الفصل الأول

المتواليات

الفصل الأول

المتواليات

(١-١) تعريف :

نقول عن كميات عددية من الشكل $a_1 : a_2 : a_3 : ..... : a_k, ... a_n$ أنها متوالية إذا كانت حدودها تتوالى عدداً بعد آخر حسب قاعدة معينة .

نسمي a_1 حدها الأول و a_n حدها الأخير و a_k حدها العام و n عدد حدودها .

وهنالك عدة أنواع من المتواليات من أهمها المتوالية الحسابية والمتوالية الهندسية والمتوالية التوافقية .

(٢,١) المتوالية الحسابية :

(١,٢,١) **تعريف** : نقول عن المتوالية : $a_1 : a_2 : a_3 : ..... : a_k, ... a_n$ أنها متوالية حسابية إذا كان الفرق بين أي حد وسابقه يساوي دائماً مقدار ثابت d $(d \neq 0)$ ويسمى d أساس المتوالية الحسابية ، أي أنه حتى تكون المتوالية حسابية يجب أن تكون :

$$a_k - a_{k-1} = d \qquad (١,١)$$

حيث أن $(k = 2,3,4,......n)$

(٢,٢,١) قانون الحد العام :

إذا كان a_1 الحد الأول للمتوالية الحسابية أساسها d وعدد حدودها n ، يمكن أن نكتب بقية الحدود المتعاقبة وبدلالة الحد الأول كما يلي :

الحد الأول

$$a_1$$

الحد الثاني

$$a_2 = a_1 + d$$

الحد الثالث

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

الحد الرابع

$a_4 = a_3 + d = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d$

....

حتى الحد من المرتبة n

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad (٢,١)$$

وهي العلاقة التي تعطينا الحد العام أو الحد النوني .

مثال (١,١) :

حدد ما إذا كانت الأعداد المرتبة التالية متوالية حسابية أم لا ؟

$3c-2b, 4c-b, 5c, 6c+b$

الحل :

تكون هذه الجملة متوالية حسابية إذا أمكن الحصول على كل حد تال من حدودها بإضافة d الأساس وذلك اعتباراً من الحد الأول ، أو أن يكون الفرق بين كل حد مع الحد الذي يسبقه يساوي مقداراً ثابتاً وهي d الأساس ، نأخذ الفرق بين كل حدين متتالين :

$$(4c-b)-(3c-2b) = c+b$$
$$(5c)-(4c-b) = c+b$$
$$(6c+b)-(5c) = c+b$$

وبالتالي جملة الأعداد السابقة تشكل متوالية حسابية حدها الأول $a_1 = 3c-2b$ وأساسها $d = c+b$ وعدد حدودها $n = 4$.

مثال (٢,١) :

حدد قيمة k بحيث تشكل الحدود الثلاثة التالية متوالية عددية .

$k+2, 2k+1, 2k+5$

الحل :

لكي تشكل الحدود السابقة متوالية عددية يلزم أنى يكون الفرق بين أي حد والحد الذي يسبقه أو الحد الذي يليه يساوي الأساس وذلك من أجل أي حدين متتالين :

$$(2k+1)-(k+2) = d$$
$$(2k+5)-(2k+1) = d$$
$$2k+1-k-2 = 2k+5-2k-1 \Rightarrow k-1 = 4 \Rightarrow k = 5$$

بتعويض قيمة k في الحدود المعطاة ينتج لدينا المتوالية العددية :

٧,١١,١٥

حدها الأول $a_1 = 7$ وأساسها $d = 4$

مثال (٣,١) :

متوالية عددية حدها الأول (٢٠) وأساسها (٥-) أوجد قيمة الحد العاشر وقيمة الحد الخامس والستين ؟

الحل :

من العلاقة (٢,١) نجد أن :

$$a_{10} = 20 + (10-1)(-5) = -2$$

وكذلك نجد :

$$a_{65} = 20 + (65-1)(-5) = -300$$

مثال (٤,١) :

ليكن لدينا متوالية حسابية حدها الأول (٥) وأساسها (٢) أوجد قيمة حدها ذي الترتيب (٦٠١).

الحل :

من العلاقة (٢,١) نجد أن :

$$a_{601} = 5 + (601-1)(2) = 1205$$

(٣,٢,١) : خواص حدود المتوالية الحسابية :

١- الفرق بين أي حدين متواليين يساوي مقداراً ثابتاً d أي أن :

$$a_k - a_{k-1} = d$$

٢- أن مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً وذلك لأن :

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d$$

وهكذا يتضح أن مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a_1 + (n-1)d$ ويساوي مجموع أي حدين متقابلين آخرين .

(٤,٢,١) مجموع حدود المتوالية الحسابية :

نرمز لمجموع حدود المتوالية الحسابية s_n فيكون : $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

لحساب هذا المجموع نكتب حدود المتوالية مرتين وبشكل متعاكس على النحو التالي :

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$
$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_3, a_2, a_1$$

نأخذ مجموع كل حدين متقابلين ولجميع الحدود فنحصل على العلاقة التالية :

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = 2s_n$$

وبالاستفادة من الخاصة الثانية السابقة حول مجموع الحدود المتقابلة وبملاحظة أن جميع الأزواج في الطرف الأيسر متساوية وتساوي $2a_1 + (n-1)d$ وإن عدد هذه الأزواج تساوي n زوجاً ، فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$n[2a_1 + (n-1)d] = 2s_n$$

ومنها نجد أن المجموع s_n يساوي :

(٣,١)

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

ويمكن كتابة العلاقة (٣,١) على الشكل التالي :

(٤,١)

$$s_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

مثال (١−٥) :

أوجد نوع وأساس ومجموع حدود المتوالية التالية :

٢,٤,٦,٨,١٠,١٢,١٤,١٦,١٨,٢٠

الحل :

نلاحظ أن هذه المتوالية هي متوالية حسابية لأن الفرق أي حدين متواليين يساوي (٢) وأن حدها الأول (٢) وحدها الأخير (٢٠) وأن عدد حدودها (١٠) وبذلك نجد أن مجموع حدودها يساوي :

$$s_{10} = \frac{10}{2}[2 + 20] = 110$$

مثال (٦−١) :

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة مابين (١) حتى (٦٠) والتي لا تقبل القسمة على (٢) .

الحل :

إن مجموعة الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على (٢) هي الأعداد الفردية التالية :

$1,3,5,7,\ldots\ldots,59$

وهي متوالية عددية عدد حدودها (٣٠) وحدها الأول (١) وأساسها (٢) ، ومنه مجموعها يعطى بالعلاقة (٣,١,١) ومنه نجد :

$$s_{30}=\frac{30}{2}\left[2(1)+(30-1)(2)\right]=900$$

مثال (٧-١) :

أوجد مجموع الخمسة عشر حداً الأولى للمتوالية العددية التالية :

$5,8,11,14,\ldots\ldots$

الحل :

نطبق العلاقة (٢,١) نجد أن :

$$a_{15}=5+(15-1)(3)=47$$

ولإيجاد مجموع الحدود الخمسة عشرة نطبق العلاقة (٤,١) فنجد :

$$s_{15}=\frac{15}{2}\left[5+47\right]=390$$

(٥,٢,١) مجموع حدود متوالية الأعداد الطبيعية :

إذا كان لدينا المتوالية العددية من الشكل :

$1,2,3,4,\ldots\ldots,n$

لحساب مجموع حدود هذه المتوالية نلاحظ أنها متوالية حسابية لأن الفرق بين أي حدين متتاليين يساوي مقداراً ثابتاً $d=1$ وحدها الأول $a=1$ وحدها الأخير a_n وعدد حدودها n ، لذلك فإن مجموعها حسب العلاقة (٤,١) :

$$s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(1+n) \qquad (٥,١)$$

وهي علاقة هامة تستخدم في حساب مجموع الأعداد الطبيعية من (١) حتى n عدد .

مثال (٨,١) : أوجد مجموع حدود المتوالية العددية التالية :

$1,2,3,4,5,6,7$

الحل :

نطبق العلاقة (٥,١) فنجد :

$$s_7 = \frac{7}{2}(1+7) = 28$$

(٦,٢,١) مجموع حدود متوالية الأعداد الفردية ومتوالية الأعداد الزوجية :

إذا كان لدينا المتوالية العددية من الشكل :

2,4,6,8,10,12,14

لحساب مجموع حدود هذه المتوالية نلاحظ أنها متوالية حسابية لأن الفرق بين أي حدين متواليين يساوي (٢) وحدها الأول (٢) وحدها الأخير a_n وعدد حدودها n ، لذلك فإن مجموعها حسب العلاقة (٤,١) :

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(n+1) \qquad (٦,١)$$

وبطريقة مشابهة نجد أن مجموع الأعداد الفردية تعطى بالعلاقة :

$$s_n = n^2 \qquad (٧,١)$$

مثال (٩,١) :

أوجد مجموع حدود المتوالية العددية التالية :

1,3,5,7,9,11,13,15

الحل :

نطبق العلاقة (٧,١) فنجد :

$$s_7 = (8)^2 = 64$$

مثال (١٠,١) :

أوجد مجموع حدود المتوالية العددية التالية :

2,4,6,8,10,12,14,16

الحل :

نطبق العلاقة (٦,١) فنجد :

$$s_7 = 8(8+1) = 72$$

(٣,١) المتوالية الهندسية :

(١,٣,١) **تعريف** : نقول عن المتوالية : $a_1 : a_2 : a_3 : ..... : a_k, ... a_n$ أنها متوالية هندسية إذا كان كل حد فيها ينتج عن ضرب الحد السابق له بعدد ثابت ، يسمى أساس المتوالية $r(r \neq 1)$. أي أنه في المتوالية الهندسية يكون لدينا :

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = r \qquad (٨,١)$$

حيث أن $(k = 2,3,4,......n)$

(٢,٣,١) قانون الحد العام :

من العلاقة (٨,١) يمكننا كتابة الحد العام للمتوالية الهندسية على النحو التالي :

$$a_k = r.a_{k-1} \qquad (٩,١)$$

$$a_2 = r.a_1$$

$$a_3 = r.a_2$$

$$a_4 = r.a_3$$

....

$$a_k = a_{k-1}.r = a_1.r^{k-1}$$

....

$$a_n = a_{n-1}.r = a_1.r^{n-1}$$

وهي العلاقة التي يعطيها قانون الحد العام أو الحد النوني .

مثال (١١,١) :

متوالية هندسية حدها الأول (٤) وأساسها (٣) اكتب الحدود الأربعة الأولى منها وأوجد قيمة الحد التاسع وقيمة الحد السادس عشر .

الحل :

متوالية هندسية حدها الأول (٤) وأساسها (٣) وبالتالي المتوالية :٤,١٢,٣٦,١٠٨

أما لإيجاد الحد التاسع نطبق العلاقة (٩,١) فنجد :

$$a_9 = (4).(3)^{9-1} = 26244$$

أما الحد السادس عشر

$$a_{16} = (4).(3)^{16-1} = 57395628$$

مثال (١٢,١) :

أوجد قيمة الحد السابع وقيمة الحد العاشر في المتوالية التالية :

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$$

الحل :

نلاحظ أن المتوالية هي هندسية فيها الحد الأول (١) وأساسها $\left(\frac{1}{3}\right)$ وعدد حدودها (٧) وبالتالي نطبق العلاقة (٩,١) فنجد :

$$a_7 = 1(\frac{1}{3})^{7-1} = \frac{1}{729}$$

أما الحد العاشر $a_{10} = 1(\frac{1}{3})^{10-1} = \frac{1}{19683}$

(٣,٣,١) مجموع حدود متوالية هندسية :

نرمز لمجموع متوالية هندسية بالرمز s_n فيكون : $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_k + ... + a_n$

نكتب كافة الحدود بدلالة الحد الأول فنجد :

$$s_n = a_1 + a_1.r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + ... + a_1.r^{k-1} + ... + a_1.r^{n-1} \qquad (١٠,١)$$

ولحساب هذا المجموع نضرب طرفي العلاقة (١٠,١) بالأساس r فنحصل على العلاقة :

$$r.s_n = a_1.r + a_1.r^2 + a_1.r^3 + a_1.r^4 + ... + a_1.r^k + ... + a_1.r^n \qquad (١١,١)$$

نطرح المجموع (١٠,١) من المجموع (١١,١) فنجد أن :

$$r.s_n - s_n = a_1.r^n - a_1$$
$$s_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

وبالتالي نجد :

$$s_n = a_1 \frac{r_n - 1}{r - 1} \qquad (12,1)$$

وهي علاقة مجموع حدود متوالية هندسية متزايدة .

وللحصول على مجموع حدود متوالية هندسية متناقصة نطرح المجموع (11,1) من المجموع (10,1) فنجد أن :

$$s_n - r.s_n = a_1. - a_1.r^n$$
$$s_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

وبالتالي نجد :

$$s_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (13,1)$$

وهي علاقة مجموع حدود متوالية هندسية متناقصة .

مثال (١٣,١) :

أوجد مجموع المتوالية الهندسية : ٣,٩,٢٧ ولغاية الحد التاسع

الحل :

نجد أن الحد الأول (٣) والأساس (٣) ومنه نطبق العلاقة (12,1) فنجد :

$$s_9 = 3\frac{(3^9 - 1)}{3 - 1} = 29523$$

مثال (١٤,١) :

إذا علمت أن مجموع متوالية هندسية يساوي (٧٢٨) وأن أساسها (٣) وأن حدها الأول (٢) ، فما عدد حدودها ؟

الحل :

من العلاقة (١٢,١) نجد أن :

$$728 = 2\frac{(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

لحساب n نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن :

$$\lg(729) = n\log(3)$$
$$n = \frac{\lg(729)}{\lg(3)} = 6$$

(٤,١) المتوالية التوافقية :

(١,٤,١) تعريف: نقول عن مجموعة أعداد أنها تشكل متوالية توافقية ، إذا كانت مقلوباتها تشكل متوالية عددية بحيث يكون الفرق بين الحد المقلوب والذي يسبقه عدد ثابت .

مثال (١٥,١) :

هل مجموع الأعداد $2, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \ldots\ldots$ حتى الحد (٣٠) تشكل متوالية توافقية ، أوجد حدها الأخير .

الحل :

إن الأعداد النظيرة للمتوالية السابقة هي $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \ldots\ldots$ وهي تشكل متوالية حسابية ، إذن فجملة الأعداد تشكل متوالية توافقية وحدها الأخير $\frac{59}{2}$.

(٥,١) المتواليات غير المنتهية :

يقصد بالمتوالية اللانهائية ،أن عدد حدودها لا نهائي ، أي عندما $n \to \infty$ يكون $0 < r < 1$، ويعطى مجموع حدود المتوالية الهندسية المتناقصة :

$$s_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a - a.r^n}{1-r}$$

كما يمكن كتابة الطرف الأيسر من العلاقة السابقة على الشكل التالي :

$$s_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

وبما أن الأساس $0 < r < 1$ هو كسر موجب أقل من الواحد الصحيح لذلك فإن القيمة r^n تصغر كلما كبر n عدد الحدود ، وعندما تكبر n ويسعى إلى ∞ فإن الحد الثاني في الطرف الأيسر $\frac{ar^n}{1-r}$ يسعى إلى الصفر ، ومنه يصبح مجموع حدود المتوالية الهندسية اللانهائية :

$$s_\infty = \frac{a}{1-r} \qquad (١٤,١)$$

مثال (١٦,١) :

أوجد مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التالية :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$$

الحل :

من المتوالية نجد أن $r = \frac{1}{2}$، والحد الأول $a_1 = \frac{1}{2}$ وعدد الحدود $n \to \infty$ ومنه وبتطبيق العلاقة

(١٣,١) نجد أن :

$$s_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

مثال (١٧,١) :

اكتب الكسر العشري ٠.٣٣٣٣ بشكل كسر نسبي عادي :

الحل :

يمكن كتابة العدد المعطى بالشكل :

$$0.3333 = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + ...$$

أو بالشكل التالي :

$$0.3333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + ...$$

إن العلاقة الأخيرة هي متوالية هندسية تنازلية لا نهائية ، حدها الأول $a_1 = \frac{3}{10}$ وأساسها $r = \frac{1}{10}$

ومجموعها $s_\infty = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$.

تمارين غير محلولة

١) عين قيمة الثابت k حيث تشكل الأعداد التالية متوالية حسابية $k-1, k+3, 3k-1$

٢) أوجد الحد السابع ومجموع الحدود العشرة الأولى ومجموع الحدود الثلاثة عشرة الأولى للمتوالية الحسابية :
$2,6,10,14$

٣- ما هي قيمة الحد الأول لمتوالية هندسية مؤلفة من (٦) حدود ، إذا علمت أن قيمة حدها الأخير تساوي (٣٧٥٠٠٠) وأساسها يساوي (٥) ؟

٤- ما هي قيمة الحد (٢٥) للمتوالية العددية التالية : $75,80,85,90,...$.

٥- متوالية عددية مؤلفة من أربعة حدود متزايدة حدها الأول (٥) وحاصل جداء الحد الأول في الرابع يقل بمقدار (٧٢) عن حاصل جداء الحد الثاني في الحد الثالث والمطلوب : إيجاد أساس هذه المتوالية ومجموع حدودها العشرة الأولى .

٦- ثلاثة أعداد تشكل فيما بينها متوالية عددية متزايدة مجموعها (٣٣) إذا أضفنا للعدد الأول (٣) وللعدد الثاني (٤) وللعدد الثالث (٢٥) أصبحت المتوالية هندسية والمطلوب :

١- أوجد المتوالية العددية وأساسها .

٢- أوجد المتوالية الهندسية وأساسها .

٣- أوجد مجموع الحدود العشرين الأولى للمتوالية العددية .

٤- أوجد مجموع الحدود العشرين الأولى للمتوالية الهندسية .

٧- اكتب الكسر العشري ٠.٣٥٣٥٣٥٥٠ في صورة كسر نسبي اعتيادي .

٨- متوالية هندسية حدودها موجبة ، إذا كان مجموع الحدين الأول والثالث يساوي (٥٢) ومجموع الحدين الثالث والخامس يساوي ثلاثة عشر مثلاً من مربع الحد الثاني ، أوجد الحد الأول والأساس .

٩- في متوالية هندسية يزيد الحد الثاني عن الحد الأول بمقدار (٦) ، كما يزيد الحد الثالث عن الحد الثاني بمقدار (١٢) ، أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى منها ؟

١٠- متوالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي (٦٢) ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع (٣١٠) ، أوجد حدها الأول وأساسها .

١١- ليكن لدينا المتوالية العددية التالية : $2,5,85,11,...$ والمطلوب :

١- إيجاد أساس المتوالية .

٢- إيجاد قيمة الحد العاشر والثالث عشر .

٣- إيجاد مجموع حدود المتوالية العشرين .

١٢- متوالية حسابية فيها مجموع الحدين الأول والثالث (١٨) ومجموع الحدين الثاني والخامس (٣٤) والمطلوب :

١- إيجاد الحد الأول وأساسها .

٢- كتابة الحد العام بدلالة n .

٣- حساب مجموع حدود هذه المتوالية بدلالة n .

٤- إيجاد العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 78$.

١٣- تشكل الأعداد التالية a,b,c متوالية حسابية ، عيّن هذه الأعداد إذا علمت أن : $a+b+c=3$ و $a.b.c=-15$.

١٤- متوالية حسابية فيها مجموع الحدين الثالث والخامس (٢٦) والحد السابع يزيد عن الحد الرابع بمقدار (١٢) عيّن الحد الأول والأساس .

١٥- بفرض أن الحد الأول في متوالية حسابية (٣-) وأساس المتوالية (٤) ، والمطلوب :

١- كتابة عبارة الحد العام بدلالة n .

٢- إيجاد الحد ذو المرتبة (٢٠١) .

٣- هل العددان (٢٠٠٥) و(٢٠٠٧) حدان من هذه المتوالية .

٤- حساب مجموع المائة حد الأولى من هذه المتوالية .

١٦- a,b,c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية متزايدة حيث أن مجموع الحدود الثلاثة الأولى (٩) وجداؤها (١٥) ، والمطلوب :

١- تعيين قيم a,b,c ثم استنتج قيمة الأساس .

٢- حساب مجموع حدودها العشرين الأولى .

١٧- أوجد خمسة أعداد تشكل فيما بينها حدود متعاقبة من متوالية حسابية بحيث مجموعها يساوي (١٥) ومجموع مربعاتها (٥٥) .

١٨- متوالية حسابية مكونة من (٢١) حداً . ليكن S_1 مجموع الإحدى عشر حداً الأولى ، وليكن S_2 مجموع الإحدى عشر ا حداً لأخيرة ، المطلوب :

١- حساب الحد المتساوي البعد عن الطرفين بدلالة S_1 و S_2 .

