}$ **B**
 $\frac{1}{6}$ **C**
 $\frac{1}{10}$ **D**

(22) **احتمال:** يقف رجلان وولدان في صف واحد. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟ **C**

- $\frac{1}{24}$ **A**
 $\frac{1}{12}$ **B**
 $\frac{1}{6}$ **C**
 $\frac{1}{2}$ **D**

(23) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت تبديلاً للأحرف المبيّنة أدناه عشوائياً، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟ $\frac{1}{1260}$

ف س ي س ف ي س ا

4 التقويم

فهم الرياضيات أعط الطلبة مسألة احتمال، واطلب إليهم أن يذكروا القانون الذي سيستخدمونه لإيجاد الاحتمال، ويبيّنوا السبب الذي يجعل القانون الذي اختاروه هو الأنسب للمسألة المعطاة.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 7-1، 7-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (49)

إجابات:

(18) **إجابة ممكنة:**

$$\begin{aligned} nC_r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ nP_r &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ r! \cdot nC_r &= r! \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!r!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= nP_r \end{aligned}$$

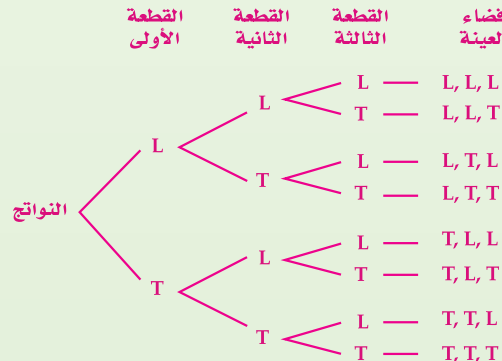
لذا فإن nC_r ، nP_r يختلفان في العامل $r!$ ؛ لأنه يوجد دائماً $r!$ من الطرق لترتيب المجموعات التي يتم اختيارها. لذا فإنه يوجد $r!$ تباديل لكل توفيق.

124 الفصل 7 الاحتمالات

تنويع التعليم

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا حول التأثير الممكن لفهم مبادئ الاحتمال وتطبيقها على اتخاذ قراراتهم في بعض المواقف. وشجعهم على استعمال أمثلة محددة ومفصلة لمواقف تؤيد طرق تفكيرهم.

(26)



$$\begin{aligned} nC_{n-r} &\stackrel{?}{=} nC_r \quad (20) \\ \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} &\stackrel{?}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ \frac{n!}{(n-r)!r!} &\stackrel{?}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ \frac{n!}{(n-r)!r!} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \checkmark \end{aligned}$$

(21) **إجابة ممكنة:** تستعمل كل من التباديل والتوافيق لإيجاد عدد الترتيبات الممكنة لمجموعة من العناصر. ترتيب العناصر مهم في التباديل، ولكنه غير مهم في التوافيق.

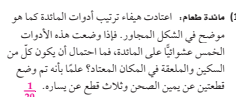
مصادر المعلم للأنشطة الصفية

دون دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

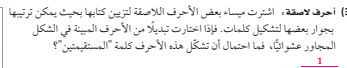
ضمن فوق

دون ضمن فوق

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



الانسان، المتبع،
الذي حقيقته لا تلت



الاسم: _____ التاريخ: _____

إيجاد التوافق باستخدام مثلث باسكال

عاش بليز باسكال (Blaise Pascal) من 19 يونيو 1623 إلى 19 أغسطس 1662

ملغى المثلث من الوحدات بشكل

انظر إلى الصف الفارغ في الشكل، واجمع كل مُدخلتين في الصف السابق لتجد مدخلات هذا الصف (انظر الأسهم)؛ لذا فإن الصف التالي سيكون: (1, 5, 10, 10, 5, 1). اكتب هذه الأعداد في الأماكن المحددة لها.

إحدى استعمالات القيم في مثلث باسكال هي إيجاد عدد التوافيق. فمثلاً القيمة C_2^5 هي المدخلة 2 في الصف 5. تذكر أن كل صف يبدأ بالمدخلة 0 (وقيمتهما 1 دائماً)، المدخلة 2 في الصف 5 هي 10؛ لذلك فإن $C_2^5 = 10$.

تعمارين:

تعمارين:

استعمل مثلث باسكال أعلاه للإجابة عما يأتي.

(1) اكتب الصفوف الثلاثة التالية في مثلث باسكال.

[illegible]

(2) استعمال مثلث باسکال لإيجاد C_3 .

35
(3) ما العلاقة بين قيمتي C_1 و C_2 ؟

متساویاتان .

متساويان .

(4) ما عدد أطباق البيتزا التي تحتوي على 3 إضافات تختار من بين 8 إضافات ممكنة؟

56

5) ما احتمال أن تحتوي البيئزا في السؤال 4 على الفلفل، والتفاح، والبصل؟

$\frac{1}{56}$

الصف: الثاني الثانوي

19

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 7-3

إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

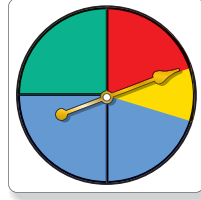
الدرس 7-3

إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال.

إيجاد الاحتمالات باستعمال المساحات.

ما بعد الدرس 7-3

إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة.



لماذا؟

في القرص ذي المؤشر الدوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

الاحتمال الهندسي احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياساً هندسياً مثل الطول أو المساحة **احتمالاً هندسياً**.

فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

والآن:

- أجد الاحتمالات باستعمال الطول.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحة.

المفردات:

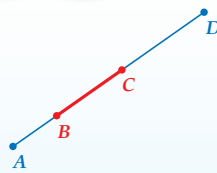
الاحتمال الهندسي
geometric probability

www.obeikaneducation.com

أضف إلى
مطوياتك

الاحتمال والطول

مفهوم أساسي



التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائياً، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:
$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E على $\overline{AD}$ عشوائياً، فإن
$$P(\text{تقع E على } \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- أي لون هو الأكثر احتمالاً ليستقر فوقه المؤشر؟ **الأزرق**
- أي لون هو الأقل احتمالاً ليستقر فوقه المؤشر؟ **الأصفر**

مثال 1

استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{JM}$ ، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.



$$\begin{aligned} P(\text{تقع X على } \overline{KL}) &= \frac{KL}{JM} \\ &= \frac{7}{14} \\ &= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \end{aligned}$$

بالتبسيط

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{JM}$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:
(1A) $P(\text{تقع X على } \overline{LM})$ (1B) $P(\text{تقع X على } \overline{KM})$ أو 79% تقريباً، $\frac{11}{14}$ ، أو 0.79 تقريباً،

(1A) $\frac{2}{7}$ ، أو 0.29 تقريباً
أو 29% تقريباً

مصادر الدرس 7-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (126)	• تنويع التعليم، ص (126, 129)	• تنويع التعليم، ص (126, 129)
كتاب التمارين	• ص (18)	• ص (18)	• ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16)	• تدريبات المهارات، ص (18)	• تدريبات المهارات، ص (18)
	• تدريبات المهارات، ص (18)	• تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات حل المسألة، ص (19)
	• تدريبات حل المسألة، ص (19)	• التدريبات الإثرائية، ص (20)	• التدريبات الإثرائية، ص (20)

يمكنك استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عدداً غير منتهٍ من النواتج.



الربط مع الحياة

تمتاز الحافلات بانخفاض تكاليف تشغيلها، واتساعها لعدد أكبر من الركاب، وهي أكثر وسائل النقل أماناً.

الاحتمال والطول

المثالان 1 و 2 يبينان كيفية إيجاد احتمال الحوادث التي تتضمن أطوالاً.

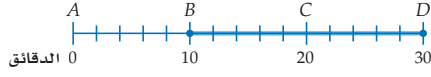
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال 2 من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره حافلة كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل من وصول الركاب. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:

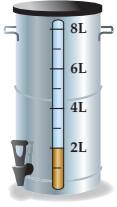


أوجد احتمال هذه الحادثة.

$$P(\text{انتظار 10 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

لذا فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريباً.

تحقق من فهمك



(2) **شاي:** يحضر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيراً ويختلف طعمه.

(A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L؟ $\frac{1}{4}$ أو 25%

(B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أي وقت بين 2L و 3L؟ $\frac{1}{8}$ أو 12.5%

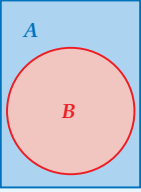
الاحتمال والمساحة تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضاً. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

مفهوم أساسي

الاحتمال والمساحة

أضف إلى مطوبتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائياً، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:



$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

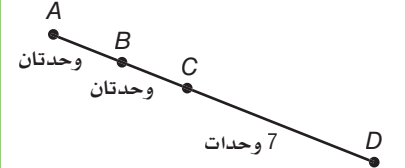
مثال:

وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدف ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة.
- أن احتمال وقوع الهدف في أي مكان من المنطقة متساوٍ.

مثالان إضافيان

1 إذا اختيرت النقطة Z عشوائياً على $\overline{AD}$ ، أوجد احتمال أن تقع Z على $\overline{AB}$.



$\frac{2}{11}$ ، أو 0.18 تقريباً أو 18% تقريباً

2 **مدارات:** يدور مذنب هالي حول الأرض كل 76 سنة. ما احتمال أن يكمل المذنب مداره خلال العقد القادم؟

$\frac{5}{38}$ ، أو 0.13 تقريباً أو 13% تقريباً

تنويع التعليم

دون ضمن خوف

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة نمذجة فضاء العينة باستعمال الاحتمالات الهندسية. إذ يمكن تمثيل كل حادثة بقطعة مستقيمة طولها يتناسب مع احتمالها. فمثلاً، يمكن تمثيل إلقاء قطعة نقد بقطعتين مستقيمتين متطابقتين، فيكون احتمال أن تقع نقطة على أي منهما يساوي 50%.



الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟
نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 3 m أو 1 + 1 + 1.

احتمال المساحة

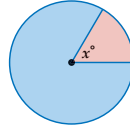
$$\begin{aligned} P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) &= \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}} \\ &= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2} \\ &= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$ ، ويساوي 11% تقريبًا.

تحقق من فهمك

(3) **الهبوط بالمظلات:** أوجد كلاً مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

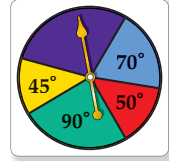
- (A) (أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء) $P = \frac{5}{9}$ ، أو 56% تقريبًا
(B) (أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء) $P = \frac{1}{3}$ ، أو 33% تقريبًا



يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.
إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية (x°) إلى 360° . ستبرهن هذا في السؤال 21.

مثال 4

استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي:
(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

(a) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر) P

قياس زاوية القطاع الأصفر 45°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \frac{45}{360} \approx 12.5\%$$

(b) (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P

قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \frac{105}{360} \approx 29\%$$

(c) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) P

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$

$$P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\%$$

تحقق من فهمك

(4A) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) P (4B) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق) P

الدرس 7-3 الاحتمال الهندسي 127



الربط مع الحياة

يهبط المظليون المحترفون المشاركون في بطولات الهبوط الحر بالمظلة على بعد أقل من بوصتين عن مركز مكان الهبوط.

الاحتمال والمساحة

المثالان 3، 4 يبيّنان كيفية إيجاد احتمال الحوادث التي تتضمن مساحات.

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية استعمال

أشياء مختلفة الألوان لتمثل مساحات مناطق مختلفة داخل شكل. واطلب إلى الطلبة نمذجة عدة مسائل تتضمن المساحات والاحتمال الهندسي وتوثيق ذلك باستعمال آلة التصوير.

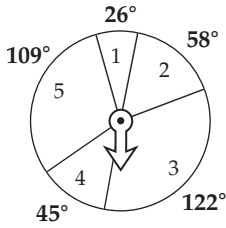
مثالان إضافيان

لعبة السهام: يتكون الهدف في

لعبة السهام من 3 دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية يساوي 4 in ويزداد نصف قطر كل دائرة عن الدائرة التي تسبقها بمقدار 3 in، إذا استقر سهم لاعب في الهدف فما احتمال أن يكون في الدائرة الداخلية؟

$\frac{1}{16}$ أو 6% تقريبًا

استعمل القرص ذي المؤشر الدوار أدناه، لإيجاد كل مما يأتي:



(a) (استقرار المؤشر على القطاع 3) P

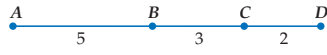
$\frac{122}{360}$ أو 34% تقريبًا

(b) (استقرار المؤشر على القطاع 1) P

$\frac{13}{180}$ أو 7% تقريبًا

المحتوى الرياضي

المساحة تذكر عند مقارنة مساحات الأشكال المتشابهة أن النسبة بين المساحات تساوي مربع النسبة بين أطوال الأضلاع.



إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{AD}$ فأوجد كلاً مما يأتي:

مثال 1

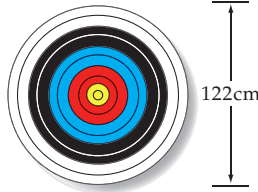
- (1) (أن تقع X على $\overline{BD}$ $P(\overline{BD})$ ، أو 0.5، أو $\frac{1}{2}$) (2) (أن تقع X على $\overline{BC}$ $P(\overline{BC})$ ، أو 0.3، أو $\frac{3}{10}$)

- (3) **مواصلات:** ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟ $\frac{1}{4}$

مثال 2

- (4) **لعبة السهام:** يُسدد هدف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدف نقطة داخل الدائرة الصغرى. 1%، أو 0.01، أو $\frac{1}{100}$
- (5) **ملاحظة:** ضلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجه بوصلته عشوائياً. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).

12.5%، أو 0.125، أو $\frac{1}{8}$



- (6) $\frac{4}{9}$ ، أو 0.44 تقريباً، أو 44% تقريباً
- (7) $\frac{13}{18}$ ، أو 0.72 تقريباً، أو 72% تقريباً
- (8) $\frac{5}{9}$ ، أو 0.56 تقريباً، أو 56% تقريباً

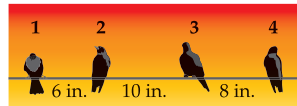
تدرب وحل المسائل



إذا اختيرت النقطة X على $\overline{FK}$ عشوائياً، فأوجد كلاً مما يأتي:

مثال 1

- (6) (أن تقع X على $\overline{FH}$ $P(\overline{FH})$) (7) (أن تقع X على $\overline{GI}$ $P(\overline{GI})$) (8) (أن تقع X على $\overline{HK}$ $P(\overline{HK})$)



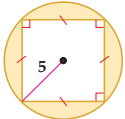
- (9) **طيور:** تقف أربعة طيور على سلك هاتف. فإذا هبط طائر خامس عشوائياً على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟

- (9) 33% تقريباً، أو 0.33 تقريباً، أو $\frac{1}{3}$

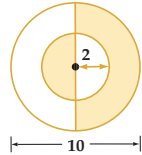
- (10) **تلفاز:** يُتابع عمّار برنامجاً تلفزيونياً مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامجاً المفضل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟ $\frac{1}{6}$ ، أو 0.17 تقريباً، أو 17% تقريباً

مثال 2

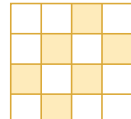
- (11) (12) (13) اختيار نقطة عشوائياً في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظللة.



0.363 تقريباً، أو 36.3% تقريباً



$\frac{1}{2}$ ، أو 0.5، أو 50%



$\frac{3}{8}$ ، أو 0.375، أو 37.5%

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
27-38، 25، 6-20	دون دون المتوسط
27-38، 25، 7-23 فردي	ضمن المتوسط
21-38	فوق المتوسط

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار لإيجاد كل مما يأتي
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):

(14) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر) $P \approx 12.2\%$ تقريباً

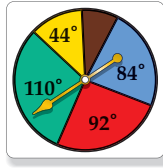
(15) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق) $P \approx 23.3\%$ تقريباً

(16) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) $P \approx 69.4\%$ تقريباً

(17) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر) $P \approx 62.2\%$ تقريباً

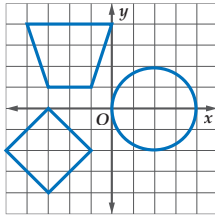
صف حادثة يكون احتمالها $\frac{1}{3}$ لكل من النماذج الآتية:

(18) $\frac{1}{3}$ لكل من النماذج الآتية:



إجابة ممكنة: استقرار

المؤشر على اللون الأخضر



(19) $\frac{1}{3}$ لكل من النماذج الآتية:

إجابة ممكنة: اختيار نقطة على الخط واقعة بين 10 و 20

(20) هندسة إحدائية: إذا اختيرت نقطة عشوائياً على الشبكة المجاورة، فأوجد كلاً مما يأتي:

(a) (النقطة داخل الدائرة) $P \approx \frac{\pi}{25}$ أو 0.13 تقريباً، أو 13% تقريباً

(b) (النقطة داخل شبه المنحرف) $P \approx \frac{9}{100}$ ، أو 0.09، أو 9%

(c) (النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة) $P \approx \frac{3}{10}$ ، أو 0.30، أو 30%



(21) جبر: اختيرت نقطة عشوائياً في الدائرة.

أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$.
(إرشاد: مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة $\times \frac{x}{360}$)

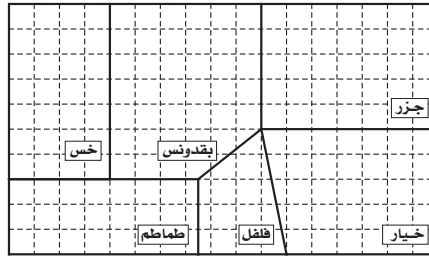
(22) هندسة إحدائية: إذا اختيرت نقطة (x, y) عشوائياً في منطقة حل نظام المتباينات

$1 \leq x \leq 6, y \leq x, y \geq 1$ ، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 16$ ؟ 0.50 أو، و 50% تقريباً

(23) زراعة: مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل أدناه،

(a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر؟ 67.5 وحدة مربعة

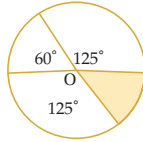
(b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائياً لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس. 0.23



مسائل مهارات التفكير العليا

انظر الهامش

(24) اكتشاف الخطأ: حسب كل من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائياً داخل الدائرة O في المنطقة المظللة، أيهما حله صحيح؟ وضح تبريرك.



سالم

$$p = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلّل}}{360} = \frac{60}{360} \approx 16.7\%$$

عمر

$$p = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلّل}}{360} = \frac{50}{360} \approx 13.9\%$$

الدرس 7-3 الاحتمال الهندسي 129

4 التقويم

بطاقة مكافأة ارسم خمسة أشكال هندسية مختلفة، وظلل منطقة في كل شكل. وأعط كل طالب شكلاً ليحدد احتمال وقوع نقطة اختيرت عشوائياً في المنطقة المظللة. واطلب إلى الطلبة أن يسلموا أوراقهم إليك قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 7-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (49)

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يجب أن يلاحظ الطلبة في السؤال 24، أن أنصاف الأقطار المتقابلة ليست على استقامة واحدة. وعليه، فإن زاوية القطاع المظلّل والزاوية التي قياسها 60° غير متقابلتين بالرأس. لقد أخطأ سالم عندما اعتبرهما متقابلتين بالرأس، على حين كانت إجابة عمر صحيحة حيث حسب زاوية القطاع المظلّل بطرح مجموع الزوايا الثلاث المعروفة من 360° .

إجابة:

(24) عمر. إجابة ممكنة: يجب أن تجمع قياسات الزوايا المركزية الثلاث، ثم تطرح المجموع من 360° لتجد قياس الزاوية المركزية المظللة.
 $50 = (125 + 60 + 360) - 360$ ،
لذا، فإن الاحتمال
يساوي $\frac{50}{360} \approx 13.9\%$

الربط مع الحياة

حققت التنمية الزراعية في المملكة العربية السعودية تطوراً كبيراً في فترة وجيزة، مما أسهم في نقل البلاد من مرحلة استيراد معظم احتياجاتها الغذائية إلى مرحلة الاكتفاء الذاتي، وتصدير بعض المحاصيل.

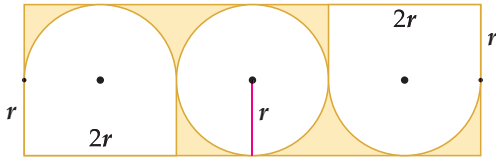
21. إجابة ممكنة: احتمال أن تكون النقطة التي تم اختيارها عشوائياً واقعة في المنطقة المظللة، يساوي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة كاملة.

$$\begin{aligned} P(\text{وقوع النقطة المختارة في المنطقة المظللة}) &= \frac{\text{مساحة سطح القطاع}}{\text{مساحة سطح الدائرة}} \\ &= \frac{\frac{x}{360} \cdot \pi r^2}{\pi r^2} \\ &= \frac{x}{360} \end{aligned}$$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكونوا لعبة تطبق فيها مفاهيم الاحتمال باستعمال المساحات. ويتعين عليهم أن يكتبوا تعليمات واضحة للعب والفوز. وتتضمن أيضاً احتمال التسجيل لجميع الأحداث الممكنة في اللعبة. واسمح لهم بأن يلعبوا ألعاباً صمّمها آخرون للتحقق من أن الاحتمالات الرياضية تقابل الاحتمالات التجريبية. واطلب إليهم أن يصمّموا ألعاباً عادلة، يكون الفوز في بعضها صعباً، وفي بعضها الآخر سهلاً.

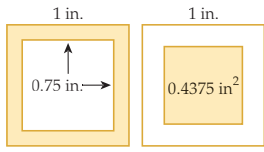


(25) **تحديد:** أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائيًا داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة تقريبًا الناتج إلى أقرب عُشر. **14.3% تقريبًا**

26. $\frac{1}{7}$ ؛ إجابة ممكنة: باستعمال نظرية متباينة المثلث نجد أن هناك 7 مثلثات متطابقة الضلعين أطوال أضلاعها أعداد صحيحة ومحيطها 32cm. ومن بين هذه المثلثات يوجد مثلث واحد فقط أطوال أضلاعه 10cm, 10cm, 12cm ومساحته 48cm² بالضبط. لذا، فإن الاحتمال يساوي $\frac{1}{7}$.

(26) **تبرير:** محيط مثلث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته 48 cm² بالضبط؟ وضّح تبريرك.

(27) **مسألة مفتوحة:** مثل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة. **انظر الهامش**



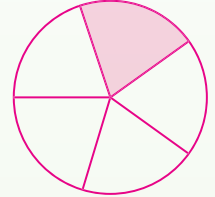
(28) **اكتب:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًا في كلٍّ من المربعين الآتين، فوضح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظللة في أيٍّ منهما. **انظر الهامش**

إجابات:

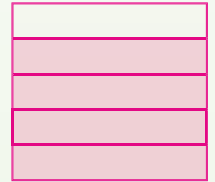
(27) إجابة ممكنة: احتمال اختيار نقطة عشوائيًا على $\overline{AC}$ تقع بين A, B يساوي 20%.



احتمال اختيار نقطة عشوائيًا في الدائرة تقع في المنطقة المظللة يساوي 20%.



احتمال أن تقع نقطة عشوائيًا داخل الشبكة في المنطقة غير المظللة يساوي 20%.



(28) إجابة ممكنة: يحسب احتمال أن تقع نقطة عشوائيًا في المنطقة المظللة في الشكل الأول بإيجاد نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى مساحة سطح

المربع الكبير، ويتم حسابه بطرح مساحة سطح المربع غير المظلل من مساحة سطح المربع الأكبر، ثم إيجاد نسبة الفرق بين المساحتين إلى مساحة سطح المربع الأكبر.

ويكون الاحتمال $\frac{1^2 - 0.75^2}{1^2}$ ، أو 43.75%.

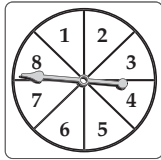
احتمال اختيار نقطة عشوائيًا تقع في المنطقة المظللة في الشكل الثاني يساوي نسبة مساحة سطح المربع المظلل إلى مساحة سطح المربع الأكبر. والتي

تساوي $\frac{0.4375}{1}$ أو 43.75%.

لذا فإن احتمال أن تقع نقطة عشوائيًا في المنطقة المظللة في كلا المربعين هو نفسه.

تدريب على اختبار

(31) **إجابة قصيرة:** قُسم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



- (a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟ $\frac{1}{8}$
(b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فرديًا؟ $\frac{1}{2}$

(29) **احتمال:** رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واختيرت نقطة عشوائيًا داخل المربع. ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟ **B**

- A $\frac{1}{9}$
B $\frac{\pi}{9}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{9}{\pi}$

(30) **احتمال:** يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و3 كرات سوداء. إذا سحب كرة واحدة عشوائيًا، فما احتمال أن تكون حمراء؟ **C**

- A $\frac{1}{9}$
B $\frac{1}{6}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{7}{18}$

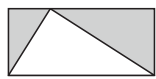
مراجعة تراكمية

(32) **حفلة:** يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ **(الدرس 2-7) $\frac{1}{5}$**

مثل فضاء العينة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: **(الدرس 7-1)**

(33) في كلٍّ من الستين القادمين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S). **انظر ملحق الإجابات**

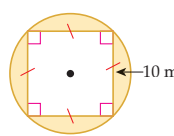
(34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، وبلون أسود (K) أو بني (B). **انظر ملحق الإجابات**



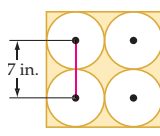
(35) **هندسة:** في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ **(مهارة سابقة) $\frac{1}{2}$ أو 0.5 أو 50%**

أوجد مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ مما يأتي: **(مهارة سابقة)**

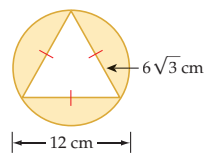
(36) **57.1 m² تقريبًا**



(37) **42.1 in² تقريبًا**



(38) **66.33 cm² تقريبًا**



مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 7

دون	ضمن	فوق المتوسط	فوق
تدريبات إعادة التعليم (16)			
الاسم: _____ التاريخ: _____			
7-3 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال الهندسي			
الاحتمالات والأطوال، الاحتمالات التي تتضمن قياسات هندسية تسمى الاحتمالات الهندسية. أحد أنواع القياس هو الطول. انظر إلى القطعة المستقيمة RS إذا اخترت نقطة M على القطعة المستقيمة عشوائيًا، فإن $P(\overline{KM})$ (ورفع M على KL)			
مثال: اخترت النقطة X على القطعة AD عشوائيًا. أوجد احتمال وقوع X على AB .			
نسبة احتمالات الأطوال $P(\overline{AB})$ على AD			
$AD = 8 + 2 + 6 = 16, AB = 8$			
بالنسبة $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$			
تعاريف:			
إذا اخترت النقطة M على $\overline{ZP}$ عشوائيًا، فأوجد كلاً ما يأتي:			
(1) (ورفع M على ZQ) $P(\overline{ZQ})$			
$\frac{1}{5}, 0.2, 20\%$			
(2) (ورفع M على QR) $P(\overline{QR})$			
$\frac{3}{10}, 0.3, 30\%$			
(3) (ورفع M على RP) $P(\overline{RP})$			
$\frac{1}{2}, 0.5, 50\%$			
(4) (ورفع M على QP) $P(\overline{QP})$			
$\frac{4}{5}, 0.8, 80\%$			
(5) والاشارة الضوئية، يستغرق اللون الأخضر 30 ثانية في إشارة ضوئية دورية فليتان، واللون الأصفر 3 ثوانٍ، واللون الأحمر دقيقتين و 27 ثانية. ما احتمال أن يكون لون الإشارة أخضر عند وصولك إليها؟ $\frac{1}{4}, 0.25, 25\%$			
الفصل: الثاني الثانوي 16			

دون	ضمن	فوق المتوسط	فوق
تدريبات إعادة التعليم (17)			
الاسم: _____ التاريخ: _____			
7-3 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال الهندسي			
الاحتمالات والمساحة، يمكن أن تتضمن الاحتمالات الهندسية المساحات. عند تحديد الاحتمالات الهندسية المتعلقة بالأهداف في لعبة رمي السهام، افترض أن الجسم يصل إلى نقطة داخل منطقة الهدف، وأن احتمالات وصوله إلى القطع الواقعة داخل منطقة الهدف متساوية.			
مثال: أثبتت قطعة تقود في بركة قاعدتها مرسومة بملون على هيئة ثلاث دوائر متحدة في المركز. إذا كان قطر الدائرة المركزية (الداخلية) 4 أقدام ويزداد قطر كل دائرة عليها 4 أقدام، فما احتمال وقوع قطعة النقود في الدائرة المركزية؟			
"مساحة الدائرة المركزية" (ورفع قطعة النقود في الدائرة المركزية) P			
$\frac{4\pi}{36\pi} = \frac{1}{9}, 0.11, 11\%$			
حسب: $\frac{1}{9}, 0.11, 11\%$			
تعاريف:			
(1) الهبوط، يريد مظهر أن يهبط في مركز هدف دائري مصمم داخل حقل مستطيل الشكل، بعاده 120 ياردة و 30 ياردة، إذا كان نصف قطر الهدف الدائري 10 ياردات، فما احتمال هبوط المظهر داخل الهدف؟ $\frac{\pi}{36} \approx 0.09$ أو 9% تقريباً			
(2) الساعات، يراقب جبل قرب الترابي في ساعته العادية في أثناء تحركه بمحاذاة الأرقام. ما احتمال أن يكون قرب الترابي في أي وقت معطى بين العددين 2 و 3 اللذين يدلان على الساعات؟ $\frac{1}{12}, 0.083, 8\%$ تقريباً			
اخترت نقطة في كل من الأشكال الآتية عشوائيًا. أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلمة.			
(3)			
$\frac{2}{3}, 0.6, 67\%$			
(4)			
$\frac{2}{3}, 0.6, 67\%$			
(5)			
$\frac{4}{9} \approx 0.57$ أو 57% تقريباً			
استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل ما يأتي:			
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين قطاعين فإنه يُعاد تدويره.)			
(6) (استقر المؤشر على الأحمر) P			
$\frac{1}{8}, 0.1, 11\%$ تقريباً			
(7) (استقر المؤشر على الأزرق) P			
$\frac{1}{12}, 0.083, 8\%$ تقريباً			
الفصل: الثاني الثانوي 17			

دون	ضمن	فوق المتوسط	فوق
تدريبات حل المسألة (19)			
الاسم: _____ التاريخ: _____			
7-3 تدريبات حل المسألة الاحتمال الهندسي			
(1) رمي سهام، كل قطاع في هذا القرص له الزاوية المركزية نفسها. واحتمالات استقرار السهم على نقط القرص متساوية. فإذا رمي سهم على القرص، فما احتمال أن يستقر السهم في قطاع مُظلل؟			
$\frac{1}{16} \approx 0.0625$ أو حوالي 6.25%			
(2) اقترض القود، تطلب سمية ومريم طيقاً يحتوي على 4 شطائر من مطعم في نهاية كل أسبوع عمل. لذا فإن إحداهن ستحصل على شطيرة إضافية. وبما أن سمية تعمل طوال ساعات العمل الأسبوعية، وتعمل كل من مريم وليلى نصف ساعات العمل الأسبوعية، فقد تفرزت الفتيات احتمال القرص الدوار لتحديد من تحصل على الشطيرة الإضافية، على أن تكون فرصة حصول سمية عليها 50% وفرصة حصول كل من مريم وليلى عليها 25%. صمم هذا القرص الدوار. إجابة ممكنة			
(3) امطر، غطاء خزان مربع الشكل يتوسطه فتحة دائرية كما في الشكل أدناه، ما احتمال أن تسقط قطرة المطر داخل الخزان، إذا سقطت على وجهه العلوي، مقررًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.			
$\frac{\pi}{16} \approx 0.20$ أو حوالي 19.63%			
(4) إضافة، أُضيفت منصة مستطيلة الشكل بمساحتين ضوئيتين بضيئان منطقتين دائريتين منها. طول نصف قطري الدائريتين متساويان، وكل دائرة مُر بمرکز الأخرى. إذا كانت المنصة تحيط بالدائريتين كما في الشكل أدناه، وألقى أحد المشاهدين باقة زهور على المنصة، افترض أن فرصة سقوط الباقة في أي مكان من المنصة هي نفسها.			
(إرشاد: استعمل المثلثات المتطابقة لإثبات أن المساحة في الدائرة.)			
(a) ما احتمال أن تستقر الباقة في المنطقة المظلمة من المنصة؟ 0.842			
(b) ما احتمال أن تستقر الباقة في منطقة تداخل الإضاءتين؟ 0.205			
الفصل: ٧، الاحتمالات 19			

دون	ضمن	فوق المتوسط	فوق
تدريبات المهارات (18)			
الاسم: _____ التاريخ: _____			
7-3 تدريبات المهارات الاحتمال الهندسي			
إذا أُخبرنا أن النقطة X على $\overline{TP}$ عشوائيًا، فأوجد احتمال كل من الحادتين الآتيتين.			
(1) $P(\overline{TN})$ على X			
$\frac{5}{12} = 0.41\overline{6} \approx 42\%$			
(2) $P(\overline{MQ})$ على X			
$\frac{3}{4}, 0.75, 75\%$			
إذا أُخبرنا نقطة في كل من الأشكال الآتية عشوائيًا، فأوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلمة.			
(3)			
$\frac{1}{3} = 0.33$ أو 33% تقريباً			
(4)			
$\frac{1}{4} = 0.25$ أو 25% تقريباً			
(5)			
$\frac{5}{17} \approx 0.29$ أو 29% تقريباً			
(6) أعمال مكتبية، بين الشكل المجاور سطح مكتب طالب في البيت، إذا رمي سهم على سطح المكتب، فما احتمال أن يسقط على تقرير (الكتاب)؟ $0.054 \approx 5.4\%$ تقريباً			
(7) هشام، تقف ثلاثة ضفادع على جذع شجرة طوله 15 قدمًا. يُعد بين الضفادع الأول والثاني 5 أقدام، ويعد الضفدع الثالث 10 أقدام عن الثاني. إذا تقف ضفدع رابع على الجذع، في احتمال أن يكون موضعه بين الضفادع الأول والثاني؟ $\frac{1}{3} = 0.33$ أو 33% تقريباً			
استعمل القرص ذا المؤشر الدوار لإيجاد كل ما يأتي:			
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين قطاعين فإنه يُعاد تدويره.)			
(8) (استقر المؤشر على اللون الأصفر) P			
30.6%			
(9) (استقر المؤشر على اللون البرتقالي) P			
19.4%			
الفصل: الثاني الثانوي 18			

مصادر الدرس 3 - 7

فوق **فوق المتوسط**

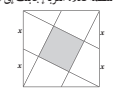
ضمن **فوق**

دون **ضمن** **فوق**

التاريخ:

7-3 الاحتمال الهندسي

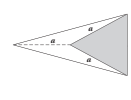
أوجد احتمال أن تقع نقطة مختار عشوائياً في المنطقة المظلمة في كل شكل مما يأتي، وافترض أن المضلعات التي تبدو منتظمة هي منتظمة فعلاً، مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



20% $\frac{1}{5}$, 0.20



$$\frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}, \approx 0.21 \text{ أو } 21\% \text{ تقريباً}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, \approx 0.46 \text{ أو } 46\% \text{ تقريباً}$$

الفصل ٧ : الاحتمالات

20

18

(2) (أن تقع L على $\overline{UIS}$) $p(\overline{UIS})$ أو $\frac{11}{18}$ أو $0.6\overline{1}$ أو 61% تقريباً

إذا اختيرت نقطة عشوائياً، في كلٍّ من الأشكال الآتية، فأوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظللة.



$\frac{1}{3}$ أو 0.3 أو 33% تقريبًا

استعمل الفرص ذا المؤشر الدور لإيجاد احتمال كل من الحادتين الآتيتين:
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات يعاد تدويره):



6) استقرار المؤشر على المنطقة البنفسجية. $\frac{1}{3}$ ، 0.3، أو 33% تقريباً

(7) استقرار المؤشر على المنطقة الحمراء. $\frac{1}{18}$ ، 0.05، أو 6% تقريباً

8) محاضرات: يسجل طالب جامعي فقرات من الأدب العربي على شريط مدته ساعتان. إذا شغل الشريط بصورة عشوائية، فما احتمال أن يفتح المسجل خلال فترة الشعر التي مدتها 6 دقائق و 31 ثانية؟

130B الفصل 7 الاحتمالات

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 1-7 إلى 3-7 من خلال مطوياتهم.

(8) سيرك: مُدَّ حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْع الحبل عند أي نقطة من نقاطه متساوية.

(a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه. **16% تقريباً**

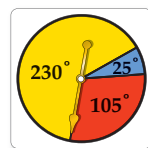
(b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أيٍّ من العمودين. **13% تقريباً**

اختيرت نقطة A عشوائياً على $\overline{BE}$. أوجد كلاً مما يأتي:



(9) (أن تقع A على $\overline{CD}$) $P(\overline{CD}) = \frac{6}{13}$ (10) (أن تقع A على $\overline{BD}$) $P(\overline{BD}) = \frac{17}{26}$

(11) (أن تقع A على $\overline{CE}$) $P(\overline{CE}) = \frac{21}{26}$ (12) (أن تقع A على $\overline{DE}$) $P(\overline{DE}) = \frac{9}{26}$



استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي: (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة فإنه يُعاد تدويره مرة أخرى).

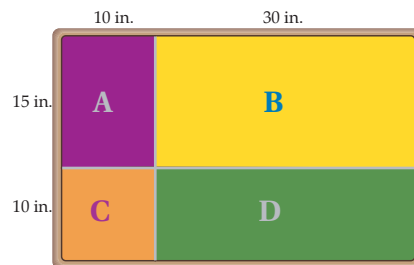
64% تقريباً

(13) استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء P

(14) استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء P **7% تقريباً**

(15) استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء P **29% تقريباً**

(16) ألعاب: الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة المربعة الشكل C في اللوحة المستطيلة الشكل المبينة أدناه، إذا سدد لاعب سهمًا ووقع في نقطة ما على اللوحة، فما احتمال أن يكون قد وقع في:



(a) المنطقة A ؟ **15%**

(b) المنطقة B ؟ **45%**

(c) المنطقة C ؟ **10%**

(d) المنطقة D ؟ **30%**

(1) طعام: يتكون غذاء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس	عصير برتقال	
جبنة		عصير تفاح	
		حليب	

(a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟ **120**

(b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعان من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟ **320**

(2) أعداد: كم عددًا مختلفًا مكونًا من (5) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1، دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟ **6720**

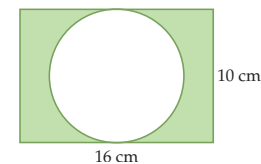
(3) ملايس: في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثل فضاء العينة لخيارات القمصان لدى مريم، إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

(4) كتابة: يحتوي كيس على بطاقات كُتِبَ على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر، ف، س، ع، و، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذه الحروف عشوائيًا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟ **$\frac{1}{720}$**

(5) نقود: لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟ **81**

(6) نقود: إذا أُلقيت قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟ **2⁹**

(7) إذا اختيرت نقطة عشوائيًا داخل المستطيل، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟ **51% تقريباً**



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 1-7 إلى 3-7.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

Probabilities of Independent and Dependent Events

لماذا؟



يسحب معلم الكيمياء عشوائيًا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولاً يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

• تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B .

• تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B .

افترض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

مثال 1

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

(a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.
إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلتين.

(b) في فقرة "لماذا؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العينة قد نقص واحدًا؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلتين.

(c) سحب كرة واحدة عشوائيًا من كلا صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛ لذا تكون الحادثتان مستقلتين.

1A, 1B انظر الهامش

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

(1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سُحبت بطاقة ثانية.

(1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضًا.

فيما سبق:

درست حساب الاحتمالات البسيطة.

والآن:

• أجد احتمالات الحوادث

المستقلة والحوادث غير

المستقلة.

• أجد احتمال حادثة إذا علم

وقوع حادثة أخرى.

المفردات:

الحادثة المركبة

compound event

الحوادث المستقلة

independent events

الحوادث غير المستقلة

dependent events

الاحتمال المشروط

conditional probability

شجرة الاحتمال

probability tree

الحادثة المشروطة

conditional event

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة

هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلاً عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة، فإن الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلاً هي حادثة بسيطة.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-5

حساب الاحتمالات البسيطة.

الدرس 7-5

إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة

والحوادث غير المستقلة.

إيجاد احتمال وقوع حادثة علمًا بأن

حادثة أخرى قد وقعت.

ما بعد الدرس 7-5

إيجاد احتمالات الحوادث المتنافية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

وأسأل:

- ما العوامل التي تؤثر في احتمال اختيار سعود أولاً وفيصل ثانيًا؟ **إجابة ممكنة:** عدد طلاب الصف.
- إذا اختير سعود أولاً، فما احتمال أن يكون فيصل ثانيًا؟ $\frac{1}{17}$
- كيف يؤثر اختيار الطالب الذي سيقدم عرضه أولاً في اختيار فيصل ثانيًا؟
ينقص عدد النواتج الممكنة للتجربة بمقدار واحد.

إجابات (تحقق من فهمك):

(1A) الحادثتان مستقلتان؛ لأن البطاقة الأولى أُعيدت إلى الكيس فلن يؤثر اختيارها على اختيار البطاقة الثانية.

(1B) الحادثتان مستقلتان؛ لأن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة رمي المكعب المرقم.

مصادر الدرس 7-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (133)	• تنويع التعليم، ص (133, 135)	• تنويع التعليم، ص (133, 135, 137)
كتاب التمارين	• ص (19)	• ص (19)	• ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

مثال 1 يبين كيفية تحديد إذا كانت حادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين.

مثال 2 يبين كيفية حساب احتمال حادثتين مستقلتين.

مثال 3 يبين كيفية حساب احتمال حادثتين غير مستقلتين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

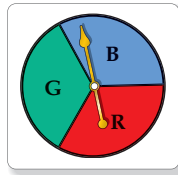
مثالان إضافيان

حدد إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة أو غير مستقلة. وبرر إجابتك:

(a) ألقي مكعب مرقم ثم أُلقي مكعب آخر. الحادثتان مستقلتان؛ لأن ناتج رمي المكعب الأول لا يؤثر في احتمال ناتج رمي المكعب الثاني.

(b) سحب بطاقة من كيس يحتوي بطاقات مرقمة من 1 إلى 20 دون إرجاع، ثم سحب بطاقة ثانية. الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن البطاقة الأولى لم تُعد إلى الكيس ولا يمكن اختيارها مرة أخرى مما يؤثر في احتمال سحب البطاقة الثانية، إذ إن عدد عناصر فضاء العينة نقص واحدًا.

مطاعم: ذهب سالم وجمال لتناول الطعام في أحد المطاعم. وقد وضعوا 5 قصاصات ورقية خضراء و 6 حمراء في كيس، وقرروا أن يسحب أحدهما قصاصة من الكيس، فإذا كانت خضراء فإنهما سيطلبان دجاجًا، وإذا كانت حمراء فإنهما سيطلبان سمكًا. إذا سحب سالم قصاصة ولم يعجبه لونها، فأعادها وسحب قصاصة أخرى من الكيس، فما احتمال أن يسحب قصاصة خضراء في المرتين؟ $\frac{25}{121}$



إذا أُلقيت قطعة نقد وأدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العينة لهذه التجربة هو: $\{(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)\}$. باستعمال فضاء العينة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين.

$$P(L) = \frac{1}{2} \quad P(G) = \frac{1}{3} \quad P(L \cap G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

أضف إلى

مطوبك

احتمال حادثتين مستقلتين

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المستقلة

مثال 2 من واقع الحياة

احتمالات الحوادث المستقلة



وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في السيارة، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في الحافلة.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصة التي سحبها أولاً. افترض أن B يمثل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap B)$.

$$\begin{aligned} \text{السحب 1} \quad \text{السحب 2} \\ P(B \cap B) &= P(B) \cdot P(B) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} \\ P(B) &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

$$(2A) \quad \frac{1}{12} \text{ أو } 8\% \text{ تقريبًا} \quad (2B) \quad \frac{1}{16} \text{ أو } 6.25\%$$

تحقق من فهمك

(2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6؟

(2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

توسع اطلب إلى الطلبة أن يحسبوا احتمال حوادث بسيطة مستقلة؛ مثل رمي قطعة نقد باستعمال قانون الاحتمالات غير المستقلة، على أن يدركوا أن هذا القانون يعطي النتيجة نفسها التي يعطيها قانون احتمالات الحوادث المستقلة.

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات (احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معاً).

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلاً.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولاً، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

مثال 3

احتمالات الحوادث غير المستقلة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قساصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قساصة، فما احتمال أن يسحب كل من الصديقين قساصة صفراء؟

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يرجع القساصة التي سحبها من الكيس.

احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$$P(Y \cap Z) = P(Y) \cdot P(Z|Y)$$

بعد سحب قساصة صفراء، يبقى 7 قساصات، أربع منها صفراء

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قساصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$ ، أو 36% تقريبًا.

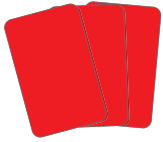
تحقق من صحة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب على طول كل فرع من الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج.

$$\begin{array}{l} \frac{5}{8} \begin{cases} Y \begin{cases} \frac{4}{7} \text{ — } P(Y \cap Y) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} \\ \frac{3}{7} \text{ — } P(Y \cap B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} \end{cases} \\ B \begin{cases} \frac{5}{7} \text{ — } P(B \cap Y) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \\ \frac{2}{7} \text{ — } P(B \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \quad \checkmark$$

تحقق من فهمك



(3) يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و 6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟ **انظر الهامش**

مثال إضافي

3

مطاعم: ارجع إلى المثال الإضافي 2، افترض أن ساليًا سحب قساصة ورق من الكيس ولم يعدها، ثم سحب جمال قساصة أخرى. فما احتمال أن يسحب كل منهما قساصة خضراء؟ $\frac{2}{11}$

تنبيه

إشارة الاحتمال

المشروط يجب ألا يفسر الرمز " | " في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

- لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \leq P(X) \leq 1$
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1.

المحتوى الرياضي

الحوادث غير المستقلة إن ترتيب وقوع الحادثتين في الحوادث غير المستقلة أمر في غاية الأهمية. فعلى سبيل المثال، عند سحب بطاقات من كيس يحتوي بطاقات حمراء وخضراء وصفراء وبياضاء، وطاقات كل لون مرقمة من 1 إلى 13، فإن احتمال سحب بطاقة حمراء تحمل الرقم 3 إذا كان قد سُحب قبلها بطاقة حمراء يختلف عن احتمال سحب بطاقة حمراء إذا كان قد سحب قبلها بطاقة تحمل الرقم 3، وبالرموز $P(A|B) \neq P(B|A)$.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اختر طالبين ليحلوا مثالاً على السبورة أمام طلبة الفصل. واطلب إلى أحدهما أن يشرح كيفية حساب احتمال حادثتين غير مستقلتين، وأن يشرح الآخر كيفية حساب احتمال حادثتين مستقلتين.

الاحتمال المشروط علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلاً إذا رُمي مكعب مرقم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5 ؟



هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العينة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إلى $\{1, 3, 5\}$ ، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$$P(5 | \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$$

الاحتمال المشروط

مثال 4 يبين كيفية حساب الاحتمال المشروط.

مثال إضافي

مثال على اختبار

4

قسم معلم التربية الرياضية طلاب صفه وعددهم عشرون إلى فريقين. ثم طلب إلى كل طالب سحب بطاقة عشوائياً من مجموعة بطاقات مرقمة بالأعداد المتتالية من 1 إلى 20. وشكل الطلبة الذين سحبوا بطاقات تحمل أعداداً فردية الفريق الأحمر، على حين شكل الطلبة الذين سحبوا بطاقات تحمل أعداداً زوجية الفريق الأزرق.

إذا كان ماجد في الفريق الأزرق، فما احتمال أن يكون سحب البطاقة التي تحمل العدد 10؟ **B**

$$\begin{array}{ll} \frac{9}{20} & \text{A} \\ \frac{1}{20} & \text{C} \\ \frac{1}{2} & \text{D} \\ \frac{1}{10} & \text{B} \end{array}$$

التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-5 للتأكد من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

- 1) سيلعب فريق المدرسة في مباراة البطولة إذا ربح مباراته في الدور قبل النهائي، وعليه فإن هاتين الحادثتين غير مستقلتين.
- 2) لا تؤثر نتيجة عبدالعزيز في الاختبار الأول على نتيجته في الاختبار الثاني. وعليه، فإن هاتين الحادثتين مستقلتان.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 عشوائياً حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
 - تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.
- إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{8} & \text{A} & \frac{1}{4} & \text{B} \\ \frac{3}{8} & \text{C} & \frac{1}{2} & \text{D} \end{array}$$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلى من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عدداً زوجياً؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجياً. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

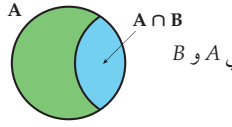
حل فقرة الاختبار

افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي. وأن B حادثة سحب العدد 2. ارسم شكل فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العينة، وواحد منها هو 2؛ لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي **B**.

تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟ **D**

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{6} & \text{A} & \frac{1}{4} & \text{B} \\ \frac{1}{3} & \text{C} & \frac{1}{2} & \text{D} \end{array}$$



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العينة، فإنه يمكن تبسيط شكل فن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين الناتج المشتركة في A و B .

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

أضف إلى مطوبتك

الاحتمال المشروط

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $P(B|A)$ حيث $P(A) \neq 0$

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط
 $P(5|A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A .

إرشادات للاختبار

أشكال فن استعمل أشكال فن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين غير مستقلتين.

إرشادات للدراسة

التقاطع تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز $\cap$.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلبة أن يناقشوا الفرق بين إيجاد احتمالات حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة، وإيجاد الاحتمال المشروط. ويجب أن تتضمن هذه الفروق قوانين حساب احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة، حيث تستعمل لحساب احتمال وقوع حادثتين أو أكثر، على حين أن قانون الاحتمال المشروط يُستعمل فقط لحساب احتمال وقوع حادثة ما علمًا بأن حادثة أخرى قد وقعت.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا على ورقة الفرق بين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. واطلب إليهم أن يسلموك أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 7-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50)

مثال 1

حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1، 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضّح إجابتك:

(1) وصل فريق كرة السلة في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة. **انظر الهامش**

(2) نجح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس. **انظر الهامش**

مثال 2

(3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من الصندوق، ثم أُعيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في الممرتين؟ $\frac{1}{16}$

$$(3) 7.4 \times 10^{-4} \approx \frac{1}{1352}$$

مثال 3

(4) **وسائل نقل:** يريد عبد السلام شراء سلعة ثمنها 20 ريالاً. فإذا كان في جيبه 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، فأوجد احتمال أن يسحب عشوائياً ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية. $\frac{1}{15} \approx 0.07$

مثال 4

(5) **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 10 عشوائياً، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟ $\frac{1}{5} = 0.20$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3

حدّد إذا كانت الحادثتان في الأمثلة (3-6) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:

(6) رمي مكعب مرقم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي. **مستقلتان، 30% أو $\frac{3}{10}$**

(7) اختيار طالبين حصلاً على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحداً تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالباً، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة. **غير مستقلتين، $\frac{1}{30}$ أو 0.033 تقريباً**

(8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائياً دون إرجاع، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و4 كرات زرقاء. **غير مستقلتين، $\frac{2}{7}$ أو 0.29 تقريباً**

(9) ظهور العدد 5 على الوجهين العلويين لمكعبين مرقمين متمايزين ألفياً مرة واحدة. **مستقلتان، $\frac{1}{36}$ أو 3% تقريباً**



(10) **ألعاب:** إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟ **25% أو $\frac{1}{4}$**

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

(11) **شعارات:** معتمداً على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائياً، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟ **$\frac{20}{161}$ أو 12% تقريباً**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	6-14، 18، 20-32
ضمن المتوسط	7-18، 20-32
فوق المتوسط	15-30

12 سُحبت كرة حمراء عشوائيًا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟ $\frac{4}{5}$ أو 80%

13 مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربعًا؟ $\frac{1}{3}$

14 رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلِم أنه استقر عند عدد فردي؟ 17% تقريبًا أو $\frac{1}{6}$

15 تقنيات: يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟ 0.65 تقريبًا

16 برهان: استعمل قانون احتمال حدثين غير مستقلتين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$ انظر ملحق الإجابات

17 تنس أرضي: إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب التنس 40%، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%

(a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج. انظر ملحق الإجابات

(b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟ 18% أو 0.18



الربط مع الحياة

تعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأً مزدوجًا على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يخطأ خط الرمي أو يتجاوزها في محاولتين.

إجابات:

25 إجابة ممكنة: استعمل قرصًا ذا مؤشر دوارٍ مقسمًا إلى قطاعين يشكل أحدهما 10% من القرص أي زاويته المركزية 36° ، ويشكل الآخر 90% من القرص أي زاويته المركزية 324° . ونفذ 20 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري.

الناتج	التكرار
تسجيل	19
عدم تسجيل	1
المجموع	20



المحاولات

احتمال أن يسجل أيمن في ضربته التالية يساوي 0.95، واحتمال ألا يسجل 0.05

مسائل مهارات التفكير العليا

لأسئلة 18-22 انظر ملحق الإجابات

18 اكتشف الخطأ: أراد كلٌّ من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B ، حيث $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$ ، والحادثان A و B مستقلتان. أيهما إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

جابر	مهند
بها أننا لا نعرف $P(A \text{ و } B)$ ، فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A B)$	بها أن A و B حادثتان مستقلتان، فإن: $P(A B) = P(A)$

19 تحدّد: يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n ؟ وضع إجابتك.

20 تبرير: إذا كان A و B حادثتين مستقلتين، فهل العبارة $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ برر إجابتك.

21 مسألة مفتوحة: صنف حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرر إجابتك.

22 اكتب: وضّح لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

تنويع التعليم

فوق

توسّع لقد أثار أحد برامج المسابقات التلفزيونية (جائزة خلف الباب) جدلاً واسعاً في دراسة الاحتمالات من خلال طرح السؤال الآتي: هل تبقى على اختيارك أم تُغيّره؟ حيث يطلب من المتسابق في هذا البرنامج أن يختار واحداً من 3 أبواب. ثم يفتح له أحد البابين الآخرين (الذي ليس وراءه جائزة). ثم يطرح عليه السؤال: هل تريد أن تبقى على اختيارك الأصلي أم تنتقل إلى الباب الآخر المغلق؟ يمكن أن يستكشف الطلبة هذا السؤال بإجراء محاكاة أو باستعمال أداة تفاعلية عبر الإنترنت. لذا، يتعين عليهم أن يكونوا قادرين على تفسير سبب اقتراب قيمة الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري كثيراً عندما يتكرر إجراء التجربة عدداً كبيراً من المرات.

تدريب على اختبار

(24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ نور حبة حلوى من الكيس دون أن ينظر إليها. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشر. **9.8% تقريبًا**

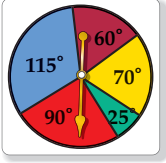
(23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائيًا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟ **A**

- A** $\frac{1}{18}$ **C** $\frac{1}{9}$
B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{2}$

مراجعة تراكمية

(25) ما احتمال ظهور العدد 2 على الوجه العلوي لمكعب مرقم ألقى مرتين؟ **الدرس (7-4) انظر الهامش**

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خط بين لونين): **الدرس (7-3)**



(26) (استقرار المؤشر عند اللون الأحمر) $P = 0.25$

(27) (استقرار المؤشر عند اللون الأزرق) $P = 0.32$ **تقريبًا**

(28) (استقرار المؤشر عند اللون الأخضر) $P = 0.07$ **تقريبًا**

(29) (استقرار المؤشر عند اللون الأصفر) $P = 0.19$ **تقريبًا**

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: **الدرس (7-1)**

(30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و 3 أنواع مختلفة من الحلوى. **15**

(31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدتها. **12**

(32) رمي ثلاثة مكعبات مرقمة في آن واحد. **216**

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 7

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21)

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الحوادث المستقلة، وغير المستقلة: تتكون الحادثة المركبة من حادثين أو أكثر من الحوادث البسيطة، ويمكن أن تكون مستقلة أو غير مستقلة. وتكون الحوادث مستقلين إذا كان احتمال إحداها لا يؤثر في احتمال الأخرى. وتكون الحوادث غير مستقلين إذا كانت إحداها تؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الأخرى.

ولها يأتي قانونا ضرب لحساب الاحتمالات

احتمال حادثين مستقلين	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
احتمال حادثين غير مستقلين	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$

الاحتمال المشروط ونظرًا احتمال وقوع الحادثة B شرط وقوع الحادثة A .

مثال
وضع معلم التربية البدنية 10 كرات حراء و8 كرات زرقاء في كيس. إذا سحب طالب كرة حراء، فإنه يلعب كرة سلة، وإذا سحب الطالب كرة زرقاء، فإنه يتدرب على الوثب الطويل.
افترض أن مهتداً سحب كرة وأعادها إلى الكيس، ثم سحب مرة أخرى. ما احتمال أنه سحب كرة زرقاء في المراتب؟

لنكن B مثل كرة زرقاء فإن:

$$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B)$$

$$P(B) = \frac{8}{16} = \frac{4}{8}$$

$$= \frac{16}{81}$$

لذا فإن احتمال أن يسحب مهتد كرتين لونهما أزرق هو $\frac{16}{81}$ أو حوالي 20%.

تمارين:

حدد ما إذا كانت الحوادث مستقلين أو غير مستقلين في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال:

(1) سُحبت بطاقة تحمل الرقم 10 من مجموعة بطاقات عددها 60 منها 15 حراء و15 سوداء و15 خضراء و15 زرقاء، وُقِّعت كل مجموعة من 1 إلى 15. ثم أُلقيت قطعة نقود وظهرت الكتابة على وجهها العلوي.

مستقلة، $\frac{1}{30}$

(2) أدير مؤشر قرصي يتكون من أربعة قطاعات متطابقة مرقمة من 1 إلى 4، فاستقر على القطاع 1، ثم أُلقي مكعب أرقام وظهر على وجهه العلوي 1.

مستقلة، $\frac{1}{24}$

(3) سُحبت كرة حراء من كيس يحتوي على كرتين لونهما أزرق وخفي لونهما أحمر دون إرجاع، ثم سُحبت كرة حراء ثانية.

غير مستقلة، $\frac{10}{21}$

(4) سُحبت كرة حراء من كيس يحتوي على كرتين لونهما أزرق وخفي لونهما أحمر ثم أُعيدت. ثم سُحبت كرة حراء مرة ثانية.

مستقلة، $\frac{25}{49}$

الصف: الثاني الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22)

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الاحتمال المشروط: يُستعمل الاحتمال المشروط لإيجاد احتمالات الحوادث غير المستقلة، ويُستعمل إذا علمت معلومات إضافية عن الحادثة أيضًا. والاحتمال المشروط للحادثة B إذا عُلم A هو:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

حيث $P(A) \neq 0$

مثال

يعمل عشرة طلاب في مطعم الجامعة، ويسحب كل منهم بطاقة من 10 بطاقات مرقمة بالأعداد من 1 إلى 10 عشوائيًا. ويقوم الطلاب الذين يسحبون البطاقات ذات الأعداد الفردية بتقديم الألبان الرئيسة، والذين يسحبون البطاقات ذات الأعداد الزوجية يُقدِّمون أطباق الحلوى. إذا قُدِّم سامر طبق حلوى، فما احتمال أن يكون قد سحب العدد 10؟

بما أن سامرًا قد قُدِّم طبق الحلوى، فإنه يكون قد سحب عددًا زوجيًا.

افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي

وأن B حادثة سحب العدد 10.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

الاحتمال المشروط

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0.5, P(A \cap B) = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$= \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

بالنسبة

احتمال أن يسحب سامر العدد 10 يساوي 0.2 أو 20%.

تمارين:

(1) سُحبت كرة زرقاء من كيس يحتوي على 3 كرات حراء و9 كرات زرقاء دون إرجاع عشوائيًا، ما احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء؟

$\frac{8}{11}$

(2) أُلقي مكعب أرقام. إذا كان العدد الظاهر على الوجه العلوي أقل من 5، فما احتمال أن يكون هو العدد 2؟

$\frac{1}{4}$

(3) حُطِّب شكل رباعي 16، وأطوال أضلاعه جميعها أعداد زوجية. ما احتمال أن يكون الشكل الرباعي مربعًا؟

$\frac{1}{4}$

(4) قُرِصٌ مقسَّم إلى 8 قطاعات متطابقة مرقمة من 1 إلى 8. وقد أُدير القرص. ما احتمال أن يستقر على القطاع رقم 6، إذا علم أنه استقر على قطاع ذي رقم زوجي.

$\frac{1}{4}$

الصف: الثاني الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات

تدريبات المهارات (23)

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات المهارات

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدد ما إذا كانت الحوادث مستقلين أو غير مستقلين. في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال.

(1) أُلقي مكعبًا أرقام وظهر العدد 6 على وجه كل منهما.

مستقلة، $\frac{1}{36}$

(2) يحتوي كيس على 13 بطاقة حراء و13 سوداء و13 خضراء و13 صفراء، وُقِّعت بطاقات كل لون بالأرقام من 1 إلى 13، وقد سُحبت بطاقة تحمل الرقم 10 دون إرجاع، ثم سُحبت بطاقة ثانية تحمل الرقم 10.

غير مستقلة، $\frac{1}{221}$

(3) يحتوي صندوق على 8 جوارب زرقاء و6 سوداء. سُحبت جورب أزرق دون إرجاع، ثم سُحبت جورب أزرق آخر.

غير مستقلة، $\frac{4}{13}$

أوجد احتمال كل مما يأتي:

(4) أُخبرت كرة خضراء من كيس يحتوي على 4 كرات صفراء و3 خضراء و9 زرقاء عشوائيًا دون إرجاع. إذا سُحبت كرة ثانية عشوائيًا، فما احتمال أن تكون خضراء؟

$\frac{2}{15}$

(5) أُلقي مكعب أرقام. إذا كان العدد الظاهر على وجه المكعب هو أحد الأعداد من 2 إلى 5، فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على وجه المكعب 4؟

$\frac{1}{4}$

(6) أدير قرصًا يحتوي على ألوان الطيف السبعة. أوجد احتمال أن يستقر المؤشر على اللون الأزرق، إذا عُلم أنه استقر على أحد الألوان الثلاثة الأساسية.

$\frac{1}{3}$

(7) معطر، أراد خليل أن يشتري عصيرًا من إحدى محلات العصائر. إذا كان في جيبه قطعتان من فئة الريال، و3 قطع من فئة نصف الريال، فما احتمال أن يسحب أولًا قطعة من فئة نصف الريال، ثم يسحب قطعة من فئة نصف الريال ثانية؟

$\frac{3}{10}$

(8) مقالات، يسحب طلاب صفٍّ مشعل في حصة اللغة الإنجليزية بطاقات من بين بطاقات كتب عليها أسماء الطلاب لقراءة مقالاتهم عشوائيًا. سحب راشد أولًا، ثم سحب صديقه حسن ثانيًا. إذا كان في الصف 20 طالبًا، فما احتمال أن يسحب كل منهما اسم الآخر؟

$\frac{1}{380}$

الصف: الثاني الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات

تدريبات حل المسألة (24)

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات حل المسألة

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

(1) قيادة، احتمال أن يحصل شخص ما على مخالفة سرعة 0.35، واحتمال أن يقود شخص سيارة خراء 0.15. إذا أُخبر سائق عشوائيًا، فما احتمال أن يكون قد حصل على مخالفة سير ويقود سيارة ليست خراء؟

0.2975

(2) ألعاب، أدير القرص المُقسَّم إلى 4 قطاعات متطابقة ومرتبة من 1 إلى 4. وأُلقي مكعب أرقام،

$\frac{1}{4}$

(3) بطاقات، سُحبت ثلاث بطاقات دون إرجاع من كيس فيه 13 بطاقة حراء و13 خضراء و13 صفراء، وبطاقات كل لون مرقمة بالأرقام من 1 إلى 13. ما احتمال أن تكون الأولى حراء والثانية خضراء والثالثة صفراء؟

تقريبًا 0.04

(4) يوم ميلاد، بما أنه يوجد 365 يومًا في السنة الواحدة، فإن احتمال أن يكون يوم ميلاد شخص في يوم معين من السنة يساوي 0.00273 تقريبًا.

تقريبًا 0.000005

APRIL 2008						
Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

ما احتمال أن يكون لشخصين يوم الميلاد نفسه؟

تقريبًا 0.000005

الصف: الثاني الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات

ما احتمال أن يستقر مؤشر القرص على عدد زوجي، وأن يظهر عدد زوجي على وجه المكعب؟

$\frac{1}{4}$

الصف: الثاني الثاني

24

الفصل: ٧ الاختصاصات

دون ضمن

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات المهارات

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدد ما إذا كانت الحوادث مستقلين أو غير مستقلين. في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال.

(1) أُلقي مكعبًا أرقام وظهر العدد 6 على وجه كل منهما.

مستقلة، $\frac{1}{36}$

(2) يحتوي كيس على 13 بطاقة حراء و13 سوداء و13 خضراء و13 صفراء، وُقِّعت بطاقات كل لون بالأرقام من 1 إلى 13، وقد سُحبت بطاقة تحمل الرقم 10 دون إرجاع، ثم سُحبت بطاقة ثانية تحمل الرقم 10.

غير مستقلة، $\frac{1}{221}$

(3) يحتوي صندوق على 8 جوارب زرقاء و6 سوداء. سُحبت جورب أزرق دون إرجاع، ثم سُحبت جورب أزرق آخر.

غير مستقلة، $\frac{4}{13}$

أوجد احتمال كل مما يأتي:

(4) أُخبرت كرة خضراء من كيس يحتوي على 4 كرات صفراء و3 خضراء و9 زرقاء عشوائيًا دون إرجاع. إذا سُحبت كرة ثانية عشوائيًا، فما احتمال أن تكون خضراء؟

$\frac{2}{15}$

(5) أُلقي مكعب أرقام. إذا كان العدد الظاهر على وجه المكعب هو أحد الأعداد من 2 إلى 5، فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على وجه المكعب 4؟

$\frac{1}{4}$

(6) أدير قرصًا يحتوي على ألوان الطيف السبعة. أوجد احتمال أن يستقر المؤشر على اللون الأزرق، إذا عُلم أنه استقر على أحد الألوان الثلاثة الأساسية.

$\frac{1}{3}$

(7) معطر، أراد خليل أن يشتري عصيرًا من إحدى محلات العصائر. إذا كان في جيبه قطعتان من فئة الريال، و3 قطع من فئة نصف الريال، فما احتمال أن يسحب أولًا قطعة من فئة نصف الريال، ثم يسحب قطعة من فئة نصف الريال ثانية؟

$\frac{3}{10}$

(8) مقالات، يسحب طلاب صفٍّ مشعل في حصة اللغة الإنجليزية بطاقات من بين بطاقات كتب عليها أسماء الطلاب لقراءة مقالاتهم عشوائيًا. سحب راشد أولًا، ثم سحب صديقه حسن ثانيًا. إذا كان في الصف 20 طالبًا، فما احتمال أن يسحب كل منهما اسم الآخر؟

$\frac{1}{380}$

الصف: الثاني الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات

23

الفصل: ٧ الاختصاصات



التدريبات الإثرائية (25)

فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (19)

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

التاريخ:

التاريخ: _____

درجات الحرارة الصغرى / العظمى	الأحوال	اليوم
70/50	شمس 	الاثنين
68/54	مطر 	الثلاثاء
62/53	غائم جزئياً 	الأربعاء

(b) ما احتمال أن يكون تنبؤ الراصد خطأ؟ لن نضرب المعطى

تعدادین: 100 100 10000 100

0.16
(2) عدم تشكُّل الغيوم وإصابة الراصد.

0.27
4 تشكّل الغيوم، وسوف تَطُفِرُ، والرائد مصيب.

.....

.....

.....

.....

.....

احتمالات

2) الفاء مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة، واحدة للجهاز، علم عدد في دة، ثم إدارة مؤثر في ص دور مقسم إلى 6

(3) يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات، لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، وركمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. إذا سُحِبَت بطاقة ثم أُعيدت إلى الصندوق، فما احتمال سحب بطاقة حمراء أو خضراء في المرة الأولى؟

2704

(4) إذا رُمِيَ مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال أن يكون الرقم الظاهر 3، إذا كان الرقم الظاهر على الوجه العلوي للمكعب أكبر من 2؟

أسود اللون؟
 $\frac{5}{9}$

7) لعبة البولونج: تشير نتائج مسابقة إلى أن احتمال إسقاط اللاعب أحمد جميع القوارير في المحاولة الأولى هو 25%، واحتمال إسقاط محمد إما في المحاولة الأولى 43%، فما احتمال إسقاطهما في المرة الأولى معاً؟

بها أنباؤهم. إذا اختيرت عشوائياً أسماء 4 من الآباء مع الإرجاع، فما احتمال أن يكونوا جميعاً راضين عن أداء المدير؟

.....

.....

.....

احتمالات الحوادث المتنافية

Probabilities of Mutually Exclusive Events

لماذا؟

يمكن لأي طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالباً يبدأ اسمه بحرف م.



فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- أجد احتمال متممة حادثة.

المفردات:

الحادثان المتنافيان

mutually exclusive events

الحادثة المتممة

complement event

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-6

إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

الدرس 7-6

إيجاد احتمالات الحوادث المتنافية، والحوادث غير المتنافية.

إيجاد احتمال متممة حادثة.

ما بعد الدرس 7-6

تطبيق الاحتمالات في مجالات مختلفة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- لماذا سيكون سلمان سعيداً إذا فاز محمد من الأول الثانوي؟ لأنه من الصف الأول الثانوي ويبدأ اسمه بحرف م.
- هل يمكن أن يفوز طالب يفضل كل من صالح وسلمان؟ نعم، إذا كان اسمه يبدأ بحرف م، وهو من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي.

إجابات (تحقق من فهمك):

(1A) غير متنافيتين؛ إجابة ممكنة: العدد الذي يقبل القسمة على 10 يقبل القسمة على 5 أيضاً.

(1B) متنافيتين، إجابة ممكنة: لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة؛ إذ لا يمكن إيجاد عددين مجموعهما 6 و 7 في آن واحد.

الحوادث المتنافية لقد اختبرت في الدرس 7-4 احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$$P(A \cap B)$$

يدل على تقاطع مجموعتين

$$P(A \cup B)$$

يدل على اتحاد مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أي أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

تحديد الحوادث المتنافية

مثال 1 من واقع الحياة

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في أعلى الصفحة.

(a) المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.
هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالباً في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

(b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.
هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

تحقق من فهمك

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك: **انظر الهامش**

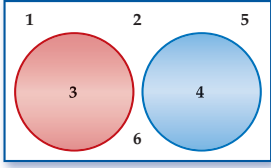
(1A) اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائياً، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10. **انظر الهامش**

(1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة.

مصادر الدرس 7-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص. (143)	• تنويع التعليم، ص. (143, 145)	• تنويع التعليم، ص. (143, 145)
كتاب التمارين	• ص (20)	• ص (20)	• ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العينة لهما.



فمثلاً لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقم، سترى من أشكال
فن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3) = \frac{1}{6} \text{ و } P(4) = \frac{1}{6} \quad P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

يوضح هذا المثال القانون الأول من قانوني الجمع في الاحتمالات.

الحوادث المتنافية

المثال 1 يبين كيفية تحديد إذا كانت
حادثتين متنافيتين أم غير متنافيتين.

المثال 2 يبين كيفية حساب احتمال
حادثتين متنافيتين.

المثال 3 يبين كيفية حساب احتمال
حادثتين غير متنافيتين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد
كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة
للمفاهيم.

مفهوم أساسي

احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فاحتمال وقوع
 A أو B يساوي مجموع احتمال كل منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

قراءة الرياضيات

($\cup$) يدل على وقوع
أحد الحدثين على الأقل،
ويشير إلى جمع
الاحتمالات. $P(A \cup B)$
يقرأ احتمال وقوع A أو
وقوع B .

مثال 2 من واقع الحياة

الحوادث المتنافية

العدد	أنواع الكتب
10	دينية
12	فيزيائية
13	كيميائية

كتب: اختار موسى كتاباً من الكتب الموجودة في مكتبته المبنية في الجدول
المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينياً أو فيزيائياً؟
هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينياً أو فيزيائياً
آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني
وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي
مجموع الكتب هو $10 + 12 + 13 = 35$.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$$

$$P(A1) = \frac{10}{35} \text{ و } P(A2) = \frac{12}{35} \quad = \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$$

بالجمع

لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريباً.

تحقق من فهمك

(2A) إذا رُمي مكعبان مرقمان متميزان مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي
المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9؟ $\frac{5}{18}$ ، أو 28% تقريباً

(2B) **أنعاب:** إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح
جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائياً من بين 15 محفظة و 16 ساعة و 14 نظارة و 25 قلماً و 10 كرات،
فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟ $\frac{41}{80}$ ، أو 51% تقريباً

مثالان إضافيان

1 بطاقات: كيس به بطاقات: 13 منها

حمراء و 13 زرقاء و 13 خضراء
و 13 بيضاء، و بطاقات كل لون مرقمة
من 1 إلى 13. إذا سُحبت بطاقة
واحدة من الكيس عشوائياً، فحدد ما
إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير
متنافيتين، وبرر إجابتك.

(a) بطاقة تحمل الرقم 1 أو 9

متنافيتان. لا يوجد ناتج
مشتركة؛ إذ لا يمكن أن تكون
البطاقة الواحدة تحمل الرقم 1
والرقم 9 في وقت واحد.

(b) بطاقة تحمل الرقم 10 أو حمراء.

غير متنافيتين، هناك ناتج مشترك
بينهما هو البطاقة الحمراء التي
تحمل الرقم 10.

2

فقود: تحتوي حصالة على

30 قطعة نقدية من فئة الريال، وعلى
25 من فئة النصف ريال، وعلى
40 من فئة الربع ريال. فإذا سحب
سعد قطعة قطعة عشوائياً، فما
احتمال أن تكون من فئة الريال أو
النصف ريال؟ $\frac{11}{19}$ أو 0.58 تقريباً

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية مثل على

السبورة رسماً شجرياً لتوضح للطلبة
كيفية حساب احتمالات الحوادث
المتنافية. واحفظه، ثم أرسله إلى
الطلبة؛ ليكون مرجعاً لهم.

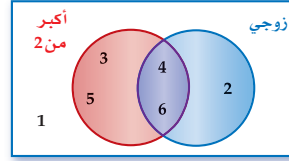
إرشادات للمعلم الجديد

تبرير يبين للطلبة أن الدوائر في شكل فن التي
تمثل حادثتين متنافيتين ليست متداخلة، وأن الشكل
الذي يمثل حادثتين غير متنافيتين سيحتوي على
دوائر متداخلة.

مثال إضافي

فن: استعمل الجدول الوارد في المثال 3 لإيجاد احتمال أن يختار إبراهيم لوحة مرسومة بالألوان المائية أو شكلاً هندسياً.

$\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريباً



عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال فن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5, 6. لذا فإن

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6} \quad P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي وأكبر من 2}) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من 2}) - P(\text{أكبر من 2 زوجي})$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

أضف إلى
مطوبتك

احتمال حادتين غير متنافيتين

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادتان A, B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحاً منه احتمال وقوع A و B معاً.

بالرموز: إذا كانت الحادتان A, B غير متنافيتين فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الأحداث غير المتنافية

مثال 3 من واقع الحياة

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائياً للمشاركة في مسابقة فنية، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًا؟
بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادتين غير متنافيتين.

$$P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي}) = P(\text{لوحة زيتية}) + P(\text{منظر طبيعي}) - P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي})$$

$$\text{بالتعويض} = \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30}$$

$$\text{بالتبسيط} = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30}$$

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريباً.

تحقق من فهمك

(3) مجموعة بطاقات عددها 52، مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأزرق، الأصفر، ورُقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. ما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 7، أو بطاقة حمراء من هذه المجموعة؟ $\frac{4}{13}$ ، أو 31% تقريباً



الربط مع الحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقديم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

احتمال الحادثة المتممة عناصر **الحادثة المتممة** A تتكون من جميع نواتج فضاء العينة غير الموجودة في الحادثة A . فمثلاً تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$ ، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$ ؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: 1, 2, 3, 5, 6. لذا فإن $P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$ (عدم الحصول على العدد 4).
لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(A)$.

مفهوم أساسي **احتمال الحادثة المتممة**

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأي حادثة A ، $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز $(\bar{A})$.

احتمال الحادثة المتممة

مثال 4 يبين كيفية حساب احتمال حادثة متممة.

مثال 5 يبين كيفية تحديد القانون المناسب واستعماله لحساب الاحتمال.

مثال 4 الحادثة المتممة

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائياً من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) && \text{احتمال المتممة} \\ &= 1 - \frac{20}{300} && \text{بالتعويض} \\ &= \frac{280}{300} = \frac{14}{15} && \text{بالتحريك والتبسيط} \end{aligned}$$

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$ ، أو 93% تقريباً.

تحقق من فهمك

(4) إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟ 30%

مثال إضافي

كرات: يوجد في وعاء 200 كرة صغيرة، منها 15 كرة فقط حمراء. إذا سحب خليل كرة عشوائياً من الوعاء، فما احتمال ألا يسحب الكرة الحمراء؟
 $\frac{37}{40}$ ، أو 93% تقريباً

المحتوى الرياضي

الحادثة المتممة هناك دائماً فرصتان لأي حادثة A هما: وقوع الحادثة A ، أو عدم وقوعها $\bar{A}$. ومجموع احتمالات جميع نواتج تجربة عشوائية يساوي 1 دائماً. وهذا ما يمكن ملاحظته إذا أعيدت كتابة قانون احتمال متممة حادثة على الصورة الآتية:
 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

ملخص المفاهيم	قوانين الاحتمال	أضف إلى مطوبتك
نوع الحوادث	التعريف	القانون
الحدثان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A, B حادثتين مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحدثان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما.	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحدثان المتنافيتان	حدثان لا توجد بينهما نواتج مشتركة.	إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحدثان غير المتنافيتين	حدثان توجد بينهما نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحدثان المتتامتان	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العينة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأي حادثة A ، $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

الشهر	عدد حالات الوفاة
المحرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الربط مع الحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430 هـ. وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

من المثال 5 لاحظ أن

$$P(A \cup B) = P[(A \cap B)^c]$$

وبالمثل

$$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c]$$

مثال 5 من واقع الحياة

تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افترض أن 81% من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تم اختيار سائقيين واحداً تلو الآخر عشوائياً من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحداً أو أكثر. لذا أنت في حاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد $P(A \cup B)$



خطوط الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افترض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

وافترض أن الحادثة B تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تم اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \cap B)^c]$

هاتان الحادتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

احتمال الحادتين غير مستقلتين

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(A) = \frac{81}{100}$$

$$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$$

بالضرب

$$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$$

احتمال الحادثة المتممة

$$P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B)$$

بالتعويض

$$= 1 - \frac{36}{55}$$

بالطرح

$$= \frac{19}{55}$$

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريباً.

تحقق استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي $(100 - 81)\%$ ، أو 19%

واحتمال اختيار سائقيين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن

$19\% > 35\%$ ، فإن الإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

5 هواتف نقالة: أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحداً تلو الآخر عشوائياً من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقال أثناء القيادة؟ **0.42 تقريباً**

مثال إضافي

5

نشاطات: تبين من مسح شمل طالبات مدرسة ثانوية للبنات أن 36% منهن مشتركات في مسابقة حفظ القرآن الكريم. فإذا اختيرت طالبتان عشوائياً من بين 100 طالبة من هذه المدرسة، فما احتمال أن تكون واحدة منهن على الأقل غير مشتركة في المسابقة؟

$\frac{48}{55}$ ، أو 87% تقريباً

تنويع التعليم

دون ضمن هوف

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة أن يتأملوا ملخص المفاهيم في الصفحة (144)، ثم يعبروا بكلماتهم الخاصة عن حالات استعمال كل واحد من هذه القوانين، ويكتبوا مثلاً لكل واحدة منها.

مثال 1

حدد إذا كانت الحادنتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وبرر إجابتك:

- ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة. غير متنافيتين؛ لأن 5 عدد فردي وأكبر من 3
- اختيار سيارة أو حصان. متنافيتان؛ لأن السيارة لا تكون حصاناً ولا يكون الحصان سيارة.
- حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائياً واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتاباً، أو ساعة؟ $\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريباً

مثال 2

مثال 3

مثال 4

مثال 5

- بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟ $\frac{11}{25}$ أو 44%
- إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$ ، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟
- عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان واحداً تلو الآخر عشوائياً من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟ 17.3%
- احتمال أن يخطئ السهم الهدف يساوي $\frac{9}{10}$ ، أو 80%

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضة	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3

- حدد إذا كانت الحادنتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلٍّ من الأسئلة 7-9)، ثم أوجد الاحتمال، وقرب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضرورياً:
- رمي مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين. غير متنافيتين، $\frac{10}{36}$ ، أو 27.8% تقريباً
- اختيار عدد عشوائياً من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3.
- إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة. متنافيتان، 100%
- رياضة: يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 14-16. ما احتمال أن يلعب مشارك كرة السلة أو أن يكون عمره 14؟ 56%

العمر	كرة القدم	كرة الطائرة	كرة السلة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

- هدايا: أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصاً، و 6 اختاروا هاتفاً نقالاً، و 4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائياً فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟ $\frac{7}{16}$ أو 43.8% تقريباً
- أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:
- عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة.
- عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة. $\frac{1}{2}$ ، أو 50%
- سحب خليل عشوائياً كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألا يسحب الكرة الحمراء؟ $\frac{24}{25}$ أو 96%
- من بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعياً تساوي 71%. فإذا اختير اثنان واحداً تلو الآخر عشوائياً من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجره أسبوعياً؟ 92%

مثال 4

مثال 5

3 التدريب

التقويم التكويني

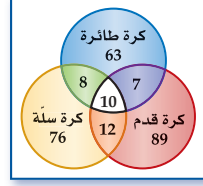
استعمل الأسئلة 1-6 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	16-7 ، 19-27
ضمن المتوسط	17-7 ، 19-27
فوق المتوسط	17-27

- (16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من مجموعة عددها 100، فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟
- (17) أجرت مدرسة مسجًا على طلابها البالغ عددهم 265 لمعرفة أي الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، ومثلت النتائج بأشكال فن. إذا اختير طالب عشوائيًا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كل مما يأتي:
- (a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة. **71.3%**
- (b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولا يرغبون المشاركة في كرة السلة. **36.2%**
- (c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث. **3.8%**



4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يذكروا الفرق بين الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية وقانون إيجاد احتمال كل منها.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

إجابات:

- (18) 0.74؛ إجابة ممكنة: يوجد ثلاث حالات يظهر فيها على مكعبين عدد أقل من أو يساوي 4، ويوجد حالة واحدة يظهر فيها على كل المكعبات الثلاثة عدد أقل من أو يساوي 4، وعليك إيجاد احتمال كل حالة من الحالات الأربع ثم جمعها.

- (19) غير متنافيتين، إجابة ممكنة: إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فهو متطابق الزوايا، لذا فلا يمكن أن تكون هاتان الحادثتان متنافيتين.

- (20) غير متنافيتين، إجابة ممكنة: العدد الحقيقي هو عدد مركب في الوقت ذاته.

- (21) إجابة ممكنة: إذا سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات ملونة بأحد اللونين الأحمر، والأسود. ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 10، فإن حادثة أن تحمل البطاقة المسحوبة الرقم 3 وحادثة أن تحمل الرقم 5، هما حادثتان متنافيتان. أما حادثة أن تحمل البطاقة الرقم 3 وحادثة أن تكون حمراء، فهما حادثتان غير متنافيتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (18) **تحذّر:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقمة متميزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟ **للأسئلة 18-22 انظر الهامش**
- تبرير:** حدد إذا كانت الحادثتان في كل مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:
- (19) اختيار مثلث متطابق الأضلاع ومثلث متطابق الزوايا.
- (20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.
- (21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.
- (22) **اكتب:** وضح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

- (24) **احتمال:** رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟ **B**

- A** $\frac{1}{6}$
B $\frac{2}{3}$
C $\frac{5}{6}$
D 1

- (23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟ **D**

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 **B** 0.35 **C** 0.5 **D** 0.65

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال: **الدرس (4-7)**

- (25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعب مرقم، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية. **مستقلين، 3% تقريبًا أو $\frac{1}{36}$**
- (26) سحب مصباحين تالفين واحدًا تلو الآخر من صندوق فيه 12 مصباحًا، 3 منها تالفة. **$\frac{1}{22}$ أو 0.045 تقريبًا**
- (27) أوجد عدد النواتج الممكنة عند رمي مكعب مرقم وثلاث قطع نقد. **الدرس (1-7) 48**

الدرس 5-7 احتمالات الحوادث المتنافية 145

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يفكروا في مواقف عملية تمثل أنواع الاحتمالات التي درسوها، ويمثلوا الحوادث في كل منها بأشكال فن.

(22) إجابة ممكنة: عندما تكون الحادثتان متنافيتين فلا يمكن وقوعهما معًا. ولكن هذا لا يعني أنه يجب أن تقع إحداهما بالضرورة. إن مجموع احتمالات نواتج فضاء العينة كافة يساوي 1. فعلى سبيل المثال، إذا كانت الحادثتان A و B متنافيتين فإن فضاء العينة يشمل: احتمال وقوع A، واحتمال وقوع B، واحتمال عدم وقوع أي

منهما، ومجموع هذه الاحتمالات الثلاثة يجب أن يساوي 1. وقد يكون مجموع احتمال وقوع A واحتمال وقوع B يساوي 1 ولكن ليس دائمًا.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 7

دون ضمن فوق المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26)

دون

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الحوادث المتنافية

الحوادث المتنافية، إذا لم يكن وقوع حادثين ممكنًا في الوقت نفسه، وليس لهما نتائج مشتركة، فإنها تسمى حادثين متنافيين. وفيما يأتي قانونا الجمع في الاحتمالات.

احتمال حادثين متنافيين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
احتمال حادثين غير متنافيين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال
يوجد في خزانة مكتبة 15 رواية و20 ديوان شعر و14 كتاب تاريخ و12 كتاب علوم. إذا أختير أحد الكتب من الخزانة عشوائيًا، فما احتمال اختيار كتاب في التاريخ أو العلوم؟

افترض أن H تمثل اختيار كتاب تاريخ،
وأن S تمثل اختيار كتاب علوم
 $P(H \cup S) = P(H) + P(S)$
 $= \frac{14}{61} + \frac{12}{61}$
 $= \frac{26}{61}$
أو حوالي 43%

تمارين
حدد ما إذا كانت الحوادث متنافيين أو غير متنافيين في كلِّ مما يأتي. ثم أوجد الاحتمال إلى أقرب جزء من مئ.
(5) **حقيقة ظهور**، اختيار بغاء أو بطة من حديقة طيور تحتوي على 15 بغاء و25 بطة و9 صفور و3 تعامات بطريقة عشوائية. **متنافية، 0.77**
(6) **اعباب**، ظهور 6 على الوجه العلوي أو ظهور عدد زوجي عند رمي مكعب أرقام. **غير متنافية، 0.5**

(7) **جودته**، تقدم مدرسة مدينة الطالب في كل شهر، حيث يختارها عشوائيًا من بين 9 بطاقات دعوة إلى مطاعم المنطقة، أو من 8 أقراص مدمج (CD) أو من 6 أقراص رقمية (DVD) أو من 5 بطاقات مشتريات من المركز التجاري. ما احتمال أن يختار الطالب CD أو DVD ؟ **متنافية، 0.5**

(8) **وجبات طلابية**، بناء على الجدول التالي، ما احتمال أن يكون أحد الطلاب في اللجان الطلابية من الصف الثاني الثانوي أو في لجنة الخدمات؟

اللجان	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
خدمات	4	5	6
إعلام	3	2	2
رياضة	4	8	6
علاقات إدارية	1	1	4

غير متنافية، 0.57

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

26

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (27)

دون

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الحوادث المتنافية

احتمال الحادثتين المتتامتين، تتضمن متضمنة الحادثة A جميع النتائج في الفضاء العيني غير المتضمنة في الحادثة A .

احتمال متضمنة حادثة ما	$P(A) = 1 - P(\bar{A})$ (شدة A)
------------------------	------------------------------------

مثال
توجد 100 صورة فوتوغرافية في معرض مدرسة، 3 صور منها لياسر. سيتم اختيار صورة واحدة عشوائيًا لمعرضها في مكتب مدير المنطقة التعليمية، فما احتمال ألا يتم اختيار أي واحدة من صور ياسر؟

افترض أن A تمثل اختيار صورة واحدة من صور ياسر.
بعد ذلك أوجد احتمال متضمنة A .
 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ (ليس A) احتمال التضمنة (ليس A يعني شدة A)
 $= 1 - \frac{3}{100}$
 $= \frac{97}{100}$
 $= 0.97$

احتمال ألا يتم اختيار إحدى صور ياسر يساوي 97%.

تمارين

أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:

(1) إذا كان احتمال أن تغلب إيثك والدتك أن تنظف غرفتك اليوم بعد عودتك من المدرسة يساوي $\frac{4}{7}$ ، فما احتمال ألا تغلب إيثك ذلك؟ **0.2**

(2) يوجد في صندوق 100 بطاقة: 20 بطاقة منها حراء، و70 سوداء، و10 خضراء، إذا سُحبت بطاقة واحدة من الصندوق عشوائيًا، فما احتمال ألا تكون خضراء؟ **0.90**

(3) عند إلقاء قطعة نقود، ما احتمال عدم ظهور كتابة على وجهها العلوي؟ **0.5**

(4) ما احتمال عدم ظهور الرقم 6 عند إلقاء مكعبين مرقبين من 1 إلى 6؟ **0.69 تقريبًا**

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

27

تدريبات المهارات (28)

دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات المهارات

احتمالات الحوادث المتنافية

حدد ما إذا كانت الحوادث متنافيين أو غير متنافيين في كلِّ مما يأتي. ثم أوجد الاحتمال في صورة نسبة مئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًا.

(1) رمي مكعبين مرقبين وظهور عددين متماثلين على وجهي المكعبين أو مجموع العددين 6. **غير متنافية، $\frac{5}{18}$ أو 27.8% تقريبًا**

(2) سحب بطاقة تحمل الرقم 2 أو لونها أسود من كيسي فيه 13 بطاقة حراء و 13 سوداء و 13 زرقاء و 13 خضراء و بطاقات من كل لون مرقمة من 1 إلى 13. **غير متنافية، $\frac{4}{13}$ أو 30.8% تقريبًا**

(3) رمي مكعبي الأرقام، وظهور عددين على الوجهين مجموعها 8 أو 12. **متنافية، $\frac{1}{6}$ أو 16.7% تقريبًا**

أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:

(4) إذا كانت فرصة اختيار طالب رئيسًا للجنة طلابية تساوي 1 من 200، فما احتمال عدم اختياره؟ **$\frac{199}{200} = 0.995$**

(5) إذا كانت فرصتك في تسجيل هدف من رمية حرة 40%، فما احتمال ألا تسجل هدفًا من الرمية الحرة؟ **0.6 أو 60%**

(6) إذا أُدير مؤشر قرض دوار مُشتمل إلى 6 مناطق متطابقة ومرقمة من 1 إلى 6، فما احتمال ألا يستقر المؤشر على الرقم ٥؟ **$\frac{5}{6}$ أو 83.3% تقريبًا**

(7) في دواء 250 قطعة نقود عشرة منها من فئة ربع الريال، والبقية من فئة 10 حلالات. إذا سحبت جمانة قطعة نقود واحدة، فما احتمال ألا تكون من فئة ربع الريال؟ **$\frac{240}{250} = 0.96$**

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

28

تدريبات حل المسألة (29)

دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات حل المسألة

احتمالات الحوادث المتنافية

(1) **تطوع**، يبين الجدول الآتي أعداد الطلبة المتطوعين للعمل، وصغرفهم في مدرسة ما.

الصف	العمل داخل المدرسة	العمل خارج المدرسة	داخل المدرسة وخارجها
الأول الثانوي	25	20	15
الثاني الثانوي	30	20	10

إذا أختير طالبٌ من بين التطوعين عشوائيًا، فما احتمال أن يكون من الصف الأول الثانوي أو من التطوعين للعمل داخل المدرسة وخارجها.

0.58 أو 58%

(2) **التوحد الفرمسية الصيفية**، يبين الجدول الآتي أنواع النشاطات والصفوف، وعدد المشاركين الذين تراوح أعمارهم بين 9-7 سنوات.

الصف	النشاط	الرسم	الطاقة
7	40	35	25
8	30	21	14
9	20	9	44

إذا أختير أحد المشاركين عشوائيًا، فما احتمال أن يشارك نشاط الرسم أو أن يكون عمره 8 سنوات؟ **0.6**

(3) **جامعات**، يوجد 100 طالب في الصف الثالث الثانوي في مدرسة؛ 89% منهم يخططون للدراسة في جامعات رسمية. إذا أختير طالبان من طلاب الصف عشوائيًا، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يخطط للدراسة في جامعة رسمية؟ **0.21**

(4) **تصميم**، صممت سوسن ومها لعبة في الرياضيات لطلاب الصف الثالث للتدرب على الحقائق الأساسية. فقررت أن يُستعمل في اللعبة مكعبا أرقام، وعلى اللاعبين أن يجدا مجموع العددين الظاهريين على وجهي المكعبين. وقد كُوتت سوسن ومها الجدول الآتي للمساعدة على إيجاد الاحتمالات.

يُلقى كل لاعب للمكعبين عندما يأتي دوره.

(8) ما احتمال الحصول على رقمين متساويين أو رقمين مجموعها ٩؟ **0.333**

(b) ما احتمال الحصول على رقمين مجموعها عدد زوجي أو عدم ظهور الرقم ٢؟ **0.7**

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، ١٠ احتمالات

29

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1-9، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات كمرجع ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العينة (الدرس 1-7)

- فضاء العينة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العينة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-7)

- الترتيب مهم في التباديل.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-7)

- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واختيرت نقطة E عشوائياً من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة B}}{\text{مساحة المنطقة A}}$
- احتمالات الحوادث المركبة (الدرس 4 و 5 و 7)

- إذا كانت الحادثة A متممة للحادثة A فإن $P(A') = 1 - P(A)$

- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B، فإن الحادتين مستقلتان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- إذا كانت الحادتان A و B غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

- إذا لم يكن وقوع الحادتين A و B ممكنًا في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

منظم أفكار

المطويات



تأكد من أن المفاهيم الأساسية قد دوّنت في مطوبتك.

المفردات

فضاء العينة ص 112	الحادثة المركبة ص 132
الرسم الشجري ص 112	الحوادث المستقلة ص 132
تجربة ذات مرحلتين ص 113	الحوادث غير المستقلة ص 132
تجربة متعددة المراحل ص 113	الاحتمال المشروط ص 134
مبدأ العد الأساسي ص 114	شجرة الاحتمال ص 134
التباديل ص 118	الحادثة المشروطة ص 135
المضروب ص 118	الحوادث المتنافية ص 139
التباديل الدائرية ص 120	الحادثة المتممة ص 142
التوافيق ص 121	
الاحتمال الهندسي ص 125	

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

- 1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة. **صحيحة**
- 2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم. **خاطئة، التوافيق**
- 3) تحديد ترتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية. **صحيحة**
- 4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضاً مثال على الحوادث غير المستقلة. **خاطئة، المستقلة**
- 5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياساً هندسياً مثل الطول أو المساحة. **صحيحة**
- 6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ، مثال على المضروب. **صحيحة**
- 7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العينة. **صحيحة**
- 8) ألقى يوسف قطعة نقد 200 مرة لتكوين شجرة احتمال للتجربة. **خاطئة، محاكاة**
- 9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية. **خاطئة، غير المستقلة**

منظم أفكار

المطويات

وبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

مراجعة الدروس

معالجة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 7 ص (46)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عما كانت عليه عند بدايته.

7-1 تمثيل فضاء العينة ص 112-117

مثال 1

ألقيت ثلاث قطع نقد متميزة مرة واحدة. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة. أقرن كل ناتج ممكن من القطعة الأولى بالناتج من القطعتين الثانية والثالثة.

LLL, LLT, LTL, LTT, TLL, TLT, TTL, TTT

(10) فشار: يبيع محل تجاري أكياس فشار ذات حجم صغير (S) أو حجم وسط (M) أو حجم كبير (L)، ودون زبدة (NB) أو مع زبدة (B) أو مع زبدة إضافية (EB). مثل فضاء العينة لأنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري. **انظر الهامش**

(11) أحذية: يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، ويلونين: بني أو أسود. فكم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟ **18**

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق ص 118-124

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

$(n - 1)!$ قانون التباديل الدائرية

$(4 - 1)!$ $n = 4$

$3! = 6$ بالتبسيط

لذا فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

(12) مطعم: ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث المتوسط إلى مطعم وجلسوا حول منضدة مستديرة. فإذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب أي طالب من الصف الثالث المتوسط، واشترط إبراهيم من الصف الثالث المتوسط ألا يجلس بجانب أي طالب من الأول الثانوي. فما عدد الترتيب الممكنة؟ **4**

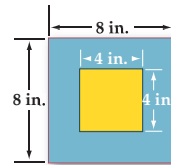
(13) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن، بحيث يتم اختيارهن عشوائيًا من المجموعة. فما احتمال اختيار نوال ودانة وفاطمة لهذه اللجنة؟ **$\frac{1}{120}$**

(14) مسابقات: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟ **35960**

7-3 الاحتمال الهندسي ص 125-130

مثال 3

لعبة رمي الكرة:



(a) إذا ألقى حاتم كرة على المنطقة المبيّنة في الشكل، فما احتمال أن تقع في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الصفراء $4 \times 4 = 16$
 $P(\text{الصفراء}) = \frac{16}{64} = 25\%$ (أن تقع الكرة في المنطقة الصفراء)

(b) ما احتمال ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $64 - 16 = 48$
 $P(\text{الزرقاء}) = \frac{48}{64} = 75\%$ (ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء)



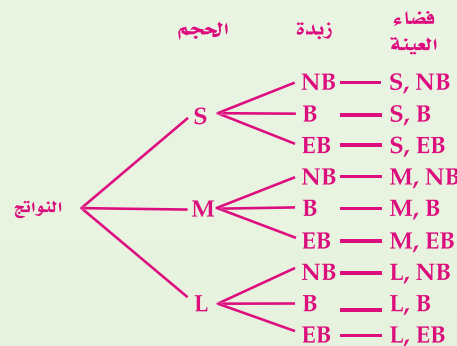
(15) زراعة: الشكل المجاور يمثل مخططًا لمزرعة. إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة، فأجب عن كل مما يأتي:

(a) ما المساحة التقريبية لحقل فول الصويا والذرة معًا؟ **55**
(b) إذا اختير أحد المربعات عشوائيًا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة الذرة. **16% تقريبًا أو 0.16 تقريبًا**

(16) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة، بحيث يجلس هاني على بُعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بُعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بُعد 3ft من عبد الكريم. إذا وقعت ريشة طائر بينهم، فأوجد احتمال أن تكون قد وقعت بين هاني وعمر. **$\frac{2}{9}$ أو 22% تقريبًا**

إجابة:

(10) $S, NB; S, B; S, EB; M, NB; M, B; M, EB; L, NB; L, B; L, EB$



الحجم	دون زبدة	مع زبدة	زبدة إضافية
صغير S	S, NB	S, B	S, EB
متوسط M	M, NB	M, B	M, EB
كبير L	L, NB	L, B	L, EB

7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة ص 132-138

مثال 4

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين بيضاوين و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت كرتان على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الحادثين غير مستقلتين، ويتم حساب الاحتمال على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} P(\text{زرقاء/حمراء}) &= P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{زرقاء/حمراء}) \\ &= \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{6}{55} \approx 16.46\% \end{aligned}$$

(17) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت كرتان على التوالي دون إرجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء؟ $\frac{2}{7}$

(18) أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من بين 100 شخص، فما احتمال أن يكون الشخصان من الذين يحبون المطالعة؟ **0.52 تقريبًا**

7-5 احتمالات الحوادث المتنافية ص 139-145

مثال 5

عند إلقاء مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدثان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5.

$$\begin{aligned} P(\text{متساويان}) + P(\text{المجموع 5}) &= P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) \\ &= \frac{4}{36} + \frac{6}{36} \\ &= \frac{5}{18} \approx 27.8\% \end{aligned}$$

(19) رُمي مكعبان مرقمان متميزان مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عليهما 7 أو 11؟ $\frac{2}{9}$

(20) سُحبت بطاقة من مجموعة البطاقات الواردة في السؤال 20، ما احتمال أن تحمل الرقم 10 أو أن يكون لونها أحمر؟ $\frac{4}{13}$

(21) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًا. $\frac{11}{20}$

(a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا أو أقل من 5؟

(b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟ $\frac{19}{40}$

إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{AE}$ ، فأوجد كلاً مما يأتي:

للسؤالين 1، 2 انظر الهامش



(1) أن تقع X على $\overline{AC}$ $P(\overline{AC})$ (2) أن تقع X على $\overline{CD}$ $P(\overline{CD})$

(3) سباحة: يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟ 362880

(4) سفر: يحتاج مندوب مبيعات إلى زيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدّها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟ 24

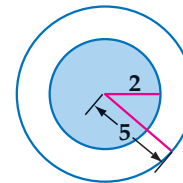
مثل فضاء العينة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري:

(5) يحتوي صندوق على كرة واحدة من كل لون من الألوان الآتية: الأحمر (R)، والأخضر (G)، والأزرق (B). سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع. انظر ملحق الإجابات

(6) أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده نوعين من الشطائر هما: بالجين (C)، وباللحم (M)، فقرر شراء شطيرتين.

انظر ملحق الإجابات

(7) كتابة: يكمن طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متململ"؟ 60

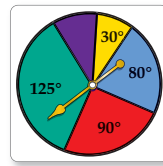


(8) تصويب: يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟ 16%

(9) أعداد: ما احتمال أن يكون عدد مكون من الأرقام السبعة الآتية 6222777 هو $\frac{1}{140}$ ؟

(10) مسابقات: اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح المسابقات جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟ $\frac{1}{455}$

(11) حدد إذا كانت الحادثتان الآتيتان مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال: سحب بطاقتين حمراوين الواحدة تلو الأخرى من صندوق يحوي 5 بطاقات صفراء و5 حمراء و5 برتقالية مع الإرجاع. مستقلتين، $\frac{1}{9}$



استعمل تجربة القرص ذي المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كل من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خط تُعاد التجربة).

(12) استقرار المؤشر على اللون البنفسجي P 9.7%

(13) استقرار المؤشر على اللون الأحمر P 25%

(14) استقرار المؤشر على لون غير الأصفر P 91.7%

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرّر إجابتك: للأسئلة 15-17 انظر الهامش

(15) يمتلك رجل سيارة وشاحنة.

(16) رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين مجموعهما 7، وظهور العدد 6 على أحد وجهي المكعبين.

(17) سحب بطاقة حمراء وزرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
	الدروس: 7-1، 7-2، 7-3، 7-4، 7-5، 7-6		تدريبات إعادة التعليم،
	تدريبات المهارات،		ص (6، 11، 16، 21، 26)
	ص (8، 13، 18، 23، 28)		
	مشروع الفصل، ص (110)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com



تنظيم البيانات

تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات لتحليلها؛ لكي تحل فقرات أسئلة في اختبار معياري. استعمل هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات وحل المسائل.

استراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

إذا أعطيت مسألة تحتوي على بيانات، فاعتمد واحدة ممّا يأتي:

- عمل قائمة بالبيانات.
- استعمال جدول لتنظيم البيانات.
- عرض البيانات مثل: التمثيل بالأعمدة، أشكال فن، القطاعات الدائرية، التمثيل بالخطوط أو الصندوق وطرفيه لتنظيمها.

الخطوة 2

نظّم البيانات.

- كوّن جدولاً، أو قائمة، أو تمثيلاً بيانياً، أو أشكال فن.
- اكتب القيم المجهولة التي يمكن إيجادها بحسابات بسيطة إذا كان ذلك ممكناً.

الخطوة 3

حلّل البيانات لتتمكن من حل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحديد المطلوب.
- استعمل الخصائص الهندسية والجبرية الضرورية للتعامل مع البيانات المنظمة، وحلّ المسألة.
- إذا كان الزمن كافياً فراجع الحل وتحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة وحدّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات لحلها:

يوجد في مركز للغات 18 طالباً يتعلمون اللغة الإنجليزية، و14 يتعلمون اللغة الفرنسية، و16 يتعلمون اللغة الألمانية، ويوجد 8 طلاب يتعلمون الإنجليزية فقط، و7 يتعلمون الألمانية فقط، و3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط، وطالبان يتعلمان الفرنسية والألمانية فقط، و4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاث معاً. إذا اختير أحد الطلاب عشوائياً، فما احتمال أنه يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية؟

$$\frac{7}{12} \text{ D}$$

$$\frac{5}{18} \text{ C}$$

$$\frac{2}{5} \text{ B}$$

$$\frac{9}{16} \text{ A}$$

1 التركيز

الهدف تنظيم البيانات للمساعدة على تحليلها وحل المسائل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- ما هي بعض الطرائق التي تُعطى بها البيانات التي تستوجب التنظيم؟
إجابة ممكنة: نتائج إحصائية معينة.
- هل تعتقد أن هناك طرائق أخرى مختلفة لتنظيم البيانات؟ **نعم**
- كيف يمكن أن تساعدك عملية تنظيم البيانات على حل المسألة في رأيك؟
إجابة ممكنة: عملية تنظيم البيانات تسهّل قراءتها وتحليلها وتحديد المطلوب.

مثال إضافي

مثال على اختبار معياري:

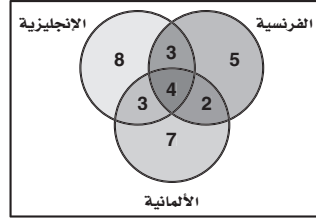
يوجد من بين طلاب صف عبد الله الذين يملكون طيورًا في منازلهم 13 طالبًا لديهم كناري و 9 لديهم ببغاوات و 7 لديهم بلابل. كما أن هناك 6 لديهم طيور كناري وببغاء معًا و 5 لديهم كناري وبلابل و 3 لديهم ببغاوات وبلابل، وطالبان اثنان لديهما الأنواع الثلاثة من هذه الطيور. إذا اختير أحد هؤلاء الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون لديه ببغاء أو بلبل وليس لديه كناري؟ **B**

- A $\frac{1}{17}$
B $\frac{4}{17}$
C $\frac{6}{17}$
D $\frac{11}{17}$

3 التقويم

استعمل التمارين 1-4؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

اقرأ المسألة بتدقيق تجد أنه من الصعب تحليلها من خلال النص، ولكن عند استعمالك أشكال فمن تستطيع تنظيم البيانات، وعندئذٍ تتمكن من حلها.



الخطوة 1 ارسم ثلاث دوائر تمثل كلٍّ منها لغة.

الخطوة 2 ضع معطيات المسألة على الشكل.

الخطوة 3 املا القيم المفقودة في بعض الأمكنة. فمثلاً تعلم أن 18 طالبًا يتعلمون الإنجليزية، و 14 طالبًا يتعلمون الفرنسية. $14 - 3 - 4 - 2 = 5$ (يتعلمون الفرنسية فقط). $18 - 8 - 3 - 4 = 3$ (يتعلمون الإنجليزية والألمانية فقط).

الخطوة 4 حل المسألة، المطلوب إيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًا يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية. يمكنك بحسب أشكال فن ملاحظة أن مجموع الطلاب يساوي 32 طالبًا، منهم: $8 + 3 + 7 = 18$ يتعلمون الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلمون الفرنسية. الاحتمال يساوي $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$ ؛ لذا فإن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسابقات

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، ثم نظم البيانات لحل المسألة.

1 لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية: أ، ب، ج، د. إذا اختارت تبديلاً عشوائيًا لهذه الأحرف، فما احتمال أن تكون الكلمة هي كلمة "فاتح"؟ **B**

- A $\frac{3}{50}$
B $\frac{1}{24}$
C $\frac{1}{12}$
D $\frac{1}{4}$

2 يبين الجدول الآتي عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية، وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون من الصف الثاني الثانوي أو يلعب كرة الطائرة؟ **D**

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

- A $\frac{4}{21}$
B $\frac{2}{25}$
C $\frac{5}{17}$
D $\frac{13}{25}$

3 اختيرت نقطة واحدة عشوائيًا في الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع هذه النقطة في المنطقة المظللة. **C**

A 0.22
B 0.25
C 0.28
D 0.32

4 تضم جماعات الأنشطة في إحدى المدارس الثانوية 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و 8 طلاب من الصف الثاني الثانوي، و 9 من الصف الثالث الثانوي، حيث يمارس كل طالب فيها نشاطًا معينًا في أثناء العام الدراسي على النحو الآتي:

يمارس 4 طلاب من الأول الثانوي النشاط العلمي، و 6 النشاط الثقافي، ويمارس طالبان من الصف الثاني الثانوي النشاط العلمي و 5 النشاط الرياضي. ويمارس طالبان من الصف الثالث الثانوي النشاط الثقافي، علمًا بأن كل نشاط يضم 9 طلاب. إذا اختير طالب واحد عشوائيًا، فما احتمال أن يكون من طلاب الصف الثاني الثانوي أو يمارس النشاط العلمي؟ **C**

- A $\frac{1}{5}$
B $\frac{4}{18}$
C $\frac{5}{9}$
D $\frac{2}{3}$

اختيار من متعدد

(5) يكتب المقدار: $\frac{x-1}{4x^2-14x+6} - \frac{5}{6x-18}$ B

في أبسط صورة على النحو:

A $\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$

B $\frac{2-7x}{6(x-3)(2x-1)}$

C $\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

D $-\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

(6) إذا كانت A حادثة في فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحادثة؟ A

0.8 A

0.2 B

0.16 C

-0.2 D

(7) سحبت عينتان عشوائياً واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A، و3 عينات من فصيلة الدم B، و6 عينات من فصيلة الدم AB، و5 عينات من فصيلة الدم O، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟ C

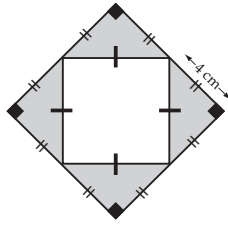
A $\frac{1}{51}$

B $\frac{1}{9}$

C $\frac{5}{51}$

D $\frac{1}{3}$

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:



(1) اختيرت نقطة عشوائياً في الشكل المجاور، فما احتمال وقوعها في المنطقة المظللة؟ D

A 0.0625

B 0.125

C 0.25

D 0.5

(2) كم عددًا مكونًا من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 2, 6, 1 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟ B

C 12

A 3

D 27

B 6

(3) إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، وكان $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{2}$ ، فما قيمة $P(A \text{ أو } B)$ ؟ C

C $\frac{5}{6}$

A 0

D $\frac{1}{6}$

B $\frac{2}{5}$

(4) قيمة محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ يساوي: B

A -11

B 11

C -1

D 1

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة عن كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

(1) A اعتبر مساحة المنطقة المظللة 4.

B أوجد مساحة منطقة مظللة واحدة فقط.

C أوجد مساحة منطقتين مظللتين فقط.

D الإجابة الصحيحة.

(2) A كتب عدد الأرقام المعطاة.

B الإجابة الصحيحة.

C أوجد عدد الأعداد المختلفة المكوّنة من رقمين أو من 3 أرقام.

D كرر استعمال الرقم الواحد أكثر من مرة.

(3) A أوجد $P(A \text{ و } B)$ بدلا من $P(A \text{ أو } B)$.

B أوجد $P(A \text{ أو } B)$ ، وأخطأ في جمع الكسور.

C الإجابة صحيحة.

D اعتبرهما حادثتين مستقلتين، وأوجد $P(A \text{ و } B)$.

(4) A الإجابة الصحيحة.

B ضرب عدد الحدود في الحد الأول.

C جمع الحدّين الأول والأخير.

D أوجد قيمة الحد الأول فقط.

(5) A أخطأ في الإشارة.

B الإجابة الصحيحة.

C أخطأ في تحليل المقدار

$4x^2 - 14x + 6$ وفي الإشارة.

D أخطأ في تحليل المقدار

$4x^2 - 14x + 6$.

(6) A اعتبر احتمال وقوع الحادثة مساوياً

لاحتمال وقوع متممها.

B الإجابة الصحيحة.

C اعتبر احتمال الحادثة المتممة مساوياً

لاحاصل ضرب احتمال الحادثة في احتمال

متممها.

D استعمل القانون $P(A^c) = 1 - P(A)$

بشكل معكوس.

(7) A أخطأ في تبسيط الكسر.

B اعتبر أن عدد عناصر الحادثة 2 وعدد

عناصر فضاء العينة 18 وأوجد ناتج

قسمتهما.

C الإجابة الصحيحة.

D أوجد احتمال سحب عينة واحدة وتكون

من فصيلة الدم AB.

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلبة.

إجابة:

- (12a) مستقلتان؛ لا تؤثر نتيجة السحب الأول على السحب الثاني؛ لأن البطاقة المسحوبة تعاد إلى الحقيبة بعد كل عملية سحب.

بدل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل الثامن تعطى الأسئلة الواردة في صفحة (155) واجباً منزلياً للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم للمتطلبات السابقة للفصل 8.

إجابة طويلة

أجب عن السؤال الآتي موضعاً خطوات الحل:

(12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء و 6 بطاقات بنفسجية. و 4 بطاقات بيضاء و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائياً وُسجِّلَ اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة وسُحبت بطاقة أخرى.

انظر الهامش

- (a) هل الحادثان مستقلتان أم غير مستقلتين؟ وضح إجابتك.
(b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتين؟ 0.09
(c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بيضاء؟ 0.05

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي:

(8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما في الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحباً يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالاً؟

دلال: نعم، رزقني الله طفلين.

هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟

دلال: نعم.

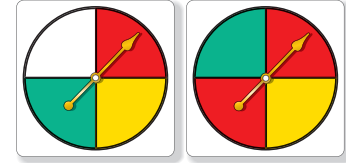
اعتماداً على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟ $\frac{1}{3}$

(9) إذا كانت $d(x) = x^3 + x + 2$ ، فما قيمة $d(4a^2)$ ؟

$$64a^6 + 4a^2 + 2$$

(10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه، فما احتمال أن يتوقف كلاهما

على اللون الأحمر؟ علماً بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أيٌّ من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام فإنه يعاد تدويرهما. $\frac{1}{8}$



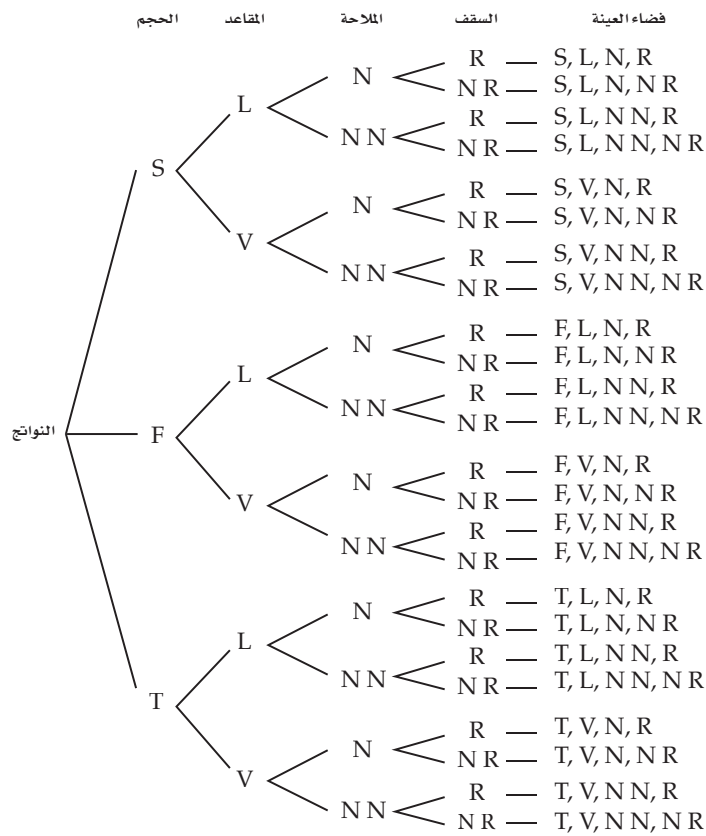
(11) حدّد كلاً من مجال الدالة $f(x) = [x] - 5$ ومداها؟

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المداى: مجموعة الأعداد الصحيحة

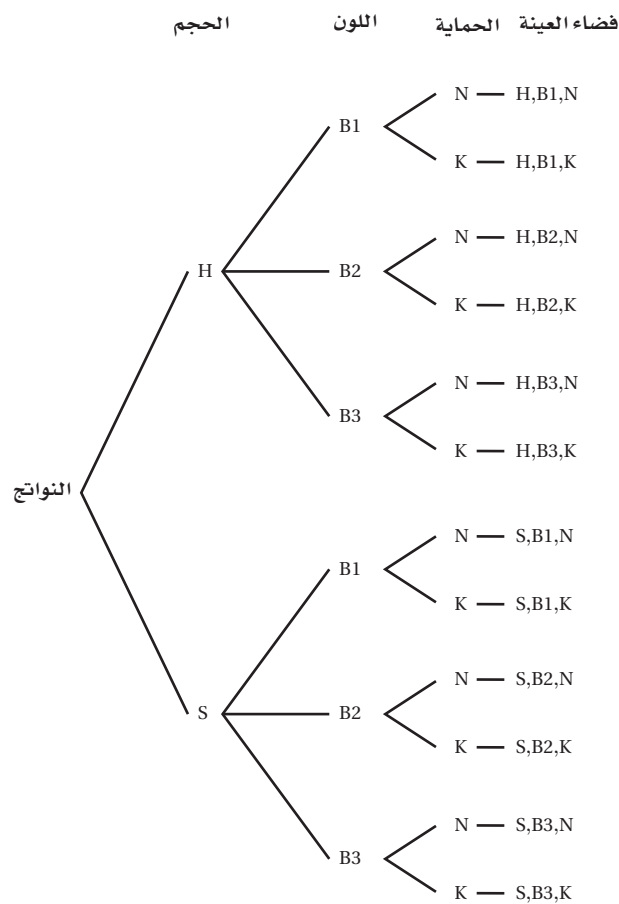
هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...
7-4	1-3	7-4	3-5	7-4	7-4	7-5	5-2	6-2	7-5	7-1	7-3	فعد إلى الدرس ...