٢- إذا كان $S_1=187$ و $S_2=517$ أوجد حدود المتوالية .

١٩- إذا كانت الإعداد $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+d},\frac{1}{d+b}$ تشكل حدود متعاقبة من متتالية حسابية فأثبت أن a^2,b^2,c^2 أيضاً تشكل حدود متوالية متعاقبة حسابية .

٢٠- متوالية هندسية حدها الأول $a_1=\frac{1}{2}$ وجداء حديها الثالث والخامس (١٦) ، والمطلوب :

١- حساب حدها الرابع ، ثم استنتاج قيمة الأساس .

٢- كتابة عبارة الحد العام بدلالة n .

٣- تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $l_n=2^{2005}$.

٢١- ثلاثة حدود في متوالية هندسية مجموعها (٧٨) ومجموع مربعاتها (٣٢٧٦) ، أوجد حدود المتوالية ثم استنتج أساسها .

٢٢- لدينا متوالية هندسية متناقصة فيها جداء الحدود الثلاثة الأولى تساوي (٦٤) وفيها أيضاً $a_1^2+b_2^2+c_3^2=84$ والمطلوب :

١- حساب كُلاً من الحدود الثلاثة الأولى والأساس .

٢- برهن أن الحد العام $l_n=2^{4-n}$.

٣- حساب المجموع بدلالة n .

٤- حساب الجداء بدلالة n .

٢٣- متوالية هندسية فيها مجموع الحد الأول والأخير $\frac{82}{11}$ و مجموع حدودها (١١) وعدد حدودها (٥) .

٢٤- a,b,c أعداد حقيقية إذا أُخذت بالترتيب a,b,c شكلت متوالية حسابية ، وإذا أُخذت بالترتيب b,c,a شكلت متوالية هندسيو ، أوجد كُلاً من a,b,c إذا علمت أن $a+b+c=18$

٢٥- أوجد الحدود الخمسة لمتوالية هندسية إذا علمت أن مجموع الحدود الثلاثة الأولى تساوي (٣٠) ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة تساوي (١٢٠) .

الفصل الثاني

الفوائد البسيطة والمركبة

الفصل الثاني

الفائدة المالية البسيطة والمركبة

مقدمة :

تعتبر الرياضيات المالية أحد أهم الأدوات الرياضية التي تساعد الأفراد ومؤسسات الأعمال في اتخاذ قرارات الاستثمار بصورة سلمية، وذلك لتحقيق أفضل نتائج مالية ممكنة. وتعتمد معظم المعاملات المالية والتجارية عند شراء عقارات أو سيارات أو أجهزة منزلية بالتقسيط بدرجة كبيرة على عنصر الفائدة من العملية الاستثمارية، أو بعبارة أخرى على العائد من استثمار رأس المال .

(١,٢) تعريف الفائدة :

يمكن تعريف الفائدة بأنها المبلغ الذي يدفع مقابل استخدام رأس المال، أو هو عبارة عن التعويض أو الأجر مقابل استخدام رأس المال المستثمر لمدة زمنية معينة . ويعبر عنه عادةً بنسبة مئوية تسمى " سعر الفائدة " أو " معدل الفائدة " .

(٢,٢) حساب الفوائد المالية :

تنقسم الفائدة إلى نوعين رئيسين :

١- الفائدة البسيطة : وهي الفائدة التي تحسب على الأصل (المبلغ المستثمر، المبلغ المودع، المبلغ المقترض) في نهاية كل فترة زمنية .

٢- الفائدة المركبة : هي الفائدة التي تحسب على الأصل (المبلغ المستثمر، المبلغ المودع، المبلغ المقترض) بعد إضافة الفائدة إلى الأصل في نهاية كل فترة زمنية، أي أنه بعد نهاية كل فترة زمنية يكون لدينا أصل جديد، وهذا الأصل الجديد هو الأصل السابق مضافاً إليه الفائدة عن الفترة السابقة .

ويؤثر في حساب الفائدة عدة عناصر هي :

١- أصل المبلغ : وهو عبارة عن المبلغ القرض أو المبلغ المستثمر .

١- معدل الفائدة: العائد الناتج عند استثمار وحدة رأس المال في نهاية دورة زمنية واحدة .

٢- الفترة الزمنية : وهي عبارة عن مدة القرض أو مدة الاستثمار .

(١,٢,٢) طريقة الفائدة البسيطة :

هذه الطريقة تشترط أن تكون الفائدة الحاصلة على المبلغ مع مرور الزمن منفصلة عن المبلغ نفسه، أي لا تحسب لها فائدة جديدة . ولاستنباط قانون الفائدة البسيطة، نفرض أن شخصاً أودع مبلغ ١٠٠٠٠٠ ل.س بفائدة بسيطة بمعدل 8%ولمدة ٤ سنوات، فيكون لدينا :

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الأولى تساوي :

$$100000.\frac{8}{100}.1=8000$$

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الثانية تساوي :

$$100000.\frac{8}{100}.1=8000$$

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الثالثة تساوي :

$$100000.\frac{8}{100}.1=8000$$

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الرابعة تساوي :

$$100000.\frac{8}{100}.1=8000$$

وبالتالي فإن الفوائد المستحقة في نهاية مدة الاستثمار هي :

$$8000.(4)=32000 s.p$$

وتكون الجملة المستحقة في نهاية مدة الاستثمار هي :

$$100000+32000=132000 s.p$$

وبصورة عامة، إذا رمزنا للمبلغ الأصلي بالرمز kولمعدل الفائدة السنوي بالرمز iولفترة الاستثمار أو الاقتراض بالرمز n من السنوات فإن :

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الأولى تساوي :

$$k.i.1$$

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الثانية تساوي :

$$k.i.2$$

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الثالثة تساوي :

$$k.i.3$$

الفائدة المستحقة في نهاية السنة الرابعة تساوي :

$$k.i.4$$

وهكذا الفائدة المستحقة في نهاية n من السنوات تساوي :

$k.i.n$

وإذا رمزنا لمقدار الفائدة بالرمز I يكون هذا المقدار :

$$I = k.i.n \qquad (١,٢)$$

ويطلق على $k+I$ حصيلة المبلغ (جملة المبلغ)، نرمز له بالرمز k_n ويساوي:

(2 ,2)

$$k_n = k + I$$
$$k_n = k + k.i.n$$
$$k_n = k(1 + i.n)$$

وهي العلاقة التي تعطينا حصيلة مبلغ مودع بفائدة بسيطة ولمدة n من السنوات .

(١,١,٢,٢) حساب عناصر قانون الفائدة البسيطة :

يتألف قانون الفائدة البسيطة من أربع عناصر أساسية هي : k_n حصيلة المبلغ ، k المبلغ الأصلي ، i معدل الفائدة البسيطة السنوي ، n عدد الدورات الزمنية (السنوات) .

١- حصيلة المبلغ المودع :

وهي القيمة التي يبلغها المبلغ المودع بعد n سنة، لنفترض أن المبلغ المودع هو k وأن سعر الفائدة السنوية هو i فإن ذلك المبلغ حسب هذه الطريقة سيبلغ بعد سنة كاملة من إيداعه مقداراً قدره k_1 والذي يساوي :

$$k_1 = k + i.k = k(1 + i)$$

وبعد مرور سنتين على إيداع المبلغ k سيبلغ المقدار k_2 والذي يساوي :

$$k_2 = k + i.k + k.i = k(1 + 2i)$$

وبعد مرور ثلاث سنوات على إيداع المبلغ k سيبلغ المقدار k_3 والذي يساوي :

$$k_3 = k + i.k + k.i + k.i = k(1 + 3i)$$

وبعد مرور n سنة على إيداع المبلغ k سيبلغ المقدار k_n والذي يساوي :

$$k_n = k(1 + n.i) \qquad (3,2)$$

وهي العلاقة التي تعطينا حصيلة إيداع المبلغ k لمدة n سنة i بفائدة بسيطة .

مثال (١,٢) :

ما هي حصيلة إيداع مبلغ ١٥٠٠٠٠ ليرة سورية بفائدة بسيطة %٦ ولمدة ٥ سنوات ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (٣,٢) نجد :

$$k_n = 150000(1+5(0.06)) = 195000 s.p$$

مثال (٢,٢) :

استثمر شخص مبلغ ١٠٠٠٠٠ ليرة سورية بفائدة بسيطة لمدة ٣ سنوات بمعدل فائدة سنوي قدره ١٠% سنوياً، أحسب أولاً الفائدة المستحقة في نهاية فترة الاستثمار واحسب ثانياً حصيلة المبلغ .

الحل :

بتطبيق العلاقة (١,٢) نجد :

$$I = 100000.\frac{10}{100}.3 = 30000 s.p$$

أما جملة المبلغ فنجدها بتطبيق العلاقة (٣,٢) ما يلي :

$$k_n = 100000(1+\frac{10}{100}.3) = 130000 s.p$$

ويمكن حسابها كما يلي :

$$k_n = 100000 + 30000 = 130000 s.p$$

٢- القيمة الحالية لمبلغ أودع لمدة n سنة :

لنرمز للمبلغ الذي يستحق بعد مرور n سنة بالرمز k_n وأن القيمة الحالية له هي مقدار المبلغ الذي يجب إيداعه في بداية الزمن بفائدة بسيطة قدرها i .

ولحساب القيمة الحالية للمبلغ k نستفيد من العلاقة (١,٢) فنجد أن القيمة الحالية k تساوي :

$$k = \frac{k_n}{(1+n.i)} = k_n(1+n.i)^{-1} \qquad (٤,٢)$$

مثال (٣,٢) :

ما هو مقدار المبلغ الذي يجب إيداعه لمدة (٥) أشهر وبفائدة سنوية بسيطة قدرها ٥% لنحصل على (٢٠٠٠٠) ليرة سورية .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٤,٢) نجد :

$$k = \frac{20000}{(1+\frac{5}{12}.0.05)} = 19591.54s.p$$

مثال (٤,٢):

بلغت الفائدة البسيطة المقدار ٦٠٠٠ ليرة سورية لمبلغ أصلي تم استثماره لمدة ٣ سنوات بمعدل فائدة سنوي ١٠% . المطلوب حساب قيمة هذا المبلغ ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (١,٢) نجد :

$$k = \frac{6000}{(0.1).(3)} = 20000s.p$$

مثال(١,٣):

استثمر شخص مبلغاً من المال بمعدل فائدة سنوية بسيطة ٤%، فإذا بلغت جملة المبلغ مقدار ٢٥٠٢٠٠ ليرة سورية في نهاية خمس سنوات، المطلوب احسب المبلغ الأصلي المستثمر والفوائد المتحصلة في نهاية الاستثمار .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٤,٢) نجد :

$$k = \frac{250200}{(1+5.\frac{4}{100})} = 208500s.p$$

ولإيجاد الفوائد المتحصلة، نطبق العلاقة $k_n = k + I$ ، فنجد :

$$I = k_n - k$$
$$I = 250200 - 208500 = 41700s.p$$

٣- المدة الزمنية الكلية للإيداع :

نستطيع من العلاقة (١,٢) أن نستنتج قانون فترة الإيداع، أي :

$$n = \frac{k_n - k}{k.i} \qquad (٥,٢)$$

مثال (٣,٢) :

ما هي المدة التي يجب أن يودع بها مبلغ (٧٠٠٠) ليرة سورية بفائدة سنوية بسيطة (٨%) لنحصل على (١٠٠٠٠) ليرة سورية ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (٥,٢) نجد :

$$k = \frac{10000}{(1+n.0.08)} = 5.357$$

٤- حساب المعدل المئوي للفائدة البسيطة :

بنفس الطريقة من خلال المعادلة (١,٢) يكون :

$$i = \frac{k_n - k}{k.n} \qquad (٦,٢)$$

مثال (٤,٢) :

ما هو سعر الفائدة السنوية البسيطة التي أودع وفقها مبلغ (١٢٠٠٠) ليرة سورية لمدة ٤ سنوات وكانت حصيلته (١٨٨٠٠) ليرة سورية ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (٦,٢) نجد :

$$i = \frac{18800-12000}{12000.(4)} = 14.17\%$$

ملاحظة (١) :

إن العمل في نظام الفائدة البسيطة أصبح نادراً ويقتصر على حساب الفائدة الناجمة عن إيداع المبالغ لفترات قصيرة لا تتجاوز العام (لمدة أشهر أو أيام)، وذلك لأنه يحقق أكبر ربح ممكن للمستثمر إذا كانت الفترة لا تتجاوز العام .

ملاحظة (٢) :

يجب أن يكون هنالك تجانس زمني بين معدل الفائدة وطول فترة الدورة الزمنية الاستثمارية . فإذا كانت الفترة الزمنية n بالسنة فإن معدل الفائدة i يجب أن يكون سنوياً، أما الحالات التي يكون فيها المعدل عن فترة زمنية أقل من سنة، فإنه يجب أن نضرب المعدل في الفترة الزمنية الواحدة بعدد الفترات التي تحتويها سنة كاملة .

مثال (٥,٢):

استثمر مبلغ ١٠٠٠٠٠ ليرة سورية بمعدل فائدة بسيطة معين لفترة ١٨ شهراً، فأصبح المبلغ في نهاية الفترة ١١٨٠٠٠ ليرة سورية، المطلوب وباستخدام n عدد دورات الاستثمار :

١- حساب معدل الفائدة السنوي البسيط .
٢- حساب معدل الفائدة الربع سنوي البسيط .
٣- حساب معدل الفائدة الشهري البسيط .

الحل :

١- نستخدم فترة الاستثمار بالسنة ولدينا $n = 1.5$ وذلك للحصول على معدل الفائدة السنوي وذلك بتطبيق العلاقة (٦,٢) فنجد :

$$i = \frac{118000 - 100000}{100000.(1.5)} = 12\%$$

٢- نستخدم فترة الاستثمار بأرباع السنوات ويكون لدينا : $n = \frac{18}{3} = 6$، وذلك للحصول على معدل الفائدة الربع سنوي، بتطبيق العلاقة (٦,٢) نجد :

$$i = \frac{118000 - 100000}{100000.(6)} = 3\%$$

٣- للحصول على معدل الفائدة الشهري يعتبر الشهر كدورة استثمارية كاملة وهنا لدينا $n = 18$، نطبق العلاقة (٦,٢) فنجد :

$$i = \frac{118000 - 100000}{100000.(18)} = 1\%$$

(٣,٢) حالات خاصة بالفترة الزمنية (n):

تطبق الفائدة البسيطة على القروض والاستثمارات قصيرة الأجل والتي تكون أقل من سنة، أي تكون مدتها بالأشهر و بالأيام. وبالتالي علاقتي الفائدة البسيطة وحصيلة المبالغ المتكونة بعد (n)سنة هي صحيحة دوماً، على أن يراعى ما يلي :

(١,٣,٢) الفترة الزمنية (n)بالأشهر :

إذا أعطيت مدة القرض أو الاستثمار (n)بالأشهر ومعدل الفائدة بالسنة، نقسم عدد الأشهر على أشهر السنة كاملةً وبذلك تصبح العلاقة (١,٢) على الشكل التالي :

$$I = k.\frac{n^*}{12}.i \qquad (٧,٢)$$

حيث يشير الرمز n^* إلى أن المدة المعطاة لا تتطابق مع فترة المعدل المعطى .

مثال (٦,٢):

اقترض شخص في بداية الشهر الأول لعام ٢٠١٠ مبلغ ٣٥٠٠٠٠ ليرة سورية من أحد البنوك التجارية بمعدل فائدة بسيطة ١٠% سنوياً، والمطلوب حساب حصيلة المبلغ المستحق عليه بعد ثمانية أشهر من نفس العام .

الحل :

نجد أولاً قيمة الفوائد المتحققة على المبلغ المقترض، وذلك بعد تحويل المدة الزمنية المعطاة من أشهر إلى سنوات وذلك بتطبيق العلاقة (٧,٢) نجد :

$$I = 350000.\frac{8}{12}.\frac{10}{100} = 23333.3345 s.p$$

ثم نجد حصيلة المبلغ كما يلي :

$$k_n + k + I$$
$$k_n = 350000 + 23333.3345 = 373333.334 s.p$$

مثال (٦,٢):

استثمر شخص مبلغ ٥٠٠٠٠٠ ليرة سورية في أحد البنوك وبعد انقضاء مدة ١٠ أشهر بلغت حصيلة المبلغ ٥٥٠٠٠٠ ليرة سورية والمطلوب احسب معدل الفائدة التي وظف على أساسها المبلغ .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٦,٢) نجد :

$$i = \frac{550000 - 500000}{500000.\frac{10}{12}} = 12\%$$

(٢,٣,٢) الفترة الزمنية (n) بالأيام :

نميز بين نوعين من السنة تم الاصطلاح على مفهوميهما :

١- السنة التجارية (الطريقة الفرنسية): وتعتمد هذه الطريقة على أن عدد أيام السنة هو ٣٦٠ يوماً. ونرمز لهل بالرمز I_o، ويعبر عنه رياضياً كما يلي :

$$I_o = k.\frac{n^*}{360}.i \qquad (8,2)$$

٢- السنة الحقيقية (الطريقة الإنكليزية): وتعتمد هذه الطريقة على أن عدد أيام السنة هو ٣٦٦ يوماً. ونرمز لهل بالرمز I_l، ويعبر عنه رياضياً كما يلي :

$$I_l = k.\frac{n^*}{366}.i \qquad (٩,٢)$$

ومن المتعارف عليه أن هذه الطريقة تسمى بالطريقة الصحيحة .

مع ملاحظة أنه في حال كون السنة كبيسة يكون شهر شباط ٢٩ يوم.ويمكن معرفة السنة الكبيسة بقسمة السنة التقويمية على ٤ فإذا قبلت القسمة بدون باقٍ تكون السنة في هذه الحالة كبيسة .

ملاحظات :

١- إذا لم ينص صراحة على نوع السنة ولم تحدد (كأن نقول ١٩٨٥) فتعتبر السنة تجارية (٣٦٠) يوم .
٢- إذا لم يحدد الشهر فيعتبر الشهر على أساس تجاري (٣٠) يوم .

٣- إذا تم تحديد السنة أو الشهر يجب حساب المدة بصورة حقيقية مع ملاحظة أن الأشهر (كانون الثاني –آذار أيار – تموز – آب – تشرين الأول – كانون الأول) تعدّ ٣١ يوماً ، والأشهر (نيسان – حزيران – أيلول – تشرين الثاني) تعدّ ٣٠ يوماً، أما شهر شباط فيعدّ ٢٨ يوماً و ٢٩ يوماً في حال كون السنة كبيسة .

٤- إذا كانت مدة الاستثمار عبارة عن عدد من الأيام تقع بعضها في سنة عادية والبعض الآخر في سنة كبيسة فإن العلاقة (١,٢) تصبح على الشكل :

$$I = k.(\frac{n_1}{365} + \frac{n_2}{366}).i \qquad (١٠,٢)$$

حيث:

n_1 عدد الأيام التي تقع في السنة العادية، n_2 عدد الأيام التي تقع في السنة الكبيسة .

٥- إذا لم يبين لنا مدة الاستثمار صراحةً وأعطي فقط تاريخ الإيداع (أو تاريخ السحب) وتاريخ مدة انتهاء مدة الاستثمار فإن المدة تحسب بعدد الأيام بين هاتين التاريخيين مع مراعاة احتساب يوم واحد فقط يوم الإيداع أو السحب وقد جرت العادة على إهمال يوم الإيداع واحتساب يوم السحب .

مثال(٧,٢):

اقترض تاجر بتاريخ ١٩٩٣/٢/١١ مبلغ ٢٠٠٠٠٠ ليرة سورية من أحد البنوك التجارية بمعدل فائدة بسيطة ١٠% سنوياً. المطلوب حساب الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة المستحقة عليه يوم ١٩٩٣/٧/٢٢ .

الحل :

بما أن التاريخ الميلادي ١٩٩٣ لا يقبل القسمة على ٤ فالسنة غير كبيسة وشهر شباط ٢٨ يوم وعدد أيام السنة ٣٦٥ يوم، ولحساب الفترة الزمنية بين ٢/١١-١٩٩٣/٧/٢٢ ، نجد :

تموز + حزيران + أيار + نيسان + آذار + شباط

$$n^* = (28-11)+31+30+31+30+22 = 161$$

ومنه :

لحساب الفائدة التجارية نطبق العلاقة (٨,٢) فنجد :

$$I_o = 200000.\frac{161}{360}.\frac{10}{100} = 8944.4 s.p$$

أما لحساب الفائدة الصحيحة نطبق العلاقة (٩,٢) فنجد :

$$I_l = 200000.\frac{161}{365}.\frac{10}{100} = 8921.9 s.p$$

مثال (٨،٢):

استثمر شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ليرة سورية لمدة سنتين و٨ أشهر و٢١ يوم بمعدل فائدة بسيطة قدره ٩% سنوياً، احسب الفائدة وحصيلة المبلغ .