(9)



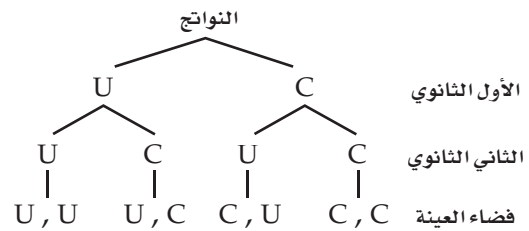
(10)



C, C C, U (5)

U, U U, C

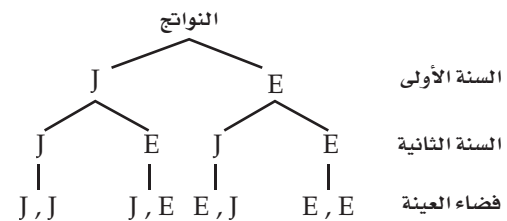
الجامعة (U)	المركز (C)	النواتج
C, U	C, C	المركز (C)
U, U	U, C	الجامعة (U)



E, J E, E (6)

J, E J, J

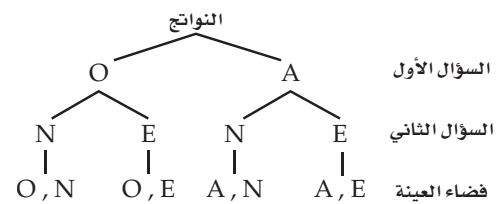
الأردن (J)	مصر (E)	النواتج
E, J	E, E	مصر (E)
J, J	J, E	الأردن (J)



E, A E, O (7)

N, A N, O

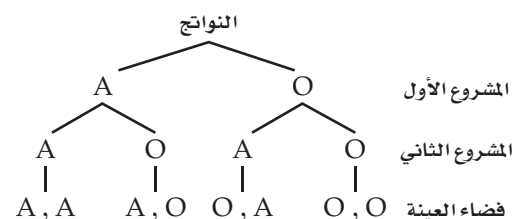
متطابق الضلعين (E)	مختلف الأضلاع (N)	النواتج
A, E	A, N	حاد الزوايا (A)
O, E	O, N	منفرج الزاوية (O)



O, O A, A (8)

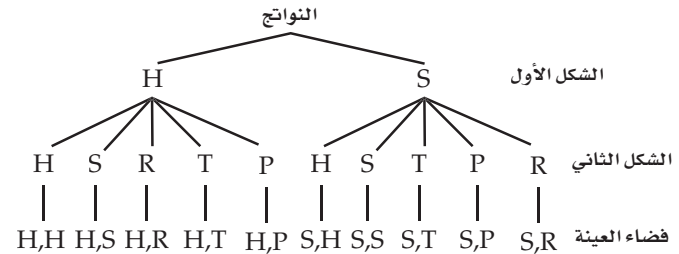
A, O O, A

مائية (A)	زيتية (O)	النواتج
O, A	O, O	زيتية (O)
A, A	A, O	مائية (A)

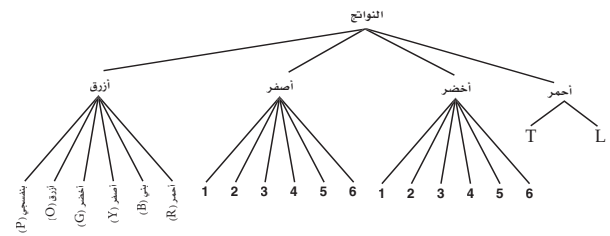


(12)

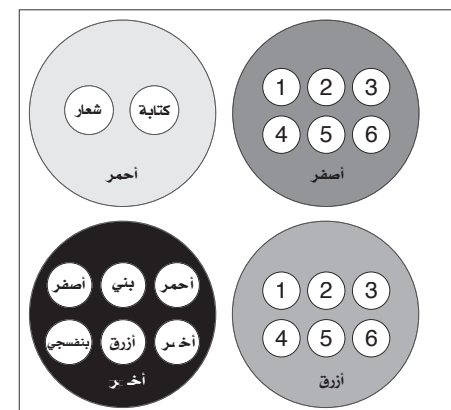
الناتج	معين (H)	مربع (S)
متوازي أضلاع (P)	P, H	P, S
مستطيل (R)	R, H	R, S
مربع (S)	S, H	S, S
شبه منحرف (T)	T, H	T, S
معين (H)	H, H	H, S



(15a)



(15b)



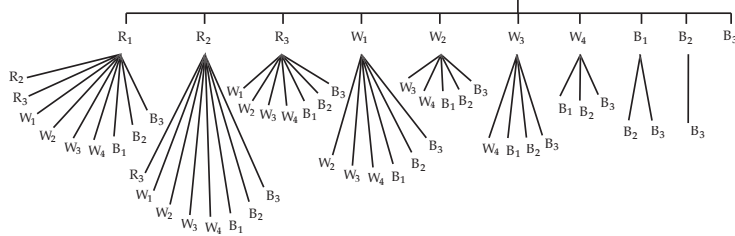
الدرس 2-7، ص 124

(17) صحيحة أحياناً؛ إجابة ممكنة: فمثلاً العبارة صحيحة عندما $r = 1$.

(19) إجابة ممكنة: يحتوي صندوق سبع كرات متماثلة، ألوانها: حمراء، برتقالية، صفراء، خضراء، زرقاء، سوداء، بيضاء. إذا سحبنا ثلاث كرات معاً عشوائياً، فاحتمال ظهور الكرات الحمراء والبيضاء والسوداء يمكن حسابه باستعمال التوافيق.

(27)

الناتج (عددها 45)

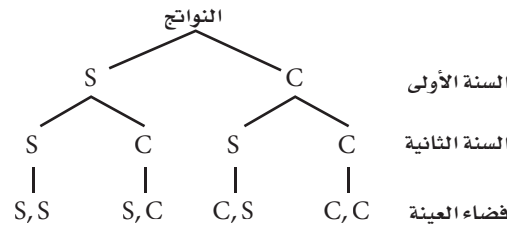


الدرس 3-7، ص 130

(33) S, S C, C

S, C C, S

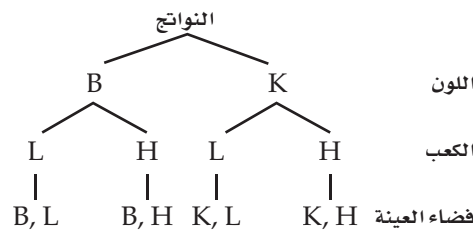
الناتج	نشاط ثقافي (C)	نشاط علمي (S)
نشاط ثقافي (C)	C, C	S, C
نشاط علمي (S)	C, S	S, S



(34) B, H K, H

B, L K, L

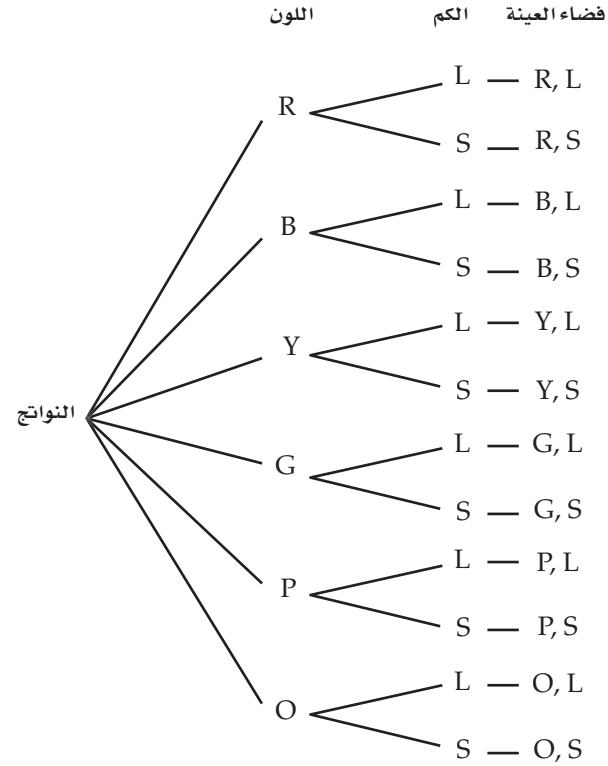
الناتج	كعب مرتفع (H)	كعب منخفض (L)
أسود (K)	K, H	K, L
بني (B)	B, H	B, L



اختبار منتصف الفصل ، ص 131

(3) O, L ; G, L ; G, S ; P, L ; P, S ; Y, L ; Y, S ; B, L ; B, S ; R, L ; R, S
O, S

الناتج	أحمر (R)	أزرق (B)	أصفر (Y)	أخضر (G)	زهري (P)	برتقالي (O)
كم طويل (L)	R, L	B, L	Y, L	G, L	P, L	O, L
كم قصير (S)	R, S	B, S	Y, S	G, S	P, S	O, S

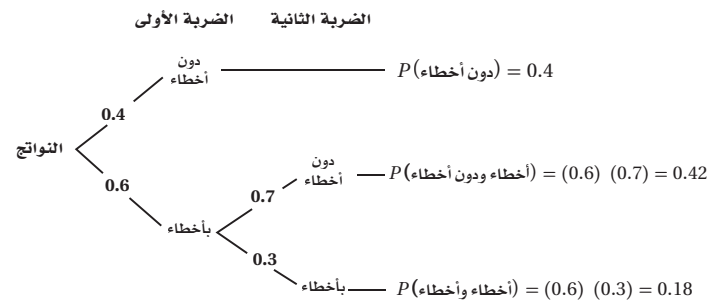


الدرس 4-7 ، ص 137، 138

(16) $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ قانون إيجاد $P(A \text{ و } B)$

(17a) $\frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)} = P(B|A)$ بقسمة الطرفين على $P(A)$

(17a)



(18) مهندس؛ بما أن الحادثتين مستقلتان فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$

وبالتعويض عن $P(A \text{ و } B)$ في قانون الاحتمال المشروط:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \text{ فإن}$$

(19) 7؛ إجابة ممكنة: احتمال سحب العنصر A يساوي $\frac{1}{n}$ ، واحتمال سحب العنصر B إذا لم يعد العنصر A يساوي $\frac{1}{n-1}$.
وبما أن احتمال الحادثتين معاً يساوي 2.4%، فإن $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{5}{100}$. وباستعمال استراتيجية التخمين والتحقق نجد أن $n = 5$.

(20) صحيحة دائماً؛ إجابة ممكنة: كل من $P(A \text{ و } B)$ ، $P(B \text{ و } A)$ ، يساوي ناتج ضرب $P(A)$ ، $P(B)$ ؛ لأنهما حادثتان مستقلتان، فاحتمال الحادثة الثانية لا يتغير تبعاً لناتج الحادثة الأولى.

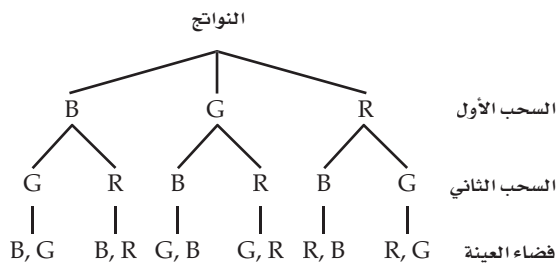
(21) إجابة ممكنة: رمي قطعة نقد مرتين تمثل حادثتين مستقلتين. لأن احتمال ظهور شعار أو كتابة في الرمية الثانية لا يتغير تبعاً لنتيجة الرمية الأولى، على حين أن سحب كرتين من وعاء يحتوي كرات ملونة دون إرجاع الكرة الأولى يمثل حادثتين غير مستقلتين، إذ يتغير احتمال أن تكون الكرة الثانية من لون معين تبعاً للون الكرة الأولى.

(22) تبين شجرة الاحتمال جميع النواتج الممكنة للحادثة المركبة التي تظهر في فضاء العينة. واحتمال كل ناتج هو نسبة هذا الناتج من فضاء العينة. وبما أن مجموع احتمالات هذه النواتج يساوي مجموع نسب هذه النواتج من فضاء العينة فهي تساوي عدد عناصر فضاء العينة منسوباً إلى عدد عناصر فضاء العينة نفسه وهذا يساوي 1.

اختبار الفصل ، ص 151

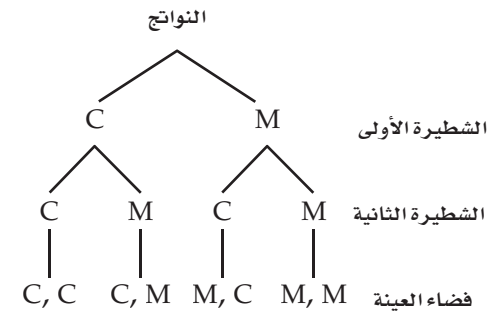
(5) B,G ; B,R ; G,B ; G,R ; R,B ; R,G

الناتج	(R)	(G)	(B)
(R)		R, G	R, B
(G)	G, R		G, B
(B)	B, R	B, G	



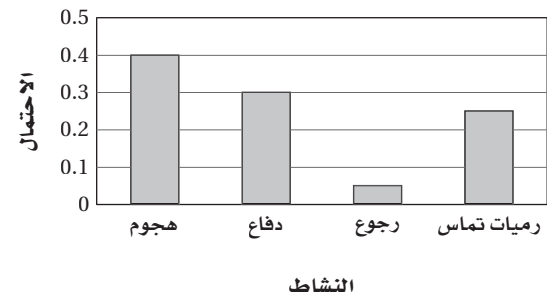
(6) M, M ; M, C ; C, M ; C, C

الناتج	لحم (M)	جبن (C)
لحم (M)	M, M	M, C
جبن (C)	C, M	C, C



(15) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية لتوليد الأعداد من 1 إلى 20. حيث تمثل الأعداد 1-8 الهجوم، و الأعداد 9-14 الدفاع، والعدد 15 رجوع اللاعبين، و الأعداد 16-20 رميات التماس. ونفذ 20 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري، واستعمل النتائج لإيجاد احتمال كل واحد من هذه النشاطات.

الناتج	التكرار
هجوم	8
دفاع	6
رجوع	1
رميات تماس	5
المجموع	20



احتمال أن يهاجم الفريق يساوي 40%، وأن يدافع 30%، وأن يرجع 5%، وأن ينفذ رمية تماس 25%.

ملا حظات

[illegible]

التقويم التشخيصي
التهيئة ص (155)

العنوان	استكشاف 8-1 حصة	الدرس 8-1 (3) حصص	الدرس 8-2 حصتان	الدرس 8-3 (3) حصص	الدرس 8-4 (3) حصص
معمل الجداول الإلكترونية : استقصاء المثلثات القائمة الخاصة	الدرس 8-1 (3) حصص	الدرس 8-1 (3) حصص	الدرس 8-2 حصتان	الدرس 8-3 (3) حصص	الدرس 8-4 (3) حصص
الأهداف	• استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية الخاصة.	• إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاويا حادة. • استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية.	• رسم زوايا في الوضع القياسي وإيجاد قياساتها. • تحويل القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.	• إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية. • إيجاد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.	• إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما. • استعمال قانون الجيوب في حل المثلثات.
المفردات	حساب المثلثات النسبة المثلثية الدالة المثلثية الجيب جيب التمام الظل قاطع التمام القاطع ظل التمام دوال المقلوب زاوية الارتفاع زاوية الانخفاض	الوضع القياسي ضلع الابتداء ضلع الانتهاء الراديان الزاوية المركزية	الزاوية الربعية الزاوية المرجعية	قانون الجيوب حل المثلث	
تمثيلات المتعددة			ص (169)		
مصادر الدرس	المواد • حاسوب وبرنامج الجداول الإلكترونية.	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق • كتاب التمارين ص (21) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق • كتاب التمارين ص (22) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق • كتاب التمارين ص (23) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق • كتاب التمارين ص (24) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (158)	رسائل قصيرة، ص (167)	نظام استجابات الطلبة، ص (172)	السبورة التفاعلية، ص (179)	
تنوع التعليم	ص (160, 164)	ص (167, 170)	ص (174)	ص (180, 183)	

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (185)

المفاتيح: **دون** دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

حساب المثلثات

الخطة الزمنية		
المجموع	المراجعة و التقويم	التدريس
30 حصة	5	25

توسع 8-4 حصة	الدرس 8-5 (3) حصص	الدرس 8-6 (3) حصص	الدرس 8-7 (3) حصص	الدرس 8-8 (3) حصص
معمل الهندسة : مساحة متوازي الأضلاع	قانون جيوب التمام	الدوال الدائرية	تمثيل الدوال المثلثية بيانياً	الدوال المثلثية العكسية
استعمال نسبة الجيب لإيجاد مساحة متوازي الأضلاع.	- استعمال قانون جيوب التمام لحل مثلثات. - اختيار طرق مناسبة لحل المثلثات.	- إيجاد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة. - استعمال خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية.	- وصف دوال الجيب وجيب التمام والظل، وتمثيلها بيانياً. - وصف دوال مثلثية أخرى، وتمثيلها بيانياً.	- إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية. - حل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.
	قانون جيوب التمام	دائرة الوحدة الدالة الدائرية الدالة الدورية الدورة طول الدورة	السعة التردد	القيم الأساسية دالة معكوس الجيب دالة معكوس جيب التمام دالة معكوس الظل
		ص (197)		ص (211)
المواد • الحاسبة العلمية	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون - تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (30) دون ضمن فوق كتاب التمارين - ص (25) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون - تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (35) دون ضمن فوق كتاب التمارين - ص (26) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون - تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (40) دون ضمن فوق كتاب التمارين - ص (27) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية - تدريبات إعادة التعليم، ص (41) دون - تدريبات المهارات، ص (43) دون ضمن فوق - تدريبات حل المسألة، ص (44) دون ضمن فوق - التدريبات الإثرائية، ص (45) دون ضمن فوق كتاب التمارين - ص (28) دون ضمن فوق
	الأسبورة التفاعلية، ص (187)	تسجيل صوتي، ص (194)	كاميرا توثيقية، ص (202)	تسجيل فيديو، ص (207)
	ص (188, 190)	ص (194, 197)	ص (200, 204)	ص (208, 210)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة و المراجعة ص (212-216)
- اختبار الفصل ص (217)
- اختبار تراكمي ص (220, 221)

المعالجة		التشخيص	
		بداية الفصل 8	
مخطط المعالجة، ص (155)		التهيئة للفصل 8، ص (155)	
		بداية كل درس	
مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب		فيما سبق، والآن، لماذا؟	
		خلال كل درس وبعده	
تدريبات المهارات، الفصل 8		تحقق من فهمك، لكل مثال	
تنوع التعليم		تأكد	
تنوع الواجبات المنزلية		مسائل مهارات التفكير العليا	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8		مراجعة تراكمية	
www.obeikaneducation.com		أمثلة إضافية	
		تنبيه!	
		الخطوة 4، التقويم	
		الاختبارات القصيرة، ص (68, 69)	
		www.obeikaneducation.com	
		منتصف الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 8		اختبار منتصف الفصل، ص (185)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8		اختبار منتصف الفصل، ص (70)	
www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com	
		نهاية الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 8		دليل الدراسة والمراجعة، ص (212-216)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8		اختبار الفصل، ص (217)	
www.obeikaneducation.com		اختبار تراكمي، ص (220-221)	
		www.obeikaneducation.com	
		بعد انتهاء الفصل 8	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8		اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B، ص (72-77)	
www.obeikaneducation.com		اختبار الفصل، النموذج 3، ص (78, 79)	
		اختبار المفردات، ص (71)	
		اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة، ص (80)	
		اختبار تراكمي، ص (81-83)	
		www.obeikaneducation.com	

التقويم
التشخيصي

التقويم
التكويني

التقويم
الختامي

البديل 1

جميع المستويات

دون ضمن فوق

البديل 3

فوق المتوسط

اطلب إلى الطلبة رسم مثلث وإيجاد مساحته باستعمال كل من الطرق الثلاث الآتية:

- استعمال الصيغة الأساسية لمساحة المثلث وهي: $A = \frac{1}{2} b h$ (التي تحتاج إلى معرفة طول ضلع القاعدة والارتفاع).
- استعمال صيغة عالم الرياضيات اليوناني (هيرون).
- (التي تحتاج إلى معرفة أطوال أضلاع المثلث الثلاثة).
- استعمال الصيغة $A = \frac{1}{2} bc \sin A$ (التي تحتاج إلى معرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما).

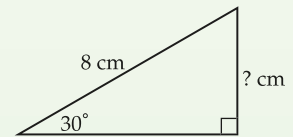
يمكن للطلبة استعمال منقلة ومسطرة إذا تطلب الأمر ذلك. ثم اطلب إليهم تحديد المعلومات التي يحتاجون إلى معرفتها عن المثلث عند استعمال كل طريقة من الطرق السابقة.

البديل 2

دون المتوسط

دون

يعمل الطلبة من خلال العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، ويرسمون عددًا من المثلثات المتنوعة قائمة الزاوية، يتضمن كل منها زاوية قياسها 30° . واطلب إليهم قياس طول الوتر والضلع المقابل للزاوية 30° لأقرب ملمتر، ثم حساب جيب الزاوية 30° في كل مثلث من خلال قسمة طول الضلع المقابل على طول الوتر ليتوصلوا إلى أن $\sin 30^\circ$ هو نفسه لكل مثلث ويساوي 0.5. ثم ناقش النتائج مع الطلبة، وارسم على السبورة مثلثًا قائم الزاوية قياس إحدى زواياه 30° . وطول وتره 8 cm. واسأل الطلبة: ما الطريقة الأنسب لإيجاد طول الضلع المقابل للزاوية 30° ؟

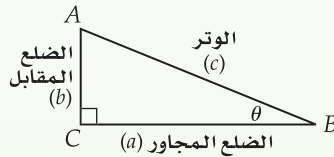


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{? \text{ cm}}{8 \text{ cm}}$$

ملخص الدروس

8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الدالة المثلثية هي صيغة على صورة نسبة يتم فيها المقارنة بين طولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية. ويستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور لها لتعريف الدوال المثلثية الست.



8-2 الزوايا وقياساتها

تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في الوضع القياسي إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل ووقع ضلع الابتداء على الجزء الموجب من المحور x ، ويدور ضلع الانتهاء حول نقطة الأصل وينتج عن دورانه في عكس عقارب الساعة زاوية موجبة، ومع عقارب الساعة زاوية سالبة. ومن المفيد ملاحظة أن القياس -210° مثلاً ليس أقل من القياس 210° . لإيجاد قياسات الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية ما، أضف إليها أو اطرح منها مضاعفات 360° .

يمكن للزوايا أن تُقاس بالدرجات أو بالراديان، والراديان وحدة مبنية على طول القوس. ويمكن استعمال الحقيقة الآتية ($180^\circ = \pi$ راديان) للتحويل بين القياسين.

8-3 الدوال المثلثية للزوايا

إذا كانت النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ ، فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية الست لها. وذلك بإسقاط عمود من النقطة على المحور x فيتشكل مثلث قائم طول إحدى ساقيه $|x|$ وحدة، وطول الساق الأخرى $|y|$ وحدة، وطول الوتر r وحدة، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وعليه فإن: $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ، $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

ولإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ غير ربعية، احسب قيم الدوال المثلثية للزاوية الحادة المرجعية θ' المحصورة بين ضلع الانتهاء والمحور x . وتُحدّد إشارة هذه الدالة من خلال معرفة الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

الترباط الرأسي

ما قبل الفصل 8

- استعمال نظرية فيثاغورس.
- تطبيق الصيغ المختلفة لحل مسائل.
- تحديد المجال عند إيجاد معكوس دوال، مثل: $y = x^2$.

الفصل 8

- تعرف الدوال المثلثية للزوايا الحادة في الوضع القياسي أولاً، وكذلك النقاط على دائرة الوحدة.
- اشتقاق قانون الجيوب وقانون جيوب التمام واستعمالهما بوصفهما تطبيقات على الدوال المثلثية.
- إيجاد معكوس دوال الجيب وجيب التمام والظل.
- استعمال الدوال المثلثية لإيجاد كل من السعة وطول الدورة.

ما بعد الفصل 8

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- الاستمرار في دراسة السعة وطول الدورة والتردد للدوال المثلثية ولدوال دورية أخرى.
- استعمال دوال مثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- حل معادلات تتضمن دوال مثلثية.

8-4 قانون الجيوب و 8-5 قانون جيب التمام

- يمكن استعمال قانون الجيوب لحل المثلث إذا عُلِمَ:
- قياس زاويتين وطول أي ضلع (ASA أو AAS).
 - طولاً ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA). وفي هذه الحالة يمكن أن نجد حلًا واحدًا أو حلين أو قد لا نجد أيًا من الحلول.

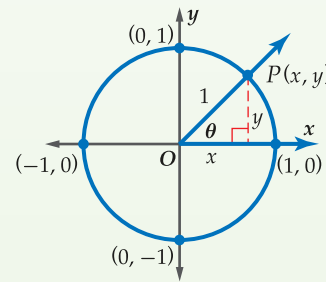
- ويمكن استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث إذا عُلِمَ:
- طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما (SAS).
 - أطوال الأضلاع الثلاثة (SSS).

8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا

التمثيلات البيانية لدوال الجيب وجيب التمام والظل لها أنماط متكررة يُسمى كل تكرار فيها دورة. ويُسمى الطول الأفقي لكل دورة طول الدورة. وجددير بالذكر أن طول الدورة لكل من دالتي الجيب وجيب التمام هو 2π راديان أو 360° . أما دالة الظل فطول دورتها هو π راديان أو 180° . والسعة لكل من دالة الجيب وجيب التمام هي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

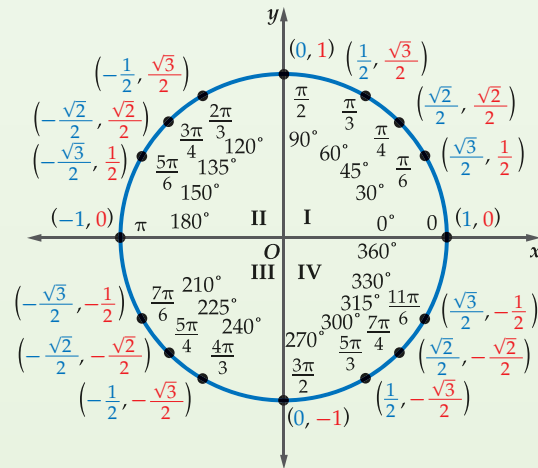
وجبريًا بالنسبة لدالة الجيب $y = a \sin b\theta$ ، ودالة جيب التمام $y = a \cos b\theta$ ، فإن طول الدورة هو $|b| \div 360^\circ$ ، أما السعة لكل منهما فتساوي $|a|$. أما دالة الظل: $y = a \tan b\theta$ ، فيكون طول الدورة $|b| \div 180^\circ$ ، وترتبط التمثيلات البيانية لدوال القاطع وقاطع التمام وظل التمام بدوال جيب التمام والجيب والظل على الترتيب.

8-6 الدوال الدائرية



دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. ويمكن استعمالها لتعميم دوال الجيب وجيب التمام. إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P التي إحداثياتها (x, y) ، فإن $\sin \theta = y$ ، $\cos \theta = x$.

ويمثل الرسم أدناه القيم الدقيقة لـ $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ لبعض الزوايا الخاصة.



تتكرر دورة كل من دالة الجيب وجيب التمام مرة كل 360° ، لذا فهما دالتان دوريتان.

8-8 الدوال المثلثية العكسية

بما أن جزء كل من دالتي الجيب والظل بين 90° ، -90° وجزء دالة جيب التمام بين 0° ، 180° يحقق اختبار الخط الأفقي، لذا فإنه يمكن تحديد الدوال العكسية لهذه الدوال على هذه الفترات كما يأتي:

دالة معكوس الجيب: $y = \text{Arcsin } x = \sin^{-1} x$

دالة معكوس جيب التمام: $y = \text{Arccos } x = \cos^{-1} x$

دالة معكوس الظل: $y = \text{Arctan } x = \tan^{-1} x$

مشروع الفصل

رياضات مائية

يستعمل الطلبة ما درسوه عن حساب المثلثات لوصف خصائص الرياضات المائية.

- ورّع الطلبة في مجموعات صغيرة، واطلب إلى كل مجموعة استعمال الإنترنت أو مجلات أو كتب تتعلق بالإبحار لجمع معلومات حول أبعاد الأشربة مثلثة الشكل المستعملة في القوارب الشراعية. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يكون للقارب الشراعي الصغير شراع على شكل مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين $13\text{ ft } 4\text{ in}$ وطول الضلع الثالث $14\text{ ft } 7\text{ in}$.

- اطلب إلى الطلبة بمجرد توصيلهم إلى المعلومات الكافية، أن يجدوا كلا من مساحة الشراع، وقياسات الزوايا التي تصنعها حوافه.

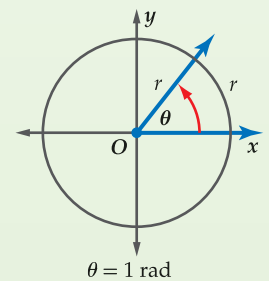
- اطلب إلى كل مجموعة رسم نموذج مصغر للشراع باعتماد مقياس رسم $1\text{ in} = 1\text{ ft}$ وعرضه على لوحة الإعلانات.

المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: الراديان هو قياس الزاوية θ في الوضع القياسي والتي تقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر دائرة الوحدة.

سؤال: ما الذي يقيسه الراديان؟ **زاوية**

مثال:



فيما سبق:

درست تحليل الدوال وتمثيلها بيانياً.

والآن:

- أجد قيم دوال مثلثية.
- أحل مسائل باستعمال النسب المثلثية للمثلث القائم الزاوية.
- أستعمل قانون الجيوب وقانون جيب التمام في حل المثلث.
- أمثل دوالاً مثلثية بيانياً.

لماذا؟

القياس غير المباشر:

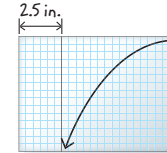
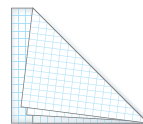
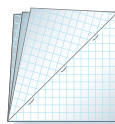
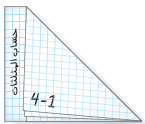
للدوال المثلثية تطبيقات عملية في القياس غير المباشر، فمثلاً يمكن استعمال النسب المثلثية لمعرفة ارتفاعات الجبال أو الأشجار الشاهقة أو ناطحات السحاب أو إيجاد البعد بين جبلين أو عرض نهر.

منظم أفكار

المطويات

حساب المثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول حساب المثلثات، مبتدئاً بأربع أوراق من أوراق الرسم البياني.

- 1 **جمع الأوراق الأربع بعضها فوق بعض**، وارسم خطاً عرضياً على مسافة 2.5 in من الحافة.
- 2 **اطو الأوراق على القطر**، حتى الخط المرسوم، كما في الشكل.
- 3 **ثبّت الأوراق على طول القطر**، لتشكّل كتيباً.
- 4 **عنون الحافة بحساب المثلثات**، ورقم الصفحات بأرقام الدروس.



منظم أفكار

المطويات

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها يدوّن الطلاب ملاحظاتهم في أثناء دراستهم حساب المثلثات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس وحفرهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى	ضمن المتوسط
1	إذا: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة، فقم: بمراجعة نظرية فيثاغورس، وخصائص المثلثات القائمة الزاوية والمتطابقة الضلعين، وأعطهم مزيداً من التدريبات.
2	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com دون المتوسط: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة، فقم: بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك. زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة سريعة

مثال 1

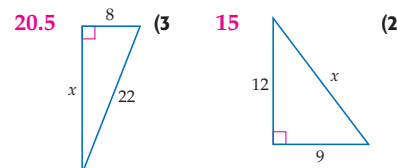
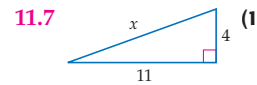
أوجد القياس المجهول في المثلث القائم الزاوية أدناه.



نظرية فيثاغورس $c^2 = a^2 + b^2$
 بالتعويض عن c بـ 18 و b بـ 5
 بالتبسيط $18^2 = a^2 + 5^2$
 بطرح 25 من كلا الطرفين $324 = a^2 + 25$
 بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين $299 = a^2$
 $17.3 \approx a$

اختبار سريع

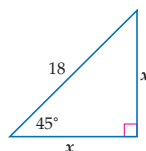
أوجد قيمة x مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.



(4) لدى راشد حديقة مستطيلة الشكل بعرضا 4m و 6m. يريد أن يرصف ممراً على قطر الحديقة. فكم سيكون طول الممر؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **7.2m**

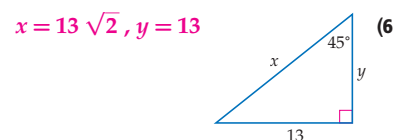
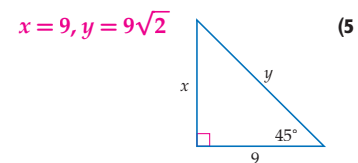
مثال 2

أوجد القياسين المجهولين فيما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



نظرية فيثاغورس $x^2 + x^2 = 18^2$
 بجمع الحدود المتشابهة $2x^2 = 18^2$
 بالتبسيط $2x^2 = 324$
 بقسمة كلا الطرفين على 2 $x^2 = 162$
 بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين $x = \sqrt{162}$
 بالتبسيط $x = 9\sqrt{2}$

أوجد القياسين المجهولين في كلٍّ مما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



(7) يستند سلم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية 45°. إذا كان طول السلم 12ft، فأوجد ارتفاع قمته عن الأرض. **$6\sqrt{2} \text{ ft} \approx 8.5 \text{ ft}$**

معمل الجداول الإلكترونية استقصاء المثلثات القائمة الخاصة Investigating Special Right Triangles

استكشاف

8-1

ملاحظات
الدرس

استكشاف

8-1

1 التركيز

الهدف

استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية الخاصة.

المواد اللازمة

• حاسوب وبرنامج الجداول الإلكترونية.

إرشادات التدريس

اطلب إلى الطلاب التدرب على استعمال برنامج الجداول الإلكترونية، وذلك بإدخال البيانات الواردة في النشاط.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسّم الطلاب مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1-3.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 1 لتقويم مدى فهم الطلاب لعملية إدخال البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب وصف القانون أو النمط المستعمل في الخلايا المختلفة في الأوراق الإلكترونية الواردة في صفحة كتاب الطالب.

التوسع في المفهوم

اسأل الطلاب:

• ما القانون المستعمل؛ لإيجاد قيم العمود B في المثلثات $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ ؟

$$b = a$$

• ما القانون المستعمل؛ لإيجاد قيم العمود C في المثلثات $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ ؟

$$C = 2a$$

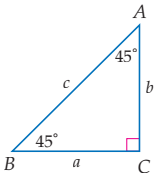
يمكنك استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء قياسات أضلاع المثلثات القائمة الزاوية الخاصة.

النشاط المثلث الذي قياسات زواياه $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$

نشاط

ضلع المثلث $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ في الشكل المجاور a , b متساويان. ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا المثلث؟

الخطوة 1: أدخل الصيغ المشار إليها في برنامج الجداول الإلكترونية، حيث $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

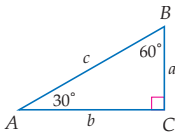


45-45-90 triangles						
	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

الخطوة 2: تحقق من النتائج؛ بما أن جميع المثلثات التي قياسات زواياها $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ متشابهة، فإن النسب بين أضلاعها تكون ثابتة، وتكون نسبة الضلع b إلى الضلع a مساوية للعدد 1. ونسبة كل من الضلعين a , b إلى الضلع c مساوية للعدد 0.71 تقريبًا.

حلل النموذج:

استعمل برنامج الجداول الإلكترونية المبين أدناه للمثلث الذي قياسات زواياه $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$.



30-60-90 triangles						
	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

(1) انسخ ثم أكمل الورقة الإلكترونية أعلاه. انظر الهامش

(2) صف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ المعطاة في الشكل أعلاه. $a < b < c$

(3) ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا النوع من المثلثات؟ نسبة b إلى a تساوي 1.73 تقريبًا، ونسبة b إلى c تساوي 0.87 تقريبًا، ونسبة a إلى c تساوي 0.5 دائمًا.

156 الفصل 8 حساب المثلثات

إجابة (استكشاف 8-1):

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1.732050808	2	1.732050808	0.866025404	0.5
3	2	3.464101615	4	1.732050808	0.866025404	0.5
4	3	5.196152423	6	1.732050808	0.866025404	0.5
5	4	6.92820323	8	1.732050808	0.866025404	0.5
6	5	8.660254038	10	1.732050808	0.866025404	0.5
7	6	10.39230485	12	1.732050808	0.866025404	0.5

(1)

• ما أوجه الشبه وأوجه

الاختلاف بين جميع

المثلثات التي قياسات

زواياها $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ ؟

لكل منها نفس قياسات

الزوايا، ولكن أطوال

أضلاعها مختلفة، فجميع

المثلثات متشابهة ولكن

ليست متطابقة.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-1

استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية.

الدرس 8-1

إيجاد قيم دوال مثلثية لزوايا حادة.
استعمال دوال مثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا في مثلثات قائمة الزاوية.

ما بعد الدرس 8-1

تمثيل دوال الجيب وجيب التمام بيانياً.

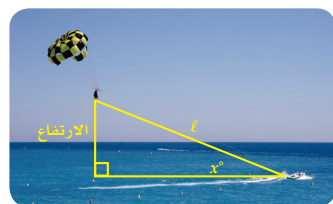
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

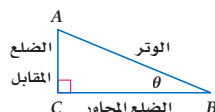
واسأل:

- ما نوع الزاوية المتكوّنة من حبل السحب والخط الأفقي؟ **حادة**
- أي أضلاع المثلث تقابل الزاوية القائمة؟ وأي الأضلاع تقابل الزاوية x° ؟ **الوتر ℓ ؛ الارتفاع**
- إذا كان الطول ℓ ثابتاً و x تزداد، فكيف سيتغير الارتفاع؟ **يزداد.**



لماذا؟
يعتمد ارتفاع الشخص في التزلج الهوائي على طول حبل السحب ℓ والزاوية x° التي يصنعها الحبل مع الخط الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلج.

الدوال المثلثية للزوايا الحادة يُعرّف **حساب المثلثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. وتُتعارن **النسبة المثلثية** بين طوكي ضلعين في المثلث القائم الزاوية، أما **الدالة المثلثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلثية.



يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويقرأ أثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوال المثلثية الست.

أضف إلى
مطوياتك

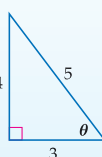
جميع الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \quad \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$



أمثلة:

$$\sin \theta = \frac{4}{5} \quad \cos \theta = \frac{3}{5} \quad \tan \theta = \frac{4}{3} \quad \csc \theta = \frac{5}{4} \quad \sec \theta = \frac{5}{3} \quad \cot \theta = \frac{3}{4}$$

إيجاد قيم الدوال المثلثية

مثال 1

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية في C، أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ إذا كان:

طول الضلع المقابل للزاوية θ : $BC = 8$ ، طول الضلع المجاور للزاوية θ : $AC = 15$ ، طول الوتر: $AB = 17$

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \quad \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8} \quad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15} \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8}$$

تحقق من فهمك

1) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية B. **انظر الهامش.**

الدرس 8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية 157

فيما سبق:

درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية.

والآن:

- أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة.
- أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية.

المفردات:

- حساب المثلثات
- trigonometry
- النسبة المثلثية
- trigonometric ratio
- الدالة المثلثية
- trigonometric function
- الجيب
- sine
- جيب التمام
- cosine
- الظل
- tangent
- قاطع التمام
- cosecant
- القاطع
- secant
- ظل التمام
- cotangent
- دوال المقلوب
- reciprocal functions
- معكوس الجيب
- inverse sine
- معكوس جيب التمام
- inverse cosine
- معكوس الظل
- inverse tangent
- زاوية الارتفاع
- angle of elevation
- زاوية الانخفاض
- angle of depression

www.obeikaneducation.com

إجابة (تحقق من فهمك):

$$\sin B = \frac{15}{17}, \cos B = \frac{8}{17}, \quad (1)$$

$$\tan B = \frac{15}{8}, \csc B = \frac{17}{15},$$

$$\sec B = \frac{17}{8}, \cot B = \frac{8}{15}$$

مصادر الدرس 8-1

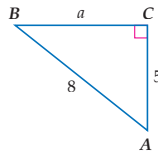
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (160)	• تنويع التعليم، ص (160, 164)	• تنويع التعليم، ص (164)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإضرافية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإضرافية، ص (10)

لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظل على الترتيب. وتستخدم في تعريف **دوال المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مجال أي دالة مثلثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادة θ في المثلث القائم الزاوية؛ لذا فإن الدوال المثلثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادة وليس على أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية



$\angle B$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$ فأوجد قيمة $\tan B$.

الخطوة 1: ارسم مثلثاً قائم الزاوية وسمِّ إحدى زواياه الحادة B .

بما أن $\sin B = \frac{5}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ فحدد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 5، والوتر بـ 8.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد a .

نظرية فيثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = 5, c = 8$$

$$a^2 + 5^2 = 8^2$$

بالتبسيط

$$a^2 + 25 = 64$$

ب طرح 25 من كلا الطرفين

$$a^2 = 39$$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$a = \pm\sqrt{39}$$

الطول لا يمكن أن يكون سالباً

$$a = \sqrt{39}$$

الخطوة 3: أوجد قيمة $\tan B$.

$$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{39}}$$

$$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$$

دالة الظل

بالتعويض عن المقابل بـ 5 والمجاور بـ $\sqrt{39}$

بإنتاج المقام

تحقق من فهمك

(2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$ ، فأوجد قيمة $\sin B$. $\frac{3\sqrt{58}}{58}$

تكرر الزوايا التي قياساتها $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ كثيراً في حساب المثلثات.

أضف إلى
مطوبتك

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

مفهوم أساسي

نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ أن:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

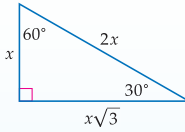
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

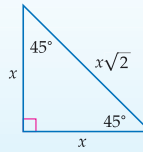


نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ أن:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$



قراءة الرياضيات

تسمية المثلثات

تُستعمل الأحرف الكبيرة خلال هذا الفصل للدلالة على رؤوس المثلث وقياسات زوايا الرؤوس. ويُستعمل الحرف الصغير المقابل للحرف الكبير للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية وتتنصح دلالة الحرف من السياق.



تاريخ الرياضيات

اكتشف علماء العرب المسلمون العديد من العلاقات في حساب المثلثات، واستعملوها في حل المعادلات، وإيجاد ارتفاع الشمس، وعمل الجداول الرياضية، ويرجع إليهم الفضل في جعله علماً مستقلاً عن علم الفلك. ومن أبرز هؤلاء العلماء:

البيروني (أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني) (362-439 هـ).

الطوسي (نصر الدين الطوسي) (597-672 هـ).

الكاشي (غياث الدين بن مسعود الكاشي) (توفي سنة 839 هـ).

البتاني (ابن عبد الله بن محمد بن سليمان الحراني) (235-316 هـ).

الدوال المثلثية للزوايا الحادة

مثال 1 يبين طريقة إيجاد قيم الدوال المثلثية الست لزاوية.

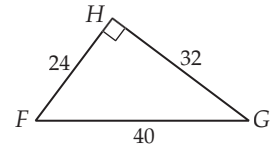
مثال 2 يبين طريقة استعمال نسبة مثلثية واحدة لزاوية لإيجاد بقية النسب.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية G .



$$\sin G = \frac{3}{5}, \cos G = \frac{4}{5},$$

$$\tan G = \frac{3}{4}, \cot G = \frac{4}{3},$$

$$\sec G = \frac{5}{4}, \csc G = \frac{5}{3}$$

2 في مثلث قائم الزاوية إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و $\tan A = \frac{5}{3}$ فأوجد قيمة $\csc A$. $\frac{\sqrt{34}}{5}$

إرشادات للمعلم الجديد

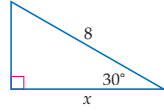
تبرير: اطلب إلى الطلبة تعلم كيفية إعادة رسم المثلثات الواردة ضمن "مفهوم أساسي" من الذاكرة. ويمكنهم التوصل من هذه المثلثات إلى القيم الموضحة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مثلثاً قائم الزاوية على السبورة، وسجل عليه أطوال أضلاعه. وكتابة النسب المثلثية، اسحب قياس طول ضلع المثلث إلى مكانه في النسبة.

استعمال الدوال المثلثية: يمكنك استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول



استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.
طول الوتر يساوي 8. والطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية 30° .
استعمل دالة جيب التمام لإيجاد قيمة x .

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

دالة جيب التمام

بالتعويض عن θ بـ 30° ، المجاور بـ x ، الوتر بـ 8

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{8}$$

بضرب كلا الطرفين في 8

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{8}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$$

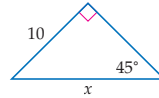
$$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$$

$$6.9 \approx x$$

تحقق من فهمك

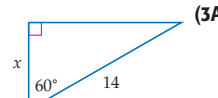
استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم:

14.1



(3B)

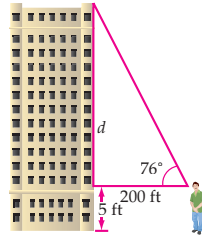
7



(3A)

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات التي لا تتضمن زواياها أبداً من الزوايا: 30° , 45° , 60° .

مثال 4 إيجاد طول ضلع مجهول



بناية: لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة 200 ft مبتعداً عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خط نظره المار بقمة البناية والخط الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع 5 ft، فما ارتفاع البناية؟
الزاوية المقاسة كما يوضح الشكل هي 76° . طول الضلع المجاور لها 200 ft، الضلع المجهول طوله هو الضلع المقابل لها. استعمل دالة الظل لإيجاد d .

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

دالة الظل

بالتعويض عن θ بـ 76° ، والمقابل بـ d ، والمجاور بـ 200

$$\tan 76^\circ = \frac{d}{200}$$

بضرب الطرفين في 200

$$200 \tan 76^\circ = d$$

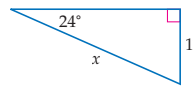
باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط:

$$802 \approx d$$

بما أن مقياس زاوية الميل كان على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، فإن ارتفاع البناية يساوي 807 ft تقريباً.

تحقق من فهمك

(4) استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.



استعمال الدوال المثلثية

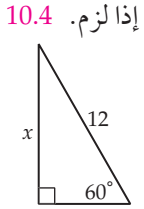
المثالان 3، 4: يبينان كيفية استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية.

مثال 5: يبين كيفية إيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث قائم الزاوية.

مثال 6: يبين كيفية استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض لحل مسائل من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x .
قرب الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.



بناية: في المثال 4، ما المسافة بين قمة البناء وعين أحمد؟
تقريباً 827 ft

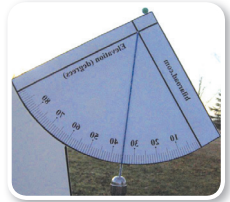
المحتوى الرياضي

الدوال المثلثية: قد يعتاد الطلبة إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية. إلا أن الدوال حتى الآن قد عُرِّفت بدلالة النسب بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية. مما يعني أن هذه التعريفات تصلح فقط للزوايا الحادة. أمّا الحالات الأكثر عمومية فسيتم دراستها عند تقديم الزوايا المرجعية.

إرشادات للدراسة

اختيار دالة

إذا كان طول الوتر مجهولاً فإنه يجب استعمال دالة الجيب أو دالة جيب التمام لإيجاد القيمة المجهولة.



الربط مع الحياة

مقاييس زاوية الميل تُستعمل لقياس زاوية ميل المجال المغناطيسي الأرضي ودرجة ميل واهتزاز المركبات والقوارب والطائرات. كما تُستعمل في رصد البراكين وحفر الآبار.

عند حل معادلات مثل $3x = -27$ ، تستعمل العملية العكسية للضرب. كما يمكنك استعمال معكوس: الجيب أو جيب التمام أو الظل في إيجاد قياسات الزوايا.

مفهوم أساسي	
معكوس النسب المثلثية	
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x ، فإن: معكوس جيب x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\sin A = x$ ، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30^\circ$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب التمام لها يساوي x ، فإن: معكوس جيب تمام x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\cos A = x$ ، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45^\circ$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x ، فإن: معكوس ظل x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\tan A = x$ ، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.
مثال:	$\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60^\circ$

إذا علمت الجيب، أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، فإنه يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلثية المعروفة.

مثال 5 إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كل زاوية مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

(a) $\angle N$

بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية N وطول الوتر. استعمال دالة الجيب.

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin N = \frac{6}{10}$$

$$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$$

$$36.9^\circ \approx m\angle N$$

استعمل دالة جيب التمام.

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos B = \frac{8}{16}$$

$$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$$

$$60^\circ = m\angle B$$

أوجد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

(5A) $\angle x$

(5B) $\angle x$

تحقق من فهمك

قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلثية

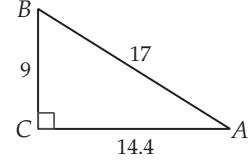
تقرأ العبارة $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x وتعني الزاوية التي جيبها x ، يشبه هذا الرمز رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. كن حذراً ولا تخلط هذا الرمز مع رمز الأس السالب: $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$.

إرشادات للدراسة

لإيجاد $\sin^{-1} \frac{6}{10}$ باستعمال الآلة الحاسبة، اضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليسار إلى اليمين: $\text{SHIFT SIN } (\frac{6}{10}) =$ ستحصل على الإجابة 36.9° ، ولإيجاد $\cos^{-1} \frac{8}{16}$ ، اضغط على المفاتيح $\text{SHIFT COS } (\frac{8}{16}) =$ وستحصل على الإجابة 60° .

مثال إضافي

5 أوجد قياس كل من الزاويتين A, B . قرب إلى أقرب درجة إذا لزم.



(a) $\angle A = 32^\circ$

(b) $\angle B = 58^\circ$

تنويع التعليم

دون ضمن

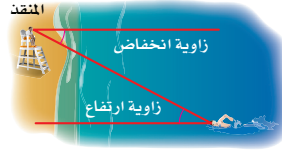
المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة رصّ مجموعة من الكتب بعضها فوق بعض؛ لصنع نموذج لمستوى مائل لاستقصاء مدى الانحدار المطلوب كي يجعل لعبة سيارة تتدحرج نزولاً دون حاجة إلى دفعها. واطلب إليهم كتابة نتائجهم بدلالة الدوال المثلثية لمثلث قائم الزاوية.

زاويا الارتفاع والانخفاض
زاويتا الارتفاع
والانخفاض للحالة
الواحدة متطابقتان؛
لأنهما زاويتان داخليتان
متبادلتان لخطين
متوازيين .



الربط مع الحياة

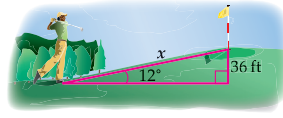
أكثر العربات الدوارة انحداراً
في العالم لها زاوية انحدار
(انخفاض) تقارب 90° .



في الشكل المجاور، تُسمى الزاوية المحصورة بين خط نظر السائح إلى المنفذ والخط الأفقي **زاوية الارتفاع**. كما تُسمى الزاوية المحصورة بين خط نظر المنفذ إلى السائح والخط الأفقي **زاوية الانخفاض**.

مثال 6

استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض



(a) **لعبة الجولف:** يقف لاعب جولف أسفل تل وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التل 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التل عن الحفرة هي 12° ، فأوجد المسافة من أسفل التل إلى الحفرة.

اكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسى (الضلع المقابل للزاوية 12°) إلى المسافة من أسفل التل إلى الحفرة (الوتر).

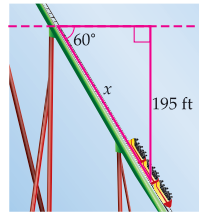
$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \sin 12^\circ = \frac{36}{x}$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في } x \quad x \sin 12^\circ = 36$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على } \sin 12^\circ \quad x = \frac{36}{\sin 12^\circ}$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة} \quad x \approx 173.2$$

لذا فإن المسافة من أسفل التل إلى الحفرة يساوي: 173.2 تقريباً.



(b) **العربة الدوارة:** قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوارة في إحدى مدن الألعاب هي 60° . ويتحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.

اكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسى (الضلع المقابل للزاوية 60°) إلى طول الجزء من المسار (الوتر).

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \sin 60^\circ = \frac{195}{x}$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في } x \quad x \sin 60^\circ = 195$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على } \sin 60^\circ \quad x = \frac{195}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة} \quad x \approx 225.2$$

لذا فإن طول هذا الجزء من المسار يساوي 225.2 تقريباً.

تحقق من فهمك



(6A) **تفريغ حمولة:** استُعمل سطح مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها 32° . إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، فأوجد طول السطح المائل. **2.3 m تقريباً**

(6B) **سلام:** سُلّم طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72° . ما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟ **3.8 m تقريباً**

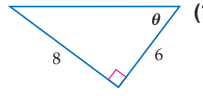
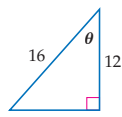
مثال إضافي

6

(a) **لعبة الجولف:** وجد من خلال كاميرا منطاد مراقبة، أن المسافة الظاهرية بين اللاعب والحفرة في المثال 6a هي المسافة الأفقية. أوجد هذه المسافة **169.4 ft**.

(b) **العربة الدوارة:** أوجد طول الضلع المجاور للزاوية 60° في المثلث القائم المرسوم في المثال 6b. **112.6 ft**

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ : (1, 2) انظر الهامش.



مثال 1

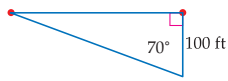
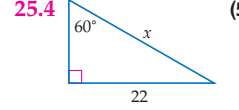
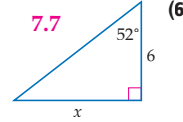
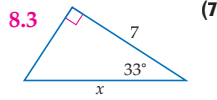
معتبرًا $\angle A$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:

مثال 2

(3) إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$ ؟ $\frac{\sqrt{33}}{7}$ (4) إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$ ، فما قيمة $\cos A$ ؟ $\frac{21}{29}$

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة:

مثال 3

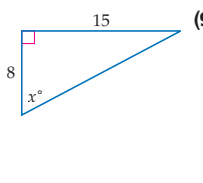
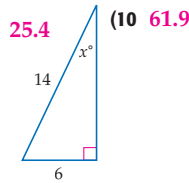
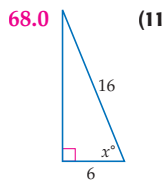


(8) أشجار: يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرك مبتعدًا عن مكانه مسافة 100 ft، في مسار عمودي على الخط الواصل بين الشجرتين، ومشكلاً معهما زاوية قياسها 70° ، فما البعد بين الشجرتين؟ تقريبًا 274.7 ft

مثال 4

أوجد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة:

مثال 5



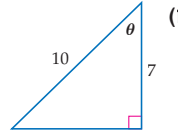
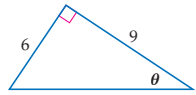
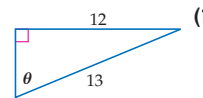
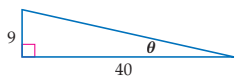
(12) سلالم: إذا علمت أن زاوية ارتفاع السلالم الموصى بها لمكافحة الحرائق هي 75° إلى أي ارتفاع على بناءة يمكن أن يصل سلم طوله 6.5 m، إذا تم الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. 6.3 m

مثال 6

تدرب وحل المسائل

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي: (13-16) انظر الهامش.

مثال 1



إذا علمت أن $\angle A$ ، $\angle B$ زاويتان حادثتان في مثلث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

مثال 2

(17) إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$ ، فما قيمة $\cos A$ ؟ $\frac{15}{17}$ (18) إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$ ، فما قيمة $\tan A$ ؟ $\frac{\sqrt{91}}{3}$

(19) إذا كان $\tan B = 3$ ، فما قيمة $\sin B$ ؟ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (20) إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$ ؟ $\frac{4\sqrt{65}}{65}$

3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

$$\sin \theta = \frac{4}{5}; \cos \theta = \frac{3}{5}; \tan \theta = \frac{4}{3}; (1)$$

$$\csc \theta = \frac{5}{4}; \sec \theta = \frac{5}{3}; \cot \theta = \frac{3}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}; \cos \theta = \frac{3}{4}; (2)$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}; \csc \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7};$$

$$\sec \theta = \frac{4}{3}; \cot \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}; \cos \theta = \frac{5}{13}; (13)$$

$$\tan \theta = \frac{12}{5}; \csc \theta = \frac{13}{12};$$

$$\sec \theta = \frac{13}{5}; \cot \theta = \frac{5}{12}$$

$$\sin \theta = \frac{9}{41}; \cos \theta = \frac{40}{41}; (14)$$

$$\tan \theta = \frac{9}{40}; \csc \theta = \frac{41}{9};$$

$$\sec \theta = \frac{41}{9}; \cot \theta = \frac{40}{9}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{51}}{10}; \cos \theta = \frac{7}{10}; (15)$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{51}}{7}; \csc \theta = \frac{10\sqrt{51}}{51};$$

$$\sec \theta = \frac{10}{7}; \cot \theta = \frac{7\sqrt{51}}{51}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}; \cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}; (16)$$

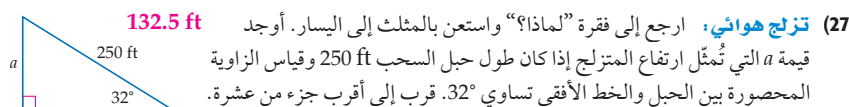
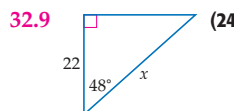
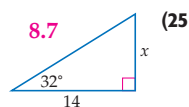
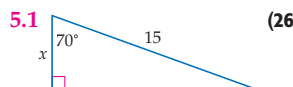
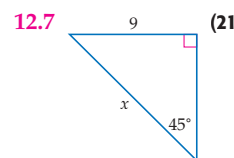
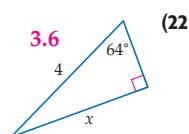
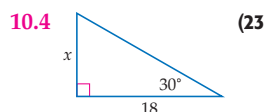
$$\tan \theta = \frac{2}{3}; \csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}; \cot \theta = \frac{3}{2}$$

تنويع الواجبات المنزلية

الأُسئلة	المستوى
52-60 ، 13-35	دون المتوسط
52-60 ، 45-50 ، زوجي ، 36-42 ، فردي ، 13-35	ضمن المتوسط
36-60	فوق المتوسط

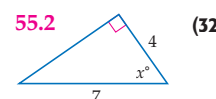
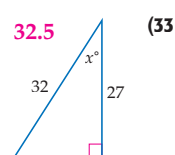
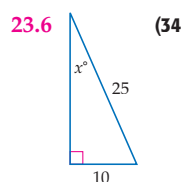
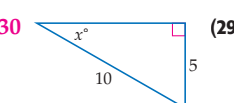
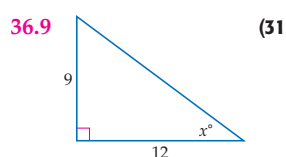
في كلِّ مما يأتي، استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



(28) يقف فيصل ملاصقاً لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرك مبتعداً عن مكانه مسافة 20 m، في مسار عمودي على الخط الواصل بين الشجرتين، ومشكلاً زاوية قدرها 52° ، فما البعد بين الشجرتين؟ **25.6 m**

مثال 5

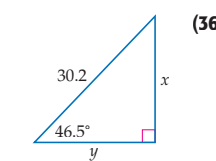
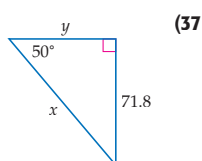
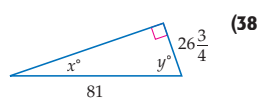
في كلِّ مما يأتي، أوجد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



مثال 6

(35) **تسلق:** تسلق أحد الأشخاص تلاً بزاوية ارتفاع قياسها 20° ، أوجد ارتفاع الشخص عندما يكون قد قطع مسافة أفقية مقدارها 18 m. **6.6 m**

في كلِّ مما يأتي استعمل دوال مثلثية، لإيجاد قيمة كلِّ من x , y . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



حلّ كلا من المعادلات الآتية:

86.2 $\tan X = 15$ (41)

54.9 $\sin N = \frac{9}{11}$ (40)

80.9 $\cos A = \frac{3}{19}$ (39)

11.5 $\cos Z = 0.98$ (44)

7.1 $\tan G = 0.125$ (43)

20.5 $\sin T = 0.35$ (42)

4 التقويم

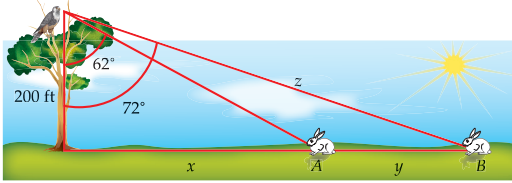
بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة كتابة أقل المعلومات التي يجب أن يعرفها الشخص عن المثلثات القائمة ليستطيع حل المثلث ويجد قياس زاوية أو طول ضلع مجهول فيه، ثم تسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.



الرابط مع الحياة

يستطيع الصقر رؤية أجسام طولها 10 cm عن بعد 1.5 km. كما أنه يستطيع رؤية الأشياء بوضوح عندما ينقض بسرعة 100 ميل/الساعة.

(45) **أعشاش:** تنظر فاطمة نحو عش طائر على شجرة بزاوية ارتفاع قياسها 74.5° ، فإذا كان مستوى نظرها يرتفع 5 ft عن سطح الأرض، وكانت تقف على بعد 12 ft من قاعدة الشجرة. فما ارتفاع عُش الطائر عن سطح الأرض؟ قرب إلى أقرب قدم. **48 ft**



(46) **صقور:** رأى صقر من ارتفاع 200 ft أرنبين A, B. كما هو موضح في الشكل.

(a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟ **647.2 ft تقريبًا**

(b) ما البعد بين الأرنبين؟ **239.4 ft تقريبًا**

في $\triangle ABC$ ، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$. قرب إلى أقرب جزء من عشرة. (47-50) **انظر الهامش.**

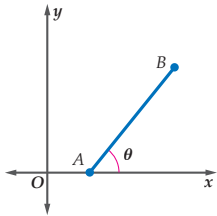
(48) $m\angle B = 31^\circ$, $b = 19$

(47) $m\angle A = 36^\circ$, $a = 12$

(50) $\tan A = \frac{4}{5}$, $a = 6$

(49) $a = 8$, $c = 17$

مسائل مهارات التفكير العليا



(51) **تحذّر:** قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0)$, $B(6, 5)$ كما هو موضح في الشكل إلى اليسار، ما قياس الزاوية الحادة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x؟ وضح كيف وجدت القياس.

(52) **تبرير:** بين إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرر إجابتك: قيمة دالة الجيب لأية زاوية حادة، لن تكون سالبة أبدًا. **انظر الهامش.**

(53) **إجابة مفتوحة:** في المثلث القائم الزاوية ABC، إذا علمت أن: $\sin A = \sin C$. فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلث؟ برر إجابتك. **انظر الهامش.**

(51) 51.3° تقريبًا، إذا رُسم مثلث قائم الزاوية، بحيث تكون القطعة AB هي الوتر، فإن طول الضلع المقابل للزاوية θ هو 5 وطول الضلع المجاور لها هو 4، فيكون: $\tan A = \frac{5}{4}$ ، فتكون: $A \approx 51.3^\circ$.

تدريب على اختبار

(55) نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5. إذا كانت مساحة المستطيل 240 cm^2 ، فكم ستمتد طول قطر المستطيل؟ **A**

- 26 **A** 30 **C**
28 **B** 32 **D**

(54) إذا كان ثمن شطيرة x ريالاً، وثمان علبه عصير y ريالاً، وثمان شطيرتين مع علبة عصير 4.50 ريالاً، وثمان ثلاث شطائر مع علبة عصير 7.25 ريالاً، فأي المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كل من x, y؟ **B**

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **A**
 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **B**

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: **الدرس (5-1)**

(58) $\frac{(a+1)(a-2)}{4(a-5)(a-1)} \cdot \frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4}$

(57) $\frac{36b^3cf}{5aq} \cdot \frac{14c^2f^5}{qa^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$

(56) $\frac{5a^4c}{3b} \cdot \frac{15a^2b^2}{21ac} \cdot \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$

أوجد مجموع كل متسلسلة مما يأتي:

(60) $\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots$ **الدرس (6-4)**

(59) $3 + 8 + 13 + \dots + 58$ **الدرس (6-2)**

164 الفصل 8 حساب المثلثات

إجابات:

(47) $m\angle B = 54^\circ$, $b = 16.5$, $c = 20.4$

(48) $m\angle A = 59^\circ$, $a = 31.6$, $c = 36.9$

(49) $m\angle A = 28.1^\circ$, $m\angle B = 61.9^\circ$, $b = 15$

(50) $m\angle A = 38.7^\circ$, $m\angle B = 51.3^\circ$, $b = 7.5$, $c = 9.6$

(52) **صحيحة؛** $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin \theta$ وطول الضلع المقابل لزاوية حادة وطول الوتر موجبان، لذا فإن قيمة دالة الجيب ستكون موجبة دائماً.

(53) بما أن $\sin A = \sin C$ فإن:

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } A}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } C}{\text{طول الوتر}}$$

وبما أن طول الوتر في النسبتين هو نفسه فإن طول الضلع المقابل لـ C يساوي طول الضلع المقابل لـ A، وهذا يعني أن المثلث متطابق الضلعين.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع: اطلب إلى الطلبة حساب قيمة $\sin^2 x + \cos^2 x$ لبعض قيم x، ثم تخمين قيمة العبارة السابقة، واستعمال تعريف الدوال المثلثية لإثبات هذا التخمين. لاحظ أن القيمة دائماً تساوي 1.

$\sin^2 x + \cos^2 x \stackrel{?}{=} 1$

$\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$

وبما أن $(\text{الوتر})^2 = (\text{المجاور})^2 + (\text{المقابل})^2$ ، صحيح دائماً من خلال نظرية فيثاغورس، فالقيمة تساوي 1 دائماً.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 8

دون		ضمن		فوق المتوسط	
تدريبات إعادة التعليم (6)		تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7)		دون	
الاسم: _____ التاريخ: _____		الاسم: _____ التاريخ: _____		الاسم: _____ التاريخ: _____	
8-1 تدريبات إعادة التعليم		8-1 تدريبات إعادة التعليم		8-1 تدريبات إعادة التعليم	
الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية		الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية		الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية	
الدوال المثلثية للزاوية الحادة، يُعرّف حساب المثلثات بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعها. والدالة المثلثية تُعرف من النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.		الدوال المثلثية للزاوية الحادة، يُعرّف حساب المثلثات بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعها. والدالة المثلثية تُعرف من النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.		الدوال المثلثية للزاوية الحادة، يُعرّف حساب المثلثات بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعها. والدالة المثلثية تُعرف من النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.	
إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور كما يأتي:		إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور كما يأتي:		إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور كما يأتي:	
المقابل = $\sin \theta$ (جيب θ) المجاور = $\cos \theta$ (جيب تمام θ) الوتر = $\tan \theta$ (ظل θ) المقابل = $\cot \theta$ (ظل تمام θ) الوتر = $\sec \theta$ (قاطع θ) المجاور = $\csc \theta$ (قاطع تمام θ)		المقابل = $\sin \theta$ (جيب θ) المجاور = $\cos \theta$ (جيب تمام θ) الوتر = $\tan \theta$ (ظل θ) المقابل = $\cot \theta$ (ظل تمام θ) الوتر = $\sec \theta$ (قاطع θ) المجاور = $\csc \theta$ (قاطع تمام θ)		المقابل = $\sin \theta$ (جيب θ) المجاور = $\cos \theta$ (جيب تمام θ) الوتر = $\tan \theta$ (ظل θ) المقابل = $\cot \theta$ (ظل تمام θ) الوتر = $\sec \theta$ (قاطع θ) المجاور = $\csc \theta$ (قاطع تمام θ)	
مثال: مثلث قائم الزاوية فيه $\angle B = 30^\circ$ ، أوجد قيمة $\tan B$.		مثال: مثلث قائم الزاوية فيه $\angle B = 30^\circ$ ، أوجد قيمة $\tan B$.		مثال: مثلث قائم الزاوية فيه $\angle B = 30^\circ$ ، أوجد قيمة $\tan B$.	
الحل: 1: نرسم مثلثاً قائم الزاوية، ونسمي إحدى زواياه الحادة θ ، ونضع العدد 3 طولا للضلع المجاور والعدد 7 طولا للوتر.		الحل: 1: نرسم مثلثاً قائم الزاوية، ونسمي إحدى زواياه الحادة θ ، ونضع العدد 3 طولا للضلع المجاور والعدد 7 طولا للوتر.		الحل: 1: نرسم مثلثاً قائم الزاوية، ونسمي إحدى زواياه الحادة θ ، ونضع العدد 3 طولا للضلع المجاور والعدد 7 طولا للوتر.	
الحل: 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة θ .		الحل: 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة θ .		الحل: 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة θ .	
$a^2 + b^2 = c^2$ $3^2 + b^2 = 7^2$ $9 + b^2 = 49$ $b^2 = 40$ $b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$		$a^2 + b^2 = c^2$ $3^2 + b^2 = 7^2$ $9 + b^2 = 49$ $b^2 = 40$ $b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$		$a^2 + b^2 = c^2$ $3^2 + b^2 = 7^2$ $9 + b^2 = 49$ $b^2 = 40$ $b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$	
الخطوة 3: أوجد $\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$		الخطوة 3: أوجد $\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$		الخطوة 3: أوجد $\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$	
تعاريف:		تعاريف:		تعاريف:	
أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:		أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:		أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:	
(1) $\sin \theta = \frac{5}{13}$; $\cos \theta = \frac{12}{13}$; $\tan \theta = \frac{5}{12}$; $\csc \theta = \frac{13}{5}$; $\sec \theta = \frac{13}{12}$; $\cot \theta = \frac{12}{5}$		(1) $\sin \theta = \frac{5}{13}$; $\cos \theta = \frac{12}{13}$; $\tan \theta = \frac{5}{12}$; $\csc \theta = \frac{13}{5}$; $\sec \theta = \frac{13}{12}$; $\cot \theta = \frac{12}{5}$		(1) $\sin \theta = \frac{5}{13}$; $\cos \theta = \frac{12}{13}$; $\tan \theta = \frac{5}{12}$; $\csc \theta = \frac{13}{5}$; $\sec \theta = \frac{13}{12}$; $\cot \theta = \frac{12}{5}$	
(2) $\sin \theta = \frac{4}{5}$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$; $\csc \theta = \frac{5}{4}$; $\sec \theta = \frac{5}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{4}$		(2) $\sin \theta = \frac{4}{5}$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$; $\csc \theta = \frac{5}{4}$; $\sec \theta = \frac{5}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{4}$		(2) $\sin \theta = \frac{4}{5}$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$; $\csc \theta = \frac{5}{4}$; $\sec \theta = \frac{5}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{4}$	
(3) $\sin \theta = \frac{8}{17}$; $\cos \theta = \frac{15}{17}$; $\tan \theta = \frac{8}{15}$; $\csc \theta = \frac{17}{8}$; $\sec \theta = \frac{17}{15}$; $\cot \theta = \frac{15}{8}$		(3) $\sin \theta = \frac{8}{17}$; $\cos \theta = \frac{15}{17}$; $\tan \theta = \frac{8}{15}$; $\csc \theta = \frac{17}{8}$; $\sec \theta = \frac{17}{15}$; $\cot \theta = \frac{15}{8}$		(3) $\sin \theta = \frac{8}{17}$; $\cos \theta = \frac{15}{17}$; $\tan \theta = \frac{8}{15}$; $\csc \theta = \frac{17}{8}$; $\sec \theta = \frac{17}{15}$; $\cot \theta = \frac{15}{8}$	
مثال: مثلث قائم الزاوية في ABC ، إذا كان $\angle A = 70^\circ$ ، فأوجد $\cos A$.		مثال: مثلث قائم الزاوية في ABC ، إذا كان $\angle A = 70^\circ$ ، فأوجد $\cos A$.		مثال: مثلث قائم الزاوية في ABC ، إذا كان $\angle A = 70^\circ$ ، فأوجد $\cos A$.	
الحل: إذا كان $\tan A = 3$ ، فأوجد $\sin A$.		الحل: إذا كان $\tan A = 3$ ، فأوجد $\sin A$.		الحل: إذا كان $\tan A = 3$ ، فأوجد $\sin A$.	
الحل: إذا كان $\sin A = \frac{1}{16}$ ، فأوجد $\cos A$.		الحل: إذا كان $\sin A = \frac{1}{16}$ ، فأوجد $\cos A$.		الحل: إذا كان $\sin A = \frac{1}{16}$ ، فأوجد $\cos A$.	
استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة:	
(6) $\tan 30^\circ = \frac{8}{x}$ ، $\cos 60^\circ = \frac{5}{x}$ ، $\tan 22^\circ = \frac{x}{10}$		(6) $\tan 30^\circ = \frac{8}{x}$ ، $\cos 60^\circ = \frac{5}{x}$ ، $\tan 22^\circ = \frac{x}{10}$		(6) $\tan 30^\circ = \frac{8}{x}$ ، $\cos 60^\circ = \frac{5}{x}$ ، $\tan 22^\circ = \frac{x}{10}$	
(7) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(7) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(7) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
(8) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(8) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(8) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة:	
(10) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(10) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(10) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
(11) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(11) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(11) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
(12) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(12) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(12) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
الفصل 8، حساب المثلثات		الفصل 8، حساب المثلثات		الفصل 8، حساب المثلثات	

دون		ضمن		فوق المتوسط	
تدريبات حل المسألة (9)		تدريبات المهارات (8)		دون	
الاسم: _____ التاريخ: _____		الاسم: _____ التاريخ: _____		الاسم: _____ التاريخ: _____	
8-1 تدريبات حل المسألة		8-1 تدريبات المهارات		8-1 تدريبات المهارات	
الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية		الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية		الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية	
استعمل الدوال المثلثية، يمكنك استعمال الدوال المثلثية، لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية، ويمكن إيجاد قياسات الزوايا باستعمال معكوس الجيب، ومكوس جيب التمام، ومكوس الظل.		الدوال المثلثية للزاوية الحادة، يُعرّف حساب المثلثات بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعها. والدالة المثلثية تُعرف من النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.		الدوال المثلثية للزاوية الحادة، يُعرّف حساب المثلثات بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعها. والدالة المثلثية تُعرف من النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.	
أوجد قياس $\angle C$ ، عطفًا إلى الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.		أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:		أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:	
بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية C وطول الوتر، لذا استعمل دالة الجيب.		المقابل = $\sin \theta$ (جيب θ) المجاور = $\cos \theta$ (جيب تمام θ) الوتر = $\tan \theta$ (ظل θ) المقابل = $\cot \theta$ (ظل تمام θ) الوتر = $\sec \theta$ (قاطع θ) المجاور = $\csc \theta$ (قاطع تمام θ)		المقابل = $\sin \theta$ (جيب θ) المجاور = $\cos \theta$ (جيب تمام θ) الوتر = $\tan \theta$ (ظل θ) المقابل = $\cot \theta$ (ظل تمام θ) الوتر = $\sec \theta$ (قاطع θ) المجاور = $\csc \theta$ (قاطع تمام θ)	
مثال: دالة الجيب		مثال: مثلث قائم الزاوية فيه $\angle B = 30^\circ$ ، أوجد قيمة $\tan B$.		مثال: مثلث قائم الزاوية فيه $\angle B = 30^\circ$ ، أوجد قيمة $\tan B$.	
$\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{10}$		الحل: 1: نرسم مثلثاً قائم الزاوية، ونسمي إحدى زواياه الحادة θ ، ونضع العدد 3 طولا للضلع المجاور والعدد 7 طولا للوتر.		الحل: 1: نرسم مثلثاً قائم الزاوية، ونسمي إحدى زواياه الحادة θ ، ونضع العدد 3 طولا للضلع المجاور والعدد 7 طولا للوتر.	
بالتعويض عن المقابل بـ 8، وعن الوتر بـ 10.		الحل: 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة θ .		الحل: 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة θ .	
معكوس الجيب باستخدام الآلة الحاسبة		$a^2 + b^2 = c^2$ $3^2 + b^2 = 7^2$ $9 + b^2 = 49$ $b^2 = 40$ $b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$		$a^2 + b^2 = c^2$ $3^2 + b^2 = 7^2$ $9 + b^2 = 49$ $b^2 = 40$ $b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$	
بإستخدام الآلة الحاسبة		الخطوة 3: أوجد $\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$		الخطوة 3: أوجد $\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$	
$\sin^{-1} \frac{8}{10} = m \angle C$ $53.1^\circ \approx m \angle C$		تعاريف:		تعاريف:	
تعاريف:		أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:		أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي:	
استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		(1) $\sin \theta = \frac{5}{13}$; $\cos \theta = \frac{12}{13}$; $\tan \theta = \frac{5}{12}$; $\csc \theta = \frac{13}{5}$; $\sec \theta = \frac{13}{12}$; $\cot \theta = \frac{12}{5}$		(1) $\sin \theta = \frac{5}{13}$; $\cos \theta = \frac{12}{13}$; $\tan \theta = \frac{5}{12}$; $\csc \theta = \frac{13}{5}$; $\sec \theta = \frac{13}{12}$; $\cot \theta = \frac{12}{5}$	
(1) $\sin 20^\circ = \frac{x}{14.5}$ ، $\cos 63^\circ = \frac{4}{x}$ ، $\tan 38^\circ = \frac{10}{x}$		(2) $\sin \theta = \frac{4}{5}$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$; $\csc \theta = \frac{5}{4}$; $\sec \theta = \frac{5}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{4}$		(2) $\sin \theta = \frac{4}{5}$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$; $\csc \theta = \frac{5}{4}$; $\sec \theta = \frac{5}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{4}$	
(2) $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		(3) $\sin \theta = \frac{8}{17}$; $\cos \theta = \frac{15}{17}$; $\tan \theta = \frac{8}{15}$; $\csc \theta = \frac{17}{8}$; $\sec \theta = \frac{17}{15}$; $\cot \theta = \frac{15}{8}$		(3) $\sin \theta = \frac{8}{17}$; $\cos \theta = \frac{15}{17}$; $\tan \theta = \frac{8}{15}$; $\csc \theta = \frac{17}{8}$; $\sec \theta = \frac{17}{15}$; $\cot \theta = \frac{15}{8}$	
(3) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		مثال: مثلث قائم الزاوية في ABC ، إذا كان $\angle A = 70^\circ$ ، فأوجد $\cos A$.		مثال: مثلث قائم الزاوية في ABC ، إذا كان $\angle A = 70^\circ$ ، فأوجد $\cos A$.	
(4) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		الحل: إذا كان $\tan A = 3$ ، فأوجد $\sin A$.		الحل: إذا كان $\tan A = 3$ ، فأوجد $\sin A$.	
(5) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		الحل: إذا كان $\sin A = \frac{1}{16}$ ، فأوجد $\cos A$.		الحل: إذا كان $\sin A = \frac{1}{16}$ ، فأوجد $\cos A$.	
(6) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة:	
(7) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		(6) $\tan 30^\circ = \frac{8}{x}$ ، $\cos 60^\circ = \frac{5}{x}$ ، $\tan 22^\circ = \frac{x}{10}$		(6) $\tan 30^\circ = \frac{8}{x}$ ، $\cos 60^\circ = \frac{5}{x}$ ، $\tan 22^\circ = \frac{x}{10}$	
(8) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		(7) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(7) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
(9) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		(8) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(8) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة:		أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة:	
(8) $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		(10) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(10) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
(9) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ ، $\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ ، $\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$		(11) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$		(11) $\sin 60^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\cos 51^\circ = \frac{x}{5}$ ، $\tan 63^\circ = \frac{x}{2}$	
الفصل 8، حساب المثلثات		الفصل 8، حساب المثلثات		الفصل 8، حساب المثلثات	

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

دون دون المتوسط

ضمن **فوق**

دون ضمن فوق

21

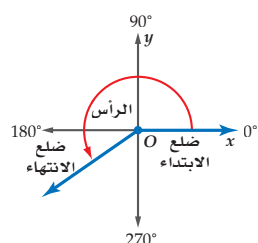
الفصل ٨ : حساب المتكاثرات

164B الفصل 8 حساب المثلثات

الزوايا وقياساتها Angles and Angle Measure

لماذا؟

المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظل الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظل على القرص 15° كل ساعة.



الزوايا المرسومة في الوضع القياسي تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب من المحور x .

- يُسمّى الضلع المنطبق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 8-2

استعمال زوايا مقيسة بالدرجات.

الدرس 8-2

رسم زوايا في الوضع القياسي وإيجاد قياساتها.

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

ما بعد الدرس 8-2

تمثيل دوال الجيب وجيب التمام بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا"،

واسأل:

- إلى أين يتجه الظل في الصباح؟ الغرب
- متى يكون لك أقصر ظل؟ عند الظهر
- فسر لماذا يتحرك الظل 15° كل ساعة.

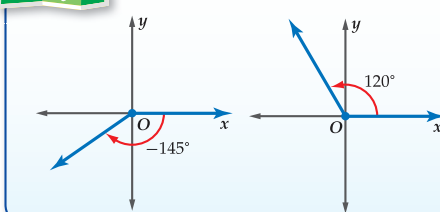
يعود الظل إلى موقعه الأصلي كل

24 ساعة، وعندما نقسم الدائرة الكاملة

على 24 فإن الناتج: $15^\circ = 360^\circ \div 24$.

مفهوم أساسي

قياسات الزوايا



يكون قياس الزاوية موجباً إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالباً إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

رسم زاوية في الوضع القياسي

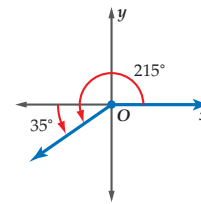
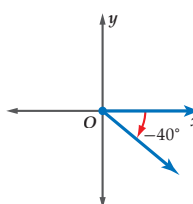
مثال 1

ارسم كلّاً من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

$$215^\circ \quad (a) \quad 215^\circ = 180^\circ + 35^\circ \quad -40^\circ \quad (b)$$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 35° بدوران معاكس لحرارة عقارب الساعة بدءاً من الجزء السالب من المحور x .

قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 40° بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء الموجب من المحور x .



1A, 1B انظر ملحق الإجابات

تحقق من فهمك

ارسم كلّاً من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

$$80^\circ \quad (1A) \quad -105^\circ \quad (1B)$$

فيما سبق؟

درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات

والآن؟

- أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها.
- أحول من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات؟

الوضع القياسي
standard position

ضلع الابتداء
initial side

ضلع الانتهاء
terminal side

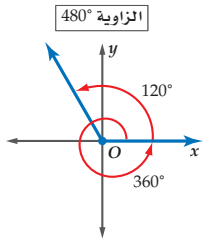
الراديان
radian

الزاوية المركزية
central angle

طول القوس
arc length

مصادر الدرس 8-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص. (167)	• تنويع التعليم، ص. (170)	• تنويع التعليم، ص. (170)
كتاب التمارين	• ص. (22)	• ص. (22)	• ص. (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص. (11) • تدريبات المهارات، ص. (13) • تدريبات حل المسألة، ص. (14)	• تدريبات المهارات، ص. (13) • تدريبات حل المسألة، ص. (14) • التدريبات الإثرائية، ص. (15)	• تدريبات المهارات، ص. (13) • تدريبات حل المسألة، ص. (14) • التدريبات الإثرائية، ص. (15)



يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة. فعلى سبيل المثال:
دورة كاملة مقدارها 360° إضافة إلى دورة بمقدار 120° تشكّلان زاوية قياسها
 $360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$



الزوايا في الوضع القياسي

مثال 1 يبين كيفية رسم زاوية قياسها معلوم في الوضع القياسي.

مثال 2 يبين كيفية تمثيل زاوية قياسها أكبر من 360° .

مثال 3 يبين كيفية إيجاد الزوايا الموجبة والسالبة المشتركة في ضلع الانتهاء.

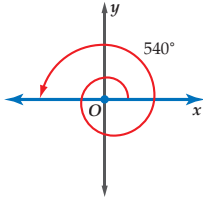
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

رسم زاوية في الوضع القياسي

مثال 2 من واقع الحياة

المتزلج المائي: يتضمّن التزلج المائي، أن يقوم المتزلج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار 540° في الهواء، فارسم زاوية قياسها 540° في الوضع القياسي.

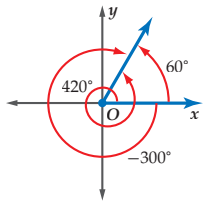


$$540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° بدءاً من الجزء الموجب من المحور x .

تحقق من فهمك

(2) ارسم زاوية قياسها 600° في الوضع القياسي. **انظر الهامش.**



عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: 300° , 420° , 60° كما هو موضح في الشكل المجاور.

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360° .

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$$

$$60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$$

مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كلّ مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة:

(a) 130°

$$\text{بإضافة } 360^\circ \quad 130^\circ + 360^\circ = 490^\circ \text{ زاوية بقياس موجب}$$

$$\text{ب طرح } 360^\circ \quad 130^\circ - 360^\circ = -230^\circ \text{ زاوية بقياس سالب}$$

(b) -200°

$$\text{بإضافة } 360^\circ \quad -200^\circ + 360^\circ = 160^\circ \text{ زاوية بقياس موجب}$$

$$\text{ب طرح } 360^\circ \quad -200^\circ - 360^\circ = -560^\circ \text{ زاوية بقياس سالب}$$

تحقق من فهمك

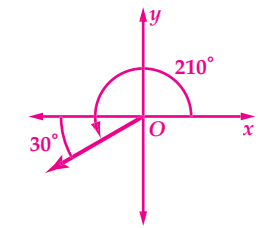
(3B) -45° , -405° , 315°

(3A) 15° , -345° , 375°

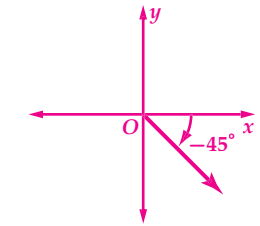
قراءة الرياضيات

زاوية الدوران

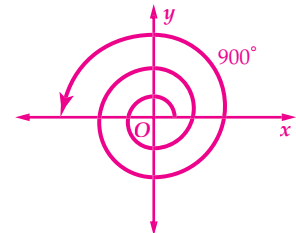
في حساب المثلثات، يشار إلى الزاوية أحياناً بزاوية الدوران.



(b) -45°

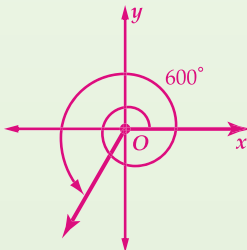


غوص: في مسابقة (الغوص من منصة الوثب) نفّذ غواص دورة بمقدار 900° قبل أن يغطس في الماء. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.



إجابة (تحقق من فهمك):

(2)



إرشادات للمعلم الجديد

رسم الزوايا: ناقش الطلبة في أهمية

تحديد الزوايا بالأشهر كما هو موضح، وكتابة قياسها بالدرجات.

إرشادات للدراسة

القياس بالراديان

كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الانتهاء حتى ضلع الانتهاء.

- قياس زاوية بالراديان يكون موجباً إذا كان الدوران عكس حركة عقارب الساعة.
- قياس زاوية بالراديان يكون سالباً إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.

قراءة الرياضيات

القياس بالراديان

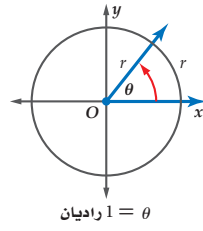
كلمة راديان أو rad تحذف عادة عندما يتم التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. ومن هنا فعندما لا نضع وحدة لقياس معطى لزاوية تكون الوحدة هي الراديان.

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس يمكن أن تقاس

الزوايا أيضًا بوحدات تستند على طول قوس من دائرة. 1 راديان (rad) هو قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدد على الدائرة قوساً طوله مساوٍ لطول نصف الدائرة.

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ ، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ$$



1 راديان θ

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$	للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

مثال 4 التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

$$\begin{aligned} (a) \quad -30^\circ &= -30^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = -\frac{30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ (b) \quad \frac{5\pi}{2} &= \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{900^\circ}{2} = 450^\circ \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

$$(4A) \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \quad (4B) \quad -67.5^\circ = -\frac{3\pi}{8}$$

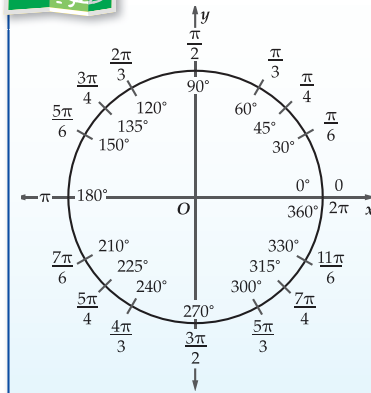
أضف إلى
مطوبتك

ملخص المفهوم

يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$$\begin{aligned} 30^\circ &= \frac{\pi}{6} & 45^\circ &= \frac{\pi}{4} \\ 60^\circ &= \frac{\pi}{3} & 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



مثال إضافي

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية من الزاويتين الآتيتين:

$$(a) \quad 210^\circ$$

$$\text{إجابة ممكنة: } -150^\circ, 570^\circ$$

$$(b) \quad -120^\circ$$

$$\text{إجابة ممكنة: } -480^\circ, 240^\circ$$

التعليم باستعمال التقنيات

رسائل قصيرة: اطلب إلى الطلبة

العمل في مجموعات ثنائية على أن يرسل أحد الطالبين رسالة تتضمن قياس زاوية، ويرد عليه الآخر برسالة تتضمن زاويتين تشتركان معها في ضلع الانتهاء. ثم يتبادل الطلبة الأدوار فيما بينهم ويكرروا العملية.

التحويل بين الدرجات والراديان

مثال 4 يبين كيفية التحويل من درجات إلى راديان، ومن راديان إلى درجات.

وقد استعمل الرمز (rad) اختصاراً للكلمة radian (راديان)؛ للدلالة على أن قياس الزاوية معطى بالراديان.

مثال 5 يبين كيفية التحويل واستعمال قياس الزوايا في مواقف من الحياة.

مثال إضافي

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى راديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات.

$$(a) \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

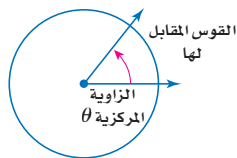
$$(b) \quad -300^\circ = -\frac{5\pi}{3}$$

تنويع التعليم

دون

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء،

فاطلب إليهم العمل في مجموعات ثنائية على أن يشكل أحدهما زاوية بقلم رصاص أو عودين. أمّا الآخر فيعطي قياسين للزاوية أحدهما موجب والآخر سالب، يشتركان مع الزاوية النموذج في ضلع الانتهاء.



الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.

مفهوم أساسي **طول القوس**

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$

أضف إلى مخطبتك

النموذج:

سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 47

مثال إضافي

5 شاحنات: إذا كان طول نصف قطر عجلة القيادة (Steering wheel) لشاحنة هو 11 in. ما المسافة التي تقطعها نقطة على عجلة القيادة إذا دارت العجلة أربعة أخماس الدورة؟ **55.3 in**

إيجاد طول القوس

مثال 5 من واقع الحياة

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in. ما المسافة بالقدم التي تقطعها الشاحنة بعد أن تدور إطاراتها ثلاثة أرباع دورة؟

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

الخطوة 2: استعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ &= 33 \cdot \frac{3\pi}{2} \\ &\approx 155.5 \text{ in} \\ &\approx 13.0 \text{ ft} \end{aligned}$$

صيغة طول القوس

بالتعويض عن r بـ 33 و θ بـ $\frac{3\pi}{2}$

باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

بالقسمة على 12 للتحويل إلى وحدة القدم

إذن الشاحنة قطعت مسافة 13 ft تقريبًا بعد دوران إطاراتها ثلاثة أرباع دورة.

تحقق من فهمك

(5) إذا كان طول قطر دائرة 9 cm، فأوجد طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله 60° . قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. **4.7 cm تقريبًا**

تنبيه

طول القوس تذكر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكر أيضًا أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تأكد

(4) إجابة ممكنة: 385° , -335°

(5) إجابة ممكنة: 535° , -185°

(6) إجابة ممكنة: 260° , -460°

(3) 390°

(2) -60°

(1) 140°

في كلٍّ مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

(6) -100°

(5) 175°

(4) 25°

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(9) $40^\circ - \frac{2\pi}{9}$

(8) $225^\circ - \frac{5\pi}{4}$

(7) $\frac{\pi}{4} - 45^\circ$

(10) **تنس طاولة:** تحرك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوس من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو 1.2 m، وزاوية دوران اللاعب تساوي 100° . فما طول هذا القوس؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. **2.1 m**

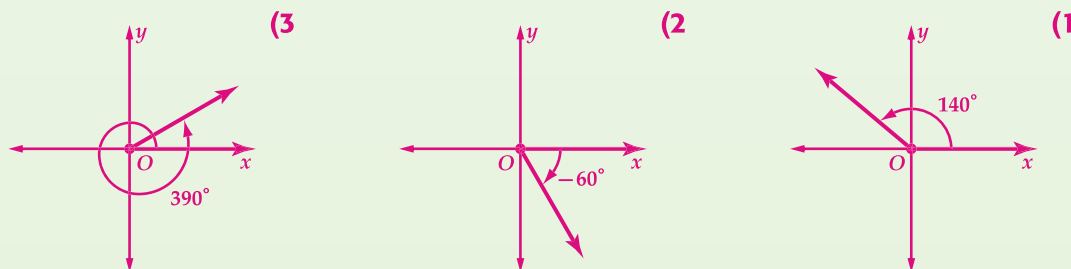
المثالان 1, 2

مثال 3

مثال 4

مثال 5

إجابات:



المثالان 1, 2

ارسم كلاً من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي: (11-16) انظر الهامش.

- (11) 75° (12) 160° (13) -90°
(14) -120° (15) 295° (16) 510°

(17) **جهاز:** يتأرجح لاعب جمباز على جهاز عارضين، ليدور بزوايا قياسها 240° . ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي. انظر الهامش

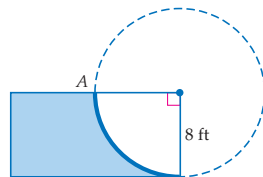
في كل مما يأتي. أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركيتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

- (18) 50° (19) 95° (20) 205°
(21) 350° (22) -80° (23) -195°

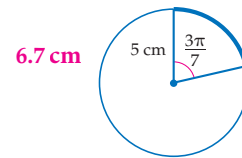
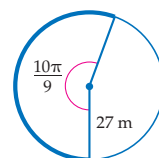
حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

- (24) 330° $\frac{11\pi}{6}$ (25) 150° $\frac{5\pi}{6}$ (26) $-\frac{\pi}{3}$ -60°
(27) -50° $-\frac{5\pi}{18}$ (28) 190° $\frac{19\pi}{18}$ (29) $-\frac{7\pi}{3}$ -420°

(30) أوجد طول القوس المحدد في الشكل المجاور. 12.6 ft تقريباً



أوجد طول القوس المحدد في كل من الدائرتين الآتيتين، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.



(33) **ساعات:** كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة ليدور بزوايا قياسها 2.5π راديان؟ $1 \text{ h } 15 \text{ min}$

(34) **المزولة:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس. يدور الظل على القرص 15° كل ساعة.

- (a) بعد كم ساعة يدور الظل بزوايا قياسها $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟ 19.2 h
(b) ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها الظل بعد مرور 5 ساعات؟ $\frac{5\pi}{12}$
(c) مزولة طول نصف قطرها 8 in ، ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور 14 ساعة؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. 29.3 in

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركيتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

- (35) 620° (36) -400° (37) $-\frac{3\pi}{4}$ (38) $\frac{19\pi}{6}$

(39) **تمثيلات متعددة:** لديك النقطتان $C(6, 0)$ ، $D(6, 8)$.

- (a) هندسياً: ارسم المثلث $\triangle ECD$ حيث E هي نقطة الأصل. انظر الهامش.
(b) جبرياً: أوجد ظل $\angle CED$. $\tan \angle DEC = \frac{4}{3}$
(c) جبرياً: أوجد ميل $\overline{ED}$. $(\text{ميل } \overline{ED}) = \frac{4}{3}$
(d) لفظياً: ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظل الزاوية؟



الربط مع الحياة

استعملت المزولة قديماً في المسجد الأقصى لمعرفة أوقات الصلاة.

(39d) إجابة ممكنة:

في المستوى الإحداثي، ظل الزاوية المرسومة في الوضع القياسي يساوي ميل ضلع انتهاء الزاوية.

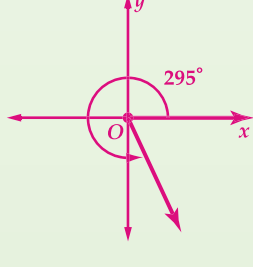
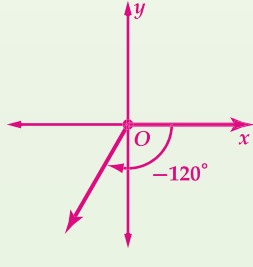
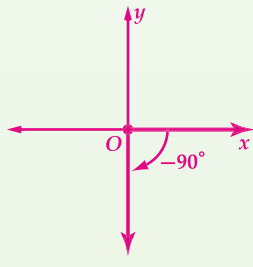
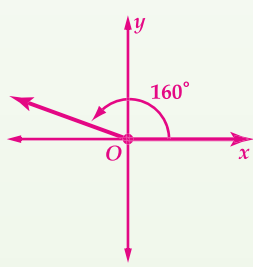
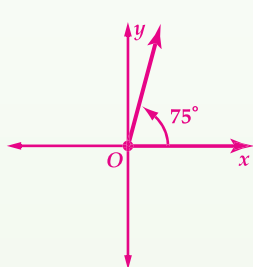
3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1-10 للتأكد من فهم الطلبة.

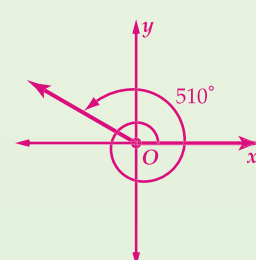
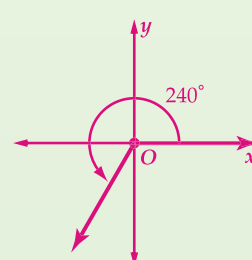
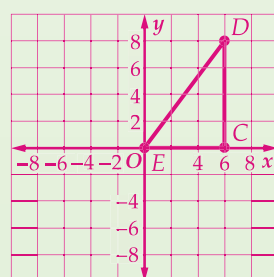
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات



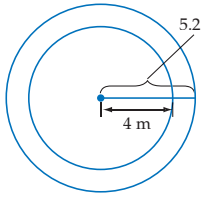
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	11-32، 44، 46-58
ضمن المتوسط	11-37 فردي، 39-44، 46-58
فوق المتوسط	33-58



حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

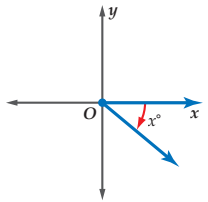
$$\frac{900}{\pi} \approx 286.5^\circ \quad (46) \quad -\frac{10\pi}{9} \approx -200^\circ \quad (42) \quad \frac{31\pi}{45} \approx 124^\circ \quad (41) \quad 472.5^\circ \approx \frac{21\pi}{8} \quad (40)$$



(43) **أحصنة دوارة:** في مدينة ألعاب، تدور لعبة الأحصنة في دائرتين، الأولى داخلية طول نصف قطرها 4 m والثانية خارجية طول نصف قطرها 5.2 m. إذا كانت الأحصنة تدور 5 دورات في الدقيقة، فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

- (a) أوجد قياس الزاوية θ بالراديان التي يدورها حصان في ثانية واحدة. $\frac{\pi}{6}$
(b) كم يزيد طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الخارجية على طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الداخلية، وذلك بعد مرور ثانية واحدة؟ **0.6 m تقريباً**

مسائل مهارات التفكير العليا



(44) **اكتشف الخطأ:** كتب كلٌّ من علي وأحمد عبارة تُمثل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

أحمد	علي
$(360 - x)^\circ$	$(x - 360)^\circ$

(45) **تحذّر:** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم. $x = 2$

(46) **مسألة مفتوحة:** ارسم زاوية حادة في الوضع القياسي وسمّها. وأوجد زاويتين إحداها بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، بحيث تكونان مشتركتين في ضلع الانتهاء مع هذه الزاوية. **انظر الهامش.**

(47) **تبرير:** برهن صيغة طول القوس المقابل للزاوية المركزية. **انظر ملحق الإجابات.**

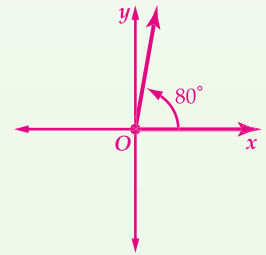
(44) **علي؛ قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء يمكن الحصول عليه بإضافة أو طرح أحد مضاعفات 360° ، قام أحمد بطرح قياس الزاوية الأصلية من 360° . وهذا خطأ.**

4 التقويم

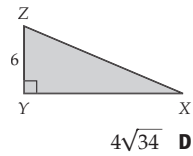
تعلم سابق اطلب إلى الطلبة أن يصفوا كيف ساعدهم مفهوم الزاوية في المثلثات القائمة الذي تعلموه سابقاً على فهم وتوضيح الزوايا في الوضع القياسي في الدرس الحالي.

إجابة:

(46) **إجابة ممكنة:**
 $440^\circ, -280^\circ$



تدريب على اختبار

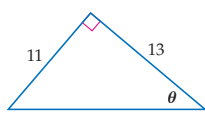


(49) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث المجاور 60 وحدة مربعة. فما طول الضلع $\overline{XZ}$ ؟ **C**
A $2\sqrt{34}$ B $4\sqrt{109}$ C $2\sqrt{109}$ D $4\sqrt{34}$

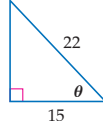
(48) إذا كان $(x+6)(x+8) - (x-7)(x-5) = 0$ ، فأوجد قيمة x . $-\frac{1}{2}$

مراجعة تراكمية

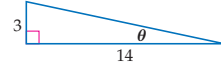
أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كلٍّ مما يأتي: **الدرس (8-1) (50-52) انظر ملحق الإجابات.**



(52)



(51)



(50)

حل كل معادلة مما يأتي: **الدرس (5-6)**

$$2 \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1} \quad (55)$$

$$11 \frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4} \quad (54)$$

$$3, 2 \quad a + 1 = \frac{6}{a} \quad (53)$$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر في المثلثات القائمة الزاوية التي طول كلٍّ من ساقيها كما يأتي: **(مهارة سابقة)**

$$\sqrt{317} \quad a = 14, b = 11 \quad (58)$$

$$\sqrt{353} \quad a = 8, b = 17 \quad (57)$$

$$3\sqrt{41} \quad a = 12, b = 15 \quad (56)$$

170 الفصل 8 حساب المثلثات

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: هناك عدد لا نهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية معلومة. لذا اطلب إلى الطلبة كتابة عبارة جبرية تعبر عن قياس الزوايا المشتركة مع الزاوية التي قياسها 50° في ضلع الانتهاء. $50^\circ + k \cdot 360^\circ$ حيث k عدد صحيح.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 8

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11)

دون

الاسم: _____

التاريخ: _____

8-2 تدريبات إعادة التعليم الزوايا وقياساتها

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تُحدد الزاوية بتعطي مستقيمين، ويُعطى قياس الزاوية في الوضع القياسي بمقدار واتجاه الدوران من ضلع الابتداء (الضلع الذي يقطع على المحور x) إلى ضلع الانتهاء، ويكون القياس موجب إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة، وسالب إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة. والزوايا التي في الوضع القياسي، وها ضلع الانتهاء نفسه، تسمى زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء.

مثال 1: ارسم زاوية قياسها 290° في الوضع القياسي: يمثل محور y السالب دوراناً موجباً بقياس 270° . ولرسم زاوية قياسها 290° ، أدر ضلع الانتهاء 20° زيادة في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.

مثال 2: أوجد زاويتين إحداها بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، ومشتريتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كل ما يأتي:

(a) 250° زاوية بقياس موجب: $250^\circ + 360^\circ = 610^\circ$
زاوية بقياس سالب: $250^\circ - 360^\circ = -110^\circ$

(b) -140° زاوية بقياس موجب: $-140^\circ + 360^\circ = 220^\circ$
زاوية بقياس سالب: $-140^\circ - 360^\circ = -500^\circ$

تمارين
ارسم الزوايا المعطى قياسها في كل ما يأتي في الوضع القياسي:

أوجد زاويتين إحداها بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، ومشتريتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كل ما يأتي:

(4) 65° (5) -75° (6) 230° (7) 420°
(8) 590° (9) -130° (10) 285° (11) -435°

الفصل 8، حساب التفاضل

تدريبات إعادة التعليم - تمّة (12)

دون

الاسم: _____

التاريخ: _____

8-2 تدريبات إعادة التعليم الزوايا وقياساتها

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا بالدرجات أو بالراديان، وهما وحدتان مرتبطتان بطول القوس. والراديان الواحد هو قياس زاوية θ في الوضع القياسي، يقطع ضلع الانتهاء θ قوساً من الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرتبط القياس من خلال المعادلتين: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ و $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

القياس بالراديان والدرجات	القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$.	$180^\circ = \pi \text{ rad}$
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$.	$\pi \text{ rad} = 180^\circ$
طول القوس من الدائرة s المقابل لزاوية مركزية قياسها θ بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ أي $s = r\theta$.	

مثال 1: حلّ قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات:

(a) $45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

(b) $5\pi \text{ rad} = 5\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 900^\circ$

مثال 2: دائرة طول نصف قطرها 5 cm . رُسمت فيها زاوية مركزية قياسها 135° . ما طول القوس المقابل لهذه الزاوية؟

أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

استعمل العلاقة بين طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

صيغة طول القوس $s = r\theta$

بالتعويض عن r بـ 5 وعن θ بـ $\frac{3\pi}{4}$

$s = 5 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{4} \approx 11.78$

تمارين

حلّ قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(1) $140^\circ = 140^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{9}$ (2) $-260^\circ = -260^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{13\pi}{9}$ (3) $-108^\circ = -108^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{3\pi}{5}$

(4) $-75^\circ = -75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5\pi}{12}$ (5) $210^\circ = 210^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ (6) $380^\circ = 380^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{19\pi}{9}$

أوجد طول القوس المقابل للزاوية المركزية المعطى قياسها في كل من الدوائر الآتية. قُرّب إلى أقرب جزء من عشرة:

8.4 وحدات 11.0 وحدة 12.6 وحدة

الفصل 8، حساب التفاضل

تدريبات المهارات (13)

دون ضمن

الاسم: _____

التاريخ: _____

8-2 تدريبات المهارات الزوايا وقياساتها

الزوايا: كل ما بين الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي:

أوجد زاويتين إحداها بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في ما يأتي:

(10) 270° (11) 370° (12) 370° (13) 370° (14) 370° (15) 370° (16) 370° (17) 370° (18) 370° (19) 370° (20) 370° (21) 370° (22) 370° (23) 370° (24) 370° (25) 370°

حلّ قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(1) 130° (2) 130° (3) 130° (4) 130° (5) 130° (6) 130° (7) 130° (8) 130° (9) 130° (10) 130° (11) 130° (12) 130° (13) 130° (14) 130° (15) 130° (16) 130° (17) 130° (18) 130° (19) 130° (20) 130° (21) 130° (22) 130° (23) 130° (24) 130° (25) 130°

الفصل 8، حساب التفاضل

13

الفصل 8، حساب التفاضل

تدريبات حل المسألة (14)

دون ضمن

الاسم: _____

التاريخ: _____

8-2 تدريبات حل المسألة الزوايا وقياساتها

(1) مدينة الألعاب: عجلة دوّارة تحتوي على 20 مقعداً مرقمة بالأعداد من 1 إلى 20 على التوالي، وتكمل هذه العجلة دورة واحدة حول مركزها كل 40 ثانية.

(2) زمن: ما قياس الزاوية التي يكوّنها عقرب الساعات، عندما يدور من الساعة 4 مساءً، وحتى الساعة مساءً بالدرجات وبالراديان؟ وما طول القوس الذي يبرسه العقرب في هذا الزمن إذا كان طوله 6 in ؟

9.4 in ; $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$, 90°

(a) إذا كانت المقاعد على مسافات متساوية، فما قياس الزاوية المركزية التي يكوّنها المقعدان 1 و 8 بالدرجات وبالراديان؟

(b) ما سرعة العجلة الدوّارة بالدورات في الدقيقة؟

(c) ما سرعة العجلة الدوّارة بالراديان في الدقيقة؟

(d) ركب طفل العجلة الدوّارة مدة 6 دقائق، فما قياس الزاوية التي دارها الطفل بالراديان؟

126°

1.5 دورة في الدقيقة

$3\pi \text{ rad}$ في الدقيقة

$18\pi \text{ rad}$

(4) كوكب: تدور الأرض دورة كاملة حول محورها في 24 ساعة. ما الزمن الذي تستغرقه حول محورها في 150° ؟ ويدور تيتون دورة كاملة حول محوره في 16 ساعة، فما الزمن الذي يستغرقه ليُدور 150° ؟

(5) ما سرعة العجلة الدوّارة بالدورات في الدقيقة؟

(6) ما سرعة العجلة الدوّارة بالراديان في الدقيقة؟

(7) ركب طفل العجلة الدوّارة مدة 6 دقائق، فما قياس الزاوية التي دارها الطفل بالراديان؟

10 ساعات ; $6\frac{2}{3}$ ساعات

الفصل 8، حساب التفاضل

14

الفصل 8، حساب التفاضل

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

دون دون المتوسط

ضمن **فوق**

دون ضمن فوق

حساب المشتقات

15

170B الفصل 8 حساب المثلثات

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 8-3

إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة.

الدرس 8-3

إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
إيجاد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

ما بعد الدرس 8-3

تمثيل دوال الظل، ظل التمام، القاطع، وقاطع التمام بيانياً.

2 التدريس

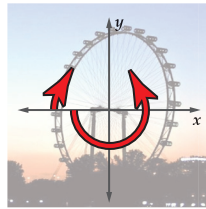
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- في أي ربع تقع الزاوية "20° في اتجاه عقارب الساعة؟" **الربع الرابع**
- في أي ربع تقع الزاوية 200° في عكس اتجاه عقارب الساعة؟ **الربع الثالث**
- كيف يمكن التعبير عن موقع الزاوية التي قياسها 20° في اتجاه عقارب الساعة باستعمال التدوير في عكس اتجاه عقارب الساعة؟

340° عكس اتجاه عقارب الساعة



لماذا؟

تتشعر العجلة الدوارة في كُثريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من 90°.

الدوال المثلثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاويا قياساتها تزيد عن 90° أو تقل عن 0°.

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة.

والآن:

- أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

المفردات:

الزاوية الربعية

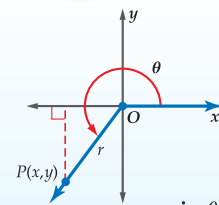
quadrantal angle

الزاوية المرجعية

reference angle

www.obeikaneducation.com

أضف إلى مطبعتك



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} & \tan \theta &= \frac{y}{x}, x \neq 0 \\ \csc \theta &= \frac{r}{y}, y \neq 0 & \sec \theta &= \frac{r}{x}, x \neq 0 & \cot \theta &= \frac{x}{y}, y \neq 0 \end{aligned}$$

الدوال المثلثية للزوايا

لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي وتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

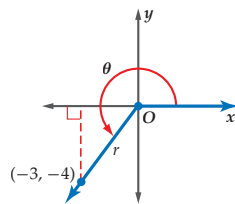
فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

إيجاد قيم الدوال المثلثية بمعلومية نقطة

مثال 1

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-3, -4)$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

الخطوة 1: ارسم الزاوية وأوجد قيمة r .



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

الخطوة 2: استعمل $x = -3, y = -4, r = 5$ لكتابة الدوال المثلثية الست.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} & \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} & \tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \\ \csc \theta &= \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} & \sec \theta &= \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} & \cot \theta &= \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

(1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-6, 2)$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ . **انظر الهامش.**

مصادر الدرس 8-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (174)	• تنويع التعليم، ص (174)	
كتاب التمارين	• ص (23)	• ص (23)	• ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإشرافية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإشرافية، ص (20)

إجابة: (تحقق من فهمك):

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan \theta = -\frac{1}{3}, (1)$$

$$\csc \theta = \sqrt{10}, \sec \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \cot \theta = -3$$

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y ، فإن الزاوية θ تُسمى **زاوية ربعية**.

إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية

قياس أي زاوية ربعية هو من مضاعفات 90° أو $\frac{\pi}{2}$.

الدوال المثلثية للزوايا

مثال 1 يبين كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية بمعرفة نقطة يمر بها ضلع الانتهاء.

مثال 2 يبين كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية الست لزاوية ربعية.

التقويم التكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ

المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(8, -15)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

$$\sin \theta = -\frac{15}{17}; \cos \theta = \frac{8}{17};$$

$$\tan \theta = -\frac{15}{8}; \sec \theta = \frac{17}{8};$$

$$\csc \theta = -\frac{17}{15}; \cot \theta = -\frac{8}{15}$$

2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ

المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(0, -2)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

$$\sin \theta = -1; \cos \theta = 0;$$

$$\tan \theta \text{ غير معرف}$$

$$\csc \theta = -1; \cot \theta = 0;$$

$$\sec \theta \text{ غير معرف}$$

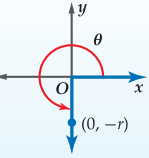
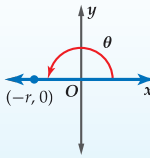
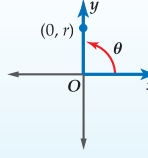
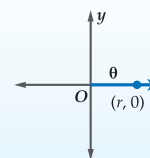
قراءة الرياضيات

الرمز θ'

θ' يقرأ: فيتا شرطة.

مفهوم أساسي الزوايا الربعية

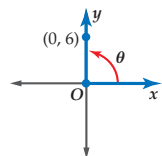
أضف إلى مطوبتك

$\theta = 270^\circ$ $\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ 	$\theta = 180^\circ$ $\theta = \pi \text{ rad}$ 	$\theta = 90^\circ$ $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ 	$\theta = 0^\circ$ $\theta = 0 \text{ rad}$ 
--	---	--	---

مثال 2 الزوايا الربعية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(0, 6)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

تقع النقطة $(0, 6)$ على الجزء الموجب من المحور y ، لذلك فإن قياس الزاوية الربعية θ يساوي 90° . استعمل $x = 0, y = 6, r = 6$ لكتابة الدوال المثلثية.



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$$

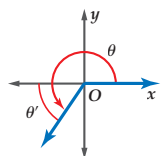
$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{6}{0} \text{ (غير معرف)}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{0} \text{ (غير معرف)}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$$

تحقق من فهمك

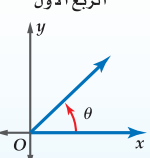
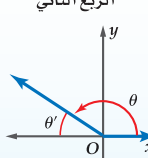
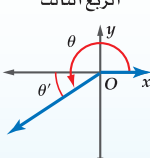
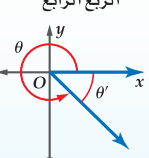
2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-2, 0)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .



الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x . والجدول الآتي يبين قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

مفهوم أساسي الزوايا المرجعية

أضف إلى مطوبتك

الربع الأول  $\theta' = \theta$	الربع الثاني  $\theta' = 180^\circ - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	الربع الثالث  $\theta' = \theta - 180^\circ$ $\theta' = \theta - \pi$	الربع الرابع  $\theta' = 360^\circ - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$
--	---	---	--

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابات الطلبة: اعرض

على الطلبة عددًا من الأمثلة

مثل $\cos 120^\circ, \csc (-35^\circ)$

$(\tan (-165^\circ))$. واسأل إن كانت

قيمة كل من الدوال السابقة موجبة

أم سالبة؟ واطلب إليهم أن يرمزوا

إلى الإجابة الموجبة بالرمز A وإلى

الإجابة السالبة بالرمز B .