الحل :

الفائدة المستحقة $I =$ I_1 الفائدة لمدة سنتين + I_2 الفائدة لمدة ٨ شهور + I_3 الفائدة لمدة ٢١ يوم

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$
$$I = 10000.(0.09).(2) + 10000.(0.09).(\frac{8}{12}) + 10000.(0.09).(\frac{21}{360})$$
$$I = 1800 + 600 + 52.5 = 2452.5 s.p$$

أما حصيلة المبلغ فهي :

$$k_n = 10000 + 2452.5 = 12452.5 s.p$$

نلاحظ أنه تم استخدام السنة التجارية في حساب الفائدة، وذلك لأنه لم يشير بصراحة لنوع السنة .

مثال (٩،٢):

اشترى شخص بضاعة بتاريخ ١٩/١٠/١٩٩٩ بمبلغ ٨٦٤٢٠٠ ليرة سورية سدد منها ٤٠٠٠٠٠ ليرة سورية عند الشراء وطلب من البائع تأجيل سداد الباقي حوالي ستة أشهر، وقد اتفق البائع على التأجيل بشرط أن تحسب فوائد بسيطة على المبلغ المتبقي بمعدل ٦% سنوياً. المطلوب احسب المبلغ المستحق إذ قام بالسداد تاريخ ١٥/٣/٢٠٠٠ .

الحل :

المبلغ الأصلي الخاضع للفوائد البسيطة هو :

$$k = 864200 - 400000 = 464200 s.p$$

نحسب مدة الاستثمار كما يلي :

آذار + شباط + ك٢ +ك١ +ت٢ +ت١

$$n = (31-19) + 30 + 31 + 31 + 29 + 15 = 148$$

نجد أن جزءاً من هذه المبالغ يقع في السنة ١٩٩٩ والجزء الآخر في السنة الكبيسة ٢٠٠٠ ولحساب n^* في هذه الحالة تقسم المدة المذكورة إلى قسمين :

$$n_1 = (31-19)+30+31 = 73$$
$$n_2 = 31+29+15 = 75$$
$$I = k.(\frac{n_1}{365}+\frac{n_2}{566}).i$$
$$I = 464200.(0.06).(\frac{73}{365}+\frac{75}{366})$$
$$I = 27852.(0.404918) = 11277.8sp$$

ومنه المبلغ المستحق :

$$k_n = 464200+11277.8 = 475477.8s.p$$

مثال (١٠,٢):

أودع شخص مبلغ ٤٠٠٠٠٠ ليرة سورية في ٢٠٠١/٤/١٢ في أحد البنوك، فإذا كان معدل الفائدة البسيطة ٩% سنوياً، وحصيلة المبلغ المستحق عند السحب بفائدة صحيحة بلغ ٤١٤٤٠٠ ليرة سورية في نهاية المدة فما هو تاريخ السحب ؟

الحل :

من نص المسألة نجد أن المبلغ الأصلي هو ٤٠٠٠٠٠ ل.س وحصيلة المبلغ ٤١٤٤٠٠ ل.س ومنه الفائدة الصحيحة :

$$I_l = 414400-400000 = 14400s.p$$

ولكن الفائدة الصحيحة تعطى بالعلاقة (٩,٢)، بالتعويض نجد :

$$14400 = 400000.\frac{n^*}{365}.\frac{9}{100} \Rightarrow n^* = \frac{(365).(14400)}{(400000).(0.09)} = 146$$

ولحساب تاريخ السحب نجد عدد الأيام حتى نهاية شهر نيسان هو : ١٨=١٢-٣٠

وهنا لدينا : ١٨ يوم في نيسان و٣١ يوم في أيار و٣٠ يوم في حزيران و٣١ يوم تموز و ٣١ يوم في آب بإضافة ٧ أيام من أيلول نحصل على المجموع ١٤٦ يوماً، أي تاريخ السحب يقع في ٢٠٠١/٩/٥ وهو المطلوب .

مثال (١١,٢) : أودع شخص مبلغين من المال مجموعهما ٢٥٠٠٠٠ ل.س، أحدهما في المصرف العقاري لمدة ستة أشهر، والثاني في المصرف الزراعي لمدة ثلاثة أشهر بمعدل فائدة بسيطة سنوية ٦% في كلا المصرفين، فنحصل على فائدة قدرها ٦٣٧٥ ليرة سورية . فما أصل كل مبلغ منهما ؟

الحل :

نفرض أن k_1 المبلغ الأول والمبلغ الثاني k_2 فيكون :

$$k = k_1 + k_2 \Rightarrow k_2 = k - k_1$$

بالتعويض نجد :

إن الفائدة I_1و I_2 على التوالي لكل من المبلغين k_1 و k_2 تساوي :

$$I_1 = k_1 . \frac{n_1}{12} . i = k_1 . \frac{6}{12} . (0.06) = 0.03 k_1$$
$$I_2 = k_2 . \frac{n_2}{12} . i = (250000 - k_1) . \frac{3}{12} . (0.06) = 3750 - 0.015 k_1$$

ولكن لدينا مجموع الفائدتين تساوي :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ 6375 &= 0.03 k_1 + 3750 - 0.015 k_1 \\ 6375 &= 3750 - 0.015 k_1 \\ 0.015 k_1 &= 2625 \\ k_1 &= \frac{2625}{0.015} = 175000 s.p \end{aligned}$$

وهو المبلغ الأول .

أما المبلغ الثاني فيكون :

$$k_2 = 250000 - 175000 = 75000 s.p$$

(٤,٢) العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة :

الفائدة التجارية هي أكبر من الفائدة الصحيحة، إذ يمكن إيجاد العلاقة بينهما كما يلي:

(١,٤,٢) النسبة بين الفائدة التجارية والصحيحة $\frac{I_O}{I_l}$:

بالتعويض نجد :

$$\frac{I_O}{I_l} = \frac{k . \frac{n}{360} . i}{k . \frac{n}{365} . i} = \frac{365}{360} \Rightarrow \qquad (١١,٢)$$
$$\frac{I_o}{I_l} = \frac{73}{72} \Rightarrow I_O = \frac{73}{72} . I_l$$

أو :

$$\frac{I_O}{I_l}=\frac{73}{72}\Rightarrow I_l=\frac{72}{73}.I_o \qquad (١٢,٢)$$

(٢,٤,٢) الفرق بين الفائدة التجارية والصحيحة $I_o - I_l$:

يتشكل الفرق بين الفائدتين كما يلي :

$$I_o - I_l = I_o - \frac{72}{73} I_o = \frac{1}{73} I_o \qquad (١٣,٢)$$

أي أن الفائدة التجارية لمبلغ ما تزيد عن الفائدة الصحيحة بمقدار $\frac{1}{73}$ من الفائدة التجارية .

$$I_o - I_l = \frac{73}{72} I_l - I_l = \frac{1}{72} I_l \qquad (١٤,٢)$$

أي أن الفائدة التجارية لمبلغ ما تزيد عن الفائدة الصحيحة بمقدار $\frac{1}{72}$ من الفائدة الصحيحة .

مثال (١٢,٢) :

إذا علمت أن الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة لمبلغ ما مستثمر لعدد من الأيام وبمعدل معين هو ١٥٠ ليرة سورية . احسب مقدار كل من الفائدتين .

الحل :

لدينا من نص المسألة $I_o - I_l = 150$

لإيجاد الفائدة الصحيحة نطبق العلاقة (١٤,٢) نجد :

$$150 = \frac{1}{72} I_l \Rightarrow I_l = 10800 s.p$$

لإيجاد الفائدة التجارية نطبق العلاقة (١٣,٢) نجد :

$$150 = \frac{1}{73} I_o \Rightarrow I_o = 10950 s.p$$

(٥,٢) طريقة النُمر والقواسم :

تعتبر طريقة النُمر والقواسم من أهم الطرق المختصرة لحساب الفوائد البسيطة ولذلك فهي تستخدم في العمليات اليومية في الحسابات التجارية وحسابات التوفير .

وتظهر أهمية هذه الطريقة عندما يراد حساب الفوائد التجارية لعدة مبالغ مستثمرة خلال فترات زمنية مختلفة بمعدل فائدة واحدة .

وللتوصل لقانون الفائدة بحسب هذه الطريقة سنفترض أن لدينا مجموعة مبالغ مستثمرة ولتكن $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$ وأن مدة كم منها $D_1, D_2, D_3, ..., D_n$ من الأيام على الترتيب، وبمعدل فائدة وحيد، وبهذا (مع ملاحظة أن $i' = 100.i$) يعطى مجموع الفوائد بالصيغة التالية :

$$I_o = k_1 \frac{D_1}{360} . \frac{i'}{100} + k_2 \frac{D_2}{360} . \frac{i'}{100} + ... + k_n \frac{i'}{360} . \frac{i'}{100}$$

بإخراج المقدار $\frac{i'}{36000}$ عامل مشترك نجد :

$$I_o = \frac{i'}{36000} (k_1.D_1 + k_2.D_2 + ... + k_n.D_n) \qquad (١٥,٢)$$

يسمى المقدار $\frac{i'}{36000}$ بالقاسم ، ويسمى حاصل ضرب كل مبلغ في مدة استثماره بالأيام بالنُمر ولذا سميت هذه الطريقة بطريقة النُمر والقواسم .

إن القانون الأخير يستخدم عدد أيام السنة ٣٦٠ يوم وهذا يعني أن الفائدة الناتجة هي الفائدة التجارية، فإذا أردنا الحصول على الفائدة الصحيحة نطبق العلاقة (١٢,٢) .

أما إذا كانت المدة بالأشهر بدلاً من الأيام أي $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ على الترتيب فتكون، الفائدة :

$$I = \frac{i'}{1200} (k_1.m_1 + k_2.m_2 + ... + k_n.m_2) \qquad (١٦,٢)$$

مثال (١٣,٢) :

أوجد كلاً من الفائدة التجارية والصحيحة للمبالغ وللمدد التالية :

- ٨٠٠٠٠ ل.س لمدة ٦٠ يوم .
- ٩٣٠٠٠ ل.س لمدة ٧٠ يوم .
- ١٢٣٥٠٠ ل.س لمدة ٨٠ يوم .
- ١٤٠٠٠٠ ل.س لمدة ٩٠ يوم .

إذا علمت أن معدل الفائدة هو ٧% سنوياً وذلك بطريقة النُمر والقواسم .

الحل :

بما أن الزمن معطى بالأيام وأن $i' = 100.\frac{7}{100} = 7$ فإن الفائدة التجارية تحسب من العلاقة (١٥,٢) كما يلي :

$$I_o = \frac{7}{36000}((80000).(60) + (93000).(70) + (123500).(80) + (140000).(90)) = 6570.3s.p$$

ولإيجاد الفائدة الصحيحة نطبق العلاقة (١٢,٢) فنجد :

$$I_l = \frac{72}{73}.(6570.3) = 6480.3s.p$$

(٦,٢) طريقة الفائدة المركبة :

إن طريقة الفائدة المركبة تشترط أن تضاف الفائدة الحاصلة سنوياً (أو عدة مرات في السنة) إلى المبلغ الأساسي لتحسب لها مدة جديدة (أي الفائدة تنتج فائدة) .

(١,٦,٢) حساب عناصر قانون الفائدة المركبة :

يتألف قانون الفائدة المركبة من أربع عناصر أساسية هي : k_nحصيلة المبلغ ، k المبلغ الأصلي ، i معدل الفائدة البسيطة السنوي ، nعدد الدورات الزمنية (السنوات) . وانطلاقاً من العلاقة الرئيسة لقانون الفائدة المركبة يمكننا إيجاد أيّاً من العناصر السابقة شريطة توافر معلومات عن بقية العناصر كما يلي :

١- حصيلة إيداع مبلغ k:

وهي القيمة التي يبلغها المودع بعد مرور n سنة على إيداعه وفق طريقة الفائدة المركبة .

نفترض أن المبلغ المودع هو kوأن سعر الفائدة هو iوأن الفائدة مركبة وسنوية، فبعد مرور سنة كاملة على إيداع ذلك المبلغ kسيصبح مساوياً للمقدار k_1 حيث :

$$k_1 = k + i.k = k(1+i)$$

وبعد مرور سنتين على إيداع المبلغ kسيبلغ المقدار k_2والذي يساوي :

$$k_2 = k_1 + i.k_1 = k_1(1+i) = k(1+i)^2$$

وبعد مرور ثلاث سنوات على إيداع المبلغ kسيبلغ المقدار k_3والذي يساوي :

$$k_3 = k_2 + i.k_2 = k_2(1+i) = k(1+i)^3$$

وبعد مرور nسنة على إيداع المبلغ kسيبلغ المقدار k_nوالذي يساوي :

$$k_n = k(1+i)^n \qquad (17,2)$$

وهي العلاقة التي تعطينا حصيلة إيداع المبلغ k لمدة n سنة i بفائدة مركبة .

مثال (١٤,٢) :

أودع شخص مبلغاً من المال وقدره (٧٥٠٠) ليرة سورية في صندوق توفير البريد لمدة ست سنوات. فكم يترتب على الصندوق دفعه للشخص المودع بنهاية فترة الإيداع . إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة %٥ ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (١٧،2) نجد أن :

$$k_6 = 7500(1+0.05)^6 = 10050.72 s.p$$

٢- القيمة الحالية لمبلغ أودع لمدة n سنة :

نرمز للمبلغ الذي يستحق بعد مرور n سنة بالرمز k_n والقيمة الحالية لذلك المبلغ المودع بفائدة i والذي نحصل عليه من العلاقة (١٧،2) كما يلي :

$$k = \frac{k_n}{(1+i)^n} = k_n(1+i)^{-n} \qquad (١٨,٢)$$

مثال (١٥,٢) :

ما هو مقدار المبلغ الذي يجب إيداعه لمدة (١٥) سنة وبفائدة سنوية مركبة قدرها %٥ لنحصل على المبلغ(١٠٠٠٠٠٠) ليرة سورية ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (١٨،2) نجد أن :

$$k = \frac{1000000}{(1+0.05)^{15}} = 481017.09 s.p$$

٣- المدة الزمنية الكلية للإيداع :

نستطيع من العلاقة (١٧,٢) أن نستنتج قانون فترة الإيداع، أي :

$$n = \frac{\ln k_n - \ln k}{\ln(1+i)} \qquad (١٩,٢)$$

مثال (٣,٢) :

ما هي المدة التي يجب أن يودع بها مبلغ (١٠٠٠٠٠) ليرة سورية بفائدة سنوية مركبة (%٤) لنحصل على (١٤٨٠٢٤,٤٣) ليرة سورية ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (١٩،2) نجد أن :

$$n = \frac{\ln(148024{,}43) - \ln(100000)}{\ln(1+0{,}04)}$$

$$n = \frac{11.905133 - 11.512925}{0.039220713}$$

$$n = \frac{0.392208}{0.039220713} = 10$$

إن مدة استثمار المبلغ هي ١٠ سنوات .

٤- حساب المعدل المئوي للفائدة المركبة :

بنفس الطريقة من خلال المعادلة (١٧,٢) يكون :

$$i = \left(\frac{k_n}{k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad (٢٠,٢)$$

مثال (٤,٢) :

ما هو سعر الفائدة السنوية المركبة التي أودع وفقها مبلغ (١٠٠٠٠٠) ليرة سورية لمدة ١٠ سنوات وكانت حصيلته (٥٥٨٣٩,٤٧٨) ليرة سورية ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (٢٠,٢) نجد :

$$i = \left(\frac{100000}{55839.478}\right)^{\frac{1}{10}} - 1$$

$$i = (1.790847686)^{\frac{1}{10}} - 1$$

$$i = 1.06 - 1 = 0.06$$

إذاً معدل الفائدة المركبة هو ٦% سنوياً .

كما ويمكن حساب مقدار الفائدة المتحققة على المبلغ المودع ، العنصر غير المباشر لجملة الفائدة وذلك وفق الحالات التالية :

١- مقدار الفائدة المتحققة على المبلغ المودع إذا كانت المدة الزمنية سنة كاملة :

نرمز لمقدار الفائدة المتحققة على المبلغ المودع بالرمز I ويمكن حسابها كالتالي :

$$I = k_n - k$$

وبالتالي :

$$I = k(1+i)^n - k$$

$$I = k\left[(1+i)-1\right] \qquad (٢١,٢)$$

مثال (١٦,٢) :

أودع شخص مبلغاً من المال في أحد المصارف لمدة عشر سنوات بفائدة مركبة معدلها (٥%) سنوياً، وفي نهاية المدة سدد المصرف لهذا الشخص بالإضافة إلى المبلغ الأصلي المودع فائدة قدرها (٢٤٠١.٢٧) ليرة سورية، أوجد قيمة المبلغ الأصلي الذي أودعه الشخص في هذا المصرف ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (٢١,٢) نجد أن :

$$2401.27 = k\left[(1.05)^{10} - 1\right]$$
$$2401.27 = k(1.6289 - 1)$$
$$k = 3818.16 s.p$$

مثال (١٧,٢) :

ورث شخص مبلغ (١٠٠٠٠٠) ليرة سورية قام بإيداع المبلغ المذكور لدى المصرف في حسابيين ، حساب للتوفير يعطي فائدة مركبة بمعدل (٥%) ، وحساب للادخار يعطي فائدة مركبة معدلها (٦%) سنوياً ، وبعد مضي سنة على من إيداع المبلغ حصل الشخص على فائدة مقدارها (٥٦٥٠) ليرة سورية، فما هما المبلغين المستثمرين في كل حساب ؟

الحل :

لنفترض أن المبلغ المستثمر في حساب الادخار بمعدل فائدة (٦%) سنوياً هو p ليرة سورية، فيكون المبلغ المستثمر في حساب التوفير بمعدل فائدة (٥%) سنوياً هو $(100000 - p)$ ليرة سورية . وأن مقدار الفائدة الناتجة عن استثمار المبلغ p لسنة واحدة بمعدل (٦%) في حساب الادخار مضافاً إليه مقدار الفائدة الناتجة عن استثمار المبلغ $(100000 - p)$ يساوي (٥٦٥٠) ليرة سورية . وبتطبيق العلاقة (٢١,٢) نجد :

$$I_1 = p\left[(1.06)^1 - 1\right] = (0.06)p$$

وهي مقدار الفائدة الناتجة عن استثمار المبلغ p لسنة واحدة في حساب الادخار .

$$I_2 = (100000 - p)\left[(1.05)^1 - 1\right] =$$
$$(100000 - p)(0.05) = 5000 - p(0.05)$$
$$I_1 + I_2 = 5650$$
$$p(0.06) + 5000 - p(0.05) = 5650$$
$$p(0.01) = 650$$
$$p = \frac{650}{0.01} = 65000 s.p$$

هذا يعني أن المبلغ المستثمر في حساب الادخار بمعدل (٦%) يساوي (٦٥٠٠٠) ليرة سورية ، وبالتالي المبلغ المستثمر في حساب التوفير يساوي (٣٥٠٠٠) ليرة سورية .

٢- حصيلة المبلغ k على أساس أن الفائدة تضاف أكثر من مرة في السنة :

إذا كانت طريقة الفائدة المركبة تقضي إضافتها إلى المبلغ الأساسي عدة مرات خلال السنة الواحدة فإن العلاقات (١٧,٢) و (١٨,٢،) تأخذ شكلاً آخر نحصل عليه كما يلي :

عند استثمار (اقتراض) مبلغ قدره k ولمدة n سنة بفائدة مركبة سنوية معدلها i على أساس أن الفائدة تضاف m مرة في السنة حيث أن m تأخذ القيم التالية :

$m=1$ الفائدة تضاف مرة واحدة في السنة .

$m=2$ الفائدة تضاف مرتين في السنة (الفائدة تضاف كل ستة أشهر).

$m=3$ الفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة (الفائدة تضاف كل أربعة أشهر).

$m=4$ الفائدة تضاف أربع مرات في السنة (الفائدة تضاف كل ثلاثة أشهر).

$m=12$ الفائدة تضاف ١٢ مرة في السنة (الفائدة تضاف كل شهر).

$m=365$ الفائدة تضاف ٣٦٥ مرة في السنة (الفائدة يومية).

فإن حصيلة المبلغ k بعد n سنة تحسب من العلاقة :

$$k_n = k(1+\frac{i}{m})^{m.n} \qquad (٢٢,٢)$$

مثال (١٨,٢) :

أودع شخص مبلغاً قدره (١٠٠٠٠٠) ليرة سورية في مصرف يعطي فائدة معدلها (٨%) سنوياً، ما هي حصيلة المبلغ المودع بعد (٥) سنوات على أساس أن الفائدة تضاف :

١- مرة واحدة في السنة .
٢- مرتين في السنة .
٣- أربع مرات في السنة .
٤- ١٢ مرة في السنة .