تنبيه!

توضيح أخطاء مفاهيمية: في

المثال 1، انتبه إلى الطلبة الذين

يعتقدون أن r يجب أن تكون عددًا

سالبًا إذا كانت x أو y سالبة.

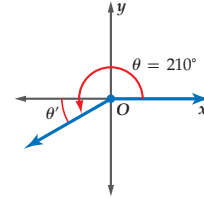
لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من 360° أو أقل من 0° ، استعمل زاوية بقياس موجب محصور بين 0° ، 360° ومشاركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ .

مثال 3

إيجاد الزوايا المرجعية

ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(a) 210°

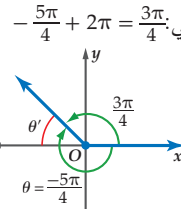


ضلع الانتهاء للزاوية 210° يقع في الربع الثالث.

$$\theta' = \theta - 180^\circ = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$$

(b) $-\frac{5\pi}{4}$

الزاوية المشتركة مع الزاوية $-\frac{5\pi}{4}$ في ضلع الانتهاء



هي: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$

ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني.

$$\theta' = \pi - \theta = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

تحقق من فهمك (3A, 3B) انظر الهامش

ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(3A) -110°

(3B) $\frac{9\pi}{3}$

لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ . يمكن استعمال الزوايا المرجعية وتحدد إشارة كل دالة حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ . وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

مفهوم أساسي

إيجاد قيم الدوال المثلثية

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ' .

الخطوة 3: حدد إشارة قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

يمكن استعمال قيم الدوال المثلثية للزوايا التي قياساتها 30° ، 45° ، 60° التي تعلمتها في الدرس 8-1.

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الجيب	جيب التمام	ظل	قاطع التمام	القاطع	ظل التمام
$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30^\circ = 2$	$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$
$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\csc 45^\circ = \sqrt{2}$	$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$	$\cot 45^\circ = 1$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60^\circ = 2$	$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

الدرس 8-3 الدوال المثلثية للزوايا 173

الزوايا المرجعية

مثال 3 يبين كيفية إيجاد الزاوية المرجعية لزاوية معلومة.

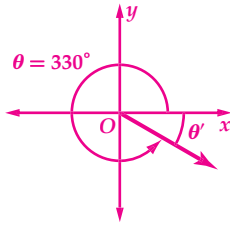
مثال 4 يبين كيفية استعمال الزاوية المرجعية في حساب قيم الدوال المثلثية.

مثال 5 يبين كيفية حل مسائل من واقع الحياة تتعلق بالزوايا المرجعية.

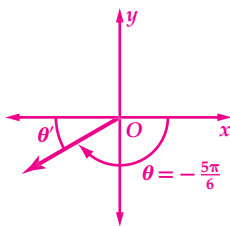
مثال إضافي

ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(a) 330°

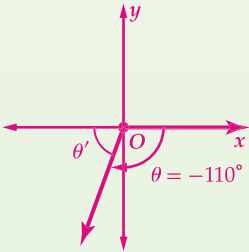


(b) $-\frac{5\pi}{6}$

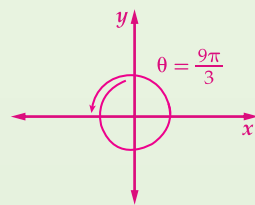


إجابات (تحقق من فهمك)

(3A) 70°



(3B)



إرشادات للدراسة

رسم الزوايا في الوضع القياسي
يمكنك الرجوع إلى الشكل الموجود في ملخص المفهوم في الدرس 8-2 لمساعدتك على رسم الزوايا في الوضع القياسي.

إرشادات للدراسة

لإيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ وقياسها موجب محصور بين 0° ، 360° :
- إذا كانت θ أكبر من 360° ، فاطرح منها 360° أو أحد مضاعفاتها.
- إذا كانت θ أصغر من 0° ، فاضف إليها 360° أو أحد مضاعفاتها.

تنبيه

تجنب الأخطاء: قد يجد بعض الطلبة عند قيامهم بحساب قيم الدوال المثلثية لزاوية ما أنه من المفيد رسم الزاوية في الوضع القياسي، ثم إسقاط عمود على المحور x لتكوين مثلث قائم الزاوية. لذا، يبين لهم أنه كلما زادت قيمة الزاوية من 90° إلى 180° فإن قيمة y تقترب من 0، ويتقارب طول الضلعين الآخرين.

استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالة مثلثية

مثال 4

أوجد قيمة الدالة المثلثية في كل مما يأتي:

(a) $\cos 240^\circ$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية 240° في الربع الثالث.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\theta' = \theta - 180^\circ$

$\theta = 240^\circ = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$

$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

(b) $\csc \frac{5\pi}{6}$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\theta' = \pi - \theta$

$\theta = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$

$= \csc 30^\circ$

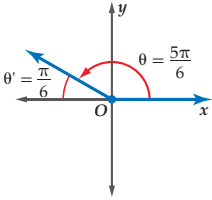
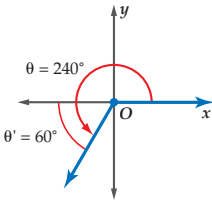
$= 2$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الدالة المثلثية في كل مما يأتي:

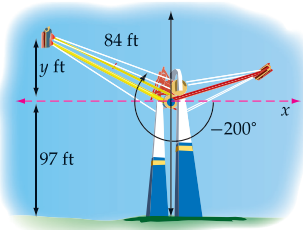
(4B) $-\frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{5\pi}{6}$

(4A) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 135^\circ$



استعمال الدوال المثلثية

مثال 5 من واقع الحياة



أراجع: إذا كان طول كل ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft. أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضح في الشكل.

قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية -200° : $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$

قياس الزاوية المرجعية $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

دالة الجيب $\sin \theta = \frac{y}{r}$

$\theta = 20^\circ, r = 84 \quad \sin 20^\circ = \frac{y}{84}$

بضرب كلا الطرفين في 84 $84 \sin 20^\circ = y$

باستعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة y $28.7 \approx y$

بما أن y تساوي 28.7 تقريباً، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو $28.7 + 97$ ويساوي 125.7 تقريباً.

تحقق من فهمك

(5) **أراجع:** أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذا الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft وقياس زاوية الدوران -195° تقريباً **106.6 ft**



الربط مع الحياة

في بعض أنواع الأراجيح الدوارة يشعر الراكب بانعدام الوزن في لحظة ما، حيث تصل سرعة الأرجوحة إلى 60 ميلاً في الساعة في كلا الاتجاهين.

مثالان إضافيان

4 أوجد قيمة الدالة المثلثية في كل مما يأتي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 135^\circ$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cot \frac{7\pi}{3}$

5 **أراجع:** أوجد الارتفاع لنهاية الذراع الأصفر في المثال 5 إذا كان طول هذا الذراع 89 قدماً وارتفاع محور الدوران 99 قدماً، وقياس زاوية الدوران -200° .

$y = 89 \sin 20^\circ = 30.4$ ft;

$30.4 + 99 = 129.4$ ft

المحتوى الرياضي

الزوايا المرجعية: قُدمت الدوال المثلثية في الدرس 8-1 للزوايا الحادة فقط. وتمكن الزوايا المرجعية من حساب قيم الدوال المثلثية لأي زاوية. علمًا بأن جميع الزوايا المرجعية هي زوايا حادة.

إجابات:

(1) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan \theta = 2, \csc \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sec \theta = \sqrt{5}, \cot \theta = \frac{1}{2}$

(2) $\sin \theta = -\frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}$

$\tan \theta = \frac{15}{8}, \csc \theta = -\frac{17}{15}$

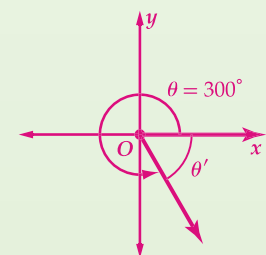
$\sec \theta = -\frac{17}{8}, \cot \theta = \frac{8}{15}$

(3) $\sin \theta = -1, \cos \theta = 0$

$\tan \theta =$ غير معرف, $\csc \theta = -1$

$\sec \theta =$ غير معرف, $\cot \theta = 0$

(4) 60°



تنويع التعليم

دور ضمن

المتعلمون السمعيون: وزع الطلبة في مجموعات صغيرة لابتكار نشيد أو مقطوعة شعرية تساعد زملاءهم على تذكر قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة.

المثالان 1, 2

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بإحدى النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ : (1-3) انظر الهامش.

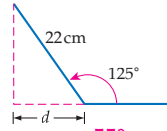
$$(1, 2) \quad (1) \quad (-8, -15) \quad (2) \quad (0, -4) \quad (3)$$

ارسم كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها: (4-6) انظر الهامش.

$$300^\circ \quad (4) \quad 115^\circ \quad (5) \quad -\frac{3\pi}{4} \quad (6)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 300^\circ \quad (10) \quad -2 \sec 120^\circ \quad (9) \quad -\sqrt{3} \tan \frac{5\pi}{3} \quad (8) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{3\pi}{4} \quad (7)$$



(11) تقنية: فتح سعيد حاسوبه المحمول الذي طول شاشته 22 cm فشكّل زاوية قياسها 125° كما هو مبين في الشكل المجاور.

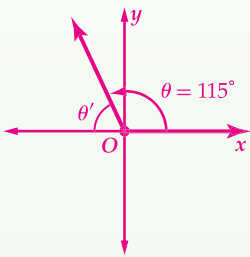
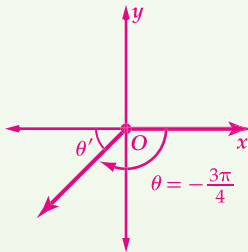
(a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثي بحيث تكون الزاوية 125° مرسومة في الوضع القياسي. انظر ملحق الإجابات.

(b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية 125° ، ثم اكتب دالة مثلثية يمكن استعمالها في إيجاد d .

(c) استعمل هذه الدالة، لإيجاد قيمة d . قَرّب إلى أقرب جزء من عشرة. 12.6 cm

مثال 5

إجابات:

(5) 65° (6) $\frac{\pi}{4}$ 

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13}, \quad (12)$$

$$\tan \theta = \frac{12}{5}, \csc \theta = \frac{13}{12},$$

$$\sec \theta = \frac{13}{5}, \cot \theta = \frac{5}{12}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \quad (13)$$

$$\tan \theta = -\frac{4}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4},$$

$$\sec \theta = -\frac{5}{3}, \cot \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\sin \theta = 0, \cos \theta = 1, \tan \theta = 0, \quad (14)$$

$$\csc \theta \text{ غير معرف}, \sec \theta = 1,$$

$$\cot \theta \text{ غير معرف}$$

$$\sin \theta = -1, \cos \theta = 0, \quad (15)$$

$$\tan \theta \text{ غير معرف}, \csc \theta = -1,$$

$$\sec \theta \text{ غير معرف}, \cot \theta = 0$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad (16)$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{2}, \csc \theta = -\sqrt{5},$$

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cot \theta = -2$$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، يمر بإحدى النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ . (12-17) انظر الهامش.

$$(3, 0) \quad (14) \quad (-6, 8) \quad (13) \quad (5, 12) \quad (12)$$

$$(-9, -3) \quad (17) \quad (4, -2) \quad (16) \quad (0, -7) \quad (15)$$

ارسم كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها. (18-23) انظر ملحق الإجابات.

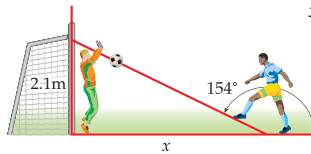
$$-250^\circ \quad (20) \quad 285^\circ \quad (19) \quad 195^\circ \quad (18)$$

$$400^\circ \quad (23) \quad -\frac{\pi}{4} \quad (22) \quad \frac{7\pi}{4} \quad (21)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

$$-\sqrt{2} \csc 225^\circ \quad (27) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 150^\circ \quad (26) \quad -1 \tan 315^\circ \quad (25) \quad -\frac{1}{2} \sin 210^\circ \quad (24)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sec \frac{11\pi}{6} \quad (31) \quad 1 \cot \frac{5\pi}{4} \quad (30) \quad \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{3} \quad (29) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{4\pi}{3} \quad (28)$$



(32) كرة قدم: يركل لاعب كرة قدم الكرة نحو الهدف من مسافة x m عن حارس المرمى كما هو مبين في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض.

(a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية 154° . ثم اكتب دالة مثلثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب

وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة. $26^\circ, \tan 26^\circ = \frac{2.1}{x}$

(b) ما المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟ 4.3 m تقريباً

مثال 5

الدرس 8-3 الدوال المثلثية للزوايا 175

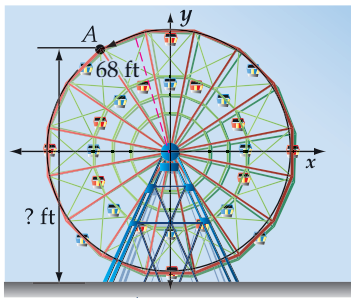
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	45-58, 12-32
ضمن المتوسط	45-58, 13-33 فردي, 34-42 زوجي
فوق المتوسط	33-58

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad (17)$$

$$\tan \theta = \frac{1}{3}, \csc \theta = -\sqrt{10},$$

$$\sec \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \cot \theta = 3$$



(33) عجلات دوارة: في إحدى مدن الألعاب عجلة دوارة طول نصف قطرها 68 ft وترتفع عن سطح الأرض 15 ft. بعد جلوس الشخص في العربة السفلية دارت العجلة بزاوية قياسها 202.5° عكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف. فكم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران؟ **145.8 ft**

افرض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وقد أعطي فيما يأتي قيمة إحدى الدوال المثلثية للزاوية θ والربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها. أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الخمس الأخرى للزاوية θ . **(34-37) انظر الهامش.**

(34) $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، الربع الثاني **(35)** $\tan \theta = -\frac{2}{3}$ ، الربع الرابع

(36) $\cos \theta = -\frac{8}{17}$ ، الربع الثالث **(37)** $\cot \theta = -\frac{12}{5}$ ، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

(38) $0 \cot 270^\circ$ **(39)** $\csc 180^\circ$ غير معرفة **(40)** $-\frac{1}{2} \sin 570^\circ$ **(41)** $-\frac{\sqrt{3}}{3} \tan(-\frac{7\pi}{6})$ **(42)** $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(-\frac{11\pi}{6})$ **(43)** $1 \cot \frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

(44) تحد: الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\tan \theta = -1$. هل من الممكن أن يكون قياس الزاوية θ مساوياً لـ 225° ؟ وضح إجابتك. **انظر الهامش.**

(45) تبرير: حدد إذا كانت المعادلة: $3 \sin 60^\circ = \sin 180^\circ$ صحيحة أم غير صحيحة. وضح إجابتك. **انظر الهامش.**

(46) مسألة مفتوحة: أعط مثلاً على زاوية θ بقياس سالب بحيث: $\sin \theta > 0$ ، $\cos \theta < 0$. **انظر الهامش.**

(47) اكتب: وضح خطوات إيجاد قيمة دالة مثلثية لزاوية قياسها أكبر من 90° . مضمناً ذلك وصفاً للزاوية المرجعية في هذه الخطوات. **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

(48) إذا كان مجموع عددين 21 والفرق بينها 3، فما ناتج ضربهما؟ **108**

(49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + i)^2$ ؟ **D** $35 - 12i$ **C** $36 - i$ **B** $36 - 12i$ **A** $-12i$

مراجعة تراكمية

حوّل قياس كل زاوية مكتوبة بالراديان فيما يأتي إلى الدرجات: **الدرس (8-2)**

(50) 240° **(51)** $\frac{11\pi}{6}$ **(52)** $-\frac{17\pi}{4}$ **(53)** $-\frac{765^\circ}{4}$

حلّ كلّ من المعادلات الآتية علمًا بأن جميع الزوايا حادة: **الدرس (8-1)**

(54) $3 \sin 30^\circ = \frac{b}{6}$ **(55)** $66.0^\circ \tan C = \frac{9}{4}$ **(56)** $40.1^\circ \cos A = \frac{13}{17}$

أوجد قيمة x في كلّ مما يأتي: **الدرس (5-6)**

(57) $9 \frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$ **(58)** $-4 \frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$ **(59)** $6 \frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$

176 الفصل 8 حساب المثلثات

(47) إجابة ممكنة: ارسم الزاوية وحدّد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية. ثم استعمل القاعدة المناسبة لإيجاد قياس زاويتها المرجعية θ . (الزاوية المرجعية هي زاوية حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x). ثم أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ . وأخيرًا استعمل الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.

(45) غير صحيحة؛ لأن:

$3 \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

بينما $\sin 180^\circ = 0$

(46) إجابة ممكنة: $\theta = -200^\circ$

4 التقويم

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلبة إلقاء نظرة على الدرس 8-4 وكتابة تصوراتهم حول ارتباط ما تعلّموه في الدرس الحالي بالفكرة الرئيسة للدرس اللاحق.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدروس من 8-1 إلى 8-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

(34) $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\tan \theta = -\frac{4}{3}$
(35) $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$
(36) $\sin \theta = -\frac{15}{17}$, $\tan \theta = \frac{15}{8}$
(37) $\sin \theta = -\frac{5}{13}$, $\cos \theta = \frac{12}{13}$
(38) $0 \cot 270^\circ$
(39) $\csc 180^\circ$ غير معرفة
(40) $-\frac{1}{2} \sin 570^\circ$
(41) $-\frac{\sqrt{3}}{3} \tan(-\frac{7\pi}{6})$
(42) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(-\frac{11\pi}{6})$
(43) $1 \cot \frac{9\pi}{4}$
(44) $\tan \theta = -1$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(45) $3 \sin 60^\circ = \sin 180^\circ$
(46) $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$
(47) 90°

(44) لا؛ لأن الزاوية المرجعية في هذه الحالة تكون 45° ، وحتى يكون الجيب موجباً والظل سالباً يجب أن تقع الزاوية المرجعية في الربع الثاني، ولذلك فإن قياس الزاوية يجب أن يكون 135° أو أية زاوية لها ضلع الانتهاء نفسه.

(45) غير صحيحة؛ لأن:
 $3 \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
بينما $\sin 180^\circ = 0$
(46) إجابة ممكنة: $\theta = -200^\circ$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 8

دون	دون المتوسط	ضمن	فوق	فوق المتوسط
تدريبات إعادة التعليم (16)	تدريبات إعادة التعليم (17)	تدريبات حل المسألة (19)	تدريبات المهارات (18)	تدريبات حل المسألة (19)
الاسم: _____ التاريخ: _____ 8-3 تدريبات إعادة التعليم الدوال المثلثية لتزوايا الدوال المثلثية لتزوايا θ تكون مرسومة في الوضع القياسي، ولكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء في الوضع القياسي. باستعمال نظرية فيثاغورس، يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P. تكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي: $\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$ $\csc \theta = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0, \quad \sec \theta = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$ مثال: إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-5, 5\sqrt{2})$، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ. نظرية فيثاغورس: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 + 50} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ استعمل قيم: $x = -5, y = 5\sqrt{2}, r = 5\sqrt{3}$ لكتابة قيم الدوال المثلثية الست. $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{2}}{-5} = -\sqrt{2}$ $\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{-5} = -\sqrt{3}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ تعاين أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ علماً بأن ضلع الانتهاء للزاوية θ يمر بالنقطة المعطاة في كل ما يأتي: (4, 4) (2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1, \csc \theta = \sqrt{2}, \sec \theta = \sqrt{2}, \cot \theta = 1$ (6, 2) (4) $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan \theta = \frac{1}{3}, \csc \theta = \sqrt{10}, \sec \theta = \frac{\sqrt{10}}{3}, \cot \theta = 3$ (4, 4) (3) $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan \theta = \frac{1}{2}, \csc \theta = \sqrt{5}, \sec \theta = \frac{5}{2}, \cot \theta = 2$ (0, 4) (3) $\sin \theta = 1, \cos \theta = 0, \tan \theta$ (غير معرفة), $\csc \theta = 1, \sec \theta$ (غير معرفة), $\cot \theta = 0$ الفصل 8، حساب المثلثات	الاسم: _____ التاريخ: _____ 8-3 تدريبات إعادة التعليم الدوال المثلثية لتزوايا الدوال المثلثية لتزوايا θ تكون مرسومة في الوضع القياسي، ولكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء في الوضع القياسي. باستعمال نظرية فيثاغورس، يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P. تكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي: $\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$ $\csc \theta = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0, \quad \sec \theta = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$ مثال: إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-5, 5\sqrt{2})$، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ. نظرية فيثاغورس: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 + 50} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ استعمل قيم: $x = -5, y = 5\sqrt{2}, r = 5\sqrt{3}$ لكتابة قيم الدوال المثلثية الست. $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{2}}{-5} = -\sqrt{2}$ $\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{-5} = -\sqrt{3}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ تعاين أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ علماً بأن ضلع الانتهاء للزاوية θ يمر بالنقطة المعطاة في كل ما يأتي: (4, 4) (2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1, \csc \theta = \sqrt{2}, \sec \theta = \sqrt{2}, \cot \theta = 1$ (6, 2) (4) $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan \theta = \frac{1}{3}, \csc \theta = \sqrt{10}, \sec \theta = \frac{\sqrt{10}}{3}, \cot \theta = 3$ (4, 4) (3) $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan \theta = \frac{1}{2}, \csc \theta = \sqrt{5}, \sec \theta = \frac{5}{2}, \cot \theta = 2$ (0, 4) (3) $\sin \theta = 1, \cos \theta = 0, \tan \theta$ (غير معرفة), $\csc \theta = 1, \sec \theta$ (غير معرفة), $\cot \theta = 0$ الفصل 8، حساب المثلثات	الاسم: _____ التاريخ: _____ 8-3 تدريبات حل المسألة الدوال المثلثية لتزوايا 1. أجهزة لاسلكية، جهاز إرسال واستقبال لاسلكيان، يبعد كل منهما 2 km عن خيم. وقياس الزاوية المحصورة بين الخطين الواصلين من الجهازين إلى المخيم 120°. إذا كانت النقطة (2, 0) تمثل موقع الجهاز الأول بالنسبة للمخيم، فما النقطة التي تمثل موقع الجهاز الثاني بالنسبة للمخيم؟ 2. ساعات، إذا كان يتدول ساعة حائط يتحرك دهاً إلى يميناً على قوس دائري، علماً بأن قياس الزاوية التي يصنعها يتدول يُعبر عنه بالعلاقة $\theta = 0.3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5t\right)$، حيث t: الزمن بالساعات. أوجد قياسات الزوايا بالزوايا المقابلة لقيم t: 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3. 3. عجلة دوارة، ركب وليد عجلة دوارة، نصف قطرها 60 m، وارتفاع أخفض عربة عن الأرض فيها 5 m. إذا تحركت العجلة عندما كان وليد في أخفض عربة، ودار بزاوية مقداره 210.5°، ثم توقفت العجلة. فكم كان ارتفاع عربة وليد عن الأرض عندما توقفت؟ 4. كرة قدم، ركل لاعب كرة قدم الكرة في اتجاه حائط، فارتدت الكرة عنه بزاوية قياسها 40° ما بعد الكرة عن الحائط عندما قُطعت 6 m في مسار ارتدادها؟ 5. طائرة ورقية، المادلة: $R = 15 \cos \theta + 32 \sin \theta$ تُعبر عن المسافة التي تقطعها طائرة ورقية عند قذفها بسرعة ابتدائية V_0 قدم/ثانية بزاوية قياسها θ مع الأرض. 6. قذفت طائرة ورقية بسرعة ابتدائية قدرها 10 أقدام / ثانية لكل منها، إحداها بزاوية قياسها 15° والآخرى بزاوية قياسها 45°. فأيتهما ستقطع مسافة أكبر من الأخرى؟ 7. الطائرة التي قُذفت بزاوية قياسها 15°. الفصل 8، حساب المثلثات	الاسم: _____ التاريخ: _____ 8-3 تدريبات المهارات الدوال المثلثية لتزوايا إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، يمر بالنقطة المعطاة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل ما يأتي: (3, 4) (2) $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}$ (-4, 3) (4) $\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}, \csc \theta = \frac{5}{3}, \sec \theta = -\frac{5}{4}, \cot \theta = -\frac{4}{3}$ (1, 2) (6) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \tan \theta = 2, \csc \theta = \frac{5}{2\sqrt{5}}, \sec \theta = \sqrt{5}, \cot \theta = \frac{1}{2}$ (-8, 12) (8) $\sin \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \tan \theta = -\frac{3}{2}, \csc \theta = \frac{13}{3\sqrt{13}}, \sec \theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \cot \theta = -\frac{2}{3}$ (8, -15) (3) $\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = \frac{8}{17}, \tan \theta = \frac{15}{8}, \csc \theta = \frac{17}{15}, \sec \theta = \frac{17}{8}, \cot \theta = \frac{8}{15}$ (-9, -40) (5) $\sin \theta = -\frac{40}{41}, \cos \theta = -\frac{9}{41}, \tan \theta = \frac{40}{9}, \csc \theta = -\frac{41}{40}, \sec \theta = -\frac{41}{9}, \cot \theta = \frac{9}{40}$ (3, -9) (7) $\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \tan \theta = 3, \csc \theta = \frac{10}{3\sqrt{10}}, \sec \theta = \sqrt{10}, \cot \theta = \frac{1}{3}$ أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ علماً بأن ضلع الانتهاء للزاوية θ يمر بالنقطة المعطاة في كل ما يأتي: (10) 200° $\sin 200^\circ, \cos 200^\circ, \tan 200^\circ, \csc 200^\circ, \sec 200^\circ, \cot 200^\circ$ (11) $\frac{5\pi}{3}$ $\sin \frac{5\pi}{3}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{3}, \csc \frac{5\pi}{3}, \sec \frac{5\pi}{3}, \cot \frac{5\pi}{3}$ (12) 150° $\sin 150^\circ, \cos 150^\circ, \tan 150^\circ, \csc 150^\circ, \sec 150^\circ, \cot 150^\circ$ (13) 270° $\sin 270^\circ, \cos 270^\circ, \tan 270^\circ, \csc 270^\circ, \sec 270^\circ, \cot 270^\circ$ (14) 135° $\sin 135^\circ, \cos 135^\circ, \tan 135^\circ, \csc 135^\circ, \sec 135^\circ, \cot 135^\circ$ (15) -30° $\sin(-30^\circ), \cos(-30^\circ), \tan(-30^\circ), \csc(-30^\circ), \sec(-30^\circ), \cot(-30^\circ)$ (16) $\frac{\pi}{4}$ $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}, \tan \frac{\pi}{4}, \csc \frac{\pi}{4}, \sec \frac{\pi}{4}, \cot \frac{\pi}{4}$ (17) $\frac{4\pi}{3}$ $\sin \frac{4\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3}, \tan \frac{4\pi}{3}, \csc \frac{4\pi}{3}, \sec \frac{4\pi}{3}, \cot \frac{4\pi}{3}$ (18) $(-\pi)$ $\sin(-\pi), \cos(-\pi), \tan(-\pi), \csc(-\pi), \sec(-\pi), \cot(-\pi)$ (19) $-\frac{3\pi}{4}$ $\sin(-\frac{3\pi}{4}), \cos(-\frac{3\pi}{4}), \tan(-\frac{3\pi}{4}), \csc(-\frac{3\pi}{4}), \sec(-\frac{3\pi}{4}), \cot(-\frac{3\pi}{4})$ (20) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}), \cos(-\frac{\sqrt{2}}{2}), \tan(-\frac{\sqrt{2}}{2}), \csc(-\frac{\sqrt{2}}{2}), \sec(-\frac{\sqrt{2}}{2}), \cot(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ الفصل 8، حساب المثلثات	الاسم: _____ التاريخ: _____ 8-3 تدريبات حل المسألة الدوال المثلثية لتزوايا 1. أجهزة لاسلكية، جهاز إرسال واستقبال لاسلكيان، يبعد كل منهما 2 km عن خيم. وقياس الزاوية المحصورة بين الخطين الواصلين من الجهازين إلى المخيم 120°. إذا كانت النقطة (2, 0) تمثل موقع الجهاز الأول بالنسبة للمخيم، فما النقطة التي تمثل موقع الجهاز الثاني بالنسبة للمخيم؟ 2. ساعات، إذا كان يتدول ساعة حائط يتحرك دهاً إلى يميناً على قوس دائري، علماً بأن قياس الزاوية التي يصنعها يتدول يُعبر عنه بالعلاقة $\theta = 0.3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5t\right)$، حيث t: الزمن بالساعات. أوجد قياسات الزوايا بالزوايا المقابلة لقيم t: 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3. 3. عجلة دوارة، ركب وليد عجلة دوارة، نصف قطرها 60 m، وارتفاع أخفض عربة عن الأرض فيها 5 m. إذا تحركت العجلة عندما كان وليد في أخفض عربة، ودار بزاوية مقداره 210.5°، ثم توقفت العجلة. فكم كان ارتفاع عربة وليد عن الأرض عندما توقفت؟ 4. كرة قدم، ركل لاعب كرة قدم الكرة في اتجاه حائط، فارتدت الكرة عنه بزاوية قياسها 40° ما بعد الكرة عن الحائط عندما قُطعت 6 m في مسار ارتدادها؟ 5. طائرة ورقية، المادلة: $R = 15 \cos \theta + 32 \sin \theta$ تُعبر عن المسافة التي تقطعها طائرة ورقية عند قذفها بسرعة ابتدائية V_0 قدم/ثانية بزاوية قياسها θ مع الأرض. 6. قذفت طائرة ورقية بسرعة ابتدائية قدرها 10 أقدام / ثانية لكل منها، إحداها بزاوية قياسها 15° والآخرى بزاوية قياسها 45°. فأيتهما ستقطع مسافة أكبر من الأخرى؟ 7. الطائرة التي قُذفت بزاوية قياسها 15°. الفصل 8، حساب المثلثات



مصادر الدرس 3 - 8

فوق فوق المتوسط

ضمن **فوق**

دون ضمن فوق

8-3

$(-2, -3)\mathbf{B}$	$(-20, 21)\mathbf{B}$	$(6, 8)\mathbf{B}$
$\sin \theta = -\frac{5\sqrt{29}}{29}, \cos \theta = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$	$\sin \theta = \frac{21}{29}, \cos \theta = -\frac{20}{29}$	$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}$
$\tan \theta = \frac{5}{2}, \csc \theta = -\frac{\sqrt{29}}{5}$	$\tan \theta = -\frac{21}{20}, \csc \theta = \frac{29}{21}$	$\tan \theta = \frac{4}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4}$
$\sec \theta = -\frac{\sqrt{29}}{2}, \cot \theta = \frac{5}{2}$	$\sec \theta = -\frac{29}{20}, \cot \theta = -\frac{20}{21}$	$\sec \theta = \frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}$

$$30^\circ - 210^\circ \quad (5) \qquad \frac{3\pi}{8} - \frac{13\pi}{8} \quad (6)$$

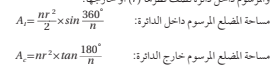
$$\begin{array}{llll} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 405^\circ & (10) & 0 \cot (-90^\circ) & (9) \quad \sqrt{3} \cot 210^\circ & (8) \quad -1 \tan 135^\circ & (7) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{13\pi}{6} & (14) & \text{غير معرفة} \cot 2\pi & (13) & -\sqrt{2} \csc \left(-\frac{3\pi}{4}\right) & (12) & -\sqrt{3} \tan \frac{5\pi}{3} & (11) \end{array}$$

وكانت $\sin \theta_1 = n \sin \theta_2$ وكانت $n = \sqrt{3}$, $\theta_1 = 60^\circ$ فأوجد قياس الزاوية θ_2 . 30°

23

8-3 التدريبات الإثرائية

المضلع المنتظم هو مضلع أطوال أضلاعه متساوية، وقياسات زواياه متساوية، ويمكن رسم المضلع المنتظم داخل دائرة ويمكن رسم دائرة بداخله. ويمكن استعمال الصيغتين الآتيتين لحساب مساحة المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه (n) ، والمرسوم داخل دائرة نصف قطرها (r) أو خارجها:



عدد	مساحة المضلع	مساحة الدائرة	مساحة المضلع	مساحة المضلع الخارجي
-----	--------------	---------------	--------------	----------------------

(1

 π

الصف: الثاني الثانوي

ملاحظات المعلم

1 التركيز

التربط الرأسى

ما قبل الدرس 8-4

إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية، وقياسات زواياها.

الدرس 8-4

إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

استعمال قانون الجيوب في حل المثلثات.

ما بعد الدرس 8-4

استعمال قانون جيوب التمام في حل المثلثات.

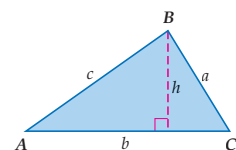
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

وسائل:

- ما قياس الزاوية المقابلة للضلع الواصل بين الفوهتين واهو ونوكان؟ وبين واهو واباش؟ $102^\circ; 23^\circ$
- ما قياس الزاوية المقابلة للضلع الواصل بين واباش ونوكان؟ 55°
- ما المسافة بين الفوهتين واهو وواباش؟ 1.2 km
- أي فوهة تقع على رأس الزاوية الكبرى؟ واباش



إيجاد مساحة المثلث: في المثلث المجاور

$$\sin A = \frac{h}{c} \text{ أي } h = c \sin A$$

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bh$$

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}b(c \sin A)$$

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A$$

يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلث، إذا كان معلوماً لديك طولاً أي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

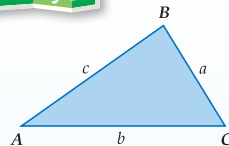
أضف إلى

مطوبتك

مساحة المثلث

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.



$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ab \sin C \quad \text{المساحة} = \frac{1}{2}ac \sin B \quad \text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A$$

الرموز:

إيجاد مساحة مثلث

مثال 1

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104^\circ$

$$\begin{aligned} \text{المساحة} &= \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104^\circ \\ &\approx 34.9 \end{aligned}$$

إذن المساحة تساوي 34.9 cm^2 تقريباً

تحقق من فهمك

102.0 m^2

1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31^\circ, b = 18 \text{ m}, c = 22 \text{ m}$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

مصادر الدرس 8-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (180)	• تنويع التعليم، ص (180, 183)	• تنويع التعليم، ص (180, 183)
كتاب التمارين	• ص (24)	• ص (24)	• ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإفرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإفرائية، ص (25)

استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات: يمكن استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يبين العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

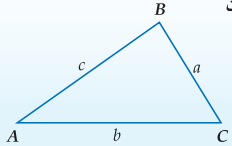
بضرب كل عبارة في 2 $bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$

$$\text{بقسمة كل عبارة على } abc \quad \frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

مفهوم أساسي **قانون الجيوب**

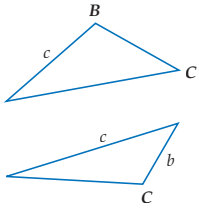
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$


حل المثلث يعني استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه.

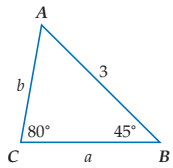
ويمكن استعمال قانون الجيوب لحل المثلث في الحالات الآتية:

- معرفة قياسي زاويتين في المثلث وطول أي ضلع فيه (زاوية - زاوية - ضلع (حالة AAS)، أو زاوية - ضلع - زاوية (حالة ASA))



- معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (ضلع - ضلع - زاوية (حالة SSA))

مثال 2 حل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه



$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{b} = \frac{\sin 80^\circ}{3}$$

$$b = \frac{3 \sin 45^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$b \approx 2.2$$

قانون الجيوب

بالتعويض

بالحل بالنسبة لكل متغير

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 55^\circ}{a} = \frac{\sin 80^\circ}{3}$$

$$a = \frac{3 \sin 55^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$a \approx 2.5$$

إذن، $A = 55^\circ, a \approx 2.5, b \approx 2.2$

$$N = 73^\circ, p \approx 3.5, q \approx 4.7$$

(2) حل $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42^\circ, Q = 65^\circ, n = 5$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكن استعمال العلاقاتين الآتيتين لحل المثلث في المثال 2.

$$\frac{a}{\sin 55^\circ} = \frac{3}{\sin 80^\circ}$$

$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 80^\circ}$$

إيجاد مساحة المثلث

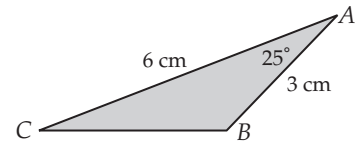
المثال 1 يبين كيفية إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. 3.8 cm^2



استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات

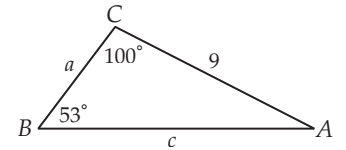
مثال 2 يبين كيفية استعمال قانون الجيوب لحل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه.

مثال 3 يبين كيفية تحديد عدد حلول مثلث، ثم استعمال قانون الجيوب لإيجاد الحلول.

مثال 4 يبين كيفية استعمال قانون الجيوب لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

حل $\triangle ABC$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.



$$A = 27^\circ, a \approx 5.1, c \approx 11.1$$

تنبيه

توضيح أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن قانون الجيوب يستعمل لحل المثلثات القائمة الزاوية فقط. لذا، وضح لهم أن هذا القانون يصلح لحل أي مثلث، ومثله قانون جيوب التمام الذي سيدرسونه في الدرس القادم 5-8.

الحالة التي يكون للمثلث فيها حلان تسمى الحالة المبهمة.

في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة. الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بُعد من C إلى AB عندما تكون الزاوية A حادة.

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

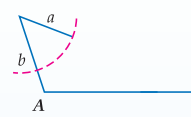
$$\sin A = \frac{h}{b}$$

إذا كان معلومًا لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع فإنه يوجد مثلث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلث حل، أو له حل واحد، أو له حلان.

مفهوم أساسي

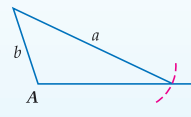
المثلثات الممكنة في حالة (SSA)

افترض مثلثًا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

 $\angle A$ قائمة أو منفرجة

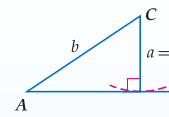
$$a \leq b$$

لا يوجد حل



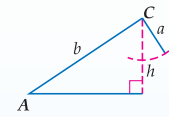
$$a > b$$

حل واحد

 $\angle A$ حادة

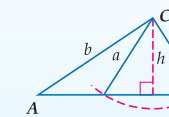
$$a = h$$

حل واحد



$$a < h$$

لا يوجد حل



$$h < a < b$$

حلان

بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$ ، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلثات الحادة الزوايا.

مثال 3

حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربًا أطول الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105^\circ, r = 9, s = 6$

بما أن $\angle R$ منفرجة، و $9 > 6$ ، نستنتج أن للمثلث حلًا واحدًا.

الخطوة 1: ابدأ برسم المثلث، ثم استعمال قانون الجيوب لإيجاد $m\angle S$.

قانون الجيوب

$$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105^\circ}{9}$$

بضرب كلا الطرفين في 6

$$\sin S = \frac{6 \sin 105^\circ}{9}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\sin S \approx 0.6440$$

بإيجاد قيمة $\sin^{-1} 0.6440$ ، والزاوية S حادة

$$S \approx 40^\circ$$

الخطوة 2: أوجد $m\angle T$

$$m\angle T \approx 180 - (105 + 40) \approx 35^\circ$$

الخطوة 3: استعمال قانون الجيوب لإيجاد قيمة t .

قانون الجيوب

$$\frac{\sin 35^\circ}{t} \approx \frac{\sin 105^\circ}{9}$$

بالحل بالنسبة t

$$t \approx \frac{9 \sin 35^\circ}{\sin 105^\circ}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$t \approx 5.3$$

إذن: $S \approx 40^\circ, T \approx 35^\circ, t \approx 5.3$

مثال إضافي

3

حدد إذا كان لكل مثلث فيما يأتي حل واحد أم حلان أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(a) $\triangle NPQ$ فيه

$$Q = 110^\circ, q = 11, n = 8$$

$$P = 27^\circ, N = 43^\circ, p = 5.3$$

(b) $\triangle DEF$ فيه

$$E = 52^\circ, e = 5, f = 9$$

ليس له حل.

(c) $\triangle XYZ$ فيه

$$X = 28^\circ, z = 15, x = 9$$

الحل الأول هو:

$$Z = 51^\circ, Y = 101^\circ, y = 18.8$$

والحل الثاني هو:

$$Z = 129^\circ, Y = 23^\circ, y = 7.5$$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمال

السبورة لتوضيح الحالة التي يكون للمثلث فيها حلان عند استعمال قانون الجيوب. واستعمل برنامج الرسم لرسم الضلعين المعطى طولاهما والزاوية المعلومة بدقة. وارسم أحد الأوضاع الممكنة للضلع الثالث للمثلث، ثم حرك القطعة المستقيمة التي تمثلها لتوضيح كيفية رسم المثلث الآخر الممكن.

إرشادات للمعلم الجديد

نبه الطلبة إلى أنه إذا بدأ الطالب باستخدام قانون الجيب لحل مثلث ليس له حل فسيجد أن جيب إحدى الزوايا أكبر من واحد، وذلك يجعل الحل مستحيلًا.

المحتوى الرياضي

قانون الجيوب: يمكن أن يوجد في إحدى حالات استعمال قانون الجيوب، أكثر من حل للمثلث. وفي مثل هذه الحالة يجب القيام بخطوات الحل مرتين.

إرشادات للدراسة

حلان:

في الفرع C، بما أن $\angle A < \angle b$ فإن للمثلث حلين أحدهما عندما تكون الزاوية B حادة، والآخر عندما تكون الزاوية B منفرجة (مكملة للزاوية الحادة في الحل الأول).

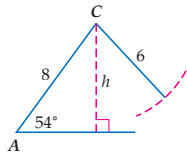
إرشادات للدراسة

الزاوية المرجعية

في الحالة الثانية استعملت زاوية مرجعية قياسها 42° لإيجاد القياس الآخر للزاوية B.

حلان:

$B \approx 61^\circ, C \approx 72^\circ, c \approx 19.5;$
 $B \approx 119^\circ, C \approx 14^\circ, c \approx 5.0$



(b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54^\circ, a = 6, b = 8$.

بما أن $\angle A$ حادة، و $6 < 8$ ، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a .

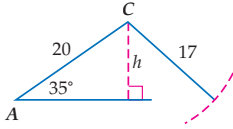
$$b = 8, A = 54^\circ$$

$$h = b \sin A = 8 \sin 54^\circ$$

$$\approx 6.5$$

باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن $6 < 6.5$ أو $6 < a < h$ فلا يوجد للمثلث حل.



(c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35^\circ, a = 17, b = 20$.

بما أن $\angle A$ حادة، و $17 < 20$ ، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a .

$$b = 20, A = 35^\circ$$

$$h = b \sin A = 20 \sin 35^\circ$$

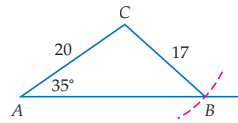
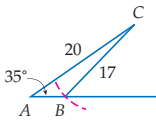
$$\approx 11.5$$

باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن $17 < 20$ أو $11.5 < a < b$ فإن للمثلث حلين وبالتالي هناك مثلثان يطلب حلّهما.

الحالة 1: $\angle B$ حادة.

الحالة 2: $\angle B$ منفرجة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قيمة دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا أوجد زاوية منفرجة B بحيث $\sin B \approx 0.6748$.

$$m\angle B \approx 180^\circ - 42^\circ \approx 138^\circ$$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (35^\circ + 138^\circ) \approx 7^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قيمة c.

$$\frac{\sin 7^\circ}{c} \approx \frac{\sin 35^\circ}{17}$$

$$c \approx \frac{17 \sin 7^\circ}{\sin 35^\circ}$$

بالنسبة لـ c بالتبسيط $c \approx 3.6$

$$\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35^\circ}{17}$$

$$\sin B = \frac{20 \sin 35^\circ}{17}$$

باستعمال الآلة الحاسبة $\sin B \approx 0.6748$

بإيجاد قيمة $\sin^{-1} 0.6748$ $B \approx 42^\circ$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (35^\circ + 42^\circ) \approx 103^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قيمة c.

$$\frac{\sin 103^\circ}{c} \approx \frac{\sin 35^\circ}{17}$$

$$c \approx \frac{17 \sin 103^\circ}{\sin 35^\circ}$$

بالنسبة لـ c بالتبسيط $c \approx 28.9$

لذا فإن أحد الحلين هو: $B \approx 42^\circ, C \approx 103^\circ, c \approx 28.9$ ، والحل الثاني هو: $B \approx 138^\circ, C \approx 7^\circ, c \approx 3.6$.

تحقق من فهمك

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95^\circ, r = 10, s = 12$ ليس له حل

(3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32^\circ, n = 7, p = 4$ حل واحد، $P \approx 18^\circ, M \approx 130^\circ, m \approx 10.1$

(3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47^\circ, a = 15, b = 18$

تنويع التعليم

دون ضمن هوف

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلبة كتابة مقالة حول المثلث الذي وجدوا أنه يتحدى قدراتهم على نحو كبير، والسبب في ذلك. واطلب إليهم أن يضمّنوا مقالاتهم جميع الأسئلة والاستفسارات لديهم حول الدرس.

استعمال قانون الجيوب لحل مسألة

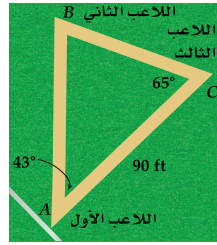
مثال 4 من واقع الحياة



الربط مع الحياة

يتراوح طول ملعب كرة القدم بين 90m-120m وعرضه بين 45m-90m. ومن الملاعب الرئيسية في المملكة العربية السعودية استاد الملك فهد الدولي بالرياض الذي يتسع لـ 75 ألف متفرج.

كرة قدم: يُمثّل الشكل المجاور ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.



$$\begin{aligned} \angle B &= 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 72^\circ \\ \frac{\sin 72^\circ}{90} &= \frac{\sin 43^\circ}{x} \\ x \sin 72^\circ &= 90 \sin 43^\circ \\ x &= \frac{90 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ} \\ x &\approx 64.5 \end{aligned}$$

إذن المسافة بين اللاعبين تساوي 64.5 تقريبًا.

تحقق من فهمك

(4) أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني. **85.8 ft**

مثال إضافي

كرة قدم: افترض في المثال 4 أن قياس الزاوية عند اللاعب الثالث 58° ، وعند اللاعب الأول 41° . فكم تكون المسافة بين اللاعبين الثاني والثالث؟ **59.8 ft تقريبًا**

تأكد

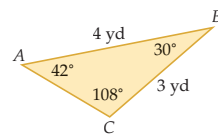
3 التدريب

التقويم التكويني:

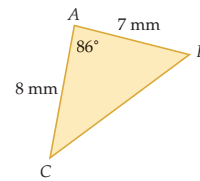
استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

3 yd²

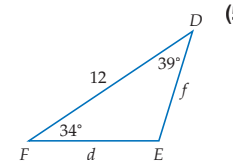
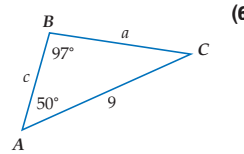


27.9 mm²



(3) 21.2 cm^2 $A = 40^\circ, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$ (4) 175.4 in^2 $B = 103^\circ, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in}$

(في الأسئلة 5-7)، حل كل مثلث. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:



(7) $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 80^\circ, H = 40^\circ, g = 14$. $F = 60^\circ, f \approx 12.3, h \approx 9.1$

حدد إن كان للمثلث ABC في كلٍّ مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(8) $A = 95^\circ, a = 19, b = 12$ حل واحد: $B \approx 39^\circ, C \approx 46^\circ, c \approx 13.7$

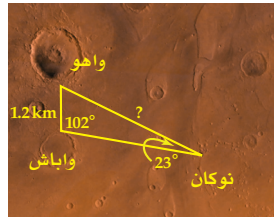
(9) $A = 60^\circ, a = 15, b = 24$ لا يوجد حل

(10) $A = 34^\circ, a = 8, b = 13$

(11) $A = 30^\circ, a = 3, b = 6$

(12) **فضاء:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد

المسافة بين فوهة واهو وفوهة نوكان. **3 km تقريبًا**

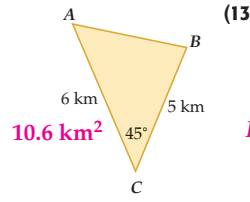
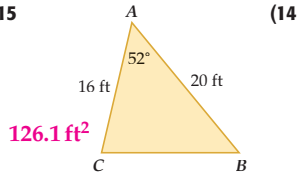
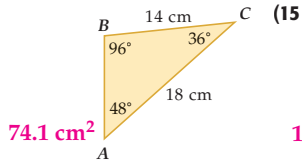


الدرس 8-4 قانون الجيوب 181

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	40-54 ، 38 ، 13-36
ضمن المتوسط	40-54 ، 38 ، 13-37 فردي
فوق المتوسط	37-54

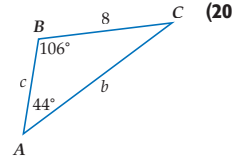
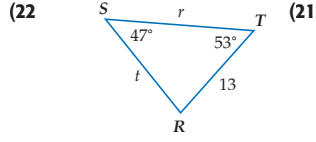
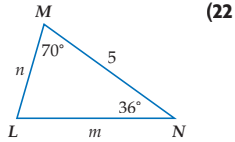
مثال 1 (في الأسئلة 13-19)، أوجد مساحة كل من المثلثات الآتية إلى أقرب جزء من عشرة:



- (20) $C = 30^\circ, b \approx 11.1, c \approx 5.8$
 (21) $R = 80^\circ, r \approx 17.5, t \approx 14.2$
 (22) $L = 74^\circ, m \approx 4.9, n \approx 3.1$

- (16) 5.9 ft^2 $C = 25^\circ, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$
 (17) 66.9 in^2 $A = 138^\circ, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$
 (18) 65.2 m^2 $B = 92^\circ, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$
 (19) 5.6 cm^2 $C = 116^\circ, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$

مثال 2 (في الأسئلة 20-26)، حُل كل مثلث. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



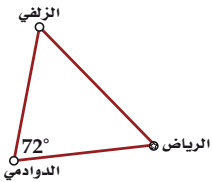
- (27) حل واحد: $B \approx 25^\circ, C \approx 55^\circ, c \approx 5.8$
 (28) حل واحد: $B \approx 49^\circ, C \approx 56^\circ, c \approx 12.0$
 (29) حل واحد: $B \approx 32^\circ, C \approx 110^\circ, c \approx 32.1$
 (31) حلان: $B \approx 53^\circ, C \approx 85^\circ, c \approx 7.4$;
 $B \approx 127^\circ, C \approx 11^\circ, c \approx 1.4$

مثال 3

- (32) حلان: $B \approx 71^\circ, C \approx 65^\circ, c \approx 18.3$;
 $B \approx 109^\circ, C \approx 27^\circ, c \approx 9.1$
 (34) حل واحد: $B = 90^\circ, C = 60^\circ, c \approx 29.4$

حدد إن كان للمثلث ABC في كل مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

- (28) $A = 75^\circ, a = 14, b = 11$
 (29) $A = 100^\circ, a = 7, b = 3$
 (30) ليس له حل $A = 52^\circ, a = 9, b = 20$
 (31) $A = 38^\circ, a = 21, b = 18$
 (32) $A = 44^\circ, a = 14, b = 19$
 (33) ليس له حل $A = 42^\circ, a = 5, b = 6$
 (34) $A = 30^\circ, a = 17, b = 34$
 (35) ليس له حل $A = 131^\circ, a = 15, b = 32$



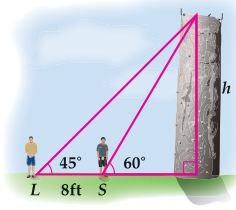
جغرافياً: في الشكل المجاورة ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثاً. إذا كانت المسافة بين الرياض والدوادمي 236 km، وبين الرياض والزلفي 262 km، وقياس الزاوية عند الدوادمي 72° .

- (35) أوجد قياس الزاوية عند مدينة الرياض. انظر الهامش
 (36) أوجد المسافة بين الزلفي والدوادمي. انظر الهامش

مثال 4

إجابات:

- (35) 49° تقريباً
 (36) 208 km تقريباً



(37) **تسلق:** يقف خالد وسعيد أمام جدار صخري للتسلق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبين في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري؟
قرب إلى أقرب قدم. **19.0 ft**

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يتعين على الطلبة في السؤال 38 أن يلاحظوا أن رضوان استعمل الآلة الحاسبة بشكل صحيح.

$$\sin T = \frac{12 \cdot \sin 56^\circ}{24} = \frac{(12)(0.8290)}{24} \approx 0.4145$$

لذا فإن $T \approx 24.5^\circ$. أما علي فقد أخطأ؛ لأن الحالة التي لا يكون للمثلث حل عندها هي عندما يكون طول الضلع المقابل للزاوية θ أقل من حاصل ضرب $\sin \theta$ في طول الضلع المجاور للزاوية θ .

مسائل مهارات التفكير العليا

(38) **اكتشف الخطأ:** في $\triangle RST$ فيه: $R = 56^\circ$, $r = 24$, $t = 12$. فإذا حاول كلٌّ من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$. فمن منهما إجابهته صحيحة؟ وضع إجابتك. **رضوان، R زاوية حادة، و $r > t$ ، لذلك فإن للمثلث حل واحد**

علي

بها أن $t > r$ لا يوجد للمثلث حل.

رضوان

$$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56^\circ}{24}$$

$$\sin T \approx 0.4145$$

$$T \approx 24.5^\circ$$

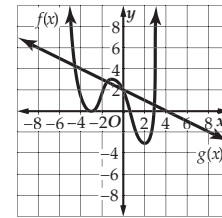
(39) **تبرير:** أوجد أطوال أضلاع مثلثين مختلفين ABC ، بحيث يكون في كلٍّ منها $A = 55^\circ$, $C = 20^\circ$. **انظر الهامش**

(40) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت $d = 38$, $R = 62^\circ$, فأوجد قيمة r ، بحيث لا يوجد للمثلث DRF حل عندها. ووضح إجابتك. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

(42) إذا كان أحد أصفار الدالة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ ، فأَيُّ مما يأتي يُمثِّل تحليلاً للعلاقة: **B**

- A $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
B $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$
C $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$
D $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$



(41) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من $f(x)$, $g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$? **2**

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلبة كتابة الخطوات الضرورية لحل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياس زاويتين فيه.

إجابات:

(39) **إجابة ممكنة:**

$$a = 12, b \approx 14.2, c = 5.0$$

$$a = 6, b \approx 7.1, c \approx 2.5$$

(40) **إجابة ممكنة:** $r = 30$ ، يجب أن يكون طول الضلع المقابل للزاوية R أقل من طول الارتفاع 33.6 حسب قانون الجيوب.

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي: (الدرس 3-8)

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cot 60^\circ \quad (45)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{3}{4} \pi \quad (44)$$

$$-\frac{1}{2} \sin 210^\circ \quad (43)$$

في كلٍّ مما يأتي أوجد زاويتين إحدهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة: (الدرس 2-8)

$$\frac{8}{3} \pi, -\frac{4}{3} \pi \quad (48)$$

$$328^\circ, -392^\circ \quad (47)$$

$$125^\circ, -235^\circ, 485^\circ \quad (46)$$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد): (الدرس 4-6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n \quad (51)$$

$$27 + 36 + 48 + \dots \quad (50)$$

$$256 + 64 + 48 + 36 + \dots \quad (49)$$

إذا كانت $w = 6$, $x = -4$, $y = 1.5$, $z = \frac{3}{4}$ ، فأوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$wy + xz + w^2 - x^2 \quad (54)$$

$$x^2 + z^2 + 5wy \quad (53)$$

$$w^2 + y^2 - 6xz \quad (52)$$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة حساب مساحة مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه 3, 4, 5 باستعمال صيغة المساحة الواردة في الدرس ثلاث مرات (مرة لكل زاوية من زوايا المثلث). **6; 6; 6**

1 التركيز

الهدف: استعمال نسبة الجيب لإيجاد مساحة متوازي أضلاع.

إرشادات التدريس

إذا استعمل الطلبة الآلات الحاسبة لإيجاد المساحات التقريبية، فذكّرهم بأن يتحققوا من وضع آلاتهم على نظام الدرجات.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، لتنفيذ النشاط.

اطلب إلى كل طالب في كل مجموعة أن يرسم قطرًا مختلفًا لمتوازي الأضلاع، ثم يقارنوا بين حساباتهم للمساحة؛ للتحقق من صحة الحل.

وسائل:

- ما الذي يمثله $AB \sin A$ في متوازي الأضلاع؟

بما أن $\sin A = \frac{h}{AB}$ ، فإن $AB \sin A$ هو ارتفاع متوازي الأضلاع.

تدريب: اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1-3.

3 التقويم

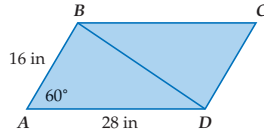
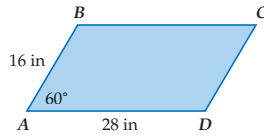
التقويم التكويني:

استعمل التمرين 2 لتقويم مدى قدرة الطلبة على حساب مساحة متوازي أضلاع إذا عُلم طولاً ضلعين متجاورين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

يمكنك إيجاد مساحة أي مثلث باستعمال الجيب. وكذلك يمكنك استعمال الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

نشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



الخطوة 1: ارسم القطر $\overline{BD}$.

يقسم القطر $\overline{BD}$ متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين هما: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

الخطوة 2: أوجد مساحة $\triangle ABD$.

صيغة مساحة المثلث

$$AB = 16, AD = 28, A = 60^\circ$$

بالضرب وتعويض قيمة $\sin 60^\circ$

بالتبسيط

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}(AB)(AD) \sin A =$$

$$\frac{1}{2}(16)(28) \sin 60^\circ =$$

$$224 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$112\sqrt{3} =$$

الخطوة 3: أوجد مساحة $\square ABCD$.

مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتي المثلثين: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

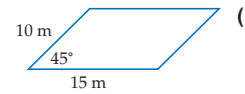
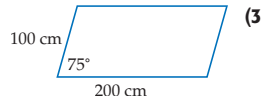
وبما أن $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ، فإن مساحة $\triangle CDB$ تساوي مساحة $\triangle ABD$.

لذا فإن مساحة $\square ABCD$ تساوي مثلي مساحة $\triangle ABD$. أي $2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3} \approx 387.98 \text{ in}^2$

$$11.65 \text{ in}^2 (2b) \quad 22.5 \text{ in}^2 (2a) \quad 150 \text{ m}^2 (1c) \quad 57.40 \text{ m}^2 (1b) \quad 106.07 \text{ m}^2 (1a)$$

$$10000 \text{ cm}^2 (3c) \quad 12175.23 \text{ cm}^2 (3b) \quad 19318.52 \text{ cm}^2 (3a) \quad 38.97 \text{ in}^2 (2c)$$

تمارين:



أوجد كلّ ممّا يأتي لكل متوازي أضلاع أعلاه:

(a) المساحة.