الحل :

باستخدام العلاقة (١٩,٢) نجد :

١) $k_n = 100000(1+\frac{0.08}{1})^{1.5} = 146932.8 s.p$

٢) $k_n = 100000(1+\frac{0.08}{2})^{2.5} = 148024.43 s.p$

٣) $k_n = 100000(1+\frac{0.08}{4})^{4.5} = 148594.73 s.p$

٤) $k_n = 100000(1+\frac{0.08}{12})^{12.5} = 148985.57 s.p$

٣- حصيلة المبلغ k على أساس أن الفائدة تضاف بشكل مستمر :

لنفترض أن عدد مرات الفائدة يجري بشكل مستمر طيلة أيام السنة أي نجعل $m \to \infty$ في العلاقة (٢٢,٢) والتي تأخذ الشكل التالي :

$$\lim_{n\to\infty} [k_n] = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{i}{m}\right)^{n.m}$$

$$= k \lim_{n\to\alpha} \left[\left[1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right]^{\frac{m}{i}}\right]^{i.n} = ke^{i.n}$$

أي أن :

$$\lim_{m\to\infty}\left(k_n\right) = k.e^{i.n} \qquad (٢٣,٢)$$

مثال (١٩,٢) :

أوجد حصيلة مبلغ (١٠٠٠٠٠) ليرة سورية يستثمر لمدة ثلاث سنوات بفائدة مركبة معدلها (١٢%) على أساس أن الفائدة تضاف بشكل مستمر.

الحل :

نطبق العلاقة (٢٣,٢) نجد أن :

$k_n = 100000 e^{(0.12)(3)} = 143332.94 s.p$

٤- حصيلة المبلغ k إذا كانت مدة الإيداع تتكون من عدد صحيح وكسر من السنوات (أي المدة مقدرة بالسنوات والأشهر) :

في كثير من الأحيان تكون مدة الإيداع عدد صحيح وكسر من السنوات، وللحصول على جملة المبلغ المودع لدينا طريقتين هما :

- **الطريقة الأولى :** تقوم على حساب الفائدة المركبة للجزء الصحيح (السنوات) وحساب الفائدة البسيطة للجزء الكسري (الأشهر) كما يلي :

$$k_n = k(1+i)^n (1+i\frac{f}{12}) \qquad (٢٤,٢)$$

حيث أن :

f عدد الأشهر .

- **الطريقة الثانية** : تقوم على حساب الفائدة المركبة خلال الفترة n أي لكل المدة (السنوات والأشهر معاً)، وهو الحل الذي يستخدم في البنوك التجارية .

$$k_n = k(1+i)^{n+\frac{f}{12}} \qquad (٢٥,٢)$$

مثال (٢٠,٢) :

أودع شخص ١٠٠٠٠٠ ليرة سورية في مصرف بمعدل فائدة مركبة ٥% سنوياً ، ولمدة أربع سنوات وثلاثة أشهر، فما هي حصيلة المبلغ المودع ؟

الحل :

لإيجاد حصيلة المبلغ وفقاً للطريق الأولى نطبق العلاقة (٢٤,٢) فنجد :

$$k_n = 100000(1+\frac{5}{100})^4(1+\frac{5}{100}.\frac{3}{12}) = 1230.7s.p$$

لإيجاد حصيلة المبلغ وفقاً للطريق الثانية نطبق العلاقة (٢٥,٢) فنجد :

$$k_n = 100000(1+\frac{5}{100})^{4+\frac{3}{12}} = 100000(1.05)^{4.25} = 1230.42s.p$$

تمارين غير محلولة

١- تم إيداع مبلغ (١٠٠٠٠٠٠) ليرة سورية في مصرف التوفير بمعدل فائدة سنوية (٨%) ولمدة (١٠) سنوات ، ما هي حصيلة الإيداع ؟

٢- احسب فترة توظيف مبلغ (١٢٠٠٠٠٠) ليرة سورية إذا علمت أن معدل الفائدة (٦%) سنوياً علماً أن الفائدة بلغت (١٠٠٨٠٠) ليرة سورية .

٣- استثمر شخص مبلغ (١٠٠٠٠٠٠) ليرة سورية لمدة (٥) سنوات بمعدل فائدة بسيطة (٧%) المطلوب حساب حصيلة الإيداع في نهاية فترة الاستثمار ومن ثم حساب قيمة الفوائد المكونة في نهاية هذه الفترة .

٤- أودع شخص (٢٥٠٠٠٠٠) ليرة سورية بفائدة مركبة قدرها (٤%) ولمدة عشر سنوات .والمطلوب :

١- احسب حصيلة هذا المبلغ بعد هذه المدة .

٢- أوجد المدة التي كان يجب أن يترك مودعاً طيلتها ليحصل على نفس الحصيلة السابقة وذلك إذا كانت الفائدة بسيطة وقدرها (٤%) أيضاً .

٥- اتفق شخص مدين مع دائنه أن يستبدل السندين التاليين :

السند الأول وقيمته (٥٠٠٠٠) ليرة سورية ويستحق بعد (٣) سنوات .

السند الثاني وقيمته (٦٠٠٠٠) ليرة سورية ويستحق بعد (٦) سنوات .

بسند جديد يستحق بعد (٧) سنوات فإذا كانت الفائدة مركبة وقدرها (٦%) فما هي قيمة السند الجديد ؟

٦- ما المدة اللازمة لإيداع مبلغ قدره (٥٠٠٠٠) ليرة سورية بفائدة مركبة معدلها (٩.٥%) سنوياً ، إذا كانت الفائدة تضاف كل ثلاثة أشهر للحصول على مبلغ (٥٠٠٠٠٠) ليرة سورية

٧- عند شراء شخص لجهاز كمبيوتر ، دفع من ثمنه (١٠٠٠٠) ليرة سورية نقداً ، واتفق مع البائع على دفع مبلغ (٣٠٠٠٠) ليرة سورية بعد عامين بفائدة مركبة معدلها (٦%) سنوياً على أساس أن الفائدة تضاف مرتين في السنة والمطلوب : ما ثمن جهاز الكمبيوتر نقداً ؟

٨- احسب بطريقة النُمر والقواسم كلاً من الفائدة التجارية والصحيحة المستحقة على المبالغ التالية :

(١٠٠٠٠٠) ل.س لمدة (٥) شهور .

(١٥٠٠٠٠) ل.س لمدة (٤) شهور.

(٢٠٠٠٠٠) ل.س لمدة (٧) شهور.

(٥٠٠٠٠٠) ل.س لمدة (١٠) شهور.

علماً أن معدل الفائدة هو (٩%) سنوياً .

٩- أودع شخص مبلغين من المال مجموعهما (١٥٠٠٠٠٠) ل.س أحدهما في البنك العقاري لمدة (٨) شهور والثاني في البنك التجاري لمدة (١٠) شهور بمعدل فائدة (١٢%) سنوياً لكل من المبلغين . فإذا علمت أنه حصل على فوائد قدرها (١٤٠٠٠٠) ل.س من كلا البنكين . أحسب أصل كل من المبلغين .

الفصل الثالث

الاهتلاك الخطي والمنحني للأصول

الفصل الثالث

الاهتلاك الخطي والمنحني للأصول

مقدمة :

من المعلوم أن الأصول الثابتة (الآلات ، وسائل الإنتاج ، الأثاث ، .....) تتعرض إلى اهتلاك مستمر حتى إلى مرحلة تصبح غير صالحة للاستعمال ، ولحساب مقدار الاهتلاك السنوي لهذه الأصول نفترض أن قيمتها الأساسية في بداية المدة K_0وأن قيمتها بعد مرور i عاماً على استعمالها يساوي K_i وأن قيمتها بعد مرور n عاماً على استعمالها تساوي K_n .

وهناك أسلوبين لحساب الاهتلاك السنوي ، سندرسهما كالأتي :

(١,٣) : الأسلوب الخطي :

إن النموذج الرياضي لهذه الطريقة والذي وفقه تتناقص قيمة الأصل هو نموذج معادلة مستقيم من الشكل :

$$K_n = K_0 - A.n \qquad (١,٣)$$

حيث تعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري بشكل ثابت ، ففي كل عام تستهلك جزء ثابت من الأصول الثابتة ، وبذلك يكون مقدار الاهتلاك السنوي يساوي A وأن :

$$A = \frac{K_0 - K_n}{n} \qquad (٢,٣)$$

وأن مقدار الاهتلاك الإجمالي في نهاية العام i يساوي و S_iأن :

$$S_i = i.A \qquad (٣,٣)$$

وأن قيمة الأصول الثابتة بعد مرور i عاماً على استعمالها يصبح مساوية ل K_i حيث أن :

$$K_i = K_0 - i.A \qquad (٤,٣)$$

كما يمكننا استخراج قيمة الاهتلاك التراكمي لأي فترة زمنية كما يلي :

$$K_0 D_n = A.n \qquad (٥,٣)$$

مثال (١,٣) :

لنفترض أن قيمة آلة في بداية الزمن هو مبلغ قدره (١٠٠٠٠٠) ليرة سورية ، فإذا كان مبلغ الاهتلاك السنوي للآلة الذي أقرته الشركة هو (١٠٠٠٠) ليرة سورية سنوياً ، المطلوب :

١- إنشاء جدول اهتلاك لهذه الآلة .

٢- بيان المدة اللازمة لاهتلاك الآلة بشكل كامل .

٣- حساب قيمة الاهتلاك التراكمي في نهاية السنة الأخيرة .

الحل :

١- إنشاء جدول اهتلاك الآلة

قيمة الآلة في بداية العام	مقدار الاهتلاك	الزمن	قيمة الآلة في نهاية العام
١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠	١	٩٠٠٠٠
٩٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٢	٨٠٠٠٠
٨٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٣	٧٠٠٠٠
٧٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٤	٦٠٠٠٠
٦٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٥	٥٠٠٠٠
٥٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٦	٤٠٠٠٠
٤٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٧	٣٠٠٠٠
٣٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٨	٢٠٠٠٠
٢٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٩	١٠٠٠٠
١٠٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠	٠

٢- بيان المدة اللازمة للاهتلاك

نلاحظ من الجدول السابق أن الآلة تهتلك على مدى عشر سنوات . ويمكننا معرفة المدة اللازمة لاهتلاك الآلة بتطبيق العلاقة (١,٣) كما يلي :

$$0 = 100000 - 10000.n$$
$$n = 10$$

٣- حساب قيمة الاهتلاك التراكمي

بتطبيق العلاقة (٥,٣) كما يلي :

$$AD_n = 10000(10) = 100000$$

مثال (٣,٢) :

قدرت الأصول الثابتة لمعمل إنتاجي بمائة ألف ليرة سورية فإذا كانت هذه الأصول تهتلك لفترة خمس سنوات بحيث تصبح قيمتها في السنة الأخيرة (١٠٠٠٠) ليرة سورية فأوجد :

١- قيمة الأصول الثابتة في كل سنة من سنوات الاهتلاك الخمس .
٢- مقدار الاهتلاك السنوي .
٣- مقدار الاهتلاك التجميعي لغاية كل سنة من السنوات الخمس .

الحل :

لحساب مقدار الاهتلاك السنوي ، نطبق العلاقة (٢,٣) كما يلي :

$$A = \frac{100000 - 10000}{5} = 18000$$

وبالتالي ننظم الجدول التالي :

مقدار الاهتلاك التجميعي لغاية السنة i S_i	قيمة الأصول الثابتة في السنة i K_i	ترتيب سنة الاهتلاك
-	١٠٠٠٠٠	٠
١٨٠٠٠	٨٢٠٠٠	١
٣٦٠٠٠	٦٤٠٠٠	٢
٥٤٠٠٠	٤٦٠٠٠	٣
٧٢٠٠٠	٢٨٠٠٠	٤
٩٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٥

تم حساب K_i من العلاقة (٤,٣) ، أما S_i حُسبت من العلاقة (٣,٣) .

(٢,٣) : الأسلوب اللاخطي :

تعتمد هذه الطريقة على افتراض أن الاهتلاك يجري على شكل نسبة ثابتة من القيمة المتبقية من الأصول الثابتة . وتسمى هذه النسبة بمعامل الاهتلاك ونرمز لها P .

مقدار الاهتلاك في العام i يساوي :

$$A_i = K_{i-1}.P \qquad (٦,٣)$$

قيمة الأصل الثابت في نهاية العام i تساوي

$$K_i = K_{i-1} - A_i$$
$$= K_{i-1} - K_{i-1}.P$$

$$K_{i-1} = K_{i-1}[1 - P] \qquad (٧,٣)$$

وهي علاقة مشابهة للفائدة المركبة نجد :

$$K_1 = K_0(1-P)$$
$$K_2 = K_1(1-P)$$
$$= K_0(1-P)(1-P)$$
$$= K_0(1-P)^2$$
$$K_3 = K_2(1-P)$$
$$K_3 = K_0(1-P)(1-P)$$
$$K_3 = K_0(1-P)^3$$
....
$$K_n = K_0(1-P)^n$$

(٨,٣)

ومن العلاقة السابقة نجد أن معامل الاهتلاك يحسب من العلاقة التالية :

$$1-P = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$
$$P = 1-\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \qquad (٩,٣)$$

ويمكننا كتابة مقدار الاهتلاك في العام i بدلالة P و K_0 من العلاقة (٦,٣) كما يلي :

$$A_i = K_{i-1}.P = K_0(1-P)^{i-1}.P \qquad (١٠,٣)$$

كما أن أجمالي الاهتلاك في الأصول الثابتة في نهاية العام يساوي S_i

$$S_i = \sum A_i$$
$$S_i = K_0 - K_i$$
$$= K_0 - K_0(1-P)^i \qquad (١١,٣)$$
$$S_i = k_0\left[1-(1-P)^i\right]$$

مثال (٤,٢) :

قُدّرت الأصول الثابتة لمعمل انتاجي (١٠٠٠٠٠) ليرة سورية ، فإذا كانت هذه الأصول تُهتلك لفترة خمس سنوات بحيث تصبح قيمتها في السنة الأخيرة (١٠٠٠٠) ليرة سورية أوجد :

١- قيمة الأصول الثابتة في كل سنة مكن سنوات الاهتلاك الخمس .

٢- مقدار الاهتلاك السنوي .

٣- مقدار الاهتلاك التجميعي لغاية كل سنة من سنوات الاهتلاك الخمس .

الحل :

نحسب المعدل المئوي للاهتلاك السنوي باستخدام العلاقة (٩,٣) فنجد :

$$p = 1 - \sqrt[5]{\frac{10000}{100000}} = 0.369$$

أما مقدار الاهتلاك السنوي A_i فيحسب من العلاقة (٦,٣) ، وكذلك أجمالي الاهتلاك S_i يحسب من العلاقة (١١,٣) ، نضع النتائج في الجدول التالي :

ترتيب سنة الاهتلاك i	قيمة الأصول الثابتة في السنة i K_i	مقدار الاهتلاك السنوي A_i	مقدار الاهتلاك التجميعي لغاية السنة i S_i
٠	١٠٠٠٠٠	-	-
١	٦٣١٠٠	٣٦٩٠٠	٣٦٩٠٠
٢	٣٩٨١٠	٢٣٢٩٠	٦٠١٩٠
٣	٢٥١٢٠	١٤٦٩٠	٧٤٨٨٠
٤	١٥٨٥٠	٩٢٧٠	٨٤١٥٠
٥	١٠٠٠٠	٥٨٥٠	٩٠٠٠٠

الفصل الرابع

الدفعات

الفصل الرابع

الدفعات الدورية

(١,٤) تعريف :

تعرف الدفعات المنتظمة بأنها دفعات متساوية في القيمة تدفع على فترات زمنية متساوية وتصنف بحسب كيفية دفعها إلى :

أ- دفعات فورية : وهي دفعات منتظمة تدفع في أوائل الفترات الزمنية المتساوية . وتسمى أيضاً بدفعات الاستثمار .
ب- دفعات عادية : وهي دفعات منتظمة تدفع في أواخر الفترات الزمنية المتساوية . وتسمى أيضاً بدفعات السداد

تدعى الدفعات المنتظمة بدفعات سنوية أو جزئية وذلك حسبما تكون الفترة الزمنية التي تفصل بين كل دفعتين متتاليتين سنة كاملة أو جزءاً منها فالدفعات الشهرية مثلاً هي دفعات جزئية والدفعات ربع السنوية هي دفعات جزئية وهكذا ...

وفيما يلي سوف نستخدم قانون الفائدة المركبة أساساً في الحسابات المتعلقة بالدفعات وذلك لأنها عمليات مالية طويلة الأمد وتستخدم الفائدة المركبة لتحقيق أكبر ربح ممكن في عمليات الاستثمار .

(٢,٤) الدفعات الفورية (دفعات الاستثمار) :

(١,٢,٤) حصيلة n دفعة فورية :

تعبر حصيلة أو جملة الدفعات المتساوية والدورية عن إجمالي المبالغ المتكونة نتيجة تراكم رؤوس الأموال المدفوعة بشكل دوري مع الفوائد في نهاية فترة الإيداع .

نرمز لقيمة الدفعة بالرمز a والتي تدفع في بداية كل سنة .

يبين الشكل التالي توزيع الدفعات المتساوية الفورية وعددها n على مستقيم الزمن حيث تبدأ السنة الأولى عند القيمة صفر وعندها تسدد الدفعة الأولى ومقدارها a وهكذا يتوالى تسديد الدفعات مع بداية السنوات ، ونلاحظ كما يبين الشكل أن آخر دفعة تستحق الدفع مع بداية السنة الأخيرة .

وبالاعتماد على طريقة حساب جملة مبلغ نجد أن :

جملة الدفعة الأولى (قيمتها في اللحظة n على محور الزمن) تعطى : $a(1+i)^n$

جملة الدفعة الثانية (قيمتها نهاية الفترة) تعطى : $a(1+i)^{n-1}$

جملة الدفعة الثالثة تعطى : $a(1+i)^{n-3}$

هكذا حتى الدفعة ما قبل الأخيرة والتي تعطى :

$a(1+i)^2$

جملة الدفعة الأخيرة $a(1+i)$

ونرمز بالرمز V_n^* لمجموع جمل هذه الدفعات الفورية والتي تشكل مجموع الحدود التالية :

$$V_n^* = a(1+i) + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + ... + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

حيث أننا بدأنا بجمع الحدود اعتباراً من الحد الأخير .

نلاحظ أن مجموع هذه الحدود هو عبارة عن متوالية هندسية ، حدها الأول $\tilde{a} = a(1+i)$ وأساسها $r = (1+i)$ ، وحدها الأخير $a_n = a(1+i)^n$ ،إذن مجموع هذه الحدود يعطى وفقاً لقانون مجموع حدود متوالية هندسية :

$$V_n^* = S_n = \frac{\tilde{a} - r.a_n}{1-r}$$

بالتعويض نجد :

$$V_n^* = \frac{a(1+i) - (1+i)a(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

نصلح المقام ونخرج $a(1+i)$ في البسط عاملاً مشتركاً فيكون :

$$V_n^* = \frac{a\left[1-(1+i)^n\right]}{-i}(1+i)$$

نضرب البسط والمقام بالعدد (-1) فنحصل على قانون حصيلة n دفعة فورية كما يلي :

$$V_n^* = \frac{a\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}(1+i) \qquad (١,٤)$$

مثال (١,٤) :

يريد شخص تكوين مبلغ (٣٠٠٠٠٠٠) ليرة سورية تساعده في شيخوخته ، أودع في مصرف دفعات في بداية كل سنة على مدى (٢٥) سنة وبمعدل فائدة سنوية (٨%) ، ما هي قيمة القسط المودع ؟

الحل :

بتطبيق العلاقة (١,٤) نجد :

$$3000000 = \frac{a\left[(1.08)^{25} - 1\right]}{0.08}(1.08)$$

د$$3000000 = \frac{a(6.848475196 - 1)}{0.08}(1.08)$$

$$3000000 = a(78.95441515)$$

$$a = 37996.61 s.p$$

كما ويمكن من خلال العلاقة رقم (١,٤) حساب عدة مجاهيل أخرى . كحصيلة الدفعات وعدد الدفعات ومعدل الاستثمار .