(b) المساحة عندما يصبح قياس الزاوية المعلومة نصف القياس المُعطى.

(c) المساحة عندما يكون قياس الزاوية المعلومة مثلي القياس المُعطى.

من المحسوس إلى المجرد:

اطلب إلى الطلبة تطوير صيغة لحساب مساحة متوازي أضلاع إذا عُلم طولاً ضلعين متجاورين فيه a و b ، وقياس إحدى زواياه θ . $A = ab \sin \theta$



دون دون المتوسط

دون ضمن فوق

184B الفصل 8 حساب المثلثات

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (70).

المطويات متابعة المطويات

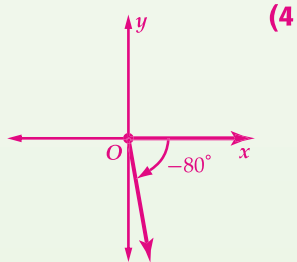
قبل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 1-8 إلى 4-8 من خلال مطوياتهم.

إجابات:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \cos \theta = \frac{3}{4}, \quad (3)$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}, \csc \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7},$$

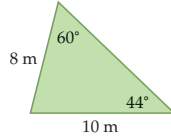
$$\sec \theta = \frac{4}{3}, \cot \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$



إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بإحدى النقطتين الآتيتين في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ : (12, 13) انظر ملحق الإجابات.

$$(6, 8) \quad (13) \quad (0, -5) \quad (12)$$

(14) حديقة: عند فيصل حديقة مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه. ما مساحة الحديقة؟ 38.8 m^2 تقريباً



حدّد إن كان للمثلث ABC في كلّ مما يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، تقريباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

$$(15) \quad A = 38^\circ, a = 18, c = 25 \quad \text{انظر ملحق الإجابات}$$

$$(16) \quad A = 65^\circ, a = 5, b = 7 \quad \text{ليس له حل}$$

$$(17) \quad A = 115^\circ, a = 12, b = 8 \quad \text{حل واحد:}$$

$$B = 37^\circ, C = 28^\circ, c = 6.2$$

في كلّ مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة:

$$(18) \quad 600^\circ, -120^\circ, 240^\circ$$

$$(19) \quad \frac{17\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$$

$$(20) \quad \frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$

(21) اختيار من متعدد: افرض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos \theta > 0$. في أي ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ ?
A الربع الأول أو الثاني
B الربع الأول أو الثالث
C الربع الثاني أو الثالث
D الربع الأول أو الرابع

حلّ $\triangle XYZ$ في كلّ من السؤالين: 1, 2 وفق القياسات المعطاة، وقرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

$$X = 25^\circ, (1)$$

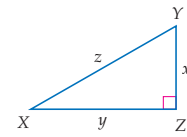
$$y = 34.3,$$

$$z = 37.9$$

$$Y = 65^\circ, (2)$$

$$y = 17.2,$$

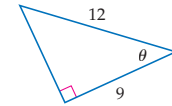
$$z = 18.9$$



$$X = 25^\circ, x = 8 \quad (2)$$

$$Y = 65^\circ, x = 16 \quad (1)$$

(3) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ انظر الهامش.



(4) ارسم زاوية قياسها 80° في الوضع القياسي. انظر الهامش.

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

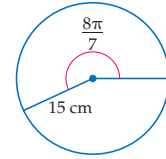
$$-\frac{35\pi}{18} - 350^\circ \quad (6)$$

$$\frac{43\pi}{36} \quad 215^\circ \quad (5)$$

$$810^\circ \quad \frac{9\pi}{2} \quad (8)$$

$$288^\circ \quad \frac{8\pi}{5} \quad (7)$$

(9) اختيار من متعدد: طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه تقريباً إلى أقرب جزء من عشرة يساوي: C



$$4.2 \text{ cm} \quad A$$

$$17.1 \text{ cm} \quad B$$

$$53.9 \text{ cm} \quad C$$

$$2638.9 \text{ cm} \quad D$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

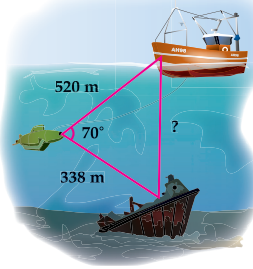
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{3\pi}{4} \quad (11)$$

$$0 \quad \tan \pi \quad (10)$$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتين:
	مراجعة الدروس من 1-8 إلى 4-8.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23).		www.obeikaneducation.com

قانون جيب التمام Law of Cosines

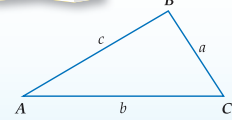


لماذا؟

الغواصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بعد 520 m من السفينة، وترسل ضوءاً إلى حطام سفينة أخرى على بعد 338 m عنها، يمكن استعمال حساب المثلثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

- استعمال قانون جيب التمام لحل المثلثات:** لا يمكن استعمال قانون الجيوب لحل مثلث مثل المثلث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال **قانون جيب التمام** لحل المثلث في الحالتين الآتيتين:
- معرفة طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع - زاوية - ضلع (حالة SAS))
 - معرفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث (ضلع - ضلع - ضلع (حالة SSS))

أضف إلى
مطوية



قانون جيب التمام

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مثال 1

حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حلّ $\triangle ABC$. مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.

الخطوة 1: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$$\text{قانون جيب التمام} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a = 7, c = 5, B = 36^\circ \quad b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36^\circ$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط} \quad b^2 \approx 17.4$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \quad b \approx 4.2$$

الخطوة 2: استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية A .

$$\text{قانون جيب التمام} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a = 7, b = 4.2, c = 5 \quad 7^2 = 4.2^2 + 5^2 - 2(4.2)(5) \cos A$$

$$\text{ب طرح } 4.2^2 \text{ و } 5^2 \text{ من كلا الطرفين} \quad 7^2 - 4.2^2 - 5^2 = -2(4.2)(5) \cos A$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على } -2(4.2)(5) \quad \frac{7^2 - 4.2^2 - 5^2}{-2(4.2)(5)} = \cos A$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط} \quad -0.1514 \approx \cos A$$

$$\text{بإيجاد قيمة } \cos^{-1} -0.1514 \quad 99^\circ \approx A$$

الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180 - (36 + 99) \approx 45$$

$$\text{إذن: } b \approx 4.2, A \approx 99^\circ, C \approx 45^\circ$$

186 الفصل 8 حساب المثلثات

مصادر الدرس 8-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص. (188)	• تنويع التعليم، ص (188, 190)	• تنويع التعليم، ص (190)
كتاب التمارين	• ص (25)	• ص (25)	• ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 8-5

استعمال قانون الجيوب لحل المثلث.

الدرس 8-5

استعمال قانون جيب التمام لحل

المثلث.

اختيار الطريقة الأنسب لحل المثلث.

ما بعد الدرس 8-5

استعمال قانون الجيوب وقانون جيب

التمام لحل مسائل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- هل المثلث المرسوم في الشكل حاد الزوايا، أم قائم الزاوية، أم منفرج الزاوية؟ **حاد الزوايا**
- وضح لماذا يكون قياس الزاوية عند الرأس الذي يمثل الحطام أكبر منها عند الرأس الذي يمثل السفينة؟
- **لأن الضلع المقابل للزاوية عند الرأس الذي يمثل الحطام أطول من الضلع المقابل للرأس الذي يمثل السفينة.**
- لماذا يجب أن تكون المسافة بين السفينة والحطام أقل من 858 m؟ **لأن متباينة المثلث تشير إلى أن طول أي ضلع في مثلث يجب أن يكون أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين (520 + 338 = 858 m).**

1 حلّ $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 82^\circ$, $f = 6$, $h = 4$ مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة. $H \approx 36^\circ$, $F \approx 62^\circ$, $g \approx 6.7$

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة، وتكون الخطوة الأولى للحل هي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلث حتى نضمن أن الزاويتين الأخريين حادثان عند استعمال قانون الجيوب بعد ذلك.

استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلث

مثال 1 يبين كيفية حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

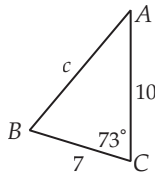
مثال 2 يبين كيفية حل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

التقويم التكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

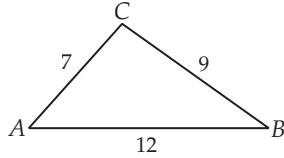
مثالان إضافيان

حل $\triangle ABC$



$$A \approx 40^\circ; B \approx 67^\circ; c \approx 10.4$$

حل $\triangle ABC$



$$A \approx 48^\circ; B \approx 35^\circ; C \approx 97^\circ$$

مثال 2

حل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة

حلّ $\triangle ABC$ مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1: استعمال قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في $\triangle ABC$ وهي $\angle A$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$$

$$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$$

$$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$$

$$-0.4167 \approx \cos A$$

$$115^\circ \approx A$$

الخطوة 2: استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس $\angle B$.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115^\circ}{16}$$

بضرب كلا الطرفين في 9

$$\sin B \approx \frac{9 \sin 115^\circ}{16}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\sin B \approx 0.5098$$

بإيجاد قيمة $\sin^{-1} 0.5098$

$$B \approx 31^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قياس $\angle C$.

$$m\angle C \approx 180 - (115 + 31) \approx 34^\circ$$

$$\text{إذن: } A \approx 115^\circ, B \approx 31^\circ, C \approx 34^\circ$$

تحقق من فهمك

$$A \approx 25^\circ, B \approx 114^\circ, C \approx 42^\circ$$

2 حلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5$, $b = 11$, $c = 8$ مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

اختيار الطريقة المناسبة لحل المثلثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحل مثلثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقل إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسي أي عنصرين آخرين من عناصر المثلث. وإذا كان للمثلث حل، فيجب أن تُقرّر إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحله.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استعمال قانون جيوب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس زاوية أخرى.

إرشادات للدراسة

التقريب: يمكن أن يؤدي التقريب في بعض الأحيان إلى إجابات غير دقيقة، مثل أن يكون لدينا مثلث مجموع قياسات زواياه 181° .

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: حدّد مسائل متنوعة للطلبة وامنحهم وقتاً كافياً لحلها. ثم اختر عدداً من الطلبة لشرح إنجازاتهم أمام الصف ومناقشة ذلك. وتأكد من أن الطلبة يرسمون شكلاً توضيحياً ويفسّرون سبب اختيارهم لقانون الجيوب أو جيوب التمام لحل المسائل، ثم احفظ هذه المسائل والرسوم وقم بإرسالها إلى الطلبة

المحتوى الرياضي

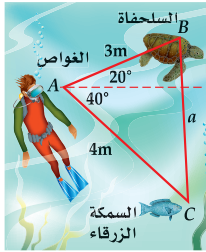
قانون جيوب التمام: يمكن استعمال قانون جيوب التمام لحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، أو بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

ملخص المفهوم	
حل المثلثات غير القائمة الزاوية	
أبدأ الحل باستعمال	إذا أعطيت
قانون الجيوب	قياسا زاويتين وطول أي ضلع
قانون الجيوب	طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما
قانون جيوب التمام	طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما
قانون جيوب التمام	أطوال الأضلاع الثلاثة

استعمال قانون جيوب التمام

مثال 3 من واقع الحياة

غوص: ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها 20° ليرى سلحفاة تبعد عنه 3m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها 40° فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟



افهم: تعرف قياسَي الزاويتين المتكونتين من نظر الغواص إلى أعلى وإلى أسفل، كذلك تعرف المسافة بين الغواص وكل من السلحفاة والسمكة الزرقاء.

خطط: استعمل هذه المعلومات لرسم شكل تقريبي يُمثل المسألة. بما أن طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلوم لديك، فيمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحل المسألة.

حُل:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3) \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 13$$

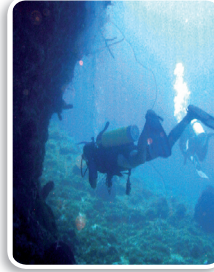
$$a \approx 3.6$$

إذن المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء تساوي 3.6m تقريباً.

تحقق: باستعمال قانون الجيوب، يمكنك التوصل إلى أن: $B \approx 74^\circ$, $C \approx 46^\circ$. بما أن $A < B$, $c < a < b$ ، فإن الحل منطقي.

تحقق من فهمك

(3) ماراثون: ركض سعيد مسافة 6km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها 79° ، وركض مسافة 7km. ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟ **تقريباً 8.3 km**



الربط مع الحياة

الرقم القياسي لأعمق مسافة غاص إليها غواص هو 318.2m.

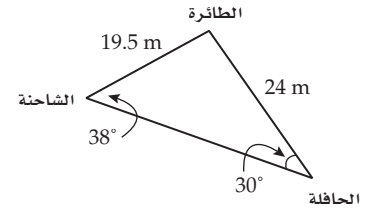
- (1) $A \approx 36^\circ$, $C \approx 52^\circ$, $b \approx 5.1$
(2) $A \approx 112^\circ$, $B \approx 40^\circ$, $C \approx 28^\circ$
(3) $A \approx 18^\circ$, $B \approx 29^\circ$, $C \approx 133^\circ$
(4) $A \approx 48^\circ$, $C \approx 22^\circ$, $b \approx 7.6$

اختيار الطريقة الأنسب لحل مثلث

المثال 3 يبين كيفية تطبيق قانون جيوب التمام في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 مطار: الشكل أدناه يبين المسافات بين شاحنة وطائرة وحافلة في أرض أحد المطارات. ما المسافة بين الحافلة والشاحنة؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. **36.2m تقريباً**

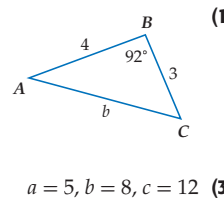
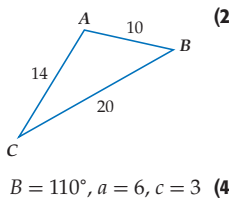


تنبيه

تجنب الأخطاء: عندما يتعين على الطلبة تقرير أي طرق الحل عليهم أن يختاروا، وضح لهم تعريف الزاوية المحصورة، وأعطهم مزيداً من التدريبات.

تأكد

(في الأسئلة 1-4)، حل كل مثلث. قَرِّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



تنوع التعليم

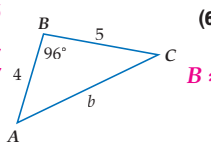
دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة مشكلة في حل المثلث باستعمال أي طريقة من طرق حل المثلث،

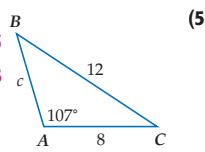
فتوزعهم إلى مجموعات صغيرة، ثم دعهم يناقشوا الطريقة التي سيختارونها لحل المثلث. واطلب إليهم المقارنة بين طرقهم، مع كتابة وصف مختصر لمساعدة زملائهم الآخرين. ثم مشاركة سائر الطلبة في النتائج.

(في الأسئلة 5-7)، حدد القانون (الجيب أم جيب التمام) الذي يجب البدء باستعماله لحل كل مثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

قانون جيب التمام،
 $A \approx 48^\circ, C \approx 36^\circ,$
 $b \approx 6.7$



قانون الجيوب،
 $B \approx 40^\circ, C \approx 33^\circ, c \approx 6.8$



(7) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35^\circ, s = 16, t = 9$. قانون جيب التمام، $S \approx 114^\circ, T \approx 31^\circ, r \approx 10.1$

(8) كرة قدم: في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بُعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خط الوسط بزوايا قياسها 40° ، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بُعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟ **12.9 m تقريباً**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-8 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدهم الدرس السابق "قانون الجيوب" على فهم الدرس الحالي "قانون جيب التمام".

التقويم التكويني

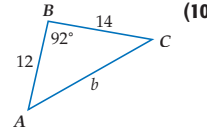
تحقق من فهم الطلاب للدرس 8-5، 8-4، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (68)

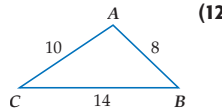
تدرب وحل المسائل

المثالان 1، 2

(في الأسئلة 9-16)، حل كل مثلث. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

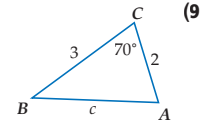


(10)

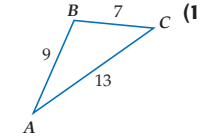


(12)

(14) $C = 80^\circ, a = 9, b = 2$
 (16) $w = 20, x = 13, y = 12$

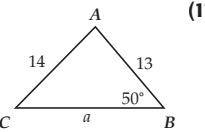


(9)

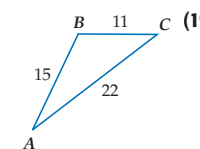


(11)

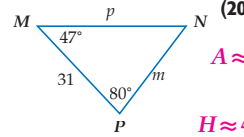
(13) $A = 116^\circ, b = 5, c = 3$
 (15) $f = 10, g = 11, h = 4$



(17)



(19)



(20)

(21) قانون الجيوب،
 $A \approx 17^\circ, B \approx 79^\circ, b \approx 6.9$
 (22) جيب التمام،
 $H \approx 48^\circ, J \approx 25^\circ, K \approx 107^\circ$

(21) $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 84^\circ, c = 7, a = 2$. $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 18, j = 10, k = 23$

(23) **استكشاف:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الأخرى. قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **514.2 m**

(24) **سباق:** ميدان للسباق على شكل مثلث أطوال أضلاعه 1.8 km, 2 km, 1.2 km. أوجد قياس كل زاوية من زواياه. **81°, 36°, 63°**

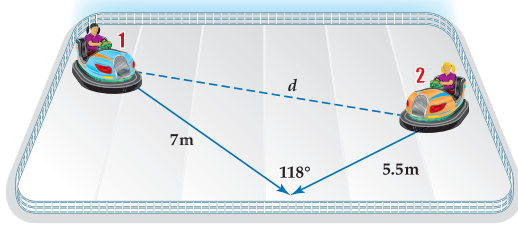
- (9) $A \approx 70^\circ, B \approx 40^\circ, c \approx 3.0$
 (10) $A \approx 48^\circ, C \approx 40^\circ, b \approx 18.8$
 (11) $A \approx 31^\circ, B \approx 108^\circ, C \approx 41^\circ$
 (12) $A \approx 102^\circ, B \approx 44^\circ, C \approx 34^\circ$
 (13) $a \approx 6.9, B \approx 41^\circ, C \approx 23^\circ$
 (14) $c \approx 8.9, A \approx 87^\circ, B \approx 13^\circ$
 (15) $F \approx 65^\circ, G \approx 94^\circ, H \approx 21^\circ$
 (16) $W \approx 106^\circ, X \approx 39^\circ, Y \approx 35^\circ$
 (17) قانون الجيوب،
 $C \approx 45^\circ, A \approx 85^\circ, a \approx 18.2$
 (18) قانون جيب التمام،
 $s \approx 28.9, R \approx 42^\circ, T \approx 32^\circ$
 (19) قانون جيب التمام،
 $A \approx 27^\circ, B \approx 115^\circ, C \approx 38^\circ$
 (20) قانون الجيوب،
 $N \approx 53^\circ, p \approx 38.2, m \approx 28.4$

تنوع الواجبات المنزلية

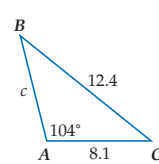
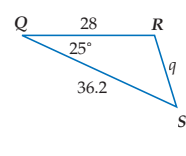
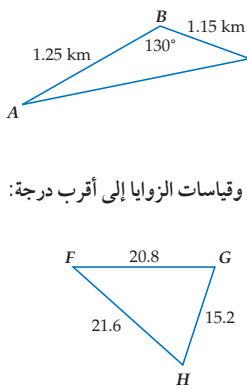
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	9-23، 32-42
ضمن المتوسط	9-23 فردي، 24-28، 32-42
فوق المتوسط	24-42

(25) أرض: قطعة أرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه 140 m, 210 m, 300 m. استعمل قانون جيب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقربة إلى أقرب متر مربع. **13698 m² تقريباً**

(26) ألعاب سيارات: في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 1, 2 كما هو مبين في الشكل أدناه. ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟ **10.7 m تقريباً**

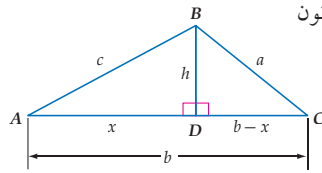


(27) رياضة مائية: يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهاباً وإياباً؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **8.9 min**



(28) $B \approx 39^\circ, C \approx 37^\circ, c \approx 7.7$
(29) $R \approx 107^\circ, S \approx 48^\circ, q \approx 16.0$
(30) $F \approx 42^\circ, G \approx 72^\circ, H \approx 66^\circ$

مسائل مهارات التفكير العليا



(31) تحدّ: استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاستنتاج قانون جيب التمام. استعمل الإرشادات الآتية: **انظر الهامش**

أولاً: طبق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.
ثانياً: استعمل المعلومات التالية في $\triangle ADB$.
• $c^2 = x^2 + h^2$
• $\cos A = \frac{x}{c}$

(32) تبرير: مثلث أطوال أضلاعه 10.6 cm, 8 cm, 14.5 cm. وضح كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية الكبرى فيه. ثم أوجدتها مقربة إلى أقرب درجة.

(33) اكتب: قارن بين الحالات التي تستطيع فيها استعمال قانون الجيوب لحل مثلث بتلك التي تستطيع فيها استعمال قانون جيب التمام. **انظر الهامش**

إجابات:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b - x)^2 + h^2 \quad (31) \\ &= b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \\ &= b^2 - 2bx + c^2 \\ &= b^2 - 2b(c \cos A) + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

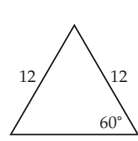
باستعمال نظرية فيثاغورس للمثلث $\triangle DBC$ بإيجاد مكوك $(b - x)^2$ في $\triangle ADB$ ، $c^2 = x^2 + h^2$ ، $\cos A = \frac{x}{c}$ أو $x = c \cos A$ الخاصة الإبدالية للجمع

(33) يمكنك استعمال قانون الجيوب لحل المثلث عندما يكون معلوماً لديك قياس زاويتين وطول أحد الأضلاع، أو طولاً ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما. ويمكنك استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث عندما يكون معلوماً لديك طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، أو أطوال أضلاع المثلث الثلاثة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع: اطلب إلى الطلبة استعمال قانون جيب التمام في محاولة لحل مثلث أطوال أضلاعه 5, 12, 18 (لا وجود لمثلث هذا المثلث). واطلب إليهم توضيح ما الذي اكتشفوه وماذا يعني ذلك. **سيحصل الطلبة على إجابة خاطئة عند محاولتهم إيجاد الدالة العكسية لجيب التمام؛ لأن القيمة ليست محصورة بين -1 و 1، مما يعني أنه لا وجود لمثلث هذا المثلث.**



35 هندسة: محيط الشكل المجاور يساوي: **36 C** **24 A**
48 D **30 B**

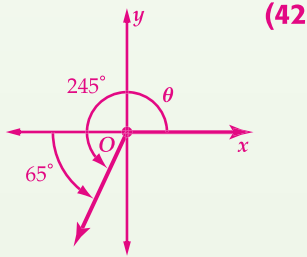
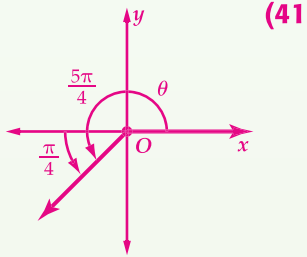
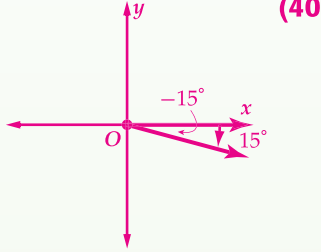
34 إجابة قصيرة: حل المعادلة: $\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$ **4, 23/15**

إجابات:

39 $\sin \theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

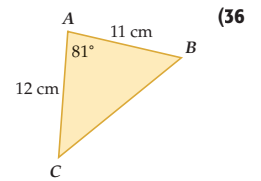
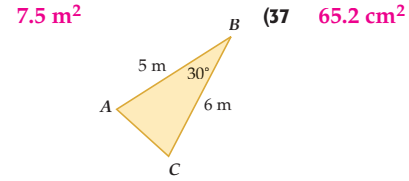
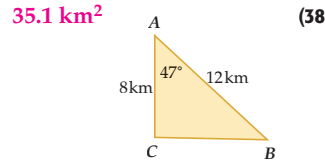
$\tan \theta = -1.5, \csc \theta = \frac{-\sqrt{13}}{3}$

$\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \cot \theta = -\frac{2}{3}$



مراجعة تراكمية

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ مما يأتي مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة: **الدرس (8-4)**



انظر الهامش

39 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-9, 6)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ . **الدرس (8-3)**

ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لكلٍّ منها. **الدرس (8-3)** **40-42** انظر الهامش

42 245°

41 $\frac{5}{4}\pi$

40 -15°



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 8

فوق المتوسط

ضمن

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (27)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

(تنمة)

8-5 تدريبات إعادة التعليم

قانون جيبوس التمام

اختيار الطريقة المناسبة لحل المثلثات.

المعطيات	أبدأ بأستعمال
قياس زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طول ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.	قانون الجيوب
طول ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.	قانون جيب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة.	قانون جيب التمام

مثال: حله القانون (الجيوب أم جيب التمام) الذي يجب

بده استعماله حل المثلث، ثم حل المثلث.

لما كان معلوماً من المثلث طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، فإنه

يمكن علينا أن نجد أطوال الأضلاع الثلاثة وقانون جيب التمام.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 20^2 + 8^2 - 2(20)(8) \cos 34^\circ$$

$$a^2 \approx 198.71$$

$$a \approx 14.1$$

استعمل قانون الجيوب لإيجاد B .

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin B = \frac{20 \sin 34^\circ}{14.1}$$

$$B \approx 128^\circ$$

$$\sin A = 14.1, b = 20, A = 34^\circ$$

$$B \approx 128^\circ$$

إذن قياس الزاوية C تقريباً $180^\circ - (34^\circ + 128^\circ) = 18^\circ$.

تمارين

حل كل من المثلثات الآتية مفرقاً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$A = 60^\circ, c = 17, b = 12$$

$$a = 15.1, B = 43^\circ, C = 77^\circ$$

$$A = 103^\circ, b = 31, c = 52$$

$$a = 66, B = 27^\circ, C = 50^\circ$$

$$a = 31, b = 52, c = 43$$

$$A = 36^\circ, B = 88^\circ, C = 56^\circ$$

الفصل 8: حساب المثلثات

27

الفصل: الثاني الثاني

تدريبات إعادة التعليم (26)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 تدريبات إعادة التعليم

قانون جيبوس التمام

استعمال قانون جيبوس التمام لحل المثلثات

المعطيات	أبدأ بأستعمال
قياس زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طول ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.	قانون الجيوب
طول ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.	قانون جيب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة.	قانون جيب التمام

يمكنك استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث، إذا علم طولاً ضلعين فيه، وقياس الزاوية المحصورة بينهما، أو إذا عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال: حل $\triangle ABC$ مفرقاً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.

المثلث معلوم فيه طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

استعمل قانون جيب التمام لإيجاد قيمة c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 28^2 + 15^2 - 2(28)(15) \cos 82^\circ$$

$$c^2 \approx 892.09$$

$$c \approx 29.9$$

يمكنك الآن استعمال قانون جيبوس لإيجاد قياس الزاوية A .

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin A}{15} = \frac{\sin 82^\circ}{29.9}$$

$$\sin A \approx 0.9273$$

$$A \approx 68^\circ$$

قياس الزاوية B تقريباً: $180 - (82 + 68) = 30$.

تمارين

حل كل من المثلثات الآتية مفرقاً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$A = 60^\circ, c = 17, b = 12$$

$$a = 14, c = 20, B = 38^\circ$$

$$b = 12.4, A = 44^\circ, C = 98^\circ$$

$$a = 4, b = 6, c = 3$$

$$A = 36^\circ, B = 118^\circ, C = 26^\circ$$

$$a = 15, b = 26, c = 132$$

$$c = 38, A = 17^\circ, B = 31^\circ$$

الفصل 8: حساب المثلثات

26

الفصل: الثاني الثاني

تدريبات حل المسألة (29)

فوق

ضمن

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 تدريبات حل المسألة

قانون جيبوس التمام

بركة سياحية، يمثل الشكل أدناه بركة سياحية، وحاجتها محطتان إقذاد واحدة من جهة المياه العميقة، والأخرى من جهة المياه غير العميقة. والمسافة بين كل من المحطتين ومنصة القفز كما في الشكل.

مساحة القفز

مسافة المياه العميقة

مسافة المياه غير العميقة

(1) إذا كان المثلثان أماكنهما سياحية، في المسافة التي يقطعها أحدهما للانتقال من محطة المياه العميقة إلى محطة المياه غير العميقة؟

11.3 ياردة

(2) نعيم للكشافة له براتين A و B المسافة بينهما 80 m. يقع مكتب مدير المخيم عند النقطة O على بعد 95 m من A وعلى بعد 115 m من B . ما قياس الزاوية $\angle AOB$ ؟

43.5°

الفصل 8: حساب المثلثات

29

الفصل: الثاني الثاني

تدريبات المهارات (28)

فوق

ضمن

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 تدريبات المهارات

قانون جيبوس التمام

حل كل من المثلثات الآتية مفرقاً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$A = 143^\circ, B = 20^\circ, C = 18^\circ$$

$$A = 104^\circ, B = 47^\circ, C = 29^\circ$$

$$B = 23^\circ, C = 116^\circ, a = 5.1$$

$$C = 35^\circ, a = 5, b = 8$$

$$A = 37^\circ, B = 107^\circ, c = 4.8$$

$$C = 71^\circ, a = 3, b = 4$$

$$A = 44^\circ, B = 67^\circ, c = 4.1$$

حله القانون (الجيوب أم جيب التمام) الذي يتعين بده استعماله حل المثلث في كل ما يأتي، ثم حل المثلث.

$$B = 30^\circ, a = 2.7, c = 6.1$$

$$A = 41^\circ, C = 55^\circ, b = 6.1$$

$$B = 47^\circ, a = 20, c = 24$$

$$b = 17.9, B = 79^\circ, A = 55^\circ$$

$$a = 5, b = 12, c = 13$$

$$A = 23^\circ, B = 67^\circ, C = 90^\circ$$

$$a = 13, A = 41^\circ, B = 75^\circ$$

$$c = 17.8, b = 19.1, C = 64^\circ$$

$$a = 5, b = 6, c = 7$$

$$A = 44^\circ, B = 57^\circ, C = 78^\circ$$

$$A = 27^\circ, C = 119^\circ, c = 7.8$$

$$A = 11^\circ, C = 27^\circ, c = 50$$

$$B = 142^\circ, a = 21.0, B = 67.8$$

$$A = 71^\circ, C = 62^\circ, a = 20$$

$$B = 47^\circ, b = 15.5, c = 18.7$$

$$A = 51^\circ, b = 7, c = 10$$

$$a = 7.8, B = 85^\circ, B = 44^\circ$$

$$B = 125^\circ, a = 8, b = 14$$

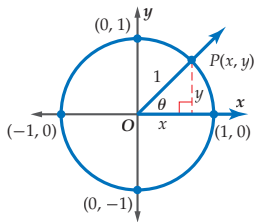
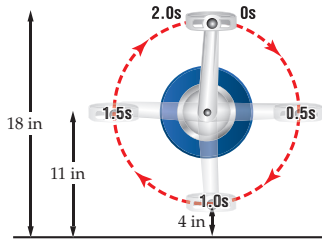
$$A = 28^\circ, C = 27^\circ, c = 7.8$$

الفصل 8: حساب المثلثات

28

الفصل: الثاني الثاني

الدوال الدائرية Circular Functions



لماذا؟
عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدال أثناء دورانه يمثل دالة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبين في الشكل المجاور.
لاحظ أن البدال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كل ثانيتين.

الدوال الدائرية: دائرة الوحدة هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالتَي الجيب وجيب التمام.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

وبذلك فإن قيمة $\cos \theta$ هي الإحداثي x ، وقيمة $\sin \theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

مفهوم أساسي

دوال في دائرة الوحدة

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$ فإن $\cos \theta = x$ ، $\sin \theta = y$

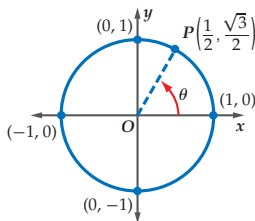
الرموز: $P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120^\circ$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$

النموذج:

كل من $\sin \theta = y$ ، $\cos \theta = x$ دالة بالنسبة إلى θ . وتُسمى كل منهما **دالة دائرية**؛ لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال 1 إيجاد قيمة كل من الجيب وجيب التمام بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة



إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ، فأوجد كلًا من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تحقق من فهمك

1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ، فأوجد كلًا من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}$$

فيما سبق:

درست إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

والآن:

■ أجد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
■ أستعمل خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية.

المفردات:

دائرة الوحدة

unit circle

الدالة الدائرية

circular function

الدالة الدورية

periodic function

الدورة

cycle

طول الدورة

period

www.obeikaneducation.com

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- استعمل أقصى وأدنى ارتفاع للبدال لإيجاد طول قطر الدائرة.

(طول القطر) =

(القيمة الكبرى) - (القيمة الصغرى)

$$18 - 4 = 14 \text{ in}$$

- استعمل ارتفاع مركز الدائرة لإيجاد طول قطر الدائرة.

$$(طول نصف القطر) = 18 - 11 = 7 \text{ in}$$

أو

$$11 - 4 = 7 \text{ in}$$

إذن طول القطر

$$2(7) = 14 \text{ in}$$

- ما موقع البداية للبدال؟ فسر ذلك. يمكن حساب موقع البداية عندما $t = 0$ ثانية، في هذه اللحظة يكون البدال عند أعلى نقطة في الشكل.

مصادر الدرس 8-6

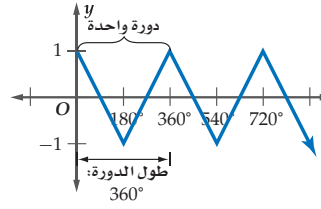
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (194)	• تنويع التعليم، ص (194, 197)	• تنويع التعليم، ص (197)
كتاب التمارين	• ص (26)	• ص (26)	• ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

الدورات: يمكن أن

تبدأ الدورة عند أي نقطة في منحنى الدالة الدورية. ففي المثال 2 إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$ ، فإن النمط سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$ ويكون طول الدورة هو: $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

الدوال الدورية: في الدوال الدورية يكون شكل الدالة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبين في التمثيل البياني للدالة أدناه.

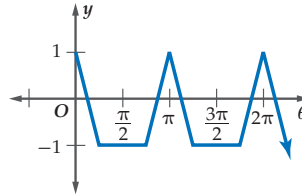
θ	y
0°	1
180°	-1
360°	1
540°	-1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360° 

مثال 2

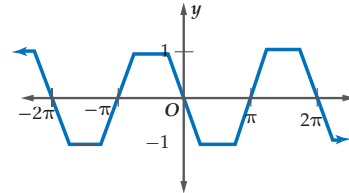
إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل المجاور. يبدأ تكرار النمط عند $\pi, 2\pi, \dots$ ولذلك طول الدورة هو π .



تحقق من فهمك

(2) أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل المجاور. 2π



دوران العجلة والبدال في الدراجة الهوائية، ولعبة العجلة الدوارة، والعديد من الألعاب في مدن الألعاب، ودوران الأشياء المختلفة في الفضاء، كلها تمثل دوالاً دورية.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال الدوال الدورية

درجات هوائية: عد إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغير ارتفاع البدال في الدراجة الهوائية بصورة دورية كدالة في الزمن.

(a) أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع البدال عند الثواني الآتية:

0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3

عند 0s يكون الارتفاع 18 in. وعند 0.5s، يكون الارتفاع 11 in، وعند 1s يكون الارتفاع 4 in، وهكذا.

(b) أوجد طول دورة الدالة.

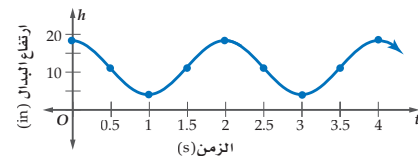
طول الدورة هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 2 ثانية.

(c) مثل الدالة بيانياً. افترض أن المحور الأفقي يمثل

الزمن t ، والمحور الرأسي يمثل الارتفاع h .

أقصى ارتفاع يصله البدال 18 in. وأقل ارتفاع 4 in، ولأن طول الدورة ثانيتان، لذا فإن النمط يتكرر كل ثانيتين.

الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
11	0.5
4	1.0
11	1.5
18	2.0
11	2.5
4	3.0



الربط مع الحياة

أغلب متسابقى الدراجات الهوائية يديرون البدايات بمعدلات تزيد على 200 دورة/دقيقة. أما غالبية الناس الذي يركبون دراجات هوائية فيديرونها بمعدلات تتراوح بين 90-120 دورة/دقيقة.

الدوال الدائرية:

مثال 1 يبين كيفية إيجاد الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة.

التقويم التكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$. فأوجد قيمة $\cos \theta, \sin \theta$.

$$\sin \theta = \frac{3}{4}, \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

الدوال الدورية:

مثال 2 يبين كيفية استعمال التمثيل البياني للدالة الدورية لإيجاد طول الدورة.

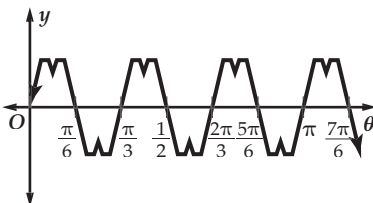
مثال 3 يبين كيفية حل مسائل من واقع الحياة باستعمال الصفة الدورية للدوال المثلثية.

مثال 4 يبين كيفية إيجاد قيمة دالة مثلثية باستعمال دورة الدالة.

مثال إضافي

2

أوجد طول دورة الدالة الممثلة بيانياً: $\frac{\pi}{3}$

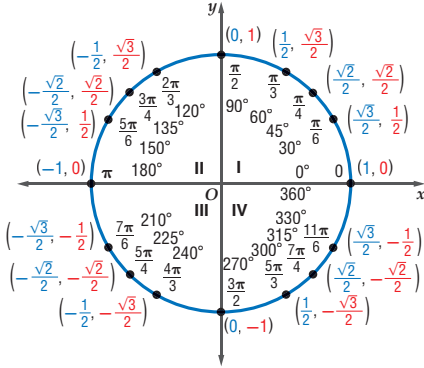


تحقق من فهمك

(3) **درجات هوائية** افرض أن البدال للدراجة الهوائية المحددة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدل دورة واحدة لكل ثانية.

(A) أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع البدال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

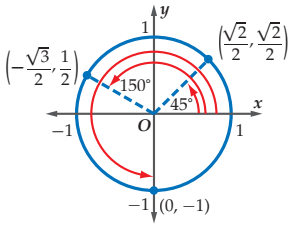
(B) أوجد طول دورة الدالة ومثلها بيانياً. 1؛ للتمثيل البياني انظر الهامش.



يبين الشكل المجاور القيم الدقيقة لكل من $\cos \theta$, $\sin \theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثل الإحداثي x قيمة $\cos \theta$ ، ويمثل الإحداثي y قيمة $\sin \theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.

يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالتين: $\sin \theta$, $\cos \theta$ بيانياً، حيث يمثل المحور الأفقي قيم θ ، والمحور الرأسي قيم الدالة المطلوبة.

تكرر دورة كل من دالتي الجيب وجيب تمام كل 360° . وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كل منهما 360° أو 2π .



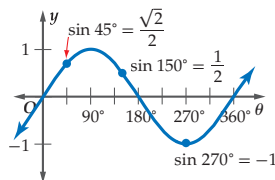
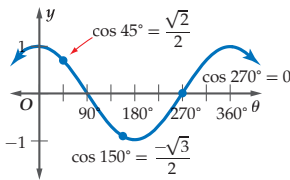
إذا كانت النقاط المبينة في الشكل تمثل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45^\circ$, $\theta = 150^\circ$, $\theta = 270^\circ$.

$$(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270^\circ, \sin 270^\circ) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكل من الدالتين $\sin \theta$, $\cos \theta$ كما يأتي:



الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
4	0.5
18	1.0
4	1.5
18	2.0
4	2.5
18	3.0

إرشادات للدراسة

الجيب وجيب تمام

لمساعدتك على التذكر:

لكل نقطة (x, y) على

دائرة الوحدة يكون

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

لاحظ أن x تأتي قبل

y في ترتيب الأحرف

الإنجليزية، وكذلك فإن

$\cos$ تأتي قبل $\sin$.

إرشادات للدراسة

الراديان عند تمثيل

دالتي الجيب وجيب

تمام يمكن تدريج

المحور θ بالراديان.

مثالان إضافيان

درجات هوائية: بالعودة إلى فقرة

"لماذا؟"، تلاحظ أن ارتفاع بدال

الدراجة الهوائية يتغير دورياً بوصفها

دالة بالنسبة إلى الزمن.

(a) أنشئ جدولاً يبين ارتفاع البدال

عند 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0

ثانية.

الارتفاع (in)	الزمن (sec)
4	3.0
11	3.5
18	4.0
11	4.5
4	5.0

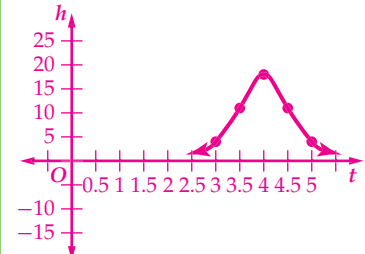
(b) أوجد طول دورة الدالة. 2 ثانية

(c) مثل الدالة بيانياً بحيث يمثل

المحور الأفقي الزمن t ، ويمثل

المحور الرأسي ارتفاع البدالة

عن الأرض h .



أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 690^\circ \quad (a)$$

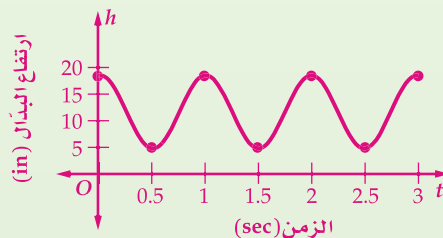
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right) \quad (b)$$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلبة الاستعانة بشبكة المعلومات "الإنترنت" في البحث عن أنواع مختلفة من الدوال الدورية، وإيجاد طول دورة كل منها.

إجابة (تحقق من فهمك)



التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي: أعط الطلبة

أمثلة محددة، ثم اطلب إليهم إعداد

تسجيلات صوتية يشرحون فيها

كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لدالة

مثلثية لزاوية قياسها أكبر من 360°

(أو أقل من -360°).

بما أن طول الدورة لكل من الدالتين هو 360° ، فإن قيم كل من الدالتين تتكرر كل 360° .
لذلك فإن $\sin(x + 360^\circ) = \sin x$ ، $\cos(x + 360^\circ) = \cos x$

حساب قيم الدوال المثلثية

مثال 4

أوجد قيم كل دالة مما يأتي:

(a) $\cos 480^\circ$

$$\begin{aligned}\cos 480^\circ &= \cos(120^\circ + 360^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك

(4A) $\sin 420^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4B) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

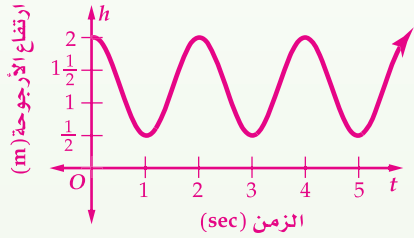
3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1-8 للتأكد من فهم الطلبة.
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة
لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب
مستوياتهم.

إجابة:

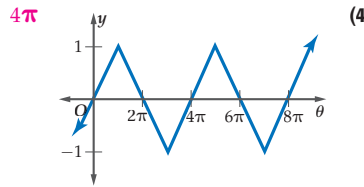
(5b) إجابة ممكنة:



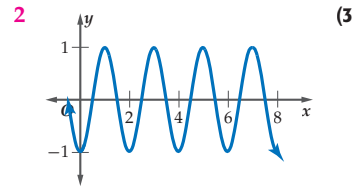
تأكد

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P ، فأوجد كلاً من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ في كل مما يأتي:

(1) $\cos \theta = \frac{15}{17}$, $\sin \theta = \frac{8}{17}$ $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$ (2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين:



(5) أرجوحة: إذا مثل ارتفاع أرجوحة دالة دورية في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة إلى أقصى ارتفاع لها وهو 2m، ثم تعود إليها لتصل 2m مرة أخرى مروراً بأقل ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}$ m، مستغرقة زمناً قدره 1 sec بين أقل ارتفاع وأقصى ارتفاع.

(a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهاباً وإياباً بدءاً بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟ 4 sec
(b) مثل بيانياً ارتفاع الأرجوحة h باعتبارها دالة في الزمن t . انظر الهامش.

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:

(6) $\frac{1}{2} \sin \frac{13\pi}{6}$ (7) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(-60^\circ)$ (8) $-1 \cos 540^\circ$

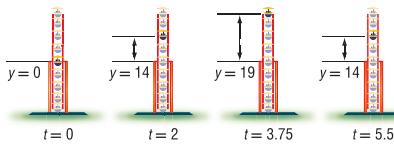
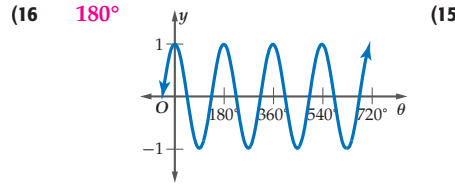
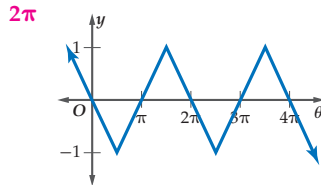
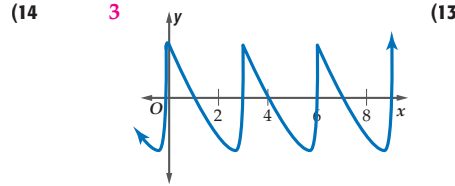
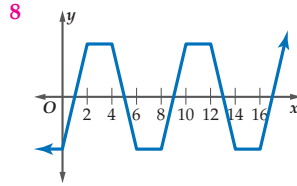
تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	25-9، 32، 34-46
ضمن المتوسط	22-18، 24، 25، 32، 34-46
فوق المتوسط	24-46

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P ، فأوجد كلاً من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ في كلٍّ مما يأتي:

$$\begin{aligned} \cos \theta = -\frac{5}{13}, \sin \theta = -\frac{12}{13} & \quad P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right) \quad (10) \quad \cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = -\frac{4}{5} \quad P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) \quad (9) \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{5}, \sin \theta = \frac{\sqrt{19}}{5} & \quad P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right) \quad (12) \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = \frac{1}{2} \quad P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (11) \end{aligned}$$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدوال الآتية:



مثال 3 **المجلة الدوّارة:** يبين الشكل المجاور موقع

مقعد راكب y بالأقدام عن مركز العجلة بعد t ثانية. إذا تغير ارتفاع المقعد y في العجلة بصورة دورية كدالة في الزمن. **انظر إجابات الطلاب**

(a) أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع المقعد y عند الثواني الآتية: 0, 2, 3.75, 5.5, 7.5, 9.5, 11.25, 13, 15.5

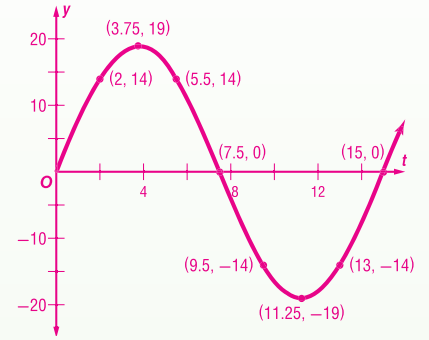
(b) أوجد طول دورة الدالة.

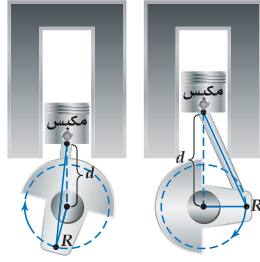
(c) مثل الدالة بيانياً. افترض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t ، والمحور الرأسي يمثل الارتفاع y . **انظر الهامش**

مثال 4 أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos(-60^\circ) & \quad (19) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{7\pi}{3} & \quad (18) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{11\pi}{4} & \quad (21) \quad 0 \cos 450^\circ & \quad (20) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 570^\circ & \quad (23) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(-45^\circ) & \quad (22) \end{aligned}$$

إجابة:
(17c)

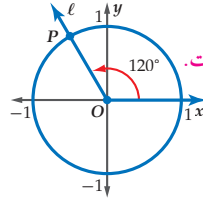




(24) **محركات:** في المحرك الممثل المجاور، المسافة d من المكبس إلى مركز الدائرة التي تُسمى ناقل الحركة (الكرنك) وتشكل دالة في الزمن. إذا علمت أن النقطة R الواقعة على ذراع المكبس تدور بسرعة 150 دورة/ثانية، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

(a) أوجد طول الدورة بالثواني. $\frac{1}{150}$

(b) إذا كانت أقصر قيمة للمسافة d تبلغ 1 cm وأكبر قيمة 7 cm فممثل منحنى الدالة بيانيًا. معتبرًا أن المحور الأفقي يمثل الزمن t ، والمحور الرأسي يمثل المسافة d . **انظر الهامش.**



(25) **تمثيلات متعددة:** يقطع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة P كما يُبين الشكل المجاور. **انظر ملحق الإجابات.**

(a) **هندسيًا:** انسخ الشكل في دفترك، وارسم ضلع الانتهاء لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها $30^\circ, 60^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 315^\circ$ في الوضع القياسي.

(b) **جدوليًا:** أنشئ جدولًا للقيم يوضح ميل كل ضلع انتهاء، مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(c) **تحليليًا:** ماذا تستنتج بالنسبة إلى العلاقة بين ظل الزاوية والميل؟ وضع إجابتك.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$(27) \frac{3\sqrt{3}}{2} 6(\sin 30^\circ)(\sin 60^\circ)$$

$$(26) \cos 45^\circ - \cos 30^\circ$$

$$(29) -\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$$

$$(28) -\frac{5\sqrt{3}}{2} 2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$$

$$(31) \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos 30^\circ)(\cos 150^\circ)}{\sin 315^\circ}$$

$$(30) 1 (\sin 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2$$

مسائل مهارات التفكير العليا

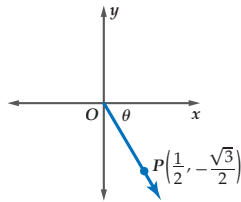
(32) **اكتشف الخطأ:** قام كل من خالد ونواف بحساب القيمة الدقيقة للمقدار $\cos \frac{-\pi}{3}$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

نواف

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = 0.5$$

خالد

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -0.5$$



(33) **تحد:** إذا بدأ نصف مستقيم من نقطة الأصل مارًا بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي، فاذكر قياسًا للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x . -60°

(34) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضع إجابتك "طول دورة دالة الجيب من مضاعفات π "

(32) نواف؛ قام خالد بكتابة

علاقة غير صحيحة وهي:

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

(34) أحيانًا؛ يمكن لطول

الدورة في دالة الجيب

أن يساوي $\frac{\pi}{2}$ ، وهي ليست من مضاعفات π .

(35) طول دورة الدالة

الدورية، هو أصغر مسافة

أفقية للجزء المتكرر في

التمثيل البياني للدالة ويمثل

هذا الجزء دورة واحدة.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ينبغي أن يلاحظ

الطلبة في السؤال 32، أن إجابة نواف

صحيحة؛ لأن دالة جيب التمام تتكرر

كل 2π راديان. أما إجابة خالد فهي غير

صحيحة؛ لأن $\cos(-\theta) = \cos \theta$.

وضّح للطلبة أنه إذا كانت θ في

الربع الأول، $-\theta$ في الربع الرابع،

فإن الإحداثي x للنقطتين الممثلتين

للزاويتين θ ، $-\theta$ هو نفسه وأن

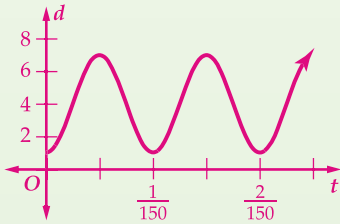
$\cos(-\theta) = \cos \theta$. (يستطيع الطلبة

ملاحظة النتيجة نفسها لـ θ في الربع

الثاني و $-\theta$ في الربع الثالث).

إجابة:

(24b) إجابة ممكنة:



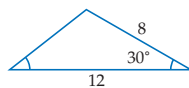
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اعرض على الطلبة التمثيل البياني لكل من $y = \cos x$ ، $y = \cos 2x$ ، $y = \cos 3x$ ، واطلب إليهم إيجاد طول دورة كل دالة منها. $120^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ على الترتيب. ثم اطلب إليهم إيجاد طول دورة الدالة $y = \cos kx$. $\frac{360^\circ}{k}$

(35) اكتب: وضح كيف يمكنك حساب طول دورة الدالة الدورية، باستعمال التمثيل البياني للدالة. ضمن في توضيحك وصفاً للدورة.

تدريب على اختبار



(37) هندسة: مساحة المثلث في الشكل المجاور تساوي: D

24 D 41.6 C 96 B 48 A

(36) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8 = ?$ A

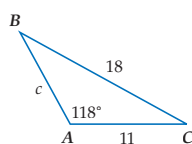
161 D 31 C 13 B 5 A

مراجعة تراكمية

(42) حل واحد: $B \approx 35^\circ$, $C \approx 99^\circ$, $c \approx 13.7$

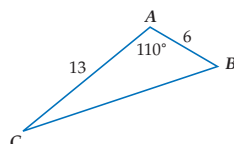
(43) حل واحد: $B \approx 31^\circ$, $C \approx 39^\circ$, $c \approx 6.0$

حلّ كلّاً من المثلثات الآتية: قَرِّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: الدرس (8-4, 8-5)



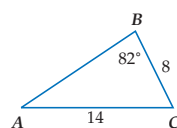
(40)

$B \approx 33^\circ$, $C \approx 29^\circ$, $c \approx 9.9$



(39)

$a \approx 161$, $B \approx 49^\circ$, $C \approx 21^\circ$



(38)

$A \approx 34^\circ$, $C \approx 64^\circ$, $c \approx 12.7$

حدّد إذا كان للمثلث في كلّ مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حلول. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: الدرس (8-4)

$A = 110^\circ$, $a = 9$, $b = 5$ (43)

$A = 72^\circ$, $a = 6$, $b = 11$ (41) لا يوجد حل (42) $A = 46^\circ$, $a = 10$, $b = 8$

بسّط كلّاً مما يأتي: (مهارة سابقة)

120 $\frac{90}{2 - \frac{11}{4}}$ (46)

108 $\frac{180}{2 - \frac{1}{3}}$ (45)

960 $\frac{240}{1 - \frac{5}{4}}$ (44)



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 8

دون		ضمن		فوق المتوسط	
تدريبات إعادة التعليم (31)					
الاسم: _____ التاريخ: _____					
8-6 تدريبات إعادة التعليم					
الدوال الدائرية					
تعريف الجيب وجيب التمام					
إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$ فإن $\cos \theta = x$ ، $\sin \theta = y$ لذا يمكن كتابة إحداثيات النقطة P على الصورة $P(\cos \theta, \sin \theta)$.					
مثال					
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$ ، فأوجد $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.					
$\cos \theta = -\frac{5}{6}$ ، $\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ إذن $P\left(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$					
تدريبات					
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاة، فأوجد قيمة كل من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.					
1. $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$					
2. $P(0, -1)$ $\sin \theta = -1$ ، $\cos \theta = 0$					
3. $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $\cos \theta = -\frac{2}{3}$					
4. $P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ ، $\cos \theta = -\frac{4}{5}$					
5. $P\left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{35}}{6}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{6}$					
6. $P\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $\sin \theta = \frac{3}{4}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$					
7. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 45° $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$					
8. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 120° $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos \theta = -\frac{1}{2}$					
9. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 240° $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos \theta = -\frac{1}{2}$					
10. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 330° $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$					
الفصل 8، حساب التفاضل					

دون		ضمن		فوق المتوسط	
تدريبات إعادة التعليم (32)					
الاسم: _____ التاريخ: _____					
8-6 تدريبات إعادة التعليم					
الدوال الدائرية					
تعريف الجيب وجيب التمام					
إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$ فإن $\cos \theta = x$ ، $\sin \theta = y$ لذا يمكن كتابة إحداثيات النقطة P على الصورة $P(\cos \theta, \sin \theta)$.					
مثال					
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$ ، فأوجد $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.					
$\cos \theta = -\frac{5}{6}$ ، $\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ إذن $P\left(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$					
تدريبات					
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاة، فأوجد قيمة كل من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.					
1. $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$					
2. $P(0, -1)$ $\sin \theta = -1$ ، $\cos \theta = 0$					
3. $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $\cos \theta = -\frac{2}{3}$					
4. $P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ ، $\cos \theta = -\frac{4}{5}$					
5. $P\left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{35}}{6}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{6}$					
6. $P\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $\sin \theta = \frac{3}{4}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$					
7. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 45° $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$					
8. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 120° $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos \theta = -\frac{1}{2}$					
9. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 240° $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos \theta = -\frac{1}{2}$					
10. P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 330° $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$					
الفصل 8، حساب التفاضل					

دون		ضمن		فوق المتوسط	
تدريبات حل المسألة (33)					
الاسم: _____ التاريخ: _____					
8-6 تدريبات المهارات					
الدوال الدائرية					
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P فأوجد $\sin \theta$ ، $\cos \theta$.					
1. $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، $\cos \theta = \frac{3}{5}$					
2. $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ $\sin \theta = -\frac{12}{13}$ ، $\cos \theta = \frac{5}{13}$					
3. $P\left(-\frac{9}{41}, -\frac{40}{41}\right)$ $\sin \theta = -\frac{40}{41}$ ، $\cos \theta = -\frac{9}{41}$					
4. $P(0, 1)$ $\sin \theta = 1$ ، $\cos \theta = 0$					
5. $P(-1, 0)$ $\sin \theta = 0$ ، $\cos \theta = -1$					
6. $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{2}$					
7. $\cos 45^\circ$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$					
8. $\sin 210^\circ$ $-\frac{1}{2}$					
9. $\sin 330^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$					
10. $\cos(-60^\circ)$ $\frac{1}{2}$					
11. $\sin 5\pi$ 0					
12. $\cos 3\pi$ -1					
13. $\sin \frac{7\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
14. $\cos \left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ $\frac{1}{2}$					
15. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
16. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
17. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
18. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
19. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
20. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
21. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
22. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
23. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
24. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
25. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
26. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
27. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
28. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
29. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
30. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
31. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
32. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
33. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
34. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
35. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
36. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
37. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
38. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
39. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
40. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
41. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
42. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
43. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
44. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
45. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
46. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
47. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
48. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
49. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
50. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
51. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
52. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
53. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
54. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
55. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
56. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
57. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
58. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
59. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
60. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
61. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
62. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
63. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
64. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
65. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
66. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
67. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
68. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
69. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
70. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
71. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
72. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
73. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
74. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
75. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
76. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
77. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
78. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
79. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
80. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
81. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
82. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
83. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
84. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
85. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
86. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
87. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
88. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
89. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
90. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
91. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
92. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
93. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
94. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
95. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
96. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
97. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
98. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
99. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
100. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
101. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
102. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
103. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
104. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
105. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
106. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
107. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
108. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
109. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
110. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
111. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
112. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
113. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
114. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
115. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
116. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
117. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
118. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
119. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
120. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
121. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
122. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
123. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
124. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
125. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
126. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
127. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
128. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
129. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
130. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
131. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
132. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
133. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
134. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
135. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
136. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
137. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
138. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
139. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
140. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
141. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
142. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
143. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
144. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
145. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
146. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
147. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
148. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
149. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
150. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
151. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
152. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
153. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
154. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
155. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
156. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
157. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
158. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
159. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
160. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
161. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
162. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
163. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
164. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
165. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
166. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
167. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
168. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
169. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
170. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
171. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
172. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
173. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
174. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
175. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
176. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
177. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
178. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
179. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
180. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
181. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
182. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
183. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
184. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
185. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
186. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
187. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
188. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
189. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
190. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
191. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
192. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
193. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
194. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
195. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
196. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
197. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
198. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
199. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
200. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
201. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
202. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
203. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
204. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
205. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
206. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
207. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
208. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
209. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
210. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
211. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
212. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
213. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
214. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
215. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
216. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
217. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
218. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
219. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
220. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
221. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
222. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
223. $\sin \frac{5\pi}{2}$ 1					
224. $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$					
225. $\sin \frac{5\pi}{2}$ $$					



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 8

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق ضمن دون

كتاب التمارين (26)

فوق ضمن

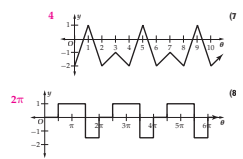
التدريبات الإثرائية (35)

الدوال الدائرية 8-6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة P . فلوجد $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ في كل مما يأتي.