(٢,٢,٤) القيمة الحالية ل n دفعة فورية :

نستخدم الرمز V_p^* للدالة على القيمة الحالية لمجموعة الدفعات ، ويبين الشكل التالي توزيع الدفعات المتساوية الفورية وعددها n على مستقيم الزمن

وفيما يخص القيمة لكل دفعة من هذه الدفعات لدينا :

القيمة الحالية للدفعة الأولى (قيمتها في بدء الزمن) تعطى : a

القيمة الحالية للدفعة الثانية (قيمتها في بدء الزمن) تعطى : $a(1+i)^{-1}$

وهكذا إلى القيمة الحالية للدفعة الأخيرة التي يجب إعادتها دون فوائد إلى بدء الزمن أي إزالة أثر الفائدة عنها لفترة $(n-1)$ سنة فتعطى قيمتها الحالية :

$$a(1+i)^{-(n-1)} = a(1+i)^{-n+1}$$

وهكذا تعطى V_p^* القيمة الحالية لمجموعة هذه الدفعات بمجموع الحدود التالية :

$$V_p^* = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + ... + a(1+i)^{-n+1}$$

نلاحظ أن مجموع هذه الحدود هو مجموع حدود متوالية هندسية ، حدها الأول $\widetilde{a} = a$ وأساسها $r = (1+i)^{-1}$ وحدها الأخير $a_n = a(1+i)^{-n+1}$ ، إذن مجموع هذه الحدود يعطى بقانون مجموع حدود المتوالية الهندسية وهكذا لدينا :

$$V_p^* = S_n = \frac{\widetilde{a} - r.a_n}{1 - (1+i)^{-1}}$$

بالتعويض نجد :

$$V_p^* = \frac{a-(1+i)^{-1}a(1+i)^{-n+1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

نخرج a عاملاً مشتركاً ونكتب المقدار $(1+i)^{-n+1}$ على الشكل $(1+i)^{-n}(1+i)$ فيكون لدينا :

$$V_p^* = \frac{a\left[1-(1+i)^{-1}(1+i)^{-n}(1+i)\right]}{1-(1+i)^{-1}}$$

لنضرب البسط والمقام بالمقدار $(1+i)$ فنحصل على :

$$V_p^* = \frac{a\left[(1+i) \;\; -(1+i)^{-n}(1+i)\right]}{(1+i)-1}$$

نصلح المقام ونخرج من البسط $(1+i)$ عاملاً مشتركاً ، فيكون :

$$V_p^* = \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}(1+i) \qquad (٢,٤)$$

وهو قانون القيمة الحالية للدفعات لفورية الدورية السنوية .

مثال (٢,٤) :

أراد شخص شراء عقار قيمته (٥) مليون ليرة سورية ، حيث يتم تسديد القيمة على (١٥) قسطاً متساوياً . يبدأ أولها الآن مع توقيع العقد ، معدل الفائدة المركبة (٧%) سنوياً .المطلوب قيمة الدفعة السنوية .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٢,٤) نجد :

$$5000000 = \frac{a\left[1-(1.07)^{-15}\right]}{0.07}(1.07)$$

$$5000000 = \frac{a(1-0.362446019)}{0.07}(1.07)$$

$$5000000 = a(9.745467985)$$

$$a = 513058.99 s.p$$

كما ويمكننا إياد كافة المجاهيل التي تحتويها العلاقة (٢,٤) التي أشرنا إليها سابقاً .

مثال (٣,٤) :

لتسديد قرض قيمته الحالية (٢٠٠٠٠٠) ليرة سورية ، اتفق المدين مع الدائن على سداده عن طريق دفعه مبلغ (٤٠٠٠٠) ليرة سورية في بداية كل سنة . فإذا علمت أن معدل الفائدة المتفق عليه (٦.٢٥%) . المطلوب تحديد عدد الدفعات السنوية لتسديد القرض .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٢,٤) نجد :

$$200000=\frac{40000\left[1-(1.0625)^{-n}\right]}{0.0625}(1.0625)$$
$$12500=42500\left[1-(1.0625)^{-n}\right]$$
$$1-(1.0625)^{-n}=\frac{12500}{42500}\Rightarrow 1-(1.0625)^{-n}=0.294117$$
$$-n\lg(1.0625)=\lg(0.70588)$$
$$n=\frac{\lg(0.070585)}{-\lg(1.0625)}=5.75$$

نلاحظ أن عدد الدفعات هو عدد صحيح وكسر ، لذلك لا بد من إجراء تعديلات مناسبة للتسديد بحيث تصبح عدد الدفعات عدداً صحيحاً . وهنا يمكن اقتراح الطرق التالية لمعالجة هذه المسألة :

- إما أن نعدل عدد الدفعات فنجعل $n=5$ أو $n=6$ ثم نعدل في قيمة الدفعة نفسها . فإذا جعلنا $n=6$ وهو الأقرب إلى (٥.٧٥) فتصبح قيمة الدفعة :

$$200000=\frac{a\left[1-(1.0625)^{-6}\right]}{0.0625}(1.0625)$$
$$200000=\frac{a(1-0.695066)}{0.0625}(1.0625)$$
$$a=38581.15s.p$$

- وإما أن نبقي على الدفعات الست قيمة كل منها كما تم الاتفاق عليه (٤٠٠٠٠) ليرة سورية ونعيد الفرق مباشرةً من حساب قيمة القرض الممنوح .

في هذه الحالة نحسب قيمة الست دفعات سنوية فورية قيمة كل منها (٤٠٠٠٠) ليرة سورية ونجد :

$$V_p^*=\frac{40000\left[1-(1.0625)^{-6}\right]}{0.0625}(1.0625)$$
$$V_p^*=207354.77s.p$$

(٣,٤) الدفعات العادية (دفعات السداد) :

(١,٣,٤) حصيلة n دفعة عادية :

من أجل حساب قيمة هذه الدفعات نعلم أن جملة مبلغ وليكن a يستحق بعد n سنة إذا كان معدل الفائدة i يعطى بالعلاقة : $a(1+i)^n$ يبين الشكل التالي توزيع الدفعات المتساوية العادية وعددها n على مستقيم الزمن حيث تبدأ السنة الأولى عند القيمة صفر ولا توجد دفعة عندها إلا أن الدفعة ومقدارها a تستحق في آخر هذه السنة حيث تبدأ السنة الثانية أيضاً عندها ولا تستحق الدفعة الثانية a إلا عند نهاية السنة الثانية وهكذا...........

وبالاعتماد على طريقة حساب جملة مبلغ نجد أن :

جملة الدفعة الأولى (قيمتها في اللحظة n على محور الزمن) تعطى : $a(1+i)^{n-1}$

جملة الدفعة الثانية (قيمتها في بدء الزمن) تعطى : $a(1+i)^{n-2}$

جملة الدفعة الثالثة تعطى : $a(1+i)^{n-3}$

هكذا حتى الدفعة ما قبل الأخيرة والتي تعطى :

$a(1+i)$

جملة الدفعة الأخيرة a

ونرمز بالرمز V_n لمجموع جمل هذه الدفعات الفورية والتي تشكل مجموع الحدود التالية :

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + ... + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

حيث أننا بدأنا بجمع الحدود اعتباراً من الحد الأخير .

نلاحظ أن مجموع هذه الحدود هو عبارة عن متوالية هندسية ، حدها الأول a وأساسها $r = (1+i)$ ، وحدها الأخير $a_n = a(1+i)^{n-1}$ ،إذن مجموع هذه الحدود يعطى وفقاً لقانون مجموع حدود متوالية هندسية :

$$V_n^* = S_n = \frac{\tilde{a} - r.a_n}{1-r}$$

بالتعويض نجد :

$$V_n^* = \frac{a - (1+i)a(1+i)^{n-1}}{1-(1+i)}$$

نصلح المقام ونخرج $a(1+i)$ في البسط عاملاً مشتركاً ونكتب $(1+i)^{n-1} = (1+i)^n (1+i)^{-1}$ ونضرب البسط والمقام بالعدد(−١) فنجد :

$$V_n = \frac{a\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \qquad (٣,٤)$$

مثال (٤,٤) :

يودع شخص في المصرف دفعات سنوية متساوية عادية (دفعات سداد) قيمة كل منها (٤٦٣٤٢٢.٨٧) ليرة سورية ، وتكوّن لهذا الشخص جملة مبلغ في نهاية فترة الدفع قيمته عشرة ملايين ليرة سورية . فإذا علمت أن معدل الفائدة السنوية المركبة (٥%) ، المطلوب حساب عدد الدفعات .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٣,٤) نجد :

$$10000000 = \frac{463422.87\left[(1.05)^{n} - 1\right]}{0.05}$$
$$(1.05)^{n} = 2.078928179$$
$$\ln(1.05) = \ln(2.078928179$$
$$n = 15$$

(٢,٣,٤) القيمة الحالية للدفعات العادية :

منعاً للتكرار تعطى القيمة الحالية للدفعات العادية بالعلاقة :

$$V_n = \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} \qquad (٤,٤)$$

مثال (٥,٤) :

إذا علمت أن قيمة مسكن الآن خمسة ملايين ليرة سورية وأن صاحبه عرضه للبيع بالتقسيط على ثمانية أقساط سنوية يبدأ أولها في نهاية سنة البيع شريطة أن يقوم الشاري بدفع مليون ليرة سورية مقدماً ، فإذا علمت أن معدل الفائدة المركبة السنوي المستخدم هو (٨.٥%) . المطلوب حساب قيمة القسط .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٤,٤) نجد أن :

$$5000000 = \frac{a\left[1-(1.085)^{-8}\right]}{0.085}$$
$$525000 = a\left[1-(0.520669)\right]$$
$$a = 1095277.57 s.p$$

(٤,٤) الدفعات المؤجلة :

تعرف الدفعات المؤجلة بأنها دفعات مؤجل دفعها مدة من الزمن ، أي يبدأ دفعها بعد انقضاء عدد معين من الدورات الزمنية (السنوات) ، حيث تسمى هذه الفترة بفترة التأجيل (فترة السماح) .

(١,٤,٤) القيمة الحالية للدفعات المؤجلة العادية والفورية :

فقط سنكتفي بإيراد العلاقة الرياضية المعبرة عن كون الدفعات عادية ومؤجلة كما يلي :

$$V_{p0} = \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}(1+i)^{-t} \qquad (٥,٤)$$

أما إذا كانت الدفعات فورية ومؤجلة ، فإن العلاقة الرياضية تكون :

$$V_{p0} = \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}(1+i)^{-t+1} \qquad (٦,٤)$$

ملاحظة :

إذا كانت الدفعات عادية وذكر مثلاً أن دفعها (دفع أولها) يبدأ بعد خمس سنوات إذاً فهي مؤجلة أربع سنوات $t = 4$ علماً أنها تدفع في آخر السنة الرابعة أي في بداية السنة الخامسة . أما إذا كانت الدفعات فورية وذكر مثلاً أن دفها بعد خمس سنوات إذاً هي مؤجلة خمس سنوات .

مثال (٦,٤) :

قدمت إحدى الدول قرضاً معيناً بالدولار لدولة أخرى في بداية العام الحالي ، وتم الاتفاق بين الدولتين على أن يتم تسديد القرض على عشر دفعات سنوية متساوية منتظمة يبدأ أولها بعد مرور خمس سنوات من تاريخ القرض ، فإذا علمت أن قيمة الدفعة السنوية خمسة ملايين دولار ، وأن معدل الفائدة المركبة السنوي المتفق عليه ٥% المطلوب حساب القيمة الأصلية (القيمة الحالية) للقرض المقدم .

الحل :

بما أن الدفعة الأولى يبدأ بعد خمس سنوات فيمكننا اعتبار :

١. إما فترة التأجيل خمس سنوات والدفعات فورية .
٢. أو فترة التأجيل أربع سنوات والدفعات عادية .

١) لننظر للدفعات على أنها عادية وفترة التأجيل أربع سنوات :

نحسب قيمة القرض في نهاية المدة كما يلي :

$$V_{p0} = \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}(1+i)^{-t}$$

بالتعويض نجد :

$$V_{p0} = \frac{5000000\left[1-(1.05)^{-10}\right]}{0.05}(1.05)^{-4}$$
$$V_{p0} = 31763452.18 s.p$$

٢) لننظر للدفعات على أنها فورية وفترة التأجيل خمس سنوات :

بالتعويض في العلاقة (٦,٤) نجد :

$$V_{p0} = \frac{5000000\left[1-(1.05)^{-10}\right]}{0.05}(1.05)^{-5+1}$$
$$V_{p0} = 31763452.18 s.p$$

ملاحظة : القيمة المستقبلية للدفعات العادية والفورية لا تتأثر بفترة التأجيل .

(٥,٤) الدفعات الدائمة :

الدفعات الدائمة هي الدفعات التي يستمر دفعها إلى ما لا نهاية ، وهنالك أمثلة كثيرة على ذلك ، منها الإيراد السنوي الثابت لعقار أو لأرض زراعية أو لمنشأة أو لسند معين يدر دخلاً سنوياً مستمراً غير محدد المدة ...الخ .

يمكننا حساب القيمة الحالية لهذه الدفعات سواء كانت فورية أم عادية .

(١,٥,٤) القيمة الحالية للدفعات العادية الدائمة :

رمزنا سابقاً للقيمة الحالية للدفعات العادية بالرمز V_n والتي تعطى بالقانون :

$$V_n = \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

وهذا من أجل دفعات عددها n . أما إذا كانت الدفعات مستمرة إلى ما لانهاية فسيؤول العدد n إلى ما لانهاية ويمكن أن نكتب :

$$V_n = \lim_{n\to\alpha} \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

ومنه نجد قانون القيمة الحالية لدفعات عادية سنوية لا نهائية :

$$V_n = \frac{a}{i} \qquad (٨,٤)$$

وذلك لأن :

$$(1+i)^{-\alpha} = \frac{1}{(1+i)^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} = 0$$

مثال (٨,٤) :

قطعة أرض زراعية تدر دخلاً سنوياً ثابتاً منتظماً مقداره ٢٥٠٠٠٠٠ ليرة سنوية كل سنة ، أراد صاحب الأرض بيعها لشخص يرغب بالحصول عليها والاستفادة من دخلها في معيشته ، فإذا علمت أن معدل الفائدة المركبة المستخدم ٨% وأن الأرض ستدر الدخل الأول على المشتري بعد مرور سنة من الآن . والمطلوب حساب القيمة الحالية لهذه الأرض .

الحل :

تمثل هذه المسألة حالة دفعات عادية نظراً لأن الدفعة الأولى تتحقق بعد مرور سنة من الشراء ، حيث أن قيمة الدفعة العادية ٢٥٠٠٠٠٠ ليرة سورية ، وأن معدل الفائدة المركبة المستخدم ٨% ، وأن الدفعات دائمة ($n \to \alpha$) ذلك أن ما تدره الأرض من دخل مستمر مع الزمن . وبالتالي فهذه المسألة يناسبها قانون القيمة الحالية لدفعات عادية دائمة :

$$V_n = \frac{2500000}{0.08} = 31250000 s.p$$

(٢,٥,٤) القيمة الحالية للدفعات الفورية الدائمة :

رمزنا سابقاً للقيمة الحالية للدفعات المؤجلة بالرمز V_n^* والتي تعطى بالقانون :

$$V_n = \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}(1+i)$$

وهذا من أجل دفعات عددها n . أما إذا كانت الدفعات مستمرة إلى ما لانهاية فسيؤول العدد n إلى ما لانهاية ويمكن أن نكتب :

$$V_n = \lim_{n\to\alpha} \frac{a\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}(1+i)$$

ومنه نجد قانون القيمة الحالية لدفعات فورية سنوية لا نهائية :

$$V_n = \frac{a}{i}(1+i) \qquad (٩,٤)$$

مثال (٩,٤) :

سند قيمته الحالية ٤٠٠٠٠٠٠ ليرة سورية في بداية هذا العام . يدر دخلاً سنوياً معيناً في بداية كل سنة ميلادية وبشكل دائم ، فإذا علمت أن معدل الفائدة المركبة المستخدم هو ١١.٥% ، المطلوب حساب قيمة الدفعة السنوية الفورية التي من المفترض أن يدرها هذا السند حيث يستحق أولها الآن مع بداية السنة .

الحل :

نحن أمام حالة مسألة دفعات فورية دائمة .

نطبق العلاقة (٩,٤) نجد :

$$4000000 = \frac{a.(1.115)}{0.115}$$
$$a = 412556.1s.p$$

كما ويمكن أن تكون الدفعات دائمة ومؤجلة وفورية أو دائمة ومؤجلة وعادية .

(٦,٤) الدفعات الجزئية :

(١,٦,٤) حصيلة n دفعة جزئية عادية :

نفترض أنه لدينا عدد من الدفعات الجزئية العادية التي مقدار كل منها a يدفع كل منها في نهاية كل فترة جزئية مدتها $\frac{1}{p}$ ، ونفترض أيضاً أن هذه الدفعات تدفع على فترة n سنة وأن كل سنة قد جزئت إلى p جزء.بهذا سيكون عدد الأجزاء خلال الفترة المعتبرة $n.p$ يقابلها في حقيقة الأمر $n.p$ دفعة متساوية عادية .

لنجد مجموع جمل الدفعات الجزئية العادية كما يلي :

جملة الدفعة الجزئية الأولى $a(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$

جملة الدفعة الجزئية الثانية $a(1+i)^{n-\frac{2}{p}}$

جملة الدفعة الجزئية ما قبل الأخيرة $a(1+i)^{\frac{2}{p}}$

جملة الدفعة الجزئية الأخيرة

$a(1+i)^{\frac{1}{p}}$

لنرمز لمجموع جمل الدفعات الجزئية بالرمز $V_{l,n}$، حيث p عدد الدفعات في السنة و n عدد السنوات ، ونقوم بجمع هذه الحدود إلى بعضها بدءاً من الحد الأخير فنجد :

$$V_{pn} = a(1+i)^0 + a(1+i)^{\frac{1}{p}} + a(1+i)^{\frac{2}{p}} + ... + a(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$$

وبإخراج a عاملاً مشتركاً يصبح لدينا :

$$V_{p,n} = a\left[(1+i)^0 + (1+i)^{\frac{1}{p}} + (1+i)^{\frac{2}{p}} + ... + (1+i)^{n-\frac{1}{p}}\right]$$

وبملاحظة أن ما داخل القوسين[ ] هو مجموع حدود متوالية هندسية ، حدها الأول $\tilde{a} = (1+p)^0 = 1$ وأساسها $r = (1+i)^{\frac{1}{p}}$ وعدد حدودها $n' = n.l$ وحدها الأخير $a_n = a(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$ ويعطى مجموعها بالقانون :

$$Vp_{l,n} = S_n = a\frac{1-r^{n'}}{1-r}$$

بالتعويض نجد :

$$a.S = a.a\frac{1-r^{n'}}{1-r} = V_{p,n} = a.(1+i)^0 \frac{1-\left[(1+i)^{\frac{1}{i}}\right]^{n.p}}{1-(1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

$$V_{p,n} = a\frac{1-(1+i)^{n\frac{p}{p}}}{1-(1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

نضرب البسط والمقام بالعدد (١-) وملاحظة أن $\frac{n.p}{p} = n$ نجد :

$$V_{p,n} = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} \qquad (٥,٤)$$

وهو قانون جملة الدفعات الجزئية العادية .

مثال (٦,٤) :

يرغب شخص في إيداع مبلغ (٥٠٠٠) ليرة سورية في نهاية كل شهر باسم ابنه المولود حديثاً في مشروع استثماري بمعدل فائدة مركبة سنوي (١٥%) وذلك لكي يقد لأبنه جملة المتكون من هذه الدفعات هدية نقدية في عيد ميلاده العشرين .
المطلوب حساب قيمة هذه الهدية في عيد ميلاده العشرين .

الحل :

لدينا دفعات جزئية شهرية عادية عددها $np = 12.20 = 240$ ، نطبق العلاقة (٥,٤) فنجد :

$$V_{p,n} = 5000\frac{(1{,}15)^{20} - 1}{(1{,}15)^{\frac{1}{12}} - 1}$$
$$V_{12,20} = 5000\frac{16.36653739 - 1}{1.011714917 - 1}$$
$$V_{12,20} = 6558534.47 s.p$$

(٢,٦,٤) القيمة الحالية للدفعات الجزئية العادية :

من أجل حساب القيمة الحالية للدفعات الجزئية ، عندما يكون i معدل الفائدة المركبة السنوي ، ما علينا إلا أن نحسب ثم نجمع القيم الحالية لكل من هذه الدفعات الجزئية كالتالي :

القيمة الحالية للدفعة الجزئية الأولى

$$a(1+i)^{\frac{-1}{p}}$$

القيمة الحالية للدفعة الجزئية الثانية

$$a(1+i)^{\frac{-2}{p}}$$

القيمة الحالية للدفعة الجزئية الثالثة

$$a(1+i)^{\frac{-3}{p}}$$

القيمة الحالية للدفعة الجزئية الأخيرة

$$a(1+i)^{\frac{-n.p}{p}}$$

لنرمز لمجموع القيم الحالية للدفعات الجزئية بالرمز $V_0^{p,n}$، حيث p عدد الدفعات في السنة و n عدد السنوات ، ونقوم بجمع هذه الحدود إلى بعضها بدءاً من الحد الأخير فنجد :

$$V_0^{p,n} = a(1+i)^{\frac{-1}{p}} + a(1+i)^{\frac{-}{p}} + a(1+i)^{\frac{-3}{p}} + ...+ a(1+i)^{\frac{-n.p}{p}}$$

وبإخراج a عاملاً مشتركاً يصبح لدينا :

$$V_0^{p,n} = a\left[(1+i)^{\frac{-1}{p}} + (1+i)^{\frac{-2}{p}} + (1+i)^{\frac{-3}{p}} + ...+ (1+i)^{\frac{-n.p}{p}}\right]$$

وبملاحظة أن ما داخل القوسين[ ] هو مجموع حدود متوالية هندسية ، حدها الأول $\tilde{a} = (1+p)^{\frac{-1}{p}}$ وأساسها $r = (1+i)^{-\frac{1}{p}}$ وعدد حدودها $n' = n.p$ وحدها الأخير $a_n = a(1+i)^{-n}$ ويعطى مجموعها بالقانون :

$$V_0^{p,n} = S_n = a\frac{1-r^{n'}}{1-r}$$

بالتعويض نجد :

$$a.S = a.a\frac{1-r^{n'}}{1-r} = V_0^{p,n} = a\frac{(1+i)^{\frac{-1}{p}} - (1+i)^{\frac{-1}{p}}(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{\frac{-1}{p}}}$$

نضرب البسط والمقام بالمقدار $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ فنجد :

$$V_0^{p,n} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} \qquad (٦,٤)$$

وهو قانون القيمة الحالية لدفعات جزئية عادية .

مثال (٧,٤) :

اشترى شخص ثلاجة يدفع قيمتها على ٣٦ قسطاً شهرياً . فإذا علمت أن قيمة القسط الشهري ١٠٠٠ ليرة سورية ويدُفع في نهاية كل شهر ، وأن معدل الفائدة المركبة السنوي المستخدم ٩% . المطلوب حساب قيمة الثلاجة عند الشراء .

الحل :

لدينا عدد السنوات $n=\frac{36}{12}=3$ ، نطبق العلاقة (٦,٤) فنجد :

$$V_0^{12,3} = 1000\frac{1-(1.09)^{-3}}{(1.09)^{\frac{1}{12}}-1}$$

$$V_0^{12,3} = 31609.03 s.p$$

(٣,٦,٤) حصيلة n دفعة جزئية فورية :

تفادياً للتكرار ، نجد قانون حصيلة الدفعات الجزئية الفورية كما يلي :

$$V_{p,n}^{*} = a\frac{\left[(1+i)^{n}-1\right]}{(1+i)\frac{1}{p}-1}(1+i)\frac{1}{p} \qquad (٦,٤)$$

مثال (٧,٤):

أراد شخص شراء سيارة سياحية بدفع مبلغ ٥٠٠٠٠ ليرة سورية بداية كل شهر ،على أن تدفع ثمنها كاملاً على ٣٦ قسطاً شهرياً ، فكم سيدفع ذلك الشخص في نهاية المدة ، إذا علمت أن معدل الفائدة السائد في السوق ١١% .

الحل :

لدينا دفعات جزئية شهرية فورية عددها $n12=36 \Rightarrow n=3$ ، نطبق العلاقة (٧,٤) فنجد :

$$V_{12,3}^{*}=50000\frac{(1,11)^{3}-1}{(1,11)^{\frac{1}{12}}-1}(1.11)^{\frac{1}{12}}$$

$$V_{12,3}^{*}=50000\frac{1.36733100-1}{1.00873459-1}(1.11)^{\frac{1}{12}}$$

$$V_{12,3}^{*}=50000\frac{0.36733100}{0.00873459}(1.008734)$$

$$V_{12,3}^{*}=50000.(42.05475014)(1.008734)=2121104.046s.p$$

كما ويمكننا إياد كافة المجاهيل التي تحتويها العلاقة (٦,٤) التي أشرنا إليها سابقاً .

(٤,٦,٤) القيمة الحالية للدفعات الجزئية الفورية :

منعاً للتكرار ، نجد أن قانون القيمة الحالية لدفعات جزئية فورية كما يلي :

(٧,٤)

$$V_{0}^{*.p.n}=a\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}(1+i)^{\frac{1}{p}}$$

مثال (٨,٤) :

عرضت شركة تجارة الأجهزة الالكترونية الحديثة أجهزة حاسوب من نوع معين للبيع بالتقسيط ودون دفعة مقدمة ، حيث يتم تسديد قيمة الحاسب الواحد على سنتين بدفعات بداية كل شهر ، فإذا علمت أن قيمة جهاز الحاسب نقداً هو ٧٠٠٠٠ ليرة سورية وأن معدل الفائدة المركبة السنوي المستخدم في هذا النوع من البيع بالتقسيط هو ١٢% ، المطلوب حساب قيمة القسط الشهري .

الحل :

بتطبيق العلاقة (٧,٤) نجد :

$$54162.914=a\frac{1-(1.115)^{-2}}{(1.115)^{\frac{1}{12}}-1}(1.115)^{\frac{1}{12}}$$

$$a=2500s.p$$

ويمكن أن تكون الدفعات جزئية فورية مؤجلة أو دفعات جزئية عادية مؤجلة أيضاً .

تمارين غير محلولة

١- اشترى شخص شقة سكنية واتفق على دفع الثمن كالآتي :

- ٢٠٠٠٠٠ ليرة سورية فورياً .
- ١٢٠٠٠٠ ليرة سورية في آخر كل سنة ولمدة ١٠ سنوات .

والمطلوب : ما ثمن الشقة السكنية نقداً إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل ٥% سنوياً ؟

٢- اقترضت إحدى الشركات مبلغ ٥٠٠٠٠٠ ليرة سورية ، وتعهدت بسداده على عشرين دفعة سنوية فما قيمة كل دفعة إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل ٥% سنوياً ؟

٣- ما المبلغ الواجب إيداعه في بداية كل سنة للحصول على مبلغ قدره ٥٠٠٠٠٠٠ ليرة سورية ولمدة ثلاث سنوات على أساس معدل فائدة مركبة ٤% سنوياً ؟

٤- يرغب شخص بتكوين رأسمال قدره ١٠٠٠٠٠٠ليرة سورية ، بإيداع ٦٠ دفعة شهرية ، على أساس فائدة مركبة معدلها ٩% سنوياً والفائدة تضاف شهرياً . والمطلوب ما مقدار القسط الشهري الواجب إيداعه ؟

٥- طلب أحد المتبرعين من مصرف أن يدفع ٦٠٠٠٠ ليرة سورية كل ستة أشهر لجمعية خيرية مدى الحياة أحسب ما يجب أن يدفعه المتبرع للمصرف مقدماً ، علماً أن معدل الفائدة المركبة السنوية ٤% والفائدة تضاف مرتين في السنة في الحالتين التاليتين :

- إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في أول ستة شهور .
- إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في آخر كل ستة شهور .

٦- شخص كان يودع مبلغ ٣٠٠٠ ليرة سورية في آخر كل سنة لمدة خمس سنوات في مصرف ما ، ثم قام بإيداع ضعف هذا المبلغ في كل عام لمدة عشر سنوات التالية ، احسب جملة المستحق له في نهاية ٢٠ سنة إذا كان معدل الفائدة المركبة ١٢% سنوياً .

الفصل الخامس

الاشتقاق و التفاضل

الفصل الخامس

الاشتقاق والتفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

مقدمة :

يُعّرف التابع على أنه تعبير رياضي يعبر عن العلاقة بين المتحول التابع والمتحولات الأخرى المستقلة ، حيث يسمح من خلال هذا التابع معرفة قيمة المتحول التابع لأي قيمة يمكن أن تأخذها المتحولات المستقلة .

وبالتالي فإننا غالباً ما نواجه في التطبيقات الاقتصادية المختلفة ، معطيات إحصائية تتغير باستمرار مع الزمن بحيث تتطلب الدراسة العملية للمسائل الاقتصادية الأساسية حساب سرعة التغير للكميات والمؤشرات المدروسة . ومثل هذه المسائل تواجهنا عند دراسة مختلف أوجه النشاط الاقتصادي (توابع الإنتاج والاستهلاك – توبع العرض والطلب ....الخ .

بحيث يصعب حل هذه المسائل بالاعتماد على الطرق الرياضية الكلاسيكية ، لذلك لا بد من البحث عن طرق رياضية أخرى تمكننا من الوصول إلى نتائج سليمة . وتعتبر المشتقات من الأدوات الرياضية الهامة حيث يمكن باستخدام الحسابات التفاضلية والمعتمدة على مبادئ الاشتقاق الأساسية من حل مختلف المسائل الاقتصادية ذات العلاقة بحساب سرعة التغير للكميات المختلفة . وسنتعرف بدايةً على أهم مبادئ وقوانين المشتقات ومن ثم سنتعرض لأهم التطبيقات الاقتصادية .

٥– ١.١ مفهوم الاشتقاق رياضياً :

يُعّرف المشتق رياضياً كما يلي :

$$y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (٥– ١)$$

كما و يُعطى المشتق بالعلاقة التالية :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (٥– ٢)$$

حيث :

y'_x مشتق التابع y بالنسبة للمتغير x .

x_0 تعبر عن القيمة الابتدائية للمتحول المتغير x .

Δx مقدار التغير الحاصل على المتحول المتغير .

$f(x_0)$ قيمة التابع y الأصلية والمتعلقة بالمتحول x_0 .

$f(x_0+\Delta x)$ قيمة التابع y بعد حدوث التغير على x_0 .

Δy التغير الحقيقي للتابع y .

dy تفاضل المتحول التابع y ، وهو ما يعرف باسم التغير التقريبي للتابع .

dx تفاضل المتحول المتغير x .

مثال (٥-١):

لتكن لدينا العلاقة التالية :

$$y=f(x)=x^2$$

ولنفترض حدوث تغير طفيف على المتغير x بمقدار Δx (من اليمين إلى اليسار) وإن هذا التغير قد أثر على التابع y بمقدار Δy أي :

$$f(x)+y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

بالتعويض نجد أن :

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2$$

وبفك القوس والإصلاح ينتج :

$$\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

وبتقسيم طرفي العلاقة على Δx (حيث Δx مقدار تغير غير معلوم) :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

تتعلق هذه النسبة بكمية التغير Δx ، فإذا ما تناهت هذه الكمية للصفر فإنه يكون :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x)+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x$$

تعبر هذه النتيجة عن المشتق الأول للتابع المعطى والذي كان بالإمكان الحصول عليه مباشرة من تطبيق القواعد العامة للاشتقاق .

مثال (٥-٢):

المطلوب إيجاد مقدار التغير الحقيقي ومن ثم استنتاج مشتق التابع y والمعطى بالعلاقة :

$$y = f(x) = x^n$$

نحسب أولاً قيمة التابع عند النقطة $x + \Delta x$ ، حيث Δx تعبر عن مقدار تغير كيفي طرأ على المتحول المتغير x أي :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$$

وباستخدام قانون نشر ثنائي حد نيوتن نحصل على :

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots\dots + C_n^{n-1} x (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

حيث :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; (k = 1,2,3,\dots\dots, n-1)$$

كما نعلم أن :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

وبالتالي يكون التغير بعد إجراء التعويض :

$$\Delta y = f(x + \Delta x)^n - x^n$$

ولكن الحد الأول من الطرف الأيمن أصبح معلوماً بفضل نشر ثنائي حد نيوتن وبتعويض قيمته في المعادلة الأخيرة وبعد الإصلاح ينتج :

$$\Delta y = C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots\dots + C_n^{n-1} x (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

لنحسب الآن النسبة التفاضلية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ أي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots\dots + C_n^{n-1} x (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

بالاختصار نجد :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \Delta x + \dots\dots + C_n^{n-1} x (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}$$

وبإنهاء Δx إلى اللانهاية ينتج :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} (0) + \dots\dots + C_n^{n-1} x(0) + (0)$$

وبملاحظة أن جميع الحدود في الطرف الأيمن تساوي الصفر ما عدا الحد الأول يكون :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1}$$

وباستخدام منشور نيوتن نحصل على :

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

وبالتالي نحصل على المشتق بشكل نهائي :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

وهو مشتق الكمية x^n .

٥-٢.١ المشتقات الأحادية الجانب :

ويقصد بذلك المشتق من جهة اليمين أو اليسار ، فإذا كان لدينا التابع :

$$y = f(x)$$

وإن المتحول x في العلاقة السابقة تغير من x_0 إلى $x_0 + \Delta x$ ،حيث Δx مقدار سالب .

فإذا استطعنا تشكيل العلاقة:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (٥-٣)$$

فإننا نسمي العلاقة السابقة بمشتق التابع y من جهة اليسار بجوار النقطة x_0 .

وبالتالي فإننا يمكننا القول أن العلاقة :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (٥-٤)$$

وهي تعبر عن مشتق التابع y من اليمين بجوار x_0 .

- توجد مشتقات متعددة ومختلفة للتابع المعرف في المجال $[a,b]$. فالنسبة للنقطتين a و b يوجد مشتق من جانب واحد فقط . حيث يكون المشتق من جهة اليمين بالنسبة للنقطة a ومن جهة اليسار بالنسبة للنقطة b .

أما لبقية النقاط الواقعة ضمن المجال المحدد فإننا نستطيع الحصول على مشتق التابع المعرف من اليمين ومن اليسار .

- إذا كان التابع الأصلي المعرف والمستمر على طول المجال $[a,b]$ متعلقاً بمتحول متغير مثل x فإن جميع المشتقات الممكنة لهذا التابع تعبر عن توابع جديدة تتعلق بالمتغير نفسه أي :

$$y'_x = g(x)$$

مثال (٥-٣) :

إذا كان لدينا y المتعلق بالمتحول x والمحدد بالعلاقة :

$$y = 5x^4 + 2x^3 + 6x$$

فإن المشتق الأول لهذا التابع وهو :

$$y'_x = 20x^3 + 6x^2 + 6$$

وهو يتعلق بنفس المتغير x .

٥-٣.١ خواص المشتقات :

تقبل كافة العلاقات التالية بدون برهان :

١- مشتق مجموع يساوي لمجموع المشتقات ، أي إذا كان :

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

فإن المشتق يعطى بالعلاقة :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \qquad (٥-٥)$$

مثال (٥-٤) :

بفرض أن :

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

حيث :

$$u(x) = 3x^2 + 5x$$
$$v(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$$

١- مشتق النسبة بين تابعين (التابع الكسري) تساوي مشتق الصورة في المخرج ناقص مشتق المخرج بالصورة والناتج يقسم على مربع المخرج ، أي إذا كان :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

فإنه يكون :

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) + v'(x),u(x)}{v^2(x)} \qquad (٥- ٦)$$

مثال (٥-٤) :

إذ كان لدينا التابع التالي :

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2}{4x + 5}$$

فإن المشتق :

$$f'(x) = \frac{8x.(4x+5) + 4.(4x^2+5)}{(4x+5)^2} = \frac{48x^2 + 40x + 20}{(4x+5)^2}$$

٢- مشتق جداء تابعين متعلقين بمتحول متغير واحد يساوي لجداء مشتق التابع الأول في التابع الثاني مضافاً إليه جداء مشتق التابع الثاني في الأول ، وبالتالي يمكن كتابة :

$$f(x) = u(x).v(x)$$

فإن مشتق $f(x)$ يعطى بالعلاقة :

$$f'(x) = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$$

مثال (٥- ٥) :

إذا كان :

$$f(x) = g(x).h(x)$$

حيث :

$$g(x) = 5x^3$$
$$h(x) = 6x^2$$

فإن مشتق $f(x)$ يعطى بالعلاقة :

$$f'(x) = (15x^2).(6x^2) + (12x).(5x^3)$$
$$= 150x^4$$

٣- إذا كان للتابع المعرف والمستمر $y = f(x)$ مشتقاً في النقطة x مغايراً للصفر فإن للعلاقة العكسية $x = g(y)$ مشتقاً مغايراً للصفر هو $x' = g'(y)$ يتحدد بالعلاقة :

$$x' = \frac{1}{y'} \qquad (٥- ٧)$$

مثال (٥-٦) :

ليكن لدينا التابع :

$$y = \sqrt{x}$$

حيث يعبر x عن قيم موجبة دوماً أي $(x > 0)$.

إذا حاولنا إيجاد مشتق العلاقة العكسية فإنه يتوجب علينا أولاً إيجاد العلاقة بين التابع x والمتحول y وبالتالي يكون :

$$x = y^2$$

ومشتق هذه العلاقة :

$$x' = 2y$$

وبالتعويض عن y بقيمتها المعطاة أصلاً يكون :

$$x' = 2\sqrt{x}$$

إذا حاولنا معرفة المشتق حول y' من خلال المساواة الأخيرة وبالاعتماد على العلاقة (٥-٧) :

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

وهو ما يتوافق ومشتق الجذر التربيعي للمتغير x.

٤- إذا كان التابع $y = f\left[g(x)\right]$ والمسمى بالتابع المركب مؤلفاً من جملة تابعين $y = f(u)$ حيث $u = g(x)$ فإن مشتق التابع y يعطى بالعلاقة :

$$y'(x) = y'(u).u'(x)$$ (٥- ٨)

أو بالصيغة التفصيلية العامة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$ (٥- ٩)

مثال(٥- ٧):

أوجد مشتق العلاقة التالية :

$$y = (2x^3 - 5x^2 + 10x)^3$$

نفرض أن :

$$u = 2x^3 - 5x^2 + 10x$$

وأن :

$$y = u^3$$

لحساب مشتق التابع الأصلي y نتبع الخطوات التالية :

- نحسب مشتق المتحول الجديد المفروض لأجل x أي :

$$u' = 6x^2 - 10x + 10$$

- نوجد مشتق المتحول الأصلي لأجل المتحول الجديد :

$$y' = 3u^2$$

- نطبق العلاقة (٥- ٨) ، فنحصل على المشتق :

$$y'_x = 3(2x^3 - 5x^2 + 10x)^2 (6x^2 - 10x + 10)$$

٥- يعطى مشتق التابع $y = \log_a x$ بالعلاقة :

$$y'_x = \frac{1}{x}\log_a e$$ (٥- ١٠)

حيث :

e يعبر عن العدد النيبري والمعرف بالعلاقة :

$$e = \lim_{s \to 0}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}$$

s متحول ما .

a أساس اللوغاريتم فإذا كان الأساس عشري فإننا نستخدم الرمز $\log$ ، أما إذا كان الأساس نيبري فإننا نستخدم الرمز $\ln$ وبحال الأساس النيبري يكون : $\ln e = 1$ وبالتالي تأخذ العلاقة (٥- ١٠) الشكل :

(٥- ١١) $$y'_x = \frac{1}{x}$$

مثال (٥- ٨) :

أوجد مشتق العلاقة $y = \ln 3x^2$

نجد حسب العلاقة (٥- ١١) أن : $y' = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x}$

٥-١.٤ جدول المشتقات الأساسية المستخدمة في الأبحاث الاقتصادية :

يستخدم في الأبحاث والتطبيقات الاقتصادية العديد من التوابع والتي يفترض بنا معرفة مشتقاتها . والجدول التالي يبين أهم التوابع المستخدمة ومشتقاتها :

الرقم	التابع الأصلي	المشتق
١	$y = e$	$y' = 0$
٢	$y = x$	$y' = 1$
٣	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
٤	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
٥	$y = e^{ax}$	$y' = ae^{ax}$
٦	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$
٧	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
٨	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
٩	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
١٠	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
١١	$y = ctgx$	$y' = \frac{1}{\sin^x}$
١٢	$y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$
١٣	$y = u(x).v(x)$	$y' = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$
١٤	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{v^2(x)}$

٥-١.٥ معدل نمو التابع :

لنفترض أنه لدينا التابع $y = f(x)$ المتعلق بالزمن :

$$y = f(t)$$

فإننا نعرف سرعة تغير العلاقة y على أنها المشتق الأول للتابع y أي :

$$y' = f'(t)$$

أما السرعة النسبية للتابع فتتحدد بالنسبة :

$$\frac{y'}{y}$$

والتي تسمى أيضاً بمعدل نمو العلاقة . والتي تعبر عن مشتق التابع y اللغارتيمي بالنسبة للعدد النيبري أي :

$$(\ln y) = \frac{y'}{y}$$

وبالتالي فإن معدل نمو العلاقة ما هو إلا مشتق اللغاريتم النيبري للتابع y .