- (1) $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$
- (2) $P\left(\frac{20}{29}, -\frac{21}{29}\right)$ $\sin \theta = -\frac{21}{29}$, $\cos \theta = \frac{20}{29}$
- (3) $P(0.8, 0.6)$ $\sin \theta = 0.6$, $\cos \theta = 0.8$
- (4) $P(0, -1)$ $\sin \theta = -1$, $\cos \theta = 0$
- (5) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (6) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد طول الدورة لكل من الدوال الآتية:



أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

- (1) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ $\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)$
- (2) $\cos(-330^\circ)$ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\sin(-30^\circ)$ $\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)$
- (3) $\cos 600^\circ$ $\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ $\cos 7\pi$ $\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- (4) $\sin\frac{9\pi}{2}$ $\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\sin\frac{585^\circ}{2}$ $\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$
- (5) $\sin 840^\circ$ $\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$ $\sin(-225^\circ)$ $\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$

(21) عجلة ألعاب طول قطرها 100 ft تكمل دورة في 2.5 دقيقة. ما طول دورة الدالة التي نصف ارتفاع عربة على الحافة الخارجية للمجلة كدالة في الزمن؟ 24 sec

26

الاسم:

التاريخ:

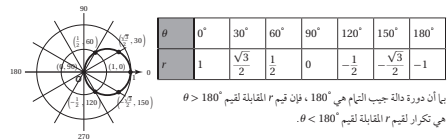
8-6 التدريبات الإثرائية الإحداثيات القطبية

ارسم زاوية في الوضع القياسي رأسها عند نقطة O تسمى القطب. وضع الاتجاه لها على محور أفقي يسمى المحور القطبي. النقطة P الواقعة على ضلع انتهاء الزاوية تُكتب باستعمال الإحداثيات القطبية $P(r, \theta)$ ، حيث r : المسافة المستقيمة من O إلى P ، و θ قياس الزاوية. ويمكن رسم المنحنيات في هذا النظام باستعمال ورقة رسم الإحداثيات القطبية التي تظهر في الشكل المجاور.

الإحداثيات القطبية لنقطة ليست وحيدة، فمثل سبيل المثال $(3, 30^\circ)$ تمثل النقطة P وكذلك النقطة $(3, 390^\circ)$ ، ويمكن تسمية النقطة P أيضًا $(-3, 210^\circ)$ فهل تعلم لماذا؟

إحداثيات القطب $(0, \theta)$ ، حيث θ تمثل قياس أي زاوية.

مثال: مثل الدالة $r = \cos \theta$ ، يأتينا، وذلك بتكوين جدول لعدد مناسب من قيم θ و r ، ونشيله على ورقة إحداثيات قطبية.



مثل كلاً من الدوال الآتية، بتكوين جدول قيم مناسب، ونشيله على ورقة إحداثيات قطبية:

(1) $r = 4$ $r = 3 \sin \theta$ (2) $r = 3 \cos \theta$

(3) $r = 3 \cos 2\theta$ $r = 2(1 + \cos \theta)$ (4) $r = 2(1 + \cos \theta)$

منشئ يشبه الزهرة ذات البتلات الأربع التي تتلقى معاً في القطب، ورووسها في النقاط $(3, 0^\circ)$ ، $(3, 90^\circ)$ ، $(3, 180^\circ)$ ، $(3, 270^\circ)$.

منشئ شكل القلب ويكون متماثلاً حول المحور القطبي.

الفصل 8، حساب المثلثات

35

الفصل، التفاضل والتكامل

ملاحظات المعلم

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 8-7

تعرف الدوال الدورية.

الدرس 8-7

وصف دوال الجيب، وجيب التمام والظل، وأمثلتها بيانياً.

وصف دوال مثلثية أخرى وتمثيلها بيانياً.

ما بعد الدرس 8-7

تمثيل الدوال الدورية بيانياً. وتفسيرها بدلالة سعتها، وتردها، وطول دورتها.

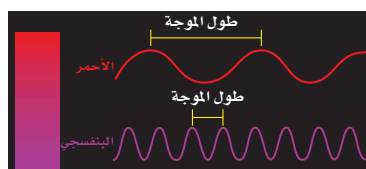
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

وأسأل:

- كيف تُقاس أطوال الموجات في الشكل؟
- تُقاس أطوال الموجات بقياس المسافة بين قمتين متتاليتين أو بين قاعين متتاليتين.
- ما الطريقة الأخرى لقياس طول الموجة؟
- يمكن قياس طول الموجة بقياس المسافة بين أي نقطتين متناظرتين في موجتين متتاليتين.
- ما عدد الموجات البنفسجية التي يعادل طولها طول موجة حمراء في الشكل؟ 3



لماذا؟

لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.

ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة:

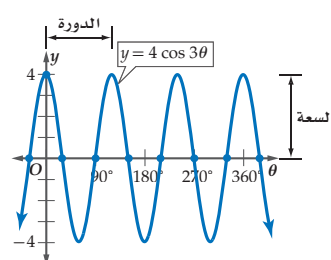
$$y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

حيث تمثل A سعة الموجة، λ طول الموجة.

دوال الجيب، وجيب التمام، والظل: يمكنك تمثيل الدوال المثلثية بيانياً في المستوى الإحداثي. تذكر أن منحنيات الدوال الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكل دورة يسمى طول الدورة. **سعة** منحني دالة الجيب أو دالة جيب التمام، تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

مفهوم أساسي		
دالتا الجيب وجيب التمام		
$y = \cos \theta$	$y = \sin \theta$	الدالة المولدة (الأم)
		التمثيل البياني
مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	المجال
$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	المدى
1	1	السعة
360°	360°	طول الدورة

يمكنك تطبيق ما تعلمته أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على التمثيل البياني للدوال المثلثية في صورتها العامة: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$, التي سعتها $|a|$ ، وطول دورتها $\frac{360^\circ}{|b|}$.



مثال 1 إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة يساوي 4 أو $\frac{4 - (-4)}{2} = 4$ $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

من الرسم يكرر الرسم نفسه كل 120°

تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي:

(1A) $y = \cos \frac{1}{2}\theta$ السعة: 1؛ طول الدورة: 720° (1B) $y = 3 \sin 5\theta$ السعة: 3؛ طول الدورة: 72°

الدرس 8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً 199

فيما سبق:

درست الدوال الدورية.

والآن:

- أصف دوال الجيب وجيب التمام والظل، وأمثلتها بيانياً.
- أصف دوال مثلثية أخرى، وأمثلها بيانياً.

المفردات:

السعة

amplitude

التردد

frequency

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

طول الدورة:

في الدالتين:

$$y = a \sin b\theta,$$

$$y = a \cos b\theta$$

b تمثل عدد الدورات

في 360° . ففي المثال 1

يبدل العدد 3 في الدالة:

$$y = 4 \cos 3\theta$$

وجود 3 دورات في 360° .

مما يعني وجود دورة

واحدة في 120° .

مصادر الدرس 8-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (200)	• تنويع التعليم، ص (200, 204)	• تنويع التعليم، ص (204)
كتاب التمارين	• ص (27)	• ص (27)	• ص (27)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

استعمل منحنيات الدوال المولدة (الأم) لتمثيل كلٍّ من الدالتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام المناسبة بيانيًا. ويمكنك أيضًا استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ .

حيث نقاط التقاطع مع المحور θ للدالة: $y = a \sin b\theta$ وللدالة: $y = a \cos b\theta$ في الدورة التي تبدأ عند $\theta = 0$ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

إرشادات للدراسة

نقاط التقاطع مع المحور θ :

يمكن إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالة مع المحور θ بوضع $y = 0$ وحل المعادلة أو إيجاد قيم θ التي تحققها.

مثال 2 تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام بيانيًا

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

$$y = 2 \sin \theta \quad (a)$$

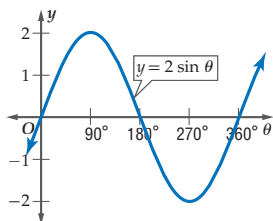
أوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2, b = 1$.
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسياً بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2.

طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|1|} = 360^\circ$ ← دورة واحدة طولها 360° .

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (180^\circ, 0)$$

$$\left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (360^\circ, 0)$$



$$y = \cos 4\theta \quad (b)$$

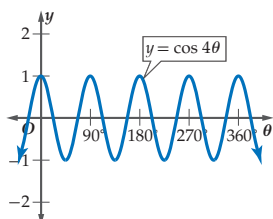
أوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 1, b = 4$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|4|} = 90^\circ$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (22.5^\circ, 0)$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (67.5^\circ, 0)$$



تحقق من فهمك (2A, 2B) انظر الهامش.

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad (2B)$$

$$y = 3 \cos \theta \quad (2A)$$

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتم وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد** وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلاً إذا كان طول الدورة للدالة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

دوال الجيب وجيب التمام والظل:

مثال 1 يبين كيفية إيجاد سعة وطول دورة دالة مثلثية.

مثال 2 يبين كيفية استعمال السعة وطول الدورة لتمثيل الدالة المثلثية بيانيًا.

مثال 3 يبين كيفية كتابة دالة مثلثية تمثل موقعاً من واقع الحياة.

مثال 4 يبين كيفية استعمال طول الدورة وخطوط التقارب لدالة الظل لتمثيلها بيانيًا.

تقويم تكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

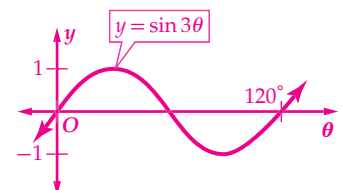
1 أوجد السعة وطول الدورة للدالة

$$y = \sin \frac{1}{3} \theta \quad \text{السعة: 1}$$

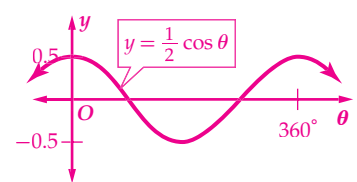
طول الدورة: 1080°

2 مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

$$y = \sin 3\theta \quad (a)$$

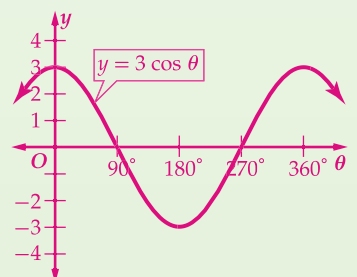


$$y = \frac{1}{2} \cos \theta \quad (b)$$

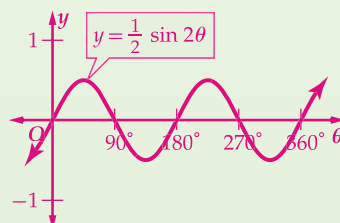


إجابات (تحقق من فهمك):

(2A)



(2B)



المتعلمون البصريون / المكانيون ورّع الطلبة في مجموعات واطلب إليهم عمل ملصقات يظهر عليها التمثيل البياني للدوال المثلثية الست. شجّع الطلبة على تمييز العناصر الأساسية للدوال مثل: طول الدورة، السعة، خطوط التقارب، باستعمال الألوان المختلفة.



الربط مع الحياة

يمكن للفيلة سماع صوت يبعد عنها 5 أميال. ويمكن للإنسان سماع الأصوات التي يتراوح ترددها بين 20 هيرتز إلى 20000 هيرتز.

أصوات: تُسمى الأصوات التي يكون ترددها أقل من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات / ثانية.

(a) أوجد طول دورة الدالة التي تعبر عن موجات الصوت.

يوجد 5 دورات في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة، لذلك فإن طول الدورة هو $\frac{1}{5} = 0.2 \text{ sec}$.

(b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب تمثل موجة الصوت y باعتبارها دالة في الزمن t ، ثم مثلها بيانيًا.

$$\text{طول الدورة} = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$0.2 = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$0.2|b| = 2\pi$$

$$b = 10\pi$$

$$y = a \sin b\theta$$

$$y = 1 \sin 10\pi t$$

$$y = \sin 10\pi t$$

بكتابة العلاقة بين طول الدورة و b

بالتعويض

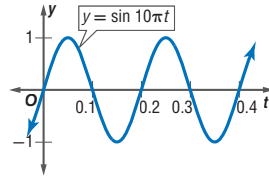
بضرب الطرفين في $|b|$

بضرب الطرفين في 5: $b = 10\pi$ موجبة

الصورة العامة لدالة الجيب

$$a = 1, b = 10\pi, \theta = t$$

بالتبسيط



تحقق من فهمك

(3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

(A) أوجد طول دورة الدالة. $\frac{1}{20} = 0.05 \text{ sec}$

(B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب التمام التي تعبر عن موجات الصوت، ثم مثلها بيانيًا. $y = \cos 40\pi t$ لتمثيل الدالة انظر ملحق الإجابات.

تعدّ دالة الظل من الدوال المثلثية التي لها خطوط تقارب.

إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة:

لاحظ أن السعة تؤثر في منحنى الدالة في اتجاه المحور y ، أما طول الدورة فيؤثر في اتجاه المحور x .

مثال إضافي

3

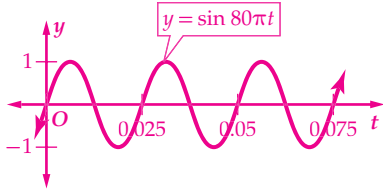
أصوات: يستطيع الإنسان سماع صوت تردده 40 هيرتز.

(a) أوجد طول دورة الدالة التي تعبر عن موجات الصوت.

$\frac{1}{40}$ أو 0.025 ثانية

(b) افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة الجيب التي تمثل موجة الصوت y بوصفها دالة في الزمن t . ثم مثلها بيانيًا.

$$y = \sin 80\pi t$$



المحتوى الرياضي

السعة وطول الدورة: لكل من التمثيل البياني لدالتى الجيب وجيب التمام سعة. أما بقيّة الدوال المثلثية فليس لها سعة؛ لأنه ليس لها قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وطول الدورة هو المسافة على المحور الأفقي، والتي يتم التمثيل البياني من خلالها دورة كاملة واحدة. ويمكن حساب طول الدورة بسهولة من التمثيل البياني لها.

أضف إلى

مطوياتك

دالة الظل

مفهوم أساسي

التمثيل البياني للدالة	$y = \tan \theta$	الدالة المولدة (الأم)
	$\{\theta \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$	المجال
	مجموعة الأعداد الحقيقية	المدى
	غير معرفة	السعة
	180°	طول الدورة

طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ ، يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالة. وخطوط التقارب الرأسية لها عند المضاعفات الفردية للعدد $\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{|b|}$.

الدرس 8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا 201

إرشادات للمعلم الجديد

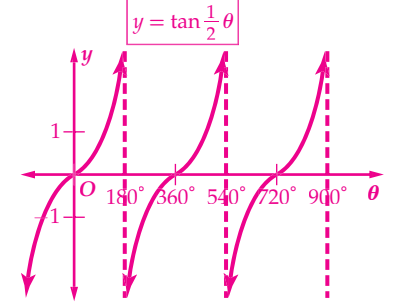
تمثيل بياني: إذا رغبت في أن يمثل الطلبة بيانيًا دوال: الجيب وجيب التمام والظل، فإنه يمكن المقارنة بين هذه التمثيلات البيانية وتلك الموضحة في الصفحات 197-199. وتعدّ هذه التغذية الراجعة الفورية مفيدة لتمثيل الدوال المثلثية الأكثر صعوبة.

إرشادات للدراسة

دالة الظل: لا يوجد
سعة لدالة الظل بسبب
عدم وجود قيم عظمى أو
صغرى لها.

مثال إضافي

أوجد طول دورة الدالة $y = \tan \frac{1}{2}\theta$.
ثم مثل هذه الدالة بيانياً.
طول الدورة: 360°

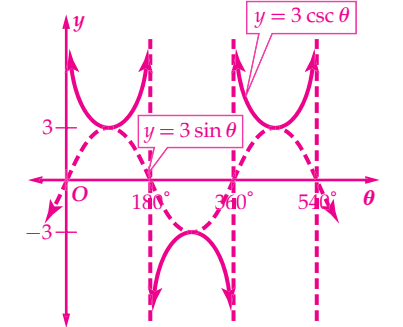


تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانياً:

المثال 5 يبين كيفية استعمال طول دورة أحد الدوال المثلثية الثلاث الأساسية لتمثيل دالة مثلثية أخرى.

مثال إضافي

أوجد طول دورة الدالة $y = 3 \csc \theta$.
ثم مثل الدالة بيانياً.
طول الدورة: 360°



التعليم باستعمال التقنيات

كاميرا توثيقية اختر بعض الطلبة لتوضيح وشرح كيفية تمثيل دالة مثلثية لزملائهم. تأكد من أن كل طالب يشرح بشكل صحيح كيفية تكوين جدول قيم، واختيار تدرج مناسب، وتعيين النقاط.

مثال 4

تمثيل دوال الظل بيانياً

أوجد طول دورة الدالة $y = \tan 2\theta$. ومثل هذه الدالة بيانياً.

$$\text{طول الدورة: } \frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$$

$$\text{خط تقارب عند: } \frac{180^\circ}{|2b|} = \frac{180^\circ}{|2 \cdot 2|} = 45^\circ$$

ارسم خطوط التقارب عند

$$-3 \cdot 45^\circ = -135^\circ, -2 \cdot 45^\circ = -90^\circ, -1 \cdot 45^\circ = -45^\circ, 1 \cdot 45^\circ = 45^\circ, 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ, 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ, \dots$$

استعمل $y = \tan \theta$ ، ولكن ارسم دورة كاملة كل 90° .

تحقق من فهمك

(4) أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2} \tan \theta$. ثم مثل هذه الدالة بيانياً. انظر الهامش.

تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانياً: ترتبط منحنيات دوال قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام بمنحنيات دوال الجيب، وجيب التمام، والظل.

مفهوم أساسي

دوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام

الدالة المولدة (الأم)	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \text{ or } y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \text{ or } y \leq -1\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$
السعة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة
طول الدورة	360°	360°	180°

مثال 5

تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانياً

أوجد طول دورة الدالة $y = 2 \sec \theta$. ثم مثل هذه الدالة بيانياً.

طول دورة الدالة يساوي 360° ، وبما أن $y = \sec \theta$ هي مقلوب

$y = \cos \theta$ فإنه لتمثيل $y = 2 \sec \theta$ ، استند من تمثيل

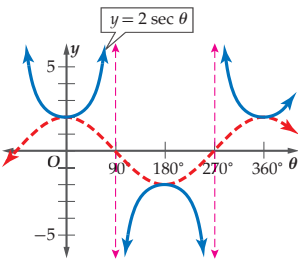
$y = 2 \cos \theta$ واتبع ما يلي:

– ارسم الدالة $y = 2 \cos \theta$.

– ارسم خطوط التقارب الرأسية عند نقاط تقاطع الدالة

$y = 2 \cos \theta$ مع محور θ .

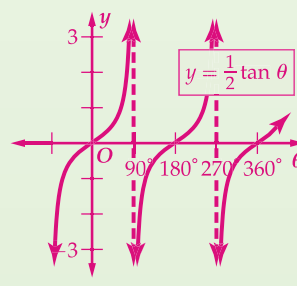
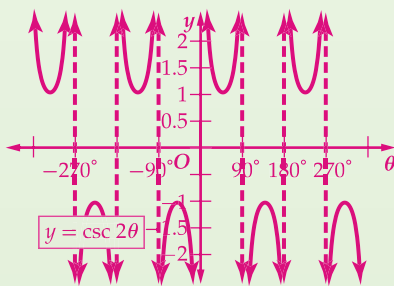
– مثل الدالة $y = 2 \sec \theta$.



إجابات (تحقق من فهمك):

(4) طول الدورة: 180°

(5) طول الدورة: 180°



5 أوجد طول دورة الدالة $y = \csc 2\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

3 التدريب

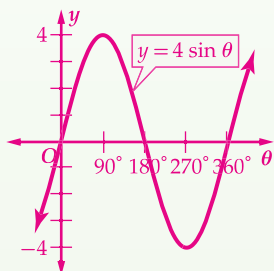
التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 8-1 للتأكد من فهم الطلبة.

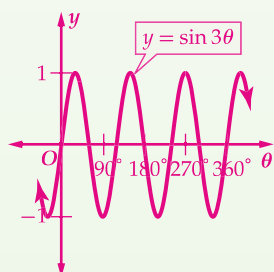
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

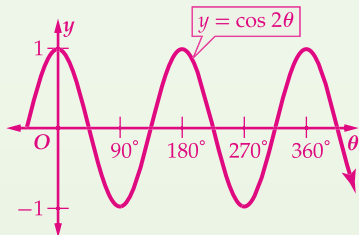
1 السعة: 4، طول الدورة: 360°



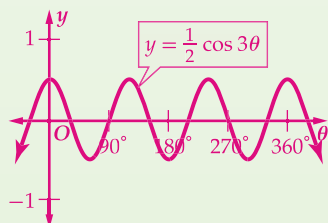
2 السعة: 1، طول الدورة: 120°



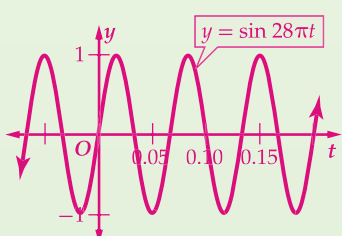
3 السعة: 1، طول الدورة: 180°



4 السعة: $\frac{1}{2}$ ، طول الدورة: 120°



5b $y = \sin 28\pi t$



تأكد

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانيًا: (1-4) انظر الهامش.

1 $y = 4 \sin \theta$ 2 $y = \sin 3\theta$ 3 $y = \cos 2\theta$ 4 $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

5 عناكب: عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

a أوجد طول دورة الدالة. $\frac{1}{14} \approx 0.07 \text{ sec}$

b افرض أن سعة الدالة وحدة واحدة. واكتب دالة جيب تمثل اهتزازات الشبكة y كدالة في الزمن t ، ومثلها بيانيًا. انظر الهامش.

أوجد طول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانيًا: (6-8) انظر ملحق الإجابات.

6 $y = 3 \tan \theta$ 7 $y = 2 \csc \theta$ 8 $y = \cot 2\theta$

تدرب وحل المسائل

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي، ثم مثلها بيانيًا:

9 $y = 2 \cos \theta$ 10 $y = 3 \sin \theta$ 11 $y = \sin 2\theta$ 12 $y = \cos 3\theta$

13 $y = \frac{3}{4} \cos \theta$ 14 $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ 15 $y = 3 \cos 2\theta$ 16 $y = 5 \sin \frac{2}{3} \theta$

17 $h = 4 \sin \frac{2}{3} \pi t$

للتمثيل البياني انظر ملحق

الإجابات.

مثال 3

18 $V = 165 \cos 100\pi t$

للتمثيل البياني انظر ملحق

الإجابات.

أمواج: قارب في عرض البحر يرتفع إلى أعلى وينخفض إلى أسفل مع الأمواج. الفرق بين أعلى ارتفاع وأقل ارتفاع للقارب 8 بوصات. ويكون القارب مستقرًا عندما يكون في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة في هذه الحركة الدورية لمدة 3 ثوانٍ. اكتب دالة جيب تمثل حركة القارب ومثلها بيانيًا. افرض أن h : الارتفاع بالبوصات، و t : الزمن بالثواني. وأن القارب يكون في وضع مستقر عند $t = 0$.

كهرباء: يتمثل فرق الجهد الكهربائي الخارج من أحد الأجهزة الكهربائية بين: 165، -165 فولت وبتردد مقداره 50 دورة في الثانية في دالة دورية. اكتب دالة جيب تمام تمثل فرق الجهد V كدالة في الزمن t ومثلها بيانيًا. افرض أنه عندما $t = 0$ فإن فرق الجهد يساوي 165 فولت.

أوجد طول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانيًا: (19-22) انظر ملحق الإجابات.

19 $y = \tan \frac{1}{2} \theta$ 20 $y = 3 \sec \theta$

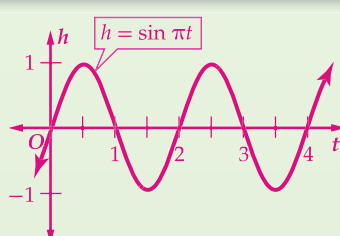
21 $y = 2 \cot \theta$ 22 $y = \csc \frac{1}{2} \theta$

الدرس 7-8 تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا 203

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	9-22، 53-44
ضمن المتوسط	9-22، 25-29 فردي، 35-44
فوق المتوسط	23-44

(23b)



4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة كتابة

دالة على الصورة $y = a \sin b\theta$ أو

$y = a \cos b\theta$ ثم تحديد سعتها وطول

دورتها، وتسليمك إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

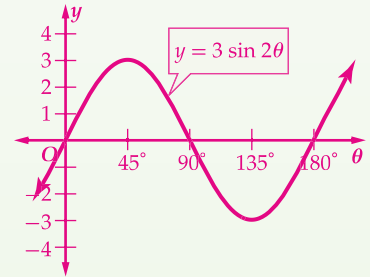
التقويم التكويني:

تحقق من فهم الطلاب للدرس 8-6، 8-7، 8-8 بإعطائهم:

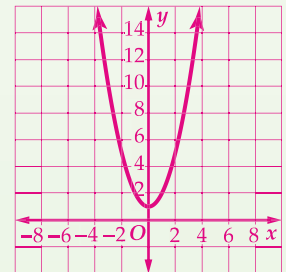
الاختبار القصير 3، ص (69)

إجابات:

(36) إجابة ممكنة: $y = 3 \sin 2\theta$



(44)



الربط مع الحياة

الزلازل عبارة عن اهتزاز أرضي سريع يتبعه ارتدادات تدعى أمواج زلزالية وهذا يعود إلى تكسر الصخور وإزاحتها نتيجة لمؤثرات جيولوجية ينجم عنها تحرك الصفائح الأرضية.

$$y = \cos 260\pi t \quad (24)$$

للممثل البياني انظر ملحق

الإجابات: تبقى السعة نفسها.

طول الدورة يتناقص لأنها

تساوي مقلوب التردد.

(23) **زلازل:** محطة لرصد الزلازل رصدت موجة زلزالية ذات تردد 0.5 هيرتز وسعتها تساوي مترًا واحدًا.

(a) اكتب دالة جيب تمثل ارتفاع الموجة h كدالة في الزمن t .

افترض أن نقطة الاتزان للموجة $h = 0$ تقع في منتصف

المسافة بين أخفض نقطة وأعلى نقطة في الموجة. $h = \sin \pi t$

(b) مثل هذه الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

(24) **اهتزازات:** سلك مشدود بين نقطتين يهتز بتردد 130 هيرتز. اكتب دالة جيب التمام التي تمثل اهتزازات

السلك y كدالة في الزمن t ومثلها بيانيًا. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. وإذا تضاعف التردد، فماذا

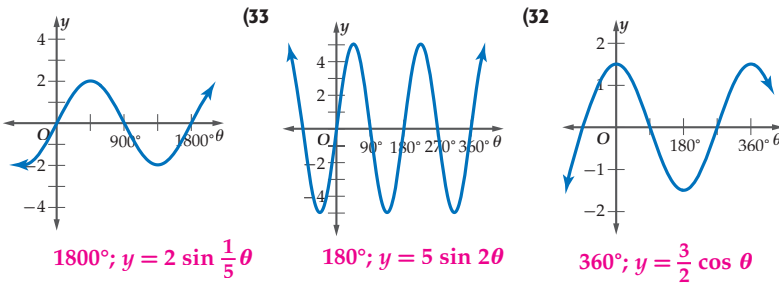
يحصل لكل من طول الدورة والسعة؟

أوجد السعة، (إن كانت معروفة) وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثلها بيانيًا: (25-30) انظر ملحق الإجابات.

$$y = 2 \tan \frac{1}{2} \theta \quad (27) \quad y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4} \theta \quad (26) \quad y = 3 \sin \frac{2}{3} \theta \quad (25)$$

$$y = 2 \cot 6\theta \quad (30) \quad y = 5 \csc 3\theta \quad (29) \quad y = 2 \sec \frac{4}{5} \theta \quad (28)$$

حدد طول دورة كل من الدوال الممثلة بيانيًا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:



(34) مجال الدالة: $y = a \cos \theta$

هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

مجال الدالة: $y = a \sec \theta$

هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء

الأعداد التي يكون فيها: $\cos \theta = 0$.

مدى الدالة $y = a \cos \theta$ يساوي

$\{y \mid -a \leq y \leq a\}$.

ومدى الدالة $y = a \sec \theta$ يساوي

$\{y \mid y \leq -a \text{ أو } y \geq a\}$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(34) **تحديد:** حدد المجال والمدى لكل من الدالتين $y = a \cos \theta$ ، $y = a \sec \theta$ حيث a عدد حقيقي موجب.

(35) مجال كل منهما مجموعة الأعداد

الحقيقية، للدالة $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ سعة تساوي $\frac{1}{2}$ ، وطول الدورة 360° .

سعة منحنى الدالة: $y = \sin \frac{1}{2} \theta$

تساوي 1 وطول الدورة 720° .

(36) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة مثلثية سعتها 3، وطول دورتها 180° . ثم مثلها بيانيًا. **انظر الهامش.**

(37) **اكتب:** وضح كيف تُحسب سعة الدالة $y = -2 \sin \theta$. وضح كيف يؤثر المعامل السالب في التمثيل البياني للدالة.

أوجد القيمة المطلقة للعدد -2 والتي تساوي 2. المعامل السالب يحدث انعكاسًا للتمثيل البياني للدالة حول المحور x .

تنويع التعليم

ضمن هوك

توسّع: اطلب إلى الطلبة تمثيل الدوال $y = \sin(\theta - \pi)$ ، $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ ، $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ بيانيًا، ثم

توضيح تأثير طرح مقدار من الزاوية θ على التمثيل البياني للدالة. المقدار الذي يطرح من θ يحدد مقدار إزاحة

التمثيل البياني للدالة $y = \sin \theta$ إلى اليمين.

تدريب على اختبار

(38) إجابة قصيرة: أوجد الحد رقم 100001 في المتتابعة: 700013

13, 20, 27, 34, 41, ...

(39) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟ B

75% D 66% C 34% B 25% A

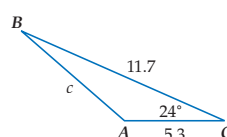
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 8-3)

(42) $4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$

(41) $3(\sin 45^\circ)(\sin 60^\circ)$

(40) $\cos 120^\circ - \sin 30^\circ$



(43) حلّ المثلث المجاور، مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، والزائتين إلى أقرب درجة. (الدرس 8-5)

$B \approx 17^\circ, A \approx 139^\circ, c \approx 7.2$

(44) مثل الدالة $y = x^2 + 1$ بيانياً. (مهارة سابقة) انظر الهامش



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 8

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36)

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (37)

دون

8-7 تدريبات إعادة التعليم تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

دوال الجيب، جيب التمام، والظل، يمكن تمثيل الدوال المثلثية بيانياً في المستوى الإحداثي. أمثلة الدوال الدورية كلها أمثلة متكررة أو دورات، والطول الأفقي لكل دورة يسمى طول الدورة. وسعة منحنى كل من دالة الجيب ودالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل دالة منها. وتوجد خطوط تقارب لمنحنى دالة (الظل).

دوال الجيب، جيب التمام، والظل	الدالة الأم	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	الدالة الأم
$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$	$y = \tan \theta$	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$
$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$\{y \mid y \neq 0\}$
غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة
طول الدورة	360°	360°	360°	360°

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة بيانياً:

(a) $y = 4 \cos \theta$ (b) $y = -\frac{1}{2} \tan 2\theta$

السعة: $|a| = 4$ ، إذن السعة = 4، طول الدورة: $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

ليس هذه الدالة سعة (السعة غير معرفة)، وطول الدورة 90°.

استعمل كل من السعة وطول الدورة لتمثيل الدالة بيانياً.

تمارين

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثلها بيانياً:

(1) $y = -3 \sin \theta$ (2) $y = 2 \tan \frac{\theta}{2}$

3; 360° لا توجد سعة، 360°

الفصل 8، حساب المثلثات

36

الصف، الثاني الثانوي

8-7 تدريبات إعادة التعليم تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

متنحيت الدوال المثلثية الأخرى، ترتبط متنحيت الدوال المثلثية: القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام بمتنحيت الدوال المثلثية: جيب التمام، والجيب، والظل.

دوال الجيب، جيب التمام، والظل	الدالة الأم	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	الدالة الأم
$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$	$y = \tan \theta$	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$
$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$\{y \mid y \neq 0\}$
غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة
طول الدورة	360°	360°	360°	360°

أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2} \csc \theta$ ، ثم مثلها بيانياً.

لأن $\csc \theta$ مغلوب $\sin \theta$ فإن للدالتين طول الدورة نفسه، وخطوط التقارب الرأسية تحصل عند: $\theta = 0^\circ, \theta = 180^\circ, \theta = 360^\circ$.

ارسم منحنى الدالة $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ ، ثم استعمله لرسم منحنى الدالة $y = \frac{1}{2} \csc \theta$.

تمارين

أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين، ثم مثلها بيانياً:

(1) $y = \cot 2\theta$ (2) $y = \sec 3\theta$

90° 120°

الفصل 8، حساب المثلثات

37

الصف، الثاني الثانوي

تدريبات المهارات (38)

دون ضمن

تدريبات حل المسألة (39)

دون ضمن

8-7 تدريبات المهارات تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة بيانياً:

(1) $y = 2 \cos \theta$ (2) $y = 4 \sin \theta$ (3) $y = 2 \sec \theta$

2; 360° 4; 360° لا توجد سعة، 360°

تمارين

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثلها بيانياً:

(4) $y = \frac{1}{2} \tan \theta$ (5) $y = \sin 3\theta$ (6) $y = \csc 3\theta$

لا توجد سعة، 180° 1; 120° لا توجد سعة، 120°

تمارين

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثلها بيانياً:

(7) $y = \tan 2\theta$ (8) $y = \cos 2\theta$ (9) $y = 4 \sin \frac{1}{2} \theta$

لا توجد سعة، 90° 1; 180° 4; 720°

الفصل 8، حساب المثلثات

38

الصف، الثاني الثانوي

8-7 تدريبات حل المسألة تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

(1) هذيان، بين الجدول الآتي الدوال التي تمثل أنماط موجات أثان الضوء المختلفة الصادرة من مصدر ضوئي معين، حيث y ارتفاع الموجة بالنانومتر، و t الزمن من بداية الموجة بالنانومتر.

اللون

أخر

برتقالي

أصفر

أخضر

أزرق

بنفسجي

(a) ما سعة وطول دورة الدالة التي تمثل موجات اللون الأخضر؟

200 نانومتر، 520 نانومتر

(b) تتناسب شدة موجة الضوء طردياً مع سعة الموجة. فأين الألوان له أكبر شدة موجة؟

الأصفر

(c) يعتمد لون الضوء على طول دورة الموجة، فأين الألوان له أقصر طول دورة؟ وأين له أكبر طول دورة؟

الأحمر والبنفسجي

(2) سياحة، يمكن تمثيل موقع ذراع سياح خلال السياحة بالنسبة لسطح الماء بالشكل أدناه، حيث y تمثل ارتفاع الذراع من سطح الماء باليوتات، و t الزمن بالتوالي من بدء السياحة. في الدالة التي تمثل هذا الوضع؟

$y = 8 \sin \left(\frac{4\pi}{3} t \right)$

(3) بيعة، يمكن تمثيل كثافة أوراق الشجر في إحدى الغابات بالدالة $y = 20 + 15 \sin \left(\frac{\pi}{6} (t-3) \right)$ ، حيث y عدد أوراق الشجر في القدم المربعة الواحدة، و t عدد الأشهر بعد شهر يناير.

(a) أوجد طول دورة هذه الدالة؟ وما الذي تمثله هذه الدورة؟

طول دورة الدالة 12، ويقش الدورة عاماً كاملاً.

(b) ما أكبر قيمة لكثافة الأوراق في هذه الغابة؟ وفي أي شهر يكون ذلك؟

35 ورقة لكل قدم مربعة، يوليو

الفصل 8، حساب المثلثات

39

الصف، الثاني الثانوي



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 8

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (40)

ضمن **فوق**

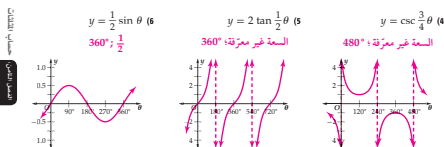
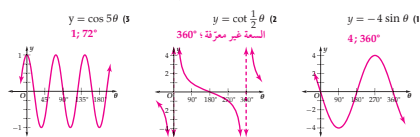
كتاب التمارين (27)

دون ضمن فوق

8-7

تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

أوجد السعة (إذا كانت معرفة)، وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً:



7. تؤثر في السارية الميئية في الشكل المجاور قوة مقدارها 500 نيوتن. هذه القوة لها مركبتان F_1 و F_2 ورأسية F_2 . (القوة التي مقدارها 1 نيوتن هي القوة التي تعطي تسارعاً مقداره 1 m/sec^2 لـ جسم كتلته 1 kg).

(a) إذا كانت الدالة: $F_x = 500 \cos \theta$ تمثل العلاقة بين الزاوية θ ومركبة القوة الأفقية. فما قيمة كل من سعة هذه الدالة وطول دورتها؟ $500; 360^\circ$

(b) إذا كانت الدالة $F_y = 500 \sin \theta$ تمثل العلاقة بين الزاوية θ ومركبة القوة الرأسية. فما قيمة كل من سعة هذه الدالة وطول دورتها؟ $500; 360^\circ$

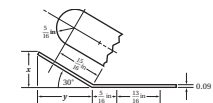
27

8-7 التدريبات الاثرية

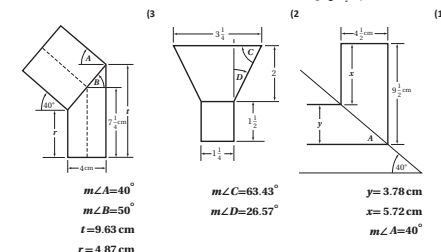
مخططات هندسية

تتطلب تنفيذ المخططات الهندسية القدرة على اختبار الدوال الثلاثية والخصائص الهندسية واستعمالها. ففروس الأشكال الهندسية ليس لها أسوأ في هذه المخططات. لذا يتعين اختيار المعلومات ذات العلاقة، واستعمال الدوال المناسبة لإيجاد تقياسات المجهولة.

أوجد القياسين المجهولين في المخطط المجاور.



أوجد القياسات المجهولة في كل من المخططات



الفصل ٨ : حساب التفاضل

40

وصف: الثاني، الثاني،

ملاحظات المعلم

الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

لماذا؟

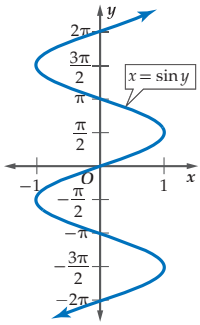
لقد تعلمت كيف تستعمل الدوال المثلثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in ويصل ارتفاعه إلى 75 in. ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالة الظل.

$$\tan \theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلها 0.2 مستعملاً الآلة الحاسبة.

$$\text{trig} \quad \tan^{-1} \quad 0.2 \quad \text{enter} \quad 11.30993247$$

إذن قياس الزاوية θ حوالي 11° .



معكوس الدالة المثلثية إذا علمت قيمة الدالة المثلثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. تذكر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x, y . فمعكوس: $y = \sin x$ هو $x = \sin y$ ، الممثل بيانياً في الشكل المجاور.

لاحظ أن معكوس الدالة ليس دالة لوجود عدد من قيم y لكل قيمة من قيم x .

لكن إذا تم تحديد مجال الدالة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، فإن المعكوس يكون دالة عكسية.

تُسمى القيم في هذا المجال المحدد **القيم الأساسية**. فالدوال المثلثية ذات المجال المحدد تُمثل بأحرف كبيرة، هكذا:

$$y = \sin x \text{ إذا فقط إذا كان } x \text{ في } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos x \text{ إذا فقط إذا كان } x \text{ في } 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = \tan x \text{ إذا فقط إذا كان } x \text{ في } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

يمكن استعمال الدوال ذات المجالات المحددة لتعريف دوال عكسية: لكل من دالة الجيب، ودالة جيب التمام ودالة الظل وهي **دالة الجيب العكسية**، **دالة جيب التمام العكسية**، و**دالة الظل العكسية** كما يأتي:

نموذج	المدى	المجال	الرموز	الدالة العكسية
	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$	$-1 \leq x \leq 1$	$y = \text{Arcsin } x$ $y = \sin^{-1} x$	دالة الجيب العكسية
	$0 \leq y \leq \pi$ $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$	$-1 \leq x \leq 1$	$y = \text{Arccos } x$ $y = \cos^{-1} x$	دالة جيب التمام العكسية
	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ < y < 90^\circ$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$y = \text{Arctan } x$ $y = \tan^{-1} x$	دالة الظل العكسية

فيما سبق:

درست تمثيل الدوال المثلثية بيانياً.

والآن:

- أجد قيم الدوال المثلثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.

المفردات:

القيم الأساسية
principal values

دالة الجيب العكسية
Arcsine function

دالة جيب التمام العكسية
Arccosine function

دالة الظل العكسية
Arctangent function

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-8

تمثيل الدوال المثلثية بيانياً.

الدرس 8-8

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية.

حل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.

ما بعد الدرس 8-8

تعريف الدوال المثلثية العكسية وتمثيلها بيانياً.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- كيف يمكن إيجاد طول رف الكتب المائل؟ ثم أوجده.

استعمل نظرية فيثاغورس؛

$$s^2 = 15^2 + 75^2 = 5850; s \approx 76.485 \text{ in}$$

- ما النسبة التي تمثل $\sin \theta$ ؟ $\frac{15}{76.485}$

- ما النسبة التي تمثل $\cos \theta$ ؟ $\frac{75}{76.485}$

- استعمل القيم التي حصلت عليها لكل من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ لإيجاد قيمة θ . هل حصلت على القيمة نفسها؟

نعم؛ القيمة نفسها للزاوية θ ، 11.31° .

باستعمال كل من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$.

مصادر الدرس 8-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (208)	• تنويع التعليم، ص (208)	• تنويع التعليم، ص (210)
كتاب التمارين	• ص (28)	• ص (28)	• ص (28)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)

مراجعة المفردات

الدوال العكسية

إذا كانت f و f^{-1} دالتين عكسيتين، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية

تذكر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالة المثلثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

في العلاقة $y = \cos^{-1} x$ ، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = 60^\circ$ ، 300° ، كما أن كل زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين بصلع الانتهاء تعد قيمة لـ y أيضاً. أما في الدالة $y = \cos^{-1} x$ ، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = 60^\circ$ فقط.

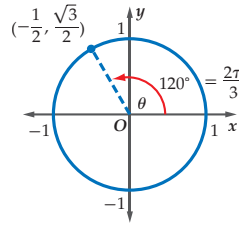
مثال 1

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (a)$$

المطلوب إيجاد الزاوية θ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.



الطريقة 1 استعمال دائرة الوحدة

أوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثياتها x هو $-\frac{1}{2}$.

نلاحظ أن: $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ عندما $\theta = 120^\circ$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

الطريقة 2 استعمال الزاوية المرجعية

بما أن المطلوب $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني.

أوجد الزاوية الحادة (المرجعية θ')

بما أن $\cos \theta' = \frac{1}{2}$ فإن $\theta' = 60^\circ$

$$\theta = 180^\circ - \theta' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

θ زاوية تقع في الربع الثاني

الطريقة 3 استعمال الآلة الحاسبة

المفاتيح: $\cos^{-1}$ $(-)$ 1 $\div$ 2 enter 120

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

Arctan 1 (b)

المطلوب إيجاد الزاوية θ في الفترة $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ والتي ظلها يساوي 1.

المفاتيح: $\tan^{-1}$ 1 enter 45

$$\text{Arctan } 1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$\cos^{-1} 0 \quad (1a) \quad \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1b) \quad \tan^{-1} 1$$

$$\cos^{-1} 0 \quad (1a) \quad \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1b) \quad \tan^{-1} 1$$

الدوال المثلثية العكسية:

المثال 1 يبين كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية بالدرجات وبالراديان.

المثال 2 يبين كيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيم عبارات تحتوي دوال مثلثية عكسية.

التقويم التكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد قياس الزاوية في كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان.

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (a) \quad 45^\circ; \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arcsin}(-1) \quad (b) \quad -90^\circ; -\frac{\pi}{2}$$

2 أوجد قيمة $\tan\left(\cos^{-1}\frac{4}{7}\right)$.
قرب إلى أقرب جزء من مئة. 1.44

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل فيديو: أنتج شريط فيديو توضح فيه كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية. ثم ضع هذا الشريط في مكتبة المدرسة أو حمّله على موقع إلكتروني؛ كي يستعمله الطلبة مرجعاً إضافياً خارج الفصل.

إرشادات للمعلم الجديد

تطوير الحس الرياضي: إذا قرأ الطلبة دالة معكوس الجيب $\sin^{-1} x$ على صورة (الزاوية التي جيبها x)، فإن هذا سيساعدهم على فهم طبيعة الدالة المثلثية العكسية.

المحتوى الرياضي

الدوال المثلثية العكسية: بما أن الدوال المثلثية هي دوال دورية، لذا فإن العديد من الزوايا ترتبط بقيمة واحدة للدالة، وبالتالي فإن معكوس أي دالة من الدوال المثلثية ليس دالة (لأن قيمة المعكوس ليست وحيدة). ولكن عند تحديد المجال ضمن فترة معينة مناسبة، فإن المعكوس يصبح دالة. وبما أن هناك عدداً لا نهائياً من هذه الفترات فإن الفترات المعيارية المختارة هي تلك التي يكون الصفر مركزاً لها أو أحد نهايتها.

عند حساب قيمة معينة بوجود عدد من الدوال المثلثية، استعمل ترتيب العمليات الحسابية للحل.

مثال 2 إيجاد قيمة مثلثية

أوجد قيمة $\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{2} \right)$ مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.
استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: $\tan^{-1}$ $\cos^{-1}$ 1 $\div$ 2 enter 1.732050808
إذن $\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{2} \right) \approx 1.73$
تحقق: $\cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ$, $\tan 60^\circ \approx 1.73$
إذن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة:

$$(2A) \sin \left(\tan^{-1} \frac{3}{8} \right) \quad (2B) \cos \left(\arccos -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 0.71$$

المعادلة المثلثية هي معادلة تحتوي على دوالً مثلثية بزوايا مجهولة القيم. وحل المعادلة المثلثية يعني إيجاد قيم الزوايا المجهولة والتي دوالها المثلثية تجعل المعادلة المثلثية صحيحة.

حل المعادلات باستعمال الدوال العكسية يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية؛ لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 3 على اختبار

إذا كان $\sin \theta = -0.35$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي:
A -20.5° B -0.6° C 0.6° D 20.5°

اقرأ فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35 . ويمكن كتابة هذا على الصورة: $\theta = \arcsin(-0.35)$.

حل فقرة الاختبار

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: $\sin^{-1}$ $(-)$ 0.35 enter -20.48731511
إذن $\theta \approx -20.5^\circ$. الإجابة الصحيحة هي A.

تحقق من فهمك

(3) إذا كان $\tan \theta = 1.8$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي: C

A 0.03°

B 29.1°

C 60.9°

D لا يوجد حل

إرشادات للدراسة

وضع الآلة الحاسبة

تأكد من إعدادات
الحاسبة البيانية لقياس
الزوايا بالدرجات
بالضغط على المفاتيح
 Mode Settings
2:Settings 1:General
وتأكد من أن الزاوية
مثبتة على القياس
بالدرجة (Degree).

حل المعادلات باستعمال الدوال العكسية

المثال 3 يبين كيفية حل معادلة باستعمال دالة مثلثية عكسية.

المثال 4 يبين كيفية استعمال دالة مثلثية عكسية لحل مسألة من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

مثال على اختبار:

إذا كان $\cos \theta = -0.86$ ،
فأوجد θ D

A -149.3° C 59.3°

B -59.3° D 149.3°

لعبة التزحلق:

المثال 4 أن ارتفاع اللعبة 5.5 أقدام، وطولها 12 قدماً. واكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس θ . ثم أوجد قياس θ . قُرب إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\sin \theta = \frac{5.5}{12};$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{5.5}{12} \approx 27.3^\circ$$

إرشادات للاختبار

حذف البدائل

إشارة $\sin \theta$ تُحدّد
قياس الزاوية في الربع
الأول أو الربع الرابع،
وبما أن -0.35 قيمة
سالبة، فابحث عن زاوية
في الربع الرابع.

تنوع التعليم

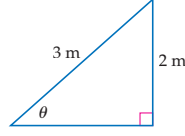
دون ضمن

المتعلمون البصريون اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة $\arcsin 2$. إذا استعمل الطلبة الآلة الحاسبة، فاقترح عليهم دراسة التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$ لتوضيح سبب حصولهم على رسالة تبين أن هناك خطأ قد وقع. لا يوجد للدالة $y = \sin x$ قيم للمتغير y أكبر من 1 أو أقل من -1.

يمكنك استعمال الدوال المثلثية العكسية؛ لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في مثلث قائم الزاوية بمعرفة طولي ضلعين فيه.

استعمال الدوال المثلثية العكسية

مثال 4 من واقع الحياة



لعبة التزلج: لعبة تزلج للأطفال، ارتفاعها 2 m ، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قيمة الزاوية θ التي تصنعها لعبة التزلج مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

بما أن طول الضلع المقابل وطول الوتر معلومان، فيمكن استعمال دالة الجيب.

$$\text{دالة الجيب} \quad \sin \theta = \frac{2}{3}$$

$$\text{دالة معكوس الجيب} \quad \theta = \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

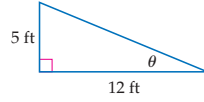
$$\text{استعمل الآلة الحاسبة} \quad \theta \approx 41.8^\circ$$

إذن قياس الزاوية يساوي 41.8° تقريباً.

تحقق باستعمال الآلة الحاسبة، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{2}{3}$.

أي أن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك



(4) **تزلج** يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\theta = \tan^{-1} \frac{5}{12}; 22.6^\circ$$

3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1-11 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

وضع الآلة الحاسبة: ذكر الطلبة بوضع آلاتهم الحاسبة على الحالة المناسبة (درجات أو راديان) بناءً على الإجابة المطلوبة بالضغط على المفاتيح:

Settings 2: Settings

1: General

واختيار القياس المطلوب بالدرجات أو بالراديان.

تأكد

مثال 1 أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات، وبالراديان.

$$(1) \quad 30^\circ; \frac{\pi}{6} \quad \sin^{-1} \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad -60^\circ; -\frac{\pi}{3} \quad \arctan(-\sqrt{3})$$

$$(3) \quad 180^\circ; \pi \quad \arccos(-1)$$

مثال 2 أوجد قيمة كل مما يأتي، مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

$$(4) \quad 0.6 \quad \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$$

$$(5) \quad 0 \quad \tan(\cos^{-1} 1)$$

$$(6) \quad 0.87 \quad \sin\left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

مثال 3 (7) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\sin \theta = 0.422$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي: A

65° D

48° C

42° B

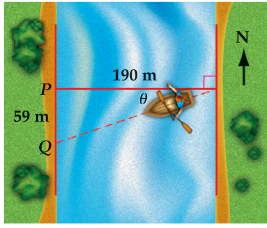
25° A

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
42-47 ، 12-30	دون المتوسط دون
42-47 ، 37 ، 30 ، 13-39 فردي	ضمن المتوسط ضمن
31-47	فوق المتوسط فوق

حلّ كلّ من المعادلات الآتية مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

$$64.5^\circ \quad \tan \theta = 2.1 \quad (10) \quad -27.4^\circ \quad \sin \theta = -0.46 \quad (9) \quad 25.8^\circ \quad \cos \theta = 0.9 \quad (8)$$



مثال 4 (11) **قوارب:** يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهراً عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد الزاوية θ التي أزع التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة كلّ مما يأتي بالدرجات، وبالراديان .

$$30^\circ; \frac{\pi}{6} \quad \text{Arccos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (13) \quad 60^\circ; \frac{\pi}{3} \quad \text{Arcsin} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (12)$$

$$60^\circ; \frac{\pi}{3} \quad \tan^{-1} \sqrt{3} \quad (15) \quad -90^\circ; -\frac{\pi}{2} \quad \sin^{-1} (-1) \quad (14)$$

$$-30^\circ; -\frac{\pi}{6} \quad \text{Arctan} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (17) \quad 150^\circ; \frac{5\pi}{6} \quad \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (16)$$

مثال 2 أوجد قيمة كلّ مما يأتي مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة .

$$-0.58 \quad \tan \left[\text{Arcsin} \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \quad (19) \quad 0 \quad \tan (\cos^{-1} 1) \quad (18)$$

$$0.87 \quad \sin (\text{Arctan} \sqrt{3}) \quad (21) \quad 0.86 \quad \cos \left(\tan^{-1} \frac{3}{5} \right) \quad (20)$$

$$0.71 \quad \sin \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \quad (23) \quad 0.90 \quad \cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{9} \right) \quad (22)$$

مثال 3 حلّ كلّ من المعادلات الآتية مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك .

$$64.2^\circ \quad \sin \theta = 0.9 \quad (25) \quad 75.3^\circ \quad \tan \theta = 3.8 \quad (24)$$

$$104.5^\circ \quad \cos \theta = -0.25 \quad (27) \quad \sin \theta = -2.5 \quad \text{لا يوجد حل} \quad (26)$$

$$-11.3^\circ \quad \tan \theta = -0.2 \quad (29) \quad 55.9^\circ \quad \cos \theta = 0.56 \quad (28)$$

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في سؤال 38 يجب أن يعرف الطلبة أن الطالبين لم يجيبا إجابة صحيحة؛ لأن هذا السؤال خادع. وضّح للطلبة أن الدالة $\cos \theta$ يجب أن تكون قيمتها سالبة لكل $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة كتابة مجال ومدى كل من الدوال Arcsin ، Arccos ، و Arctan . وتسليم أوراقهم قبل مغادرتهم غرفة الفصل.

التقويم التكويني

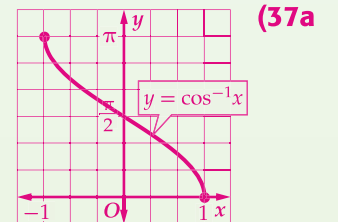
تحقق من فهم الطلاب للدرسي 8-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

تمثيلات متعددة:

في السؤال 37، التمثيل البياني، والرموز والحساب العددي للدالة لاستكشاف دالة معكوس جيب التمام.

إجابات:



المجال: $-1 \leq x \leq 1$ ؛

المدى: $0 \leq y \leq \pi$

(37c) إجابة ممكنة: مجال الدالة

$y = \cos x$ هو كل الأعداد الحقيقية ومداهما يتراوح من -1 إلى 1. أما مجال الدالة $y = \cos^{-1} x$ فيقع بين 1، -1 ومداهما من 0 إلى 180° .

(40) إجابة ممكنة: مدى كل من الدالتين

$y = \cos x$ ، $y = \sin x$

هو $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

بينما مدى الدالة:

$y = \tan^{-1} x$

هو: مجموعة الأعداد الحقيقية.

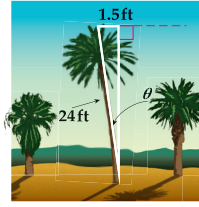
تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة إكمال الجدول الآتي باستعمال الدالة $y = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
y	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

ثم اطلب إليهم وضع تخمين حول الدالة $y = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ لجميع قيم x .



مثال 4 (30) نخيل: شجرة نخيل طولها 24 ft، تميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 1.5 ft كما في الشكل، اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تميل بها الشجرة ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\text{Arcsin } \frac{1.5}{24}; 3.6^\circ$$

حلّ كلًا من المعادلات الآتية حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\sec \theta = 1 \quad (33) \quad 0, 2\pi$$

$$\sec \theta = -1 \quad (32) \quad \pi$$

$$\csc \theta = 1 \quad (31) \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\sec \theta = 2 \quad (36) \quad \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\cot \theta = 1 \quad (35) \quad \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{2} \quad (34) \quad \text{لا يوجد حل}$$

(37) تمثيلات متعددة: معبرًا $x = \cos^{-1} y$. (a) انظر الهامش.

- (a) بيانيًا: مثل الدالة بيانيًا. وأوجد المجال والمدى.
(b) عدديًا: اختر قيمة للمتغير x بين 0، -1. ثم أوجد قيمة الدالة عندها إلى أقرب جزء من عشرة.
(c) تحليليًا: قارن بين التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ ، والتمثيل البياني للدالة $y = \cos^{-1} x$. انظر الهامش.