٥- ٦.١ المشتقات من المرتبة العليا :

ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ المستمر والقابل للاشتقاق حتى المرتبة n على المجال $[a,b]$، نعرف المشتق من المرتبة الثانية للتابع $f(x)$ بأنه مشتق المشتق الأول أي $\left(f'(x)\right)'$. ونرمز له بالرمز $f''(x)$ أو y''_x. كذلك نعرف المشتق من المرتبة الثالثة للتابع $f(x)$ بأنه مشتق المشتق الثاني أو المشتق الثاني للمشتق الأول . ونرمز له بالرمز $f'''(x)$ أو y'''_x. وبشكل عام نعرف نفس الطريقة المشتق من المرتبة n (أو المشتق النوني) بأنه مشتق المشتق من المرتبة $n-1$ ورمزه ${y_x}^{(n)}$ أو ${f_{(x)}}^{(n)}$.

كما تستخدم رموز التفاضل للتغيير عن المشتقات من مختلف الرتب وذلك وفق الجدول التالي :

المشتق بدلالة رموز التفاضل	الرمز المختصر	التابع	المرتبة
$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$	$y' = f'(x)$	$y = f(x)$	الأولى
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$	$y'' = f''(x)$	$y = f(x)$	الثانية
$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$	$y''' = f'''(x)$	$y = f(x)$	الثالثة
$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4f(x)}{dx^4}$	$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$	$y = f(x)$	الرابعة

. . .	. . .	. . .	
n	$y = f(x)$	$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$	$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

مثال (٥- ٩) :

أوجد المشتقات المتتالية حتى المرتبة الرابعة للتابع y المعرف على العلاقة التالية :

$$y = 2x^2 + 4x^3 - 3$$

نجد المشتق الأول يساوي :

$$y' = 4x + 12x^2$$

نجد المشتق الثاني يساوي :

$$y' = 4 + 24x$$

نجد المشتق الثالث يساوي :

$$y' = 24$$

نجد المشتق الرابع يساوي :

$$y' = 0$$

٥-٧.١ مفهوم التفاضل والتغيرات الحقيقة :

تفاضل تابع ما هو إلا التغير التقريبي الذي يطرأ على التابع y نتيجة لتغير x بمقدار Δx. ولتوضيح كيفية حساب dy نفترض أن التابع :

$$y = f(x)$$

تابعاً مشتقاً مستمراً وإن مقدار تغير المتحول x هو Δx، وان التابع يتغير بمقدار dy والذي يعبر التغير الحقيقي للتابع والذي يعطى بالعلاقة :

$$dy = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (٥- ١٢)$$

نسمي الجداء $f'(x)\Delta x$ بتفاضل المتحول التابع y بالنسبة للمتغير x ونرمز له بالرمز dy أي يكون :

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (٥- ١٣)$$

ولنحسب على هذا الأساس dx نفسه . وذلك بتطبيق العلاقة (٥- ١٣) نجد :

$$dx = (x')\Delta x$$

$$dx = \Delta x$$

وبالتالي تصبح العلاقة (٥-١٣) على الشكل التالي :

$$dy = f'(x)d(x)$$

والتي نستطيع إعادة صياغتها على النحو التالي :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

وبالتالي هذه العلاقة تعبر عن المشتق الأول .

تستخدم العلاقة (٥-١٢) لحساب التغير الحقيقي على الظواهر الاقتصادية نتيجة تغير المؤشر x . أما العلاقة (٥-١٣) فتستخدم لحساب التغير التقريبي (التفاضل) لهذه الظواهر ومن الواضح أن استخدام العلاقة (٥-١٣) يجعلنا نرتكب بعض الأخطاء والتي يمكن تقديرها وفق العلاقة :

$$s = |\Delta y - dy| \qquad (٥- ١٤)$$

والتي تعبر عن الخطأ المطلق المرتكب .

ونستطيع تقدير الخطأ النسبي من تطبيق العلاقة :

$$T = \frac{s}{\Delta y}100 = \frac{|\Delta x - dy|}{\Delta y}100 \qquad (٥ - ١٥)$$

مثال (٥-١٠):

ليكن لدينا :

$$y = x^2 - 2x$$

فإذا أردنا حساب مقدار الخطأ النسبي المرتكب في حساب تغير التابع فيما إذا تغير المتحول x من ٢ إلى ٢.٠١ . فإنه يتوجب علينا أولاً إيجاد الخطأ المطلق المرتكب .

إن إيجاد هذا الخطأ يدفعنا لتطبيق العلاقة (٥- ١٢) لحساب التغير الحقيقي أي :

$$dy = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= \left[(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\right] - (x^2 - 2x)$$
$$\Delta y = 2x\Delta x - 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

وبالتعويض نجد :

$$dy = 2(2)(0.01) - 2(0.01) + (0.01)^2 = 0.0201$$

ولحساب التغير التقريبي نستخدم العلاقة (٥-١٣) :

$$dy = y'\Delta x$$
$$dy = (2x-2)(0.01)$$
$$x = 2 \Rightarrow dy = 0.02$$

وبالتالي يكون مقدار الخطأ المرتكب :

$$s = |0.0201 - 0.02| = 0.0001$$

أما مقدار الخطأ النسبي فيكون :

$$T = \frac{0.0001}{0.0201}100 = 0.498\%$$

وكنتيجة عامة يمكننا القول أن استخدام مفهوم التغير التقريبي (التفاضل) يسهل كثيراً إجراء العمليات الحسابية في المسائل الاقتصادية وذلك بالوصول لقيم تقريبية بأخطاء مطلقة صغيرة يمكن تجاهلها .

٥-١.٨ المشتقات الجزئية :

عندما لا تتعلق المتحولات التابعة y بمتغير واحد فقط ، إنما تكون مرتبطة بعدة متغيرات اقتصادية واجتماعية،

أي شكل التابع العام يكون :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$$

فإذا اعتبرنا أن y يعبر عن أسعار النفط في السوق العالمية فإن المتغيرات يمكن أن تكون :

x_1 كمية الطلب العالمي على النفط .

x_2 كمية الطلب العالمي على النفط .

x_3 الكمية المعروضة من النفط في السوق العالمي .

x_4 الاحتياطي العالمي للنفط .

x_5 أسعار المواد البديلة للنفط .

x_6 نوعية النفط المعروض في السوق العالمية .

وهكذا نستطيع ذكر العديد من العوامل الأخرى المؤثرة على تحديد أسعار النفط ولعل من المفيد أن نذكر هنا أن أسعار النفط قد تتحدد وفقاً لقرار سياسي أو تبعاً لمشاكل إقليمية أو عالمية .

وبالتالي فإن التعامل مع هذه التوابع يجعلنا أمام مسائل تكون فيها المشتقات تابعة لعدة متغيرات ، مما يعني وجوب اشتقاق هذه التوابع لمختلف العوامل المؤثرة .

مثال (٥-١١):

ليكن لدينا التابع y ، تابعاً مستمراً وقابلاً للاشتقاق بالنسبة لمتحولاته على النحو التالي :

$$y = 5x_1^3 x_2^2 x_3$$

لإيجاد المشتقات الجزئية الأولى نجد :

$$\frac{dy}{dx_1} = 15x_1^2 x_2^2 x_3$$
$$\frac{dy}{dx_2} = 10x_1^3 x_2 x_3$$
$$\frac{dy}{dx_3} = 5x_1^3 x_2^2$$

ولإيجاد المشتقات الجزئية من المراتب الأعلى نجد مثلاً :

$$\frac{d^2y}{dx^2_1} = 30x_1 x_2^2 x_3$$
$$\frac{d^2y}{dx^2_2} = 30x_2^2 x_3$$
$$\frac{d^2y}{dx_1 dx_2} = 30x_1^2 x_2 x_3$$
$$\frac{d^2y}{dx_1 dx_3} = 15x_1^2 x_2^2$$
$$\frac{d^2y}{dx_2^2} = 10x_1^3 x_3$$

وهكذا وبنفس الطريقة نستطيع الحصول على كافة المشتقات الجزئية من المراتب المختلفة.

٥-٩.١. طريقة المربعات الصغرى :

تستخدم طريقة المربعات الصغرى في عملية إيجاد المعادلات الطبيعية والتي تمثل العلاقات الرياضية بين المتغيرات المدروسة . لنفترض أنه لدينا السلسلة التالية :

X	x_1	x_1	x_1	....	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	....	y_n

تسمى سلسلة الأرقام هذه بالقيم الفعلية (الحقيقية) للظاهرتين X و Y.

لنفرض جدلاً أن معادلة التمثيل بين X و Y هي معادلة من الدرجة الأولى (معادلة خطية بمتحول وحيد) من الشكل :

$$Y = a_0 + a_1 X \qquad (٥- ١٦)$$

إن المعادلة (٥- ١٦) تعطينا قيماً تقريبية للمتحول Y والتي تسمى بالقيم النظرية ويرمز لها بالرمز $\tilde{Y}_i$ والناتجة عن تعويض القيم الفعلية X بالمعادلة (٥- ١٦) أي :

$$\tilde{y}_i = a_0 + a_1 x_i \qquad (٥- ١٧)$$

مما سبق يتضح لنا وجود فروق بين معظم القيم الفعلية والقيم النظرية للمتحول y ستكون على النحو التالي ك

$$y_1 - \tilde{y}_1, y_2 - \tilde{y}_2, ..., y_n - \tilde{y}_n$$

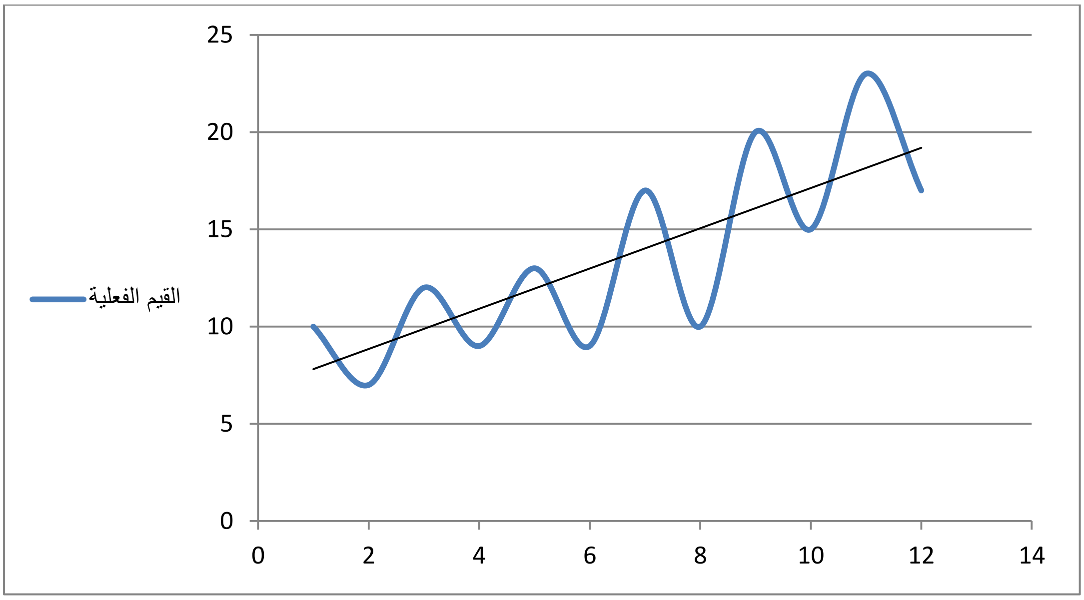
فإذا كانت معادلة التمثيل جيدة وتعبر بشكل كاف عن طبيعة الظاهرة فإن هذه الفروق بقيمتها المطلقة ستكون ضئيلة .
ومن أجل ضمان هذه الشروط نشكل المجموع :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \min \qquad (٥- ١٨)$$

والذي يعبر عن مجموع مربعات انحرافات القيم النظرية عن قيمها الفعلية . وبتعويض قيمة $\tilde{Y}_i$ وفق المعادلة المفروضة جدلاً من العلاقة (٥- ١٦) نجد :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = \min \qquad (٥- ١٩)$$

يمكننا بيانياً تمثيل القيم النظرية بمستقيم صاعد$(a_0 > 0)$ أو هابط $(a_0 < 0)$. أما القيم الحقيقية فترسم حسب الثنائيات (x_i, y_i) . ولنفرض الشكل البياني هو التالي :



الشكل (٥-١)

وسنرمز للمجموع في المعادلة (٥-١٩) بالرمز F ويكون :

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \min \qquad (٥- ٢٠)$$

يصل هذا التابع إلى نهايته الصغرى عندما تكون جميع مشتقاته الجزئية الأولى والممكنة مساوية للصفر أي :

$$\frac{\partial F(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial F(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0$$

إن عملية إيجاد هذه المشتقات الجزئية وجعلها مساوية للصفر تمكننا من الحصول على المعادلات الطبيعية اللازمة . فالنسبة للمعادلة الخطية المفروضة يكون :

$$\frac{\partial F(a_0, a_1)}{\partial a_0} = (2)(-1)\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \qquad (٥- ٢١)$$

$$\frac{\partial F(a_0, a_1)}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i (a_0 - a_1 x_i) = 0$$

بالإصلاح نحصل على جملة المعادلتين :

$$\sum y_i = na_0 + a_1 \sum x_i \qquad (٥- ٢٢)$$
$$\sum x_i y_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2$$

لابد من الإشارة إلى أن الأمر لا يختلف من حيث الجوهر إذا كانت المعادلة المختارة للتمثيل تضم أكثر من متحول أو كانت منحنية (من الدرجة الثانية – الثالثة– آسية – معادلة قوة – صماء ...الخ).

- **الأشكال المنحنية ومعادلاتها الطبيعية :**

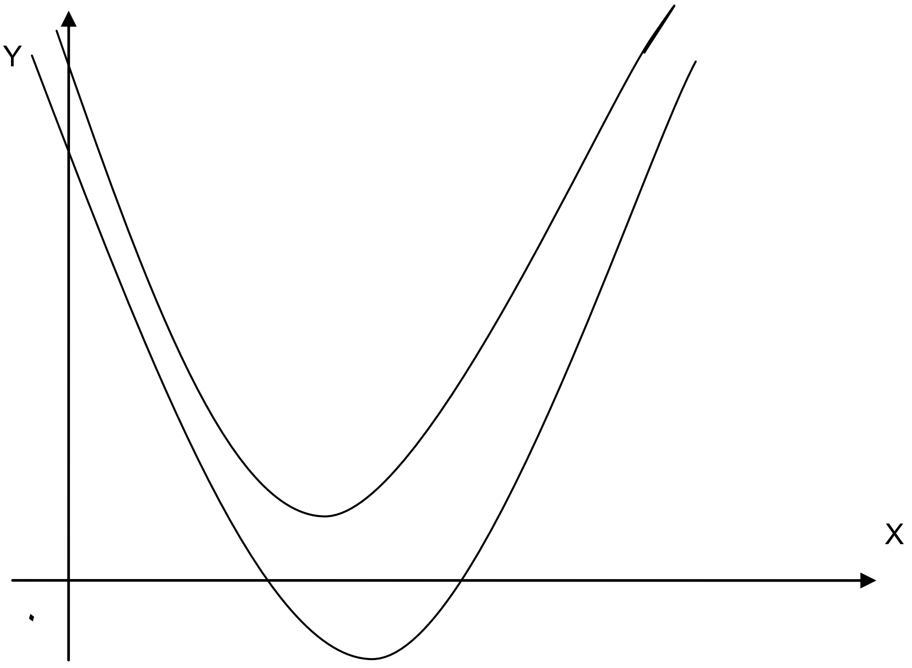
تسمى المعادلات غير الخطية بالمعادلات المنحنية وهي تعبر عن الظواهر التي تكون فيها نسبة تزايد المؤشر y على تزايد المؤشر x غير ثابتة . وفي التطبيقات الاقتصادية نصادف العديد من هذه المعادلات من أهمها :

١– معادلة منحني الدرجة الثانية ذات الشكل العام :

تأخذ الشكل التالي :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \qquad (٥– ٢٣)$$

والتي يمكن تمثيلها بيانياً على الشكل التالي :



الشكل (٥–٢)

لإيجاد المعادلات الطبيعية لابد من إيجاد قيمة الثوابت (a_0, a_1, a_2). أي أن معادلة F :

$$F(a_0, a_1, a_2) = \sum (a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2 = \min \qquad (٥– ٢٤)$$

وبطريق مماثلة لما سبق نجد المعادلات الطبيعية لمعادلة من الدرجة الثانية على الشكل التالي تكون :

$$\sum y_i = n a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2$$

$$\sum x_i y_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^{\,2} + a_2 \sum x_i^{\,3}$$ (٥– ٢٥)

$$\sum x_i^{\,2} y_i = a_0 \sum x_i^{\,2} + a_1 \sum x_i^{\,3} + a_2 \sum x_i^{\,4}$$

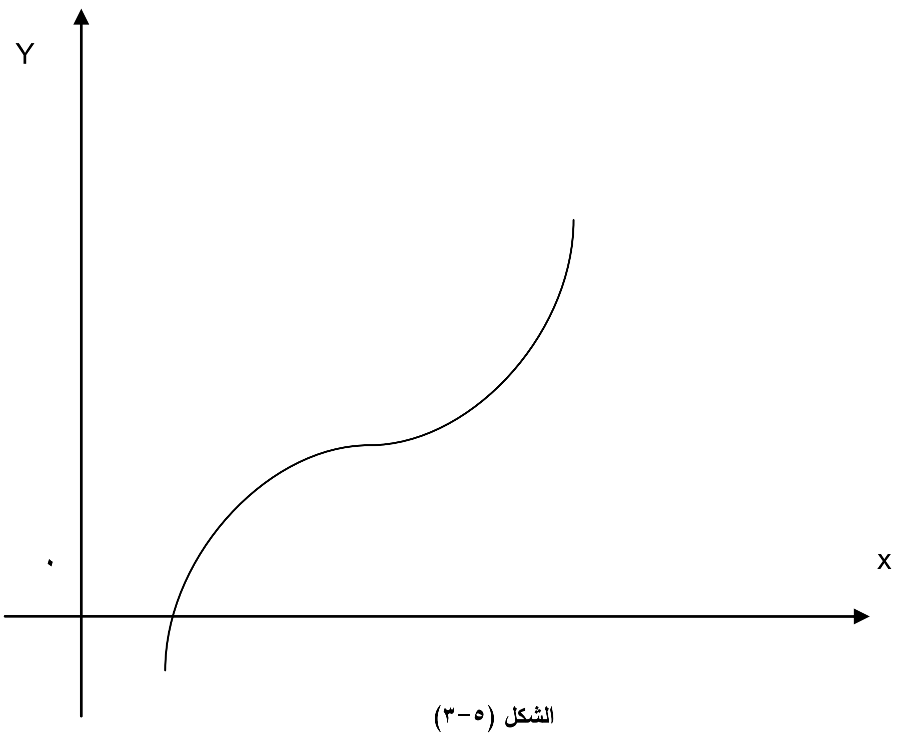
والتي يمكن حلها حلاً مشتركاً بطريقة كرامر (المعينات) أو بأية طريقة أخرى ممكنة .

٢– معادلة الدرجة الثالثة :

تأخذ الشكل التالي :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$ (٥– ٢٦)

والتي يمكن تمثيلها بيانياً على الشكل التالي :



الشكل (٥–٣)

إيجاد المعادلات الطبيعية لابد من إيجاد قيمة الثوابت (a_0, a_1, a_2, a_3) . أي أن معادلة F :

$$F(a_0, a_1, a_2, a_3) = \sum (a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^{\,2} + a_3 x_i^{\,3})^2 = \min$$ (٥– ٢٧)

وبطريق مماثلة لما سبق نجد المعادلات الطبيعية لمعادلة من الدرجة الثالثة على الشكل التالي تكون :

$$\sum y_i = n a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^{\,2} + a_3 \sum x_i^{\,3}$$ (٥– ٢٨)

$$\sum x_i y_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^{2} + a_2 \sum x_i^{3} + a_3 \sum x_i^{4}$$

$$\sum x_i^{2} y_i = a_0 \sum x_i^{2} + a_1 \sum x_i^{3} + a_2 \sum x_i^{4} + a_3 \sum x_i^{5}$$

$$\sum x_i^{3} y_i = a_0 \sum x_i^{3} + a_1 \sum x_i^{4} + a_2 \sum x_i^{5} + a_3 \sum x_i^{6}$$

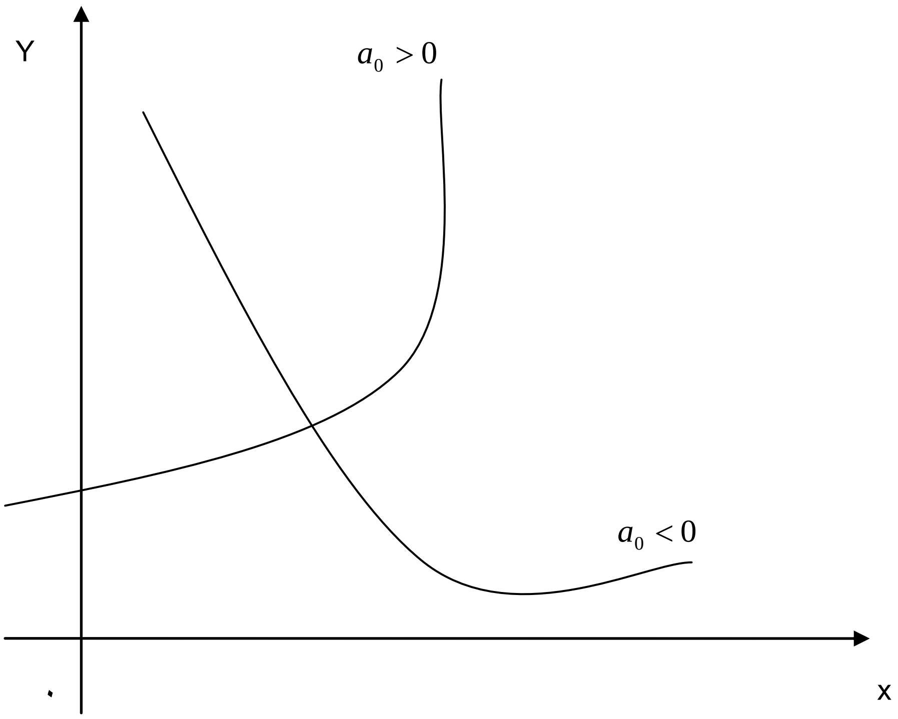
والتي يمكن حلها حلاً مشتركاً بطريقة كرامر (المعينات) أو بأية طريقة أخرى ممكنة .

٣- معادلة تابع القوة :

تأخذ الشكل التالي :

$$\tilde{y}_i = a_0 x_i^{a_i} \qquad (٥- ٢٩)$$

والتي يمكن تمثيلها بيانياً على الشكل التالي :



الشكل (٥-٤)

إيجاد المعادلات الطبيعية لابد من إيجاد قيمة الثوابت (a_0, a_1).ويتوجب تحقق الشرطين $a_1 \neq 0, x_1 > 0$ ، ويدعى الثابت a_1 بدرجة قوة التابع والتي قد تكون سالبة وليست بالضرورة صحيحة . أي أن معادلة F :

$$F(a_0, a_1) = \log(y_i - \log \tilde{y}_i)^2 = \min \qquad (٥- ٣٠)$$

وبطريق مماثلة لما سبق نجد المعادلات الطبيعية لمعادلة من هذا النوع هي الشكل التالي:

$$\sum \log y_i = na_0 + a_1 \sum \log x_i \qquad (٥ - ٣١)$$

$$\sum \log x_i \log y_i = a_0 \sum \log x_i + a_1 \sum (\log x_i)^2$$

إن حل جملة المعادلتين تسمح لنا بالحصول على قيمتي (a_0, a_1) .

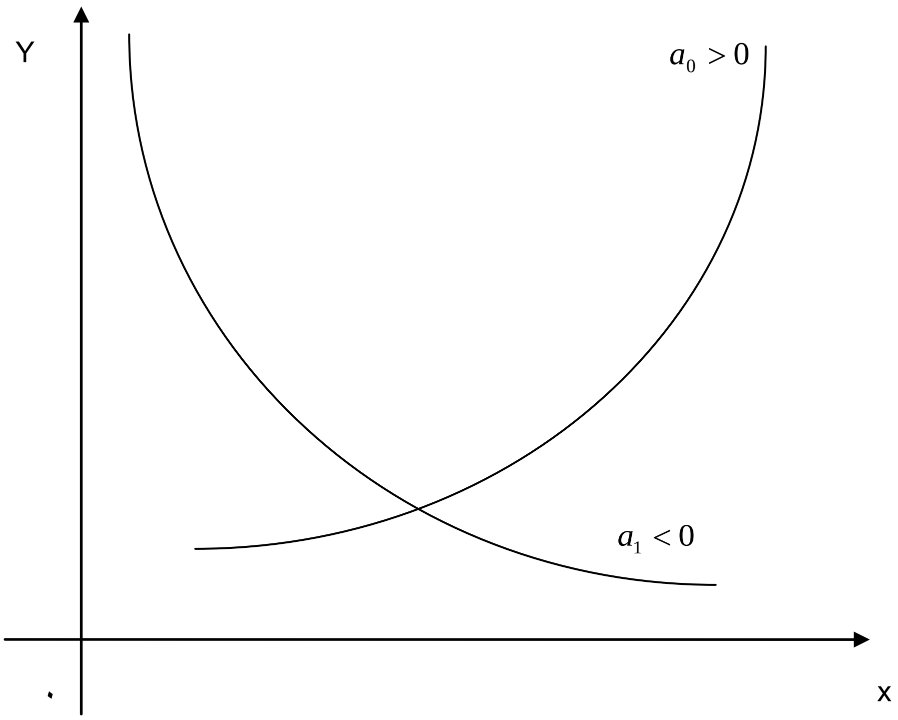
٤- معادلة التابع الاسي :

تأخذ الشكل التالي :

$$\tilde{y}_i = a_0 a_1^{x_1} \qquad (٥- ٣٢)$$

حيث يعبر المتحول عن الأس ويشترط أن يكون $a_1 > 0$.

والتي يمكن تمثيلها بيانياً على الشكل التالي :



الشكل (٥-٥)

إيجاد المعادلات الطبيعية لابد من إيجاد قيمة الثوابت (a_0, a_1).ويتوجب تحقق الشرط $a_1 > 0$. أي أن معادلة F :

$$F(a_0, a_1) = \sum \log y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = \min \qquad (٥- ٣٣)$$

وبطريق مماثلة لما سبق نجد المعادلات الطبيعية لمعادلة من هذا النوع هي الشكل التالي:

$$\sum \log y_i = na_0 + a_1 \sum x_i \qquad (٥- ٣٤)$$

إن حل جملة المعادلتين تسمح لنا بالحصول على قيمتي (a_0, a_1) .

مثال (٥-٢٠):

إذا فرضنا أنه لدينا البيانات التالية عن كمية الأسمدة المستخدمة في زراعة القمح ، وعن المردود كما هو موضح بالجدول التالي :

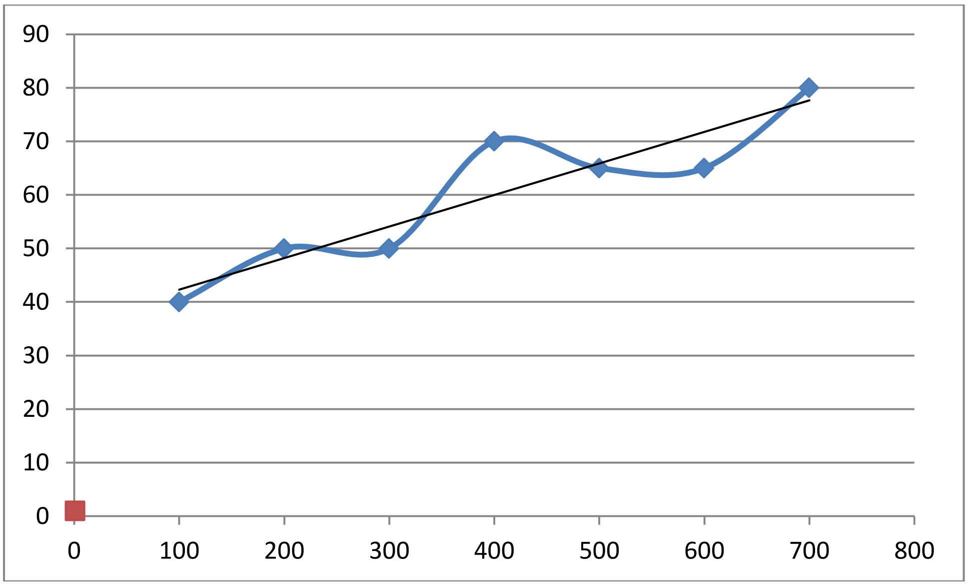
كمية السماد	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٧٠٠	٧٠٠
المردود	٤٠	٥٠	٥٠	٧٠	٦٥	٦٥	٨٠

والمطلوب :

١- تمثيل البيانات السابقة بيانياً ورسم المنحنى البياني الممثل لهذه البيانات .
٢- حدد معادلة مستقيم الانحدار التي تمثل العلاقة بين الكمية المستخدمة من الأسمدة ومردود القمح بالاعتماد على طريقة المربعات الصغرى .
٣- أوجد قيم المردود عندما يكون $x = 800$ و $x = 900$.

الحل :

١- الرسم البياني :



الشكل (٥-٦)

نجد الشكل السابق هو أقرب إلى منحني خط مستقيم .

٢- معادلة الاتجاه العام أو خط المستقيم وهي من الشكل : $y_i = a_0 + a_1 x_i$ ، يتم تقدير الثوابت a_0 , a_1 من خلال إيجاد المعادلات الطبيعية :

ولإيجاد قيم الثوابت نعد الجدول المساعد التالي :

الجدول المساعد (٥-١) لإيجاد قيم الثوابت

التسلسل	x	y	$x_i y_i$	$x_i^{\ 2}$
١	١٠٠	٤٠	٤٠٠٠	٦٠٠٠
٢	٢٠٠	٥٠	١٠٠٠٠	٢٠٠٠
٣	٣٠٠	٥٠	١٥٠٠٠	١٠٠٠
٤	٤٠٠	٧٠	٢٨٠٠٠	٠
٥	٥٠٠	٦٥	٣٢٥٠٠	٥٠٠
٦	٦٠٠	٦٥	٣٩٠٠٠	١٠٠٠
٧	٧٠٠	٨٠	٥٦٠٠٠	٦٠٠٠
$\sum$	٢٨٠٠	٤٢٠	١٧٩٥٠٠	١٦٥٠٠٠

نعوض في العلاقة (٥- ٢١) لنحصل على المعادلات الطبيعية ، نجد :

$$420 = 7a_0 + 2800a_1$$
$$179500 = 2800a_0 + 165000a_1$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين نحصل على قيم الثوابت ، نعوض قيمة الثوابت في معادلة الاتجاه العام (معادلة مستقيم) ، نجد :

$$\tilde{y} = 36.4 + 0.059x$$

٤- لإيجاد تقدير للمردود عندما يكون $x = 800$ ، نعوض في المعادلة السابقة :

$$\tilde{y} = 36.4 + 0.059(800) = 83.6$$

وكذلك عندما $x = 900$ فإن $\tilde{y} = 36.4 + 0.059(900) = 89.5$

مثال (٥- ٢١) :

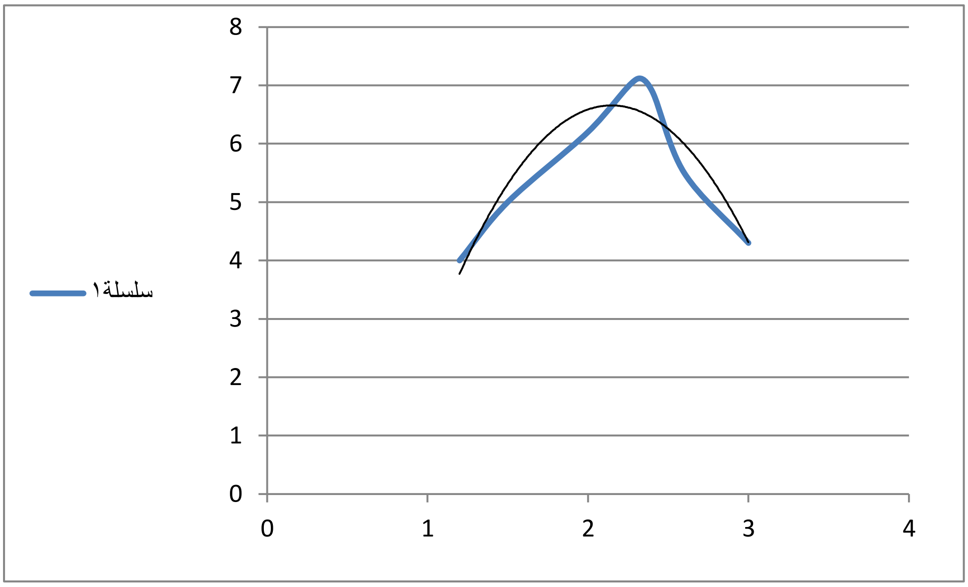
ليكن لدينا البيانات الفرضية التالية عن الظاهرتين المدروستين التاليتين :

x	1.2	1.5	2	2.3	2.4	2.6	3
y	4	5	6.2	7.1	6.9	5.5	4.3

المطلوب :

- استنتاج معادلة التمثيل الأفضل من خلال شكل الانتشار .
- إيجاد ثوابت المعادلة باستخدام المعادلات الطبيعية .
- الحل :

يمكننا رسم شكل الانتشار بالاعتماد على الثنائيات (x_i, y_i) يأخذ الشكل التالي :



الشكل (٥- ٧)

نستنتج أن شكل الانتشار هو منحني من الدرجة الثانية والذي تمثله المعادلة العامة التالية :

$$\tilde{y}_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2}$$

وبالاستعانة بجملة المعادلات (٥- ٢٤) نستطيع إيجاد ثوابت المعادلة . ويتطلب الحل تشكيل الجدول المساعد التالي :

الجدول المساعد (٥-٢) لإيجاد ثوابت المعادلة

التسلسل	y_i	x_i	$x_i y_i$	$x_i^{\,2}$	$x_i^{\,2} y_i$	$x_i^{\,3}$	$x_i^{\,4}$
١	٤	١.٢	٤.٨	١.٤٤	٥.٧٦	١.٧٣	٢.٠٧
٢	٥	١.٥	٧.٥	٢.٢٥	١١.٢٥	٣.٣٨	٥.٠٦
٣	٦.٢	٢	١٢.٤	٤	٢٤.٨	٨	١٦
٤	٧.١	٢.٣	16.33	٥.٢٩	٣٧.٥٦	١٢.١٧	٢٧.٩٨
٥	٦.٩	٢.٤	16.56	٥.٧٦	٣٩.٧٤	١٣.٨٢	٣٣.١٨
٦	٥.٥	٢.٦	١٤.٣	٦.٧٦	٣٧.١٨	١٧.٥٨	٤٥.٧
٧	٤.٣	٣	١٢.٩	٩	٣٨.٧	٢٧	٨١
المجموع	٣٩	١٥	٨٤.٨	٣٤.٥	١٩٥	٨٣.٧	٢١١

وتأخذ جملة المعادلات الطبيعية (٥ – ٢٤) بعد التبديل الشكل التالي :

$$7a_0 + 15a_1 + 34.5a_3 = 39$$
$$15a_0 + 34.5a_1 + 83.7a_2 = 84.8$$
$$34.5a_0 + 83.7a_1 + 211a_2 = 195$$

وباستخدام طريقة كرامر يمكن استنتاج الثوابت وبالتالي تأخذ المعادلة الشكل :

$$\tilde{y}_i = -15.5 + 21.44x_i - 5.05x_i^{\,2}$$

تدل قيمة a_2 السالبة على أن المشتق الثاني سالب مما يعني وجود النهاية العظمى للتابع ، وهو ما يستدل عليه من الرسم أيضا .

تمارين ومسائل غير محلولة

١- اوجد مشتقات التوابع التالية :

$$y = 3x^2 - \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{\cos x}{x} = \sin x$$

$$y = \frac{tgx}{\sqrt{x}}$$

$$y = e^{-2x}\sqrt{2x^2 + 5}$$

$$y = \frac{3x^2 - 5 + e^x}{e^{-3x}\sqrt{\cos x} + \ln\frac{2 + x^2}{3}}$$

٢- أوجد قيمة كل من التغيرين الحقيقي والتقريبي للتابع :

$$y = 5x^2 - 2x + 10$$

وذلك عندما تتغير x :

ًا-من ٥ إلى ٥.٠١

ً٢-من ٥ إلى ٤.٩٨

٣- أوجد كافة المشتقات الجزئية الممكنة للتابع :

$$y = 5{x_1}^2 x_2 + 3x_1{x_2}^2 - x_1x_2 + 3$$

٤- وضع مكعب حديدي فوق نار شديد فازداد طول ضلعه البالغ ٣ سم بمقدار ٠.٠١ سم . المطلوب إيجاد مقدار التغيرين الحقيقي والتقريبي على حجم المكعب ثم اوجد مقدار الخطأ النسبي المرتكب في حساب التغير التقريبي لحجم المكعب .

٥- لدينا البيانات التالية عن ظاهرة ما .

y	٣	٢	٥	٧	٨	١١	١٠	١٣	١٥	١٨
x	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

والمطلوب :

- رسم شكل الانتشار واقتراح معادلة التمثيل المناسبة .
- إيجاد ثوابت المعادلة بطريقة المربعات الصغرى .

٦- جمعت المعلومات الإحصائية التالية نتيجة المراقبة اليومية لظاهرة مدروسة :

y	٤	٨	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٦٠	٩٠	١٤٠	٢٠٠
x	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

إذا افترضنا أن معادلة التمثيل هي من الشكل الاسي أوجد ثوابت المعادلة المقترحة .

الفصل السادس

الاشتقاق والتفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

الفصل السادس

التطبيقات الاقتصادية للمشتقات

مقدمة :

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض المفاهيم الاقتصادية الشائعة والمستخدمة للمشتقات، وجميع هذه المفاهيم حدية ، بمعنى أنها تعكس مدى استجابة التابع لتغير لا متناه في الصغر في المتحول المستقل . ويمكن توضيح المعنى الاقتصادي للمشتق من خلال سرد بعض الأمثلة الاقتصادية التطبيقية .

١.٦ التوابع الحدية :

تُعنى هذه التوابع بمعرفة مدى تأثير التغير في متغيرات مثل مستوى التخزين والإنتاج و العرض والعمالة . وغالباً ما تُدرس هذه المشاكل باستخدام التحليل الحدي . وكلمة حدي تعني مقدار التغير في المتغير التابع الناتج عن تغير المتحول المستقل بمقدار وحدة نقدية واحدة . ومن أهم هذه التوابع ما يلي :

تابع التكلفة الكلية :

ويرمز له بالرمز Y وهو مرتبط بعدد الوحدات المنتجة والمعبر عنها x أي :

$$Y = f(x)$$

ولنعتبر أن كل زيادة في عدد الوحدات المنتجة بمقدار Δx ، بحيث تصبح الوحدات الجديدة $x+\Delta x$. يقابله تابع تكلفة جديدة يرمز له بالرمز $f(x+\Delta x)$. ذلك يعني أن أي تغير في عدد الوحدات المنتجة سيؤدي إلى تغير في إجمالي التكلفة بمقدار :

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

وسيكون متوسط تغير النفقات الإجمالية :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هذه الكمية تعبر بنفس الوقت عن مقدار تغير النفقات على الوحدة الواحدة من الزيادة التي طرأت على عدد الوحدات المنتجة . وبالتالي تسمى النهاية :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = y'_x \qquad (٦- ١)$$

بتابع التكلفة الحدية للإنتاج والذي يعبر عن المشتق الأول لتابع التكلفة الكلية .

وبشكل مشابه إذا اعتبرنا أن $u(x)$ يمثل تابع الإنتاج أو الاستهلاك أو الإيراد والمتعلق بعدد الوحدات x فإن المقدار :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'_x \qquad (٦- ٢)$$

يعبر عن تابع الإنتاج الحدي أو الاستهلاك الحدي أو الإيراد الحدي .

مثال (٦-١) :

إذا علمت أن تابع التكاليف الكلية C يتعلق بعدد الوحدات المنتجة x وفق العلاقة :

$$C = 400x - \frac{1}{150}x^5$$

والمطلوب : تحديد التكاليف الحدية إذا علمت أن حجم الإنتاج يبلغ تسع وحدات .

الحل :

نعلم أن تابع التكلفة الحدية ما هو إلا المشتق الأول لتابع التكاليف الكلية أي :

$$C' = 400 - \frac{1}{30}x^4$$

وعندما يكون عدد الوحدات المنتجة مساوياً ٩ فإن C' تساوي :

$$C' = 400 - \frac{1}{30}(9)^4 = 181.3 \text{ وحدة}$$

ويدل هذا الرقم على أنه بوجود حجم إنتاج قدره ٩ وحدات فإن التكاليف اللازمة لإنتاج الوحدة التالية (العاشرة) يبلغ ١٨١.٣ وحدة .

مثال (