مسائل مهارات التفكير العليا

(38) اكتشف الخطأ: قام كل من خليل وعبدالرحمن بحل المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

عبدالرحمن

$$\cos \theta = 0.3$$

$$\cos^{-1} 0.3 = 162.5^\circ$$

خليل

$$\cos \theta = 0.3$$

$$\cos^{-1} 0.3 = 72.5^\circ$$

(39) تبرير: وضح كيف يرتبط مجال الدالة $y = \sin^{-1} x$ مع مدى الدالة $y = \sin x$.

(40) فسر لماذا كل من $\sin^{-1} 8$ ، $\cos^{-1} 8$ غير معرفة، بينما $\tan^{-1} 8$ معرفة. انظر الهامش.



الربط مع الحياة

النخلة من الأشجار المعمرة التي يصل عمرها إلى 150 عامًا. ويُستدل على عمرها من بقايا قواعد الأوراق التي تظهر على هيئة درجات، وكل 3 منها فوق بعضها على خط واحد تمثل عامًا من عمر النخلة.

(38) إجابة ممكنة: كلاهما

أخطأ، حيث إن جيب التمام ليس موجبًا في الربع الثاني.

(39) مجال الدالة

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

ويساوي مدى الدالة

$$y = \sin x$$

تدريب على اختبار

(42) إذا كان $g(x) = 4 - 2x$ ، $f(x) = 2x^2 - 3x$ ، فأوجد $g[f(x)]$ ؟

B

$$g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2 \quad A$$

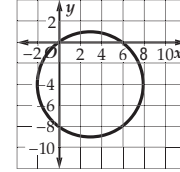
$$g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2 \quad B$$

$$g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2 \quad C$$

$$g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2 \quad D$$

(41) إجابة قصيرة: أوجد معادلة الدائرة الممثلة في الشكل الآتي:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$



مراجعة تراكمية

(43) أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4 \cos 2\theta$ ، ثم مثل هذه الدالة بيانيًا. انظر ملحق الإجابات

أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \sec \frac{7\pi}{6} \quad (47)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 300^\circ \quad (46)$$

$$-\sqrt{3} \tan 120^\circ \quad (45)$$

$$-1 \cos 3\pi \quad (44)$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 8

دون فوق المتوسط

ضمن فوق المتوسط

فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (41)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية العكسية

معكوس الدالة المثلثية: إذا عُلمت قيمة دالة مثلثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. وإذا حدّدت مجال الدالة، بحيث يكون المعكوس دالة فإن القيم ضمن هذا المجال المحدد تسمى القيم الأساسية.

القيم الأساسية للجنب والجيب والظل	$y = \sin x$ إذا وقطع $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، فإن معكوس دالة الجيب يعرف على النحو الآتي: $x = \sin^{-1} y$ أو $y = \text{Arcsin } x$ $y = \cos x$ إذا وقطع $0 \leq x \leq \pi$ ، فإن معكوس دالة الجيب يعرف على النحو الآتي: $x = \cos^{-1} y$ أو $y = \text{Arc cos } x$ $y = \tan x$ إذا وقطع $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، فإن معكوس دالة الظل يعرف على النحو الآتي: $x = \tan^{-1} y$ أو $y = \text{Arctan } x$
-----------------------------------	---

مثال 1

أوجد قيمة $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، واكتب قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ التي جيبها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وقطع في الفترة $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ باستعمال دائرة الوحدة.

القطعة التي تقع على دائرة الوحدة وإحداثياتها العكسي هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، هي $\frac{\pi}{3}$ أو 60° .

لذا فإن $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

أوجد قيمة $\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} \right)$ إلى أقرب جزء من مئة.

لتكن $\frac{1}{2} = \sin^{-1} \theta$ ، فإن $\sin \theta = \frac{1}{2}$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، القيمة $\frac{\pi}{6}$ تحقق الشرطين معاً.

لذا $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ لذا $\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

تصادين

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات، وبالراديان:

(1) $\cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	(2) $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	(3) $\text{Arccos} \left(-\frac{1}{2} \right)$
30° ; $\frac{\pi}{6}$	-60° ; $-\frac{\pi}{3}$	120° ; $2\pi/3$
(4) $\text{Arctan } \sqrt{3}$	(5) $\text{Arccos} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$	(6) $\tan^{-1} (-1)$
60° ; $\frac{\pi}{3}$	135° ; $3\pi/4$	-45° ; $-\frac{\pi}{4}$

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقرّباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

(7) $\cos \left\{ \sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$	(8) $\tan \left\{ \text{Arcsin} \left(-\frac{5}{12} \right) \right\}$	(9) $\sin \left(\tan^{-1} \frac{5}{12} \right)$
0.71	-1.02	0.98
(10) $\cos [\text{Arctan} (-0.7)]$	(11) $\cos (\text{Arctan } 5)$	(12) $\sin (\cos^{-1} 0.3)$
0.71	0.20	0.95

الفصل 8، حساب المثلثات

41

الصف: الثاني الثانوي

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (42)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية العكسية

حلّ المعادلات باستعمال الدوال العكسية: يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية لإيجاد قياس زاوية ما.

مثال: حلّ المعادلة $\sin \theta = -0.25$ مقرّباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

جيب زاوية ما هو -0.25 ، ويمكن إعادة كتابة هذا على النحو الآتي: $\theta = \sin^{-1}(-0.25) = \text{Arc sin}(-0.25)$

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد الحل.

استعمل القايح: $\sin^{-1}(-0.25) = -14.47751219^\circ \approx -14.5^\circ$ ، لذا فإن $\theta = -14.5^\circ$.

تصادين

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، مقرّباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

(1) $\sin \theta = 0.8$	(2) $\tan \theta = 4.5$
53.1°	77.5°

(3) $\cos \theta = 0.5$	(4) $\cos \theta = -0.95$
60.0°	161.8°

(5) $\sin \theta = -0.1$	(6) $\tan \theta = -1$
-5.7°	-45.0°

(7) $\cos \theta = 0.52$	(8) $\cos \theta = -0.2$
58.7°	101.5°

(9) $\sin \theta = 0.35$	(10) $\tan \theta = 8$
20.5°	82.9°

الفصل: الثاني الثانوي

42

الفصل 8، حساب المثلثات

تدريبات المهارات (43)

دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات المهارات

الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

(1) $\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$	(2) $\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
45° ; $\frac{\pi}{4}$	150° ; $5\pi/6$

(3) $\tan^{-1} \sqrt{3}$	(4) $\text{Arctan} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$
60° ; $\frac{\pi}{3}$	-30° ; $-\frac{\pi}{6}$

(5) $\text{Arccos} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$	(6) $\text{Arcsin } 1$
135° ; $3\pi/4$	90° ; $\frac{\pi}{2}$

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقرّباً الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

(7) $\sin (\cos^{-1} 1)$	(8) $\sin \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} \right)$
1	0.5
(9) $\tan \left(\text{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	(10) $\cos (\tan^{-1} 3)$
1.73	0.32

(11) $\sin [\text{Arctan} (-1)]$	(12) $\sin \left[\text{Arccos} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$
-0.71	0.71

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، مقرّباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

(13) $\cos \theta = 0.25$	(14) $\sin \theta = -0.57$
75.5°	-34.8°

(15) $\tan \theta = 5$	(16) $\cos \theta = 0.11$
78.7°	83.7°

(17) $\sin \theta = 0.9$	(18) $\tan \theta = -11.35$
64.2°	-85°

$\sin \theta = 1$	$\tan \theta = -0.01$
90°	-0.6°

$\cos \theta = -0.36$	$\tan \theta = -16.6$
111.1°	-86.6°

الفصل 8، حساب المثلثات

43

الصف: الثاني الثانوي

تدريبات حل المسألة (44)

دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية العكسية

(1) أبواب: خرج مطبخ أحد المطاعم له زوج من الأبواب المتأرجحة التي تلتقي في منتصف المخرج، وكل باب منها عرضه 3 ft. ويريد عامل مطعم أن ينقل عربة أطباق عرضها قدمان من المطبخ إلى غرفة الطعام.

3ft 3ft

(a) ما أصغر زاوية θ يجب أن يفتح بها كلا البابين حتى تخرج العربة؟

48.2°

(b) إذا كان من الممكن فتح باب واحد فقط، في أصغر زاوية θ يمكن أن يفتح بها الباب بحيث تخرج العربة؟

70.5°

(c) إذا استبدل زوج الأبواب المتأرجحة بباب واحد مفرد، عرضه مساو لعرض المخرج، في أصغر زاوية θ يتعين أن يفتح بها الباب، بحيث تخرج العربة؟

48.2°

(2) مساحة الأراضي: من المعروف منذ القدم أن المثلث الذي أطوال أضلاعه 3، 4، 5 وحدات هو مثلث قائم الزاوية، لذا استعمل مشأحو الأراضي حبالاً بعقد عند كل وحدة طول لضمان أن يكون المثلث قائم الزاوية.

3 4 5

ويستعمل مثل هذا الحبل لتكوين مثلث على الأرض على أن يكون في إحدى ساقيه ثلاث عقد، وفي الساق الثانية أربع عقد. وهذا يضمن أن المثلث المتكون مثلث قائم الزاوية.

3 4 5

ما قياسات الزوايا في المثلث المتشكل بهذه الطريقة إلى أقرب درجة؟

$37^\circ, 53^\circ, 90^\circ$

(3) سفرو: يقود عبد الله دراجته إلى بيت صديقه خالد. ويستطيع أن يقود على الشوارع التي تتجه شمال - جنوب أو شرق - غرب فقط.

(a) قاد عبد الله 2 km شرقاً و 4 km جنوباً إلى بيت خالد، فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فبأي اتجاه سيقود دراجته؟

63.4° جنوب الشرق

(b) بعد ذلك، قاد عبد الله دراجته 3 km غرباً و 1 km شمالاً ليصل إلى القاعة. في الاتجاه الذي سيقوده عبد الله لو تمكّن أن يقود دراجته في مسار مستقيم مباشرة من بيت خالد إلى القاعة؟

18.4° شمال الغرب

الصف: الثاني الثانوي

44

الفصل 8، حساب المثلثات

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1-6، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعاً ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال المثلثية في المثلثات قائمة الزوايا (الدرس 8-1)

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}, \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}, \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

الزوايا وقياسها والدوال المثلثية للزوايا (الدرس 8-2, 8-3)

يُحدّد قياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي بمقدار الدوران واتجاهه من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.

يمكنك إيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ ، بمعلومية إحداثيي النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الجيوب وقانون جيب التمام (الدرس 8-4, 8-5)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

الدوال الدائرية والدوال المثلثية العكسية (الدرس 8-6, 8-8)

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في

الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$ ، فإن

$$\cos \theta = x, \sin \theta = y$$

$$y = \sin x \text{ إذا وفقط إذا كان } x \text{ كان } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos x \text{ إذا وفقط إذا كان } x \text{ كان } 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = \tan x \text{ إذا وفقط إذا كان } x \text{ كان } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

تمثيل الدوال المثلثية بيانياً (الدرس 8-7)

للدوال المثلثية التي على إحدى الصورتين

$$y = a \sin b\theta, y = a \cos b\theta$$

$$\text{دورة يساوي } \frac{2\pi}{|b|} \text{ أو } \frac{360^\circ}{|b|}$$

$$y = a \tan b\theta \text{ المثلثية } y = a \tan b\theta \text{ فطول دورتها يساوي}$$

$$\frac{\pi}{|b|} \text{ أو } \frac{180^\circ}{|b|}$$

المطويات

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطوبتك.



المفردات الأساسية

حساب المثلثات ص 157	الزاوية المركزية ص 168
النسبة المثلثية ص 157	طول القوس ص 168
الدالة المثلثية ص 157	الزاوية الربعية ص 172
الجيب ص 157	الزاوية المرجعية ص 172
جيب التمام ص 157	قانون الجيوب ص 178
الظل ص 157	حل المثلث ص 178
قاطع التمام ص 157	قانون جيب التمام ص 186
القاطع ص 157	دائرة الوحدة ص 192
ظل التمام ص 157	الدالة الدائرية ص 192
دوال المقلوب ص 158	الدالة الدورية ص 193
معكوس الجيب ص 160	الدورة ص 193
معكوس جيب التمام ص 160	طول الدورة ص 193
معكوس الظل ص 160	السعة ص 199
زاوية الانخفاض ص 161	التردد ص 200
الوضع القياسي ص 165	القيم الأساسية ص 206
ضلع الابتداء ص 165	دالة معكوس الجيب ص 206
ضلع الانتهاء ص 165	دالة معكوس جيب التمام ص 206
الراديان ص 167	دالة معكوس الظل ص 206

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

- (1) **قانون الجيوب** يُستعمل لحل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين وطول ضلع فيه.
- (2) الدوال $\cot \theta$, $\csc \theta$, $\sec \theta$ تسمى **دوال المقلوب**.
- (3) تسمى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة**.
- (4) إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y فإن هذه الزاوية تسمى **زاوية ربعية**.
- (5) **زاوية الارتفاع** هي الزاوية المحصورة بين خط النظر والخط الأفقي عندما ينظر الشخص إلى أعلى.
- (6) **سعة** منحنى دالة الجيب أو منحنى دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

منظم أفكار

المطويات

وبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

معالجة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 8 ص (65)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عما كانت عليه عند بدايته.

8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية ص 157-164

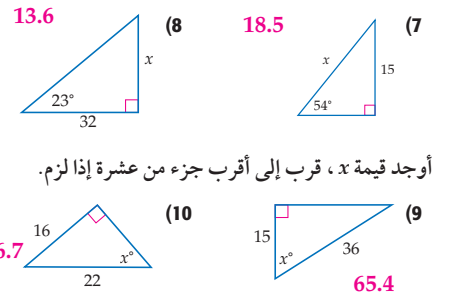
مثال 1
استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x .

دالة الجيب $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
بالتعويض $\sin 30^\circ = \frac{x}{10}$
 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
بضرب الطرفين في 10 $\frac{10}{2} = x$
بالتبسيط $5 = x$

مثال 2
أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

المقابل $\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
معكوس الظل $\tan x^\circ = \frac{15}{21}$
باستعمال الآلة الحاسبة $\tan^{-1} \frac{15}{21} = x$
 $35.5 \approx x$

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.



أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

11 شاحنة: ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3 ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة، بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض 20° ؟
قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **8.8 ft تقريباً**

8-2 الزوايا وقياساتها ص 165-170

مثال 3
حول القياس 160° إلى قياس بالراديان.

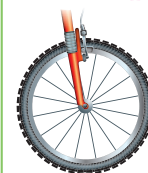
$160^\circ = 160^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right)$
 $\frac{160\pi}{180} \text{ rad} = \frac{8\pi}{9}$

مثال 4
أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية 150° .

زاوية بقياس موجب: $150^\circ + 360^\circ = 510^\circ$ بجمع 360°
زاوية بقياس سالب: $150^\circ - 360^\circ = -210^\circ$ بطرح 360°

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

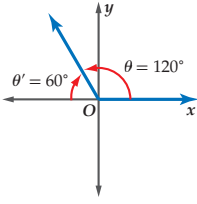
(12) 215° $\frac{43\pi}{36}$ (13) 450° $\frac{5\pi}{2}$
(14) -3π -540° (15) -315° $-\frac{7\pi}{4}$
(16) 265° $-\frac{7\pi}{2}$ (17) -65° $\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$
(18) 295° , -425° (19) 625° , -95°



(19) دراجة هوائية: إطار دراجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة. إذا كان طول نصف قطر الإطار 15 in. فأوجد قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة بالراديان. **$\frac{4\pi}{15}$**

8-3 الدوال المثلثية للزوايا ص 171-176

مثال 5



أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120^\circ$.

بما أن ضلع الانتهاء للزاوية 120° يقع في الربع الثاني، فإن قياس الزاوية المرجعية θ هو $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، إذن:
 $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال 6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة (5, 6)، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

$$r = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{\sqrt{61}} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{5} \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{61}}{6}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{61}}{5} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{6}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \tan 150^\circ \quad (21) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 135^\circ \quad (20)$$

$$0 \cos \frac{3\pi}{2} \quad (23) \quad 0 \sin 2\pi \quad (22)$$

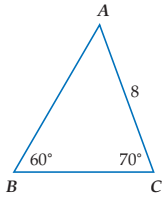
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بنقطة من النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

$$(16, -12) \quad (26) \quad (5, 12) \quad (25) \quad (-4, 3) \quad (24)$$

(27) كرة: قذفت كرة من حافة سطح بناية بزاوية قياسها 70° ، وبسرعة ابتدائية مقدارها 5 m/sec . المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة هي: $x = v_0 (\cos \theta) t$. حيث: v_0 هي السرعة الابتدائية، و θ هي قياس الزاوية التي قذفت فيها الكرة، و t هو الزمن (بالثواني). ما المسافة الأفقية التقريبية التي تقطعها الكرة بعد مرور 10 ثوانٍ. **17.1m تقريباً**

8-4 قانون الجيوب ص 177-183

مثال 7



حلل $\triangle ABC$.

أولاً أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$60^\circ + 70^\circ + A = 180^\circ, A = 50^\circ$$

استعمل الآن قانون الجيوب لإيجاد قيمتي a, c .

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{8} = \frac{\sin 50^\circ}{a}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{8} = \frac{\sin 70^\circ}{c}$$

$$a = \frac{8 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 7.1$$

$$c = \frac{8 \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8.7$$

إذن $A = 50^\circ, c \approx 8.7, a \approx 7.1$

حدّد إذا كان للمثلث في كل مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

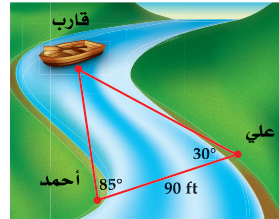
$$C = 118^\circ, c = 10, a = 4 \quad (28) \quad \text{انظر الهامش}$$

$$A = 25^\circ, a = 15, c = 18 \quad (29) \quad \text{انظر الهامش}$$

$$A = 70^\circ, a = 5, c = 16 \quad (30) \quad \text{لا يوجد حل}$$

(31) قوارب: يقف علي وأحمد على جانبي نهر. كم يبعد علي عن القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

98.9 ft



إجابات:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, (24)$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4}, \csc \theta = \frac{5}{3},$$

$$\sec \theta = -\frac{5}{4}, \cot \theta = -\frac{4}{3},$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13}, (25)$$

$$\tan \theta = \frac{12}{5}, \csc \theta = \frac{13}{12},$$

$$\sec \theta = \frac{13}{5}, \cot \theta = \frac{5}{12},$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, (26)$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4}, \csc \theta = -\frac{5}{3},$$

$$\sec \theta = \frac{5}{4}, \cot \theta = -\frac{4}{3},$$

(28) حل واحد:

$$A \approx 21^\circ, B \approx 41^\circ, b \approx 7.4$$

(29) حلان؛ الحل الأول:

$$C = 30^\circ, B = 125^\circ, b = 29.1$$

الحل الثاني: $C = 150^\circ, B = 5^\circ, b = 3.1$

إجابات:

(32) قانون جيب التمام؛

$$A \approx 46^\circ, B \approx 85^\circ, C \approx 49^\circ$$

(33) قانون الجيوب؛

$$B \approx 52^\circ, C \approx 48^\circ, c \approx 11.3$$

(34) قانون جيب التمام؛

$$A \approx 40^\circ, B \approx 65^\circ, c \approx 7.5$$

(35) قانون الجيوب؛

$$B \approx 75^\circ, C \approx 63^\circ, c \approx 12.0$$

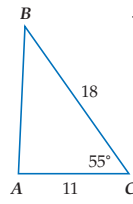
$$\text{أو } B \approx 105^\circ, C \approx 33^\circ, c \approx 7.3$$

(36) قانون جيب التمام؛

$$a \approx 9.9, B \approx 28^\circ, C \approx 117^\circ$$

8-5 قانون جيب التمام ص 186-191

مثال 8



حلّ $\triangle ABC$ الذي فيه $C = 55^\circ, b = 11, a = 18$.
معطى في السؤال طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ابدأ برسم المثلث واستعمل قانون جيب التمام لإيجاد قيمة c .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 18^2 + 11^2 - 2(18)(11) \cos 55^\circ$$

$$c \approx 217.9$$

$$c \approx 14.8$$

ثم استعمل قانون جيب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس الزاوية B .

$$11^2 = 18^2 + 14.8^2 - 2(18)(14.8) \cos B$$

$$\frac{11^2 - 18^2 - 14.8^2}{-2(18)(14.8)} = \cos B$$

$$0.7921 \approx \cos B$$

$$38^\circ \approx B$$

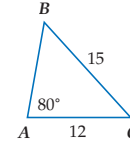
قياس الزاوية الثالثة A

$$m\angle A \approx 180^\circ - (55^\circ + 38^\circ) \approx 87^\circ$$

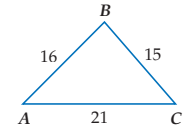
إذن $A \approx 87^\circ, B \approx 38^\circ, c \approx 14.8$

حدد الطريقة الأنسب للبدء في حل كلٍّ من المثلثات الآتية (قانون الجيوب أو قانون جيب التمام) ثم حل كل مثلث منها تقريباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(32-36) انظر الهامش



(33)



(32)

$$C = 75^\circ, a = 5, b = 7 \quad (34)$$

$$A = 42^\circ, a = 9, b = 13 \quad (35)$$

$$b = 8.2, c = 15.4, A = 35^\circ \quad (36)$$

(37) زراعة: يريد مزارع وضع سياج لقطعة أرض مثلثة الشكل. طولاً ضلعها 120 ft، 325 ft، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 70° . فما طول السياج الذي يحتاجه؟
750.5 ft تقريباً

8-6 الدوال الدائرية ص 192-198

مثال 9

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510^\circ$.

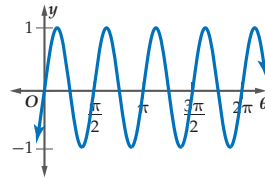
$$\sin 510^\circ = \sin (360^\circ + 150^\circ)$$

$$= \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال 10

أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه:



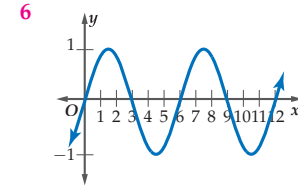
يبدأ النمط بالتكرار عند $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ، وهكذا... ولذلك طول الدورة هو $\frac{\pi}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$-\frac{\sqrt{6}}{4} (\cos 45^\circ)(\cos 210^\circ) \quad (39) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos (-210^\circ) \quad (38)$$

$$0 \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} \right) \quad (41) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin -\frac{7\pi}{4} \quad (40)$$

(42) أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه:

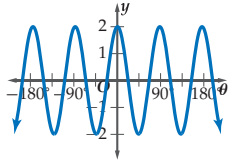


(43) طول قطر إطار دائري 18 in، ويدور 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ما طول دورة الدالة التي تمثل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالة في الزمن؟ 15 ثانية

8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً ص 199-205

مثال 11

أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثل هذه الدالة بيانياً.
السعة: $|a| = |2| = 2$. لذلك فالتمثيل البياني للدالة تكون له قيمة
عظمى هي 2 وقيمة صغرى هي -2.



وطول الدورة:
 $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

أوجد السعة، (إن كانت معرفة)، وطول الدورة للدوال الآتية، ثم
مثل كلاً منها بيانياً:

$y = \cos \frac{1}{2} \theta$ (45) $y = 4 \sin 2\theta$ (44)

$y = 3 \sec \theta$ (47) $y = 3 \csc \theta$ (46)

$y = 2 \csc \frac{1}{2} \theta$ (49) $y = \tan 2\theta$ (48)

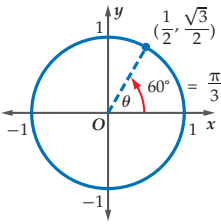
(50) قفز لاعب على جهاز الاهتزاز، فاهتز الجهاز بتردد قدره
10 هيرتز. إذا كانت السعة تساوي 5 ft، فاكتب دالة جيب
تمثل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالة في الزمن t .
 $y = 5 \sin 20 \pi t$

8-8 الدوال المثلثية العكسية ص 206-211

مثال 12

أوجد قيمة $\cos^{-1} \frac{1}{2}$. واكتبه بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، بحيث يكون جيب تمامها $\frac{1}{2}$.
استعمل دائرة الوحدة.



أوجد نقطة على دائرة الوحدة،
بحيث يكون الإحداثي x لها $\frac{1}{2}$ بما
أن: $\cos \theta = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 60^\circ$
إذن $\cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

مثال 13

أوجد قيمة $\sin \left(\tan^{-1} \frac{1}{2} \right)$. مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة.
استعمل الآلة الحاسبة.

0.4472135955 $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ $\sin \left(\tan^{-1} \frac{1}{2} \right) \approx 0.45$ إذن

مثال 14

إذا كان $\cos \theta = 0.72$ ، فأوجد θ .

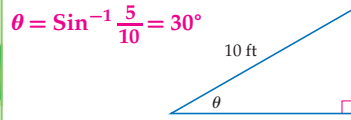
استعمل الآلة الحاسبة.
43.9455195623 $\cos^{-1} 0.72$ $\theta \approx 43.9^\circ$ إذن

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$\sin^{-1} (1)$ (51) $\arctan (0)$ (52) $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ (53) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ (54)

$\tan^{-1} 1$ (55) $\arccos 0$ (56) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ (57) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ (58)

(57) **منحدرات:** منحدر ارتفاعه 5 أقدام وطوله 10 أقدام كما
يظهر في الشكل أدناه. اكتب دالة مثلثية عكسية، يمكن
استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي يصنعها المنحدر مع
الأرض الأفقية ثم أوجد قياس هذه الزاوية.



$\theta = \sin^{-1} \frac{5}{10} = 30^\circ$

أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا
لزم ذلك:

$\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{3} \right)$ (58) 2.83

$\sin \left(\tan^{-1} 0 \right)$ (59) 0

حلّ كلاً من المعادلات الآتية مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من
عشرة إذا لزم ذلك.

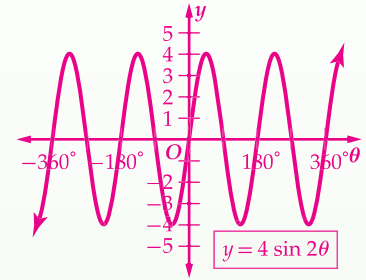
$\tan \theta = -1.43$ (60) -55.0°

$\sin \theta = 0.8$ (61) 53.1°

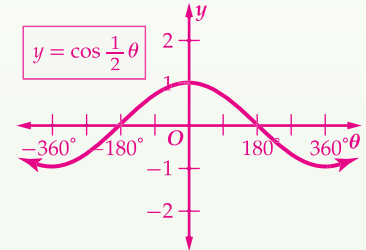
$\cos \theta = 0.41$ (62) 65.8°

إجابات:

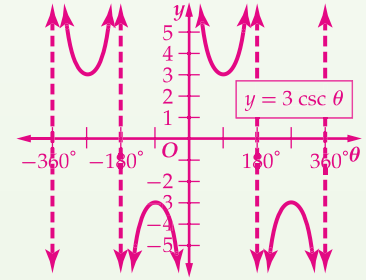
(44) السعة: 4، طول الدورة: 180°



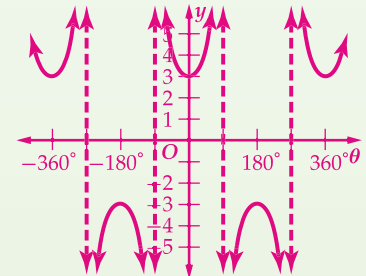
(45) السعة: 1 طول الدورة: 720°



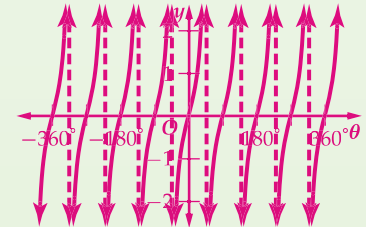
(46) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 360°



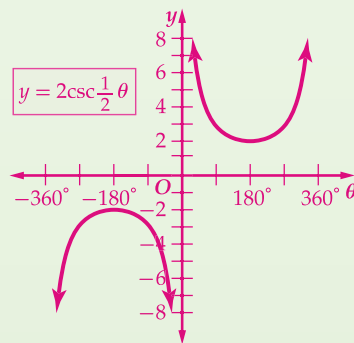
(47) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 360°



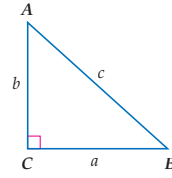
(48) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 90°



(49) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 720°



حلّ $\triangle ABC$ في كلٍّ مما يأتي باستعمال القياسات الواردة. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



$$B = 54^\circ, a = 5.3, b = 7.3 \quad A = 36^\circ, c = 9 \quad (1)$$

$$B = 32^\circ, c = 14.2, b = 7.5 \quad a = 12, A = 58^\circ \quad (2)$$

$$b = 7.9, B = 41^\circ, A = 49^\circ \quad a = 9, c = 12 \quad (3)$$

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

$$-\frac{35\pi}{36} \quad -175^\circ \quad (5) \quad \frac{65\pi}{36} \quad 325^\circ \quad (4)$$

$$-150^\circ \quad -\frac{5\pi}{6} \quad (7) \quad 405^\circ \quad \frac{9\pi}{4} \quad (6)$$

(8) حدد إذا كان للمثلث ABC الذي فيه $A = 110^\circ, a = 16, b = 21$ حل واحد أم حلان أم ليس له حل. ثم أوجد الحلول (إن أمكن)، مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. **ليس له حل**

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي (في السؤال 14، اكتب الزاوية بالدرجات):

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 585^\circ \quad (10) \quad 0 \cos (-90^\circ) \quad (9)$$

$$\sqrt{2} \sec \left(-\frac{9\pi}{4}\right) \quad (12) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \cot \frac{4\pi}{3} \quad (11)$$

$$60^\circ \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} \quad (14) \quad \frac{3}{4} \tan \left(\cos^{-1} \frac{4}{5}\right) \quad (13)$$

(15) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فأوجد كلا من: $\cos \theta, \sin \theta$.
 $\cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(16) **اختيار من متعدد:** أيٌّ من الزوايا الآتية يكون الجيب والظل لها سالبين؟ **B**

$$65^\circ \quad A$$

$$310^\circ \quad B$$

$$120^\circ \quad C$$

$$265^\circ \quad D$$

أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ من الدالتين الآتيتين. ثم مثلّ الدالتين بيانياً: (18, 19) للتمثيل البياني انظر الهامش

$$y = \frac{1}{2} \cos 2\theta \quad (18) \quad y = 2 \sin 3\theta \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}, 180^\circ \quad 2, 120^\circ$$

(19) **اختيار من متعدد:** طول دورة الدالة $y = 3 \cot \theta$ يساوي: **B**

$$120^\circ \quad A$$

$$180^\circ \quad B$$

$$360^\circ \quad C$$

$$1080^\circ \quad D$$

(20) حدّد الطريقة الأنسب التي نبدأ بها لحل $\triangle XYZ$ (قانون الجيوب أو قانون جيب التمام)، الذي فيه: $X = 105^\circ, y = 15, z = 9$. ثم حلّ المثلث مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

$$\text{قانون جيب التمام, } Y \approx 48^\circ, x \approx 19.4, Z \approx 27^\circ$$

(21) **سؤال:** عجلة ساقية طول قطرها 20 ft، تكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثل الارتفاع عند الزمن 0. اكتب دالة مثلثية تُمثل ارتفاع النقطة h في الشكل أدناه كدالة في الزمن t . ثم مثلّ الدالة بيانياً.

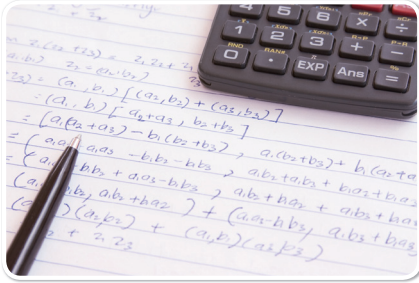
$$h = 10 \cos 8t \quad \text{؛ للتمثيل البياني انظر الهامش}$$



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
	الدروس: 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6, 8-7, 8-8		تدريبات إعادة التعليم،
	تدريبات المهارات،		ص (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41)
	ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43)		
	مشروع الفصل، ص (154)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com

استعمال الآلة الحاسبة العلمية



تُعدّ الآلات الحاسبة العلمية والآلات الحاسبة البيانية من الأدوات المهمة والفاعلة في حل المسائل. كما لاحظت سابقاً فإن بعض أسئلة الاختبارات تتضمن خطوات أو حسابات تحتاج فيها إلى استعمال الآلة الحاسبة العلمية.

استراتيجية استعمال الآلة الحاسبة العلمية

الخطوة 1

تعرّف الدوال المختلفة في الآلة الحاسبة العلمية جيداً، ومتى تستعمل كلّ منها.

- **الصيغة العلمية** : للحسابات المتعلقة بالأعداد الكبيرة.
- **الدوال الأسية** : مسائل النمو والاضمحلال والربح المركب.
- **الدوال المثلثية** : مسائل تتضمن زوايا، ومسائل ترتبط بحل المثلث، ومسائل في القياس غير المباشر.
- **الجدور التربيعية والتونية** : مسائل ترتبط بالبعد في المستوى الإحداثي، ومسائل ترتبط بنظرية فيثاغورس.

الخطوة 2

استعمل الآلة الحاسبة العلمية لحل المسائل.

- تذكر أن تعمل بالصورة الأكثر فاعلية، فبعض الخطوات يمكن القيام بها ذهنياً أو يدوياً، وفي بعضها الآخر يلزم استعمال الآلة الحاسبة العلمية.
- تحقق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيداً وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها:

عندما وقف محمد على بُعد 18 ft من قاعدة شجرة، شكّل زاوية قياسها 57° مع قمة الشجرة. ما ارتفاع الشجرة مقرباً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

- 27.7 ft A
28.5 ft B
29.2 ft C
30.1 ft D

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية توظيف الآلة الحاسبة العلمية؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- هل استعملت الآلة الحاسبة العلمية؛ لحل جميع مسائل الاختبار المعياري؟ **إجابة ممكنة: لا؛ بعض المسائل يكون حلها ذهنياً أو يدوياً أكثر فاعلية.**
- ما أنواع المسائل التي يساعد استعمال الآلة الحاسبة العلمية على حلّها أكثر من غيرها؟ **إجابة ممكنة: يساعد استعمال الآلة الحاسبة العلمية على حل المسائل التي تتضمن: حسابات معقدة، دوال مثلثية، دوال أسية، دوال مثلثية عكسية، جذور تربيعية، أكثر من غيرها.**

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

من قمة جبل ارتفاعه 100 متر،
قيست زاوية انخفاض قارب يبعد
160 مترًا عن قاعدة الجبل. أوجد
قياس هذه الزاوية. **D**

A 32°

B 38.7°

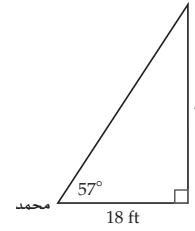
C 51.3°

D 58°

3 التقويم

استعمل التمرينين 1, 2؛ لتقويم مدى فهم
الطلبة.

اقرأ المسألة بعناية. أعطيت بعض القياسات، وطلب إليك إيجاد ارتفاع الشجرة. إذن من المفيد في البداية أن
ترسم مخططًا يُمثل المسألة.



استعمل دالة مثلثية لكتابة علاقة تربط الطولين بقياس الزاوية في المثلث القائم الزاوية.

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

دالة الظل

$$\tan 57^\circ = \frac{h}{18}$$

بالتعويض

لإيجاد ارتفاع الشجرة h تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57^\circ$. استعمل الآلة الحاسبة العلمية.

$$1.53986 \approx \frac{h}{18}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$27.71748 \approx h$$

بضرب الطرفين في 18

يبلغ ارتفاع الشجرة 27.7 ft تقريبًا؛ إذن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة
لحلها:

1 تقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة. بعد أن قطعت الطائرة مسافة
أفقية مقدارها 800 m كانت على ارتفاع 285 m رأسياً. ما زاوية
ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع؟ **C**

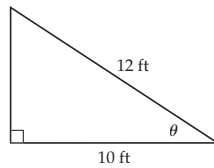
B 18.4°

A 15.6°

D 22.3°

C 19.6°

2 ما زاوية ارتفاع المنحدر الذي يُمثل الشكل أدناه؟ **J**



F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

اختيار من متعدد

(5) المقدار $i^{50} + i^{51} + i^{53}$ يساوي: C

- i A
-i B
-1 C
0 D

(6) ما قيمة m في المثلث MNO الذي فيه:

$n = 12.4$ cm, $M = 35^\circ$, $N = 74^\circ$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. A

- 7.4 cm A
8.5 cm B
14.6 cm C
35.9 cm D

(7) أوجد قيمة المحددة: $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ C

- 144 A
-72 B
72 C
144 D

(8) إذا كان $(x+1)$ عاملاً لكثيرة الحدود

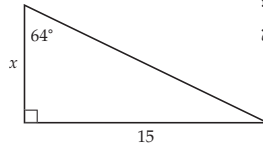
$P(x) = x^3 + Kx^2 + 2Kx - 2$, فإن قيمة K تساوي: C

- 6 A
 $\frac{1}{3}$ B
-3 C
3 D

(9) ما باقي قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$? C

- 11 A
1 B
-1 C
11 D

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ مما يأتي:



(1) ما قيمة x في الشكل المجاور؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم. D

- 6.5 A
6.9 B
7.1 C
7.3 D

(2) ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالة: $y = 3 \cos 4\theta$? A

- 90° A
 180° B
 270° C
 360° D

(3) تتكون مجموعة حل المعادلة $\sqrt{8x+1} - 4 = 1 - 2x$ من: B

- عددين صحيحين موجبين. A
عدد صحيح موجب واحد فقط. B
عددين صحيحين أحدهما موجب والآخر سالب. C
ليس لها حلول حقيقية. D

(4) ما القيمة الدقيقة لـ $\sin 240^\circ$? C

- $-\frac{1}{2}$ A
 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B
 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة عن كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

(1) A استعمال جيب التمام بدلاً من الظل

- B خَمَّن
C قَرِّب بصورة خاطئة
D صحيحة

(2) A صحيحة

- B خَمَّن
C أوجد $\frac{3}{4} \times 360^\circ$

D استعمال $\cos \theta$ بدلاً من $\cos 4\theta$

(3) A لم يستبعد الحل الغريب.

- B صحيحة
C أخطأ في التحليل
D خَمَّن

(4) A أوجد $\cos 240^\circ$

- B خَمَّن
C صحيحة
D أوجد $\sin 120^\circ$

(5) A أخطأ في حساب قوى i

- B أخطأ في حساب قوى i
C صحيحة
D أخطأ في حساب قوى i

(6) A صحيحة

- B خَمَّن
C أخطأ في استعمال قياسات الزوايا مع قياسات الأضلاع
D أخطأ في استعمال قياسات الزوايا مع قياسات الأضلاع

(7) A طرح حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس

- من حاصل ضرب عناصر القطر الآخر
B أخطأ في الإشارة
C صحيحة
D أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وطرح منها حاصل ضرب عناصر القطر الآخر

(8) A أخطأ في التعويض

- B أخطأ في التعويض
C صحيحة
D أخطأ في التعويض

(9) A أخطأ في خوارزمية القسمة

- B أخطأ في خوارزمية القسمة
C صحيحة
D أوجد قيمة $x^3 - 7x + 5$ عندما $x = 3$

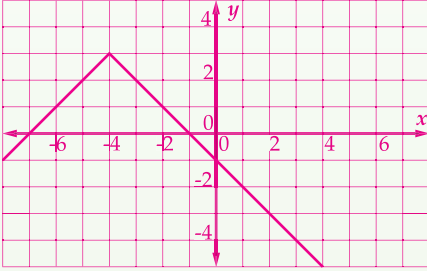
التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلبة.

إجابة:

(12b) مشترك، إجابة ممكنة: كمية العشب اللازمة تعتمد على عدد الأيام وعدد الأحصنة معًا.

(16a)



(14) إذا كان $C = AB$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة العنصر C_{32} (العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني من C). -5

(15) يتكرر نمط المربعات أدناه إلى ما لانهاية من خلال إضافة مربعات جديدة. ما عدد المربعات في الخطوة رقم 10؟ 22

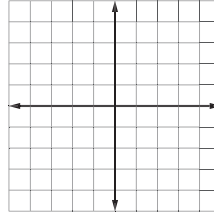


إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضِّحًا خطوات الحل:

(16) إذا كان $f(x) = -|x + 4| + 3$.

(a) مثل الدالة $f(x)$ بيانيًا. انظر الهامش



(b) حدد مجال الدالة ومداهما. المدى $\{f(x) | f(x) \leq 3\}$

(c) أوجد المقاطع للمحاور x ، y . مقطعا المحاور هما -7 ، -1 ، ومقطع المحور y هو -1

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(10) تعتمد سرعة موجة المد (تسونامي) v على معدل عمق مياه البحر. إذا علمت أن الصيغة الآتية تمثل سرعة المد عندما يكون معدل عمق الماء d كيلومترًا، $v = 356\sqrt{d}$ ، وإذا علمت أن موجة المد (تسونامي) تسير بسرعة 145 km/h ، فما معدل عمق الماء؟ قرب الجواب إلى أقرب جزء من مئة. 0.17 km

(11) أوجد معكوس $g(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$. $\frac{x+1}{3-2x}$

(12) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كل يوم كي يكون في صحة جيدة.

(a) اكتب صيغة تمثل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصانًا مدة d يومًا. $h = 10xd$

(b) هل الصيغة التي وضعتها صيغة تمثل تغييرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش

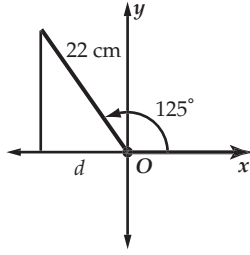
(c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟ 210 رطلًا

(13) إذا كان $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ، فأوجد قيمة $(f \circ g)\left(\frac{11}{2}\right)$. $\frac{2}{7}$

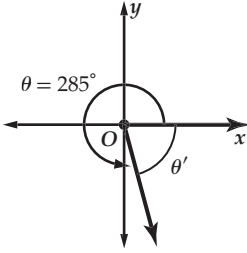
هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...
1-3	6-2	2-3	4-1	5-5	4-2	4-3	3-4	3-7	2-4	8-4	3-1	8-3	4-7	8-7	8-1	فعد إلى الدرس...

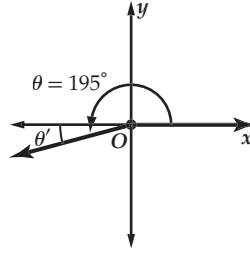
(11a)



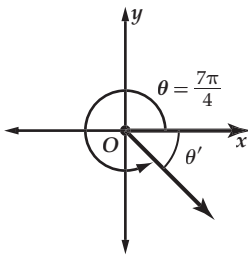
(19) 75°



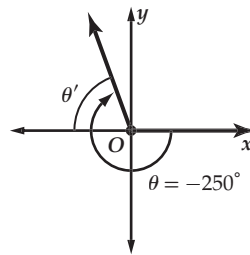
(18) 15°



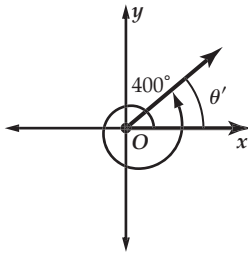
(21) $\frac{\pi}{4}$



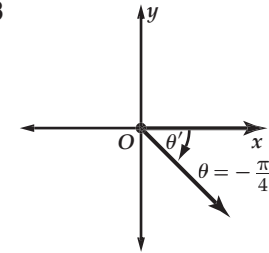
(20) 70°



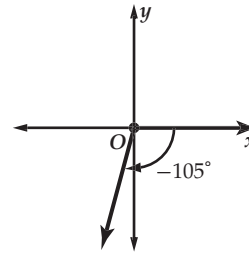
(23) 40°



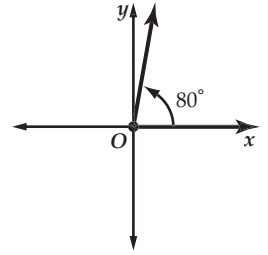
(22) $\frac{\pi}{4}$



(1B)



(1A)



(47) استعمال التناسب.

$$\frac{(\text{طول القوس})}{(\text{محيط الدائرة})} = \frac{(\text{قياس الزاوية المركزية})}{(\text{قياس الدورة الكاملة})}$$

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$$

بالتعويض

بالضرب التبادلي

بقسمة طرفي المعادلة على 2π

$$2\pi r \theta = 2\pi s$$

$$r\theta = s$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{205}} = \frac{3\sqrt{205}}{205}, \cos \theta = \frac{14}{\sqrt{205}} = \frac{14\sqrt{205}}{205}, \quad (50)$$

$$\tan \theta = \frac{3}{14}, \csc \theta = \frac{\sqrt{205}}{3}, \sec \theta = \frac{\sqrt{205}}{14}, \cot \theta = \frac{14}{3}$$

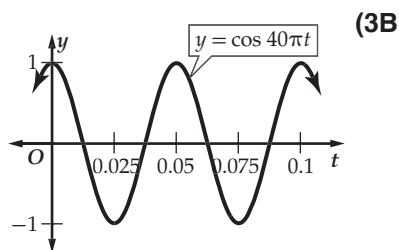
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{259}}{22}, \cos \theta = \frac{15}{22}, \tan \theta = \frac{\sqrt{259}}{15}, \csc \theta = \frac{22}{\sqrt{259}} \quad (51)$$

$$= \frac{22\sqrt{259}}{259}, \sec \theta = \frac{22}{15}, \cot \theta = \frac{15}{\sqrt{259}} = \frac{15\sqrt{259}}{259}$$

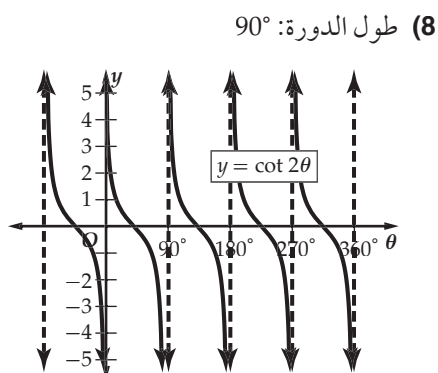
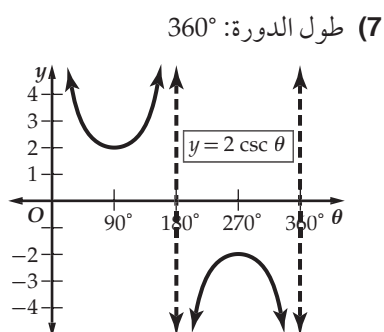
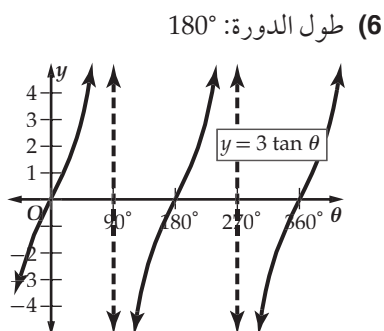
$$\sin \theta = \frac{11}{\sqrt{290}} = \frac{11\sqrt{290}}{290}, \cos \theta = \frac{13}{\sqrt{290}} = \frac{13\sqrt{290}}{290}, \quad (52)$$

$$\tan \theta = \frac{11}{13}, \csc \theta = \frac{\sqrt{290}}{11}, \sec \theta = \frac{\sqrt{290}}{13}, \cot \theta = \frac{13}{11}$$

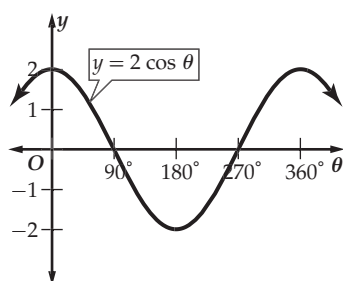
الدرس 7-8، (تحقق من فهمك)، ص 201



الدرس 7-8، ص 203



(9) السعة: 2؛ طول الدورة: 360°



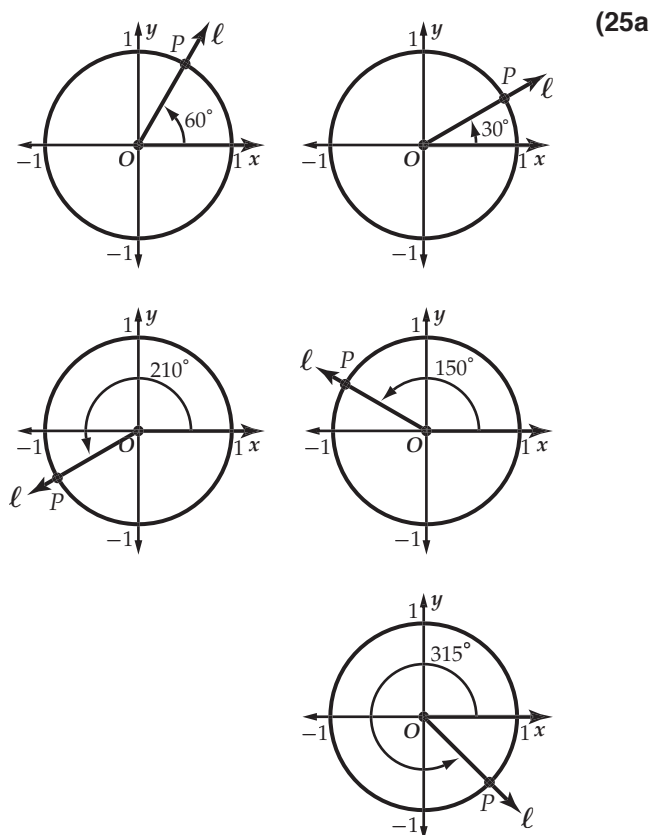
اختبار منتصف الفصل، ص 185

(12) $\sin \theta = -1$, $\cos \theta = 0$, $\tan \theta$ غير معرف, $\csc \theta = -1$, $\sec \theta$ غير معرف, $\cot \theta = 0$

(13) $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\tan \theta = \frac{4}{3}$, $\csc \theta = \frac{5}{4}$, $\sec \theta = \frac{5}{3}$, $\cot \theta = \frac{3}{4}$

(15) حلان: $C = 59^\circ$, $B = 83^\circ$, $b = 29.0$ أو $C = 121^\circ$, $B = 21^\circ$, $b = 10.5$

الدرس 6-8، ص 197



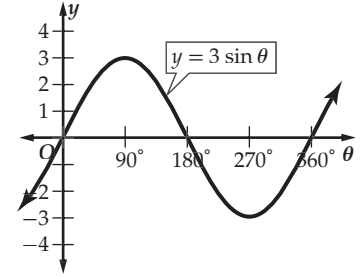
(25b)

الميل	الزاوية
0.6	30°
1.7	60°
-1.7	120°
-0.6	150°
0.6	210°
-1	315°

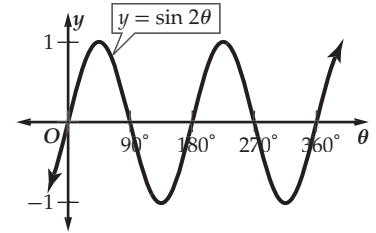
(25c) إجابة ممكنة: الميل هو ظل الزاوية. إذا كانت $\theta = 120^\circ$ ، فإن

الإحداثي x للنقطة P هو $-\frac{1}{2}$ والإحداثي y هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ الميل هو $\frac{y}{x}$ التغير في y وبما أن التغير في x هو $-\frac{1}{2}$ والتغير في y هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فإن $\frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$ (الميل) أي تقريباً -1.7 وهو ظل الزاوية.

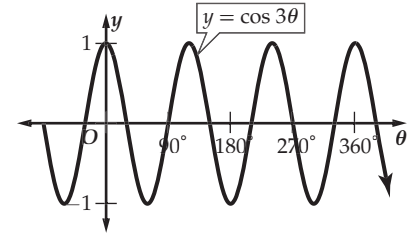
(10) السعة: 3؛ طول الدورة: 360°



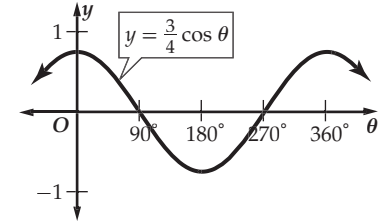
(11) السعة: 1؛ طول الدورة: 180°



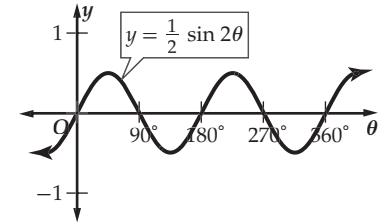
(12) السعة: 1؛ طول الدورة: 120°



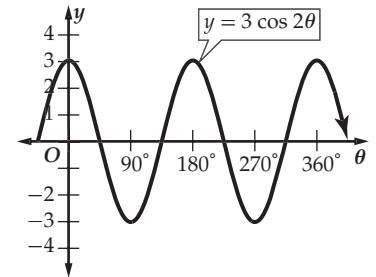
(13) السعة: $\frac{3}{4}$ ؛ طول الدورة: 360°



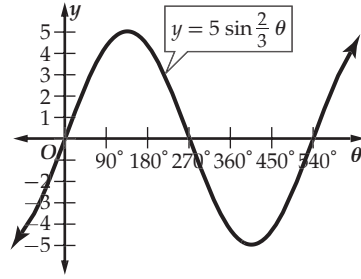
(14) السعة: $\frac{1}{2}$ ؛ طول الدورة: 180°



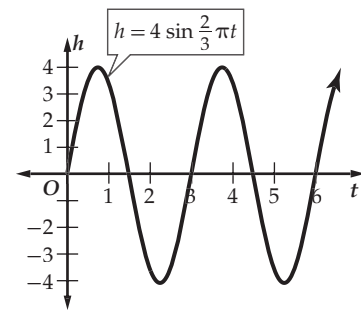
(15) السعة: 3؛ طول الدورة: 180°



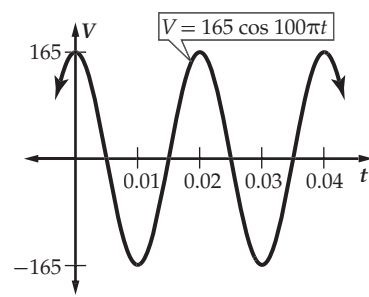
(16) السعة: 5؛ طول الدورة: 540°



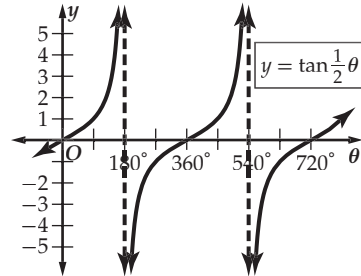
(17)



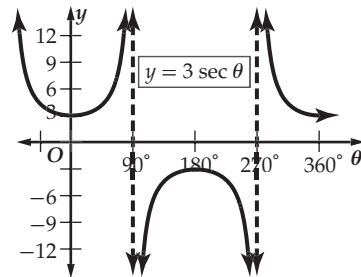
(18)



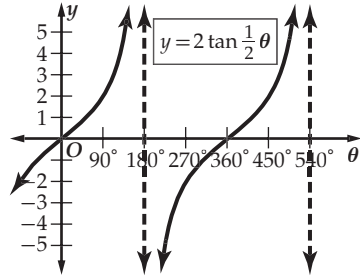
(19) طول الدورة: 360°



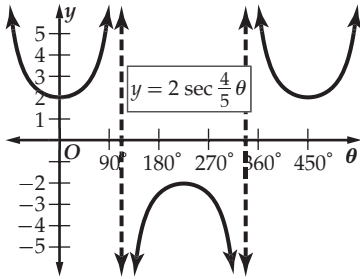
(20) طول الدورة: 360°



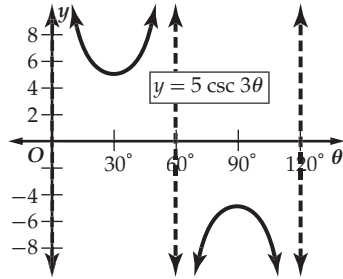
(27) ليس له سعة، طول الدورة: 360°



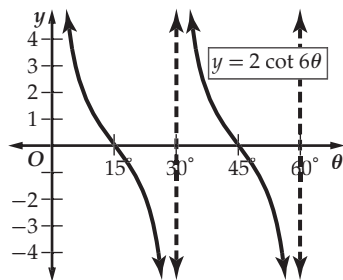
(28) ليس له سعة، طول الدورة: 450°



(29) ليس له سعة، طول الدورة: 120°

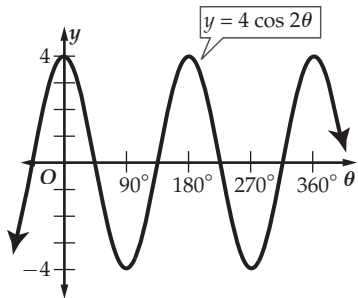


(30) ليس له سعة، طول الدورة: 30°

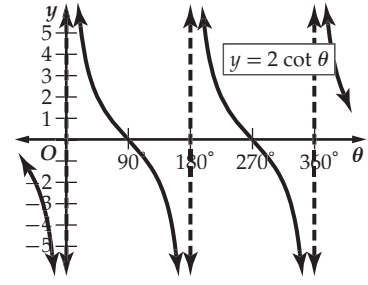


الدرس 8-8، ص 211 :

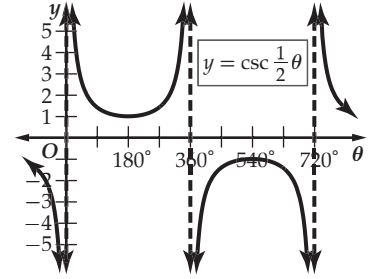
(43) السعة 4، طول الدورة 180°



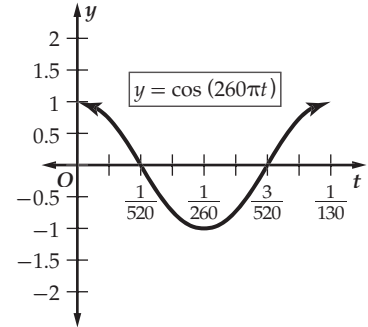
(21) طول الدورة: 180°



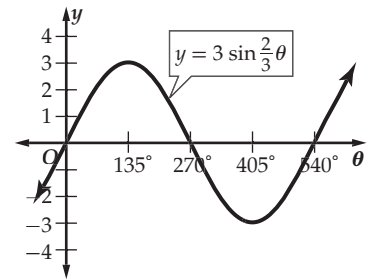
(22) طول الدورة: 720°



(24)



(25) السعة: 3؛ طول الدورة: 540°



(26) السعة: $\frac{1}{2}$ ؛ طول الدورة: 480°

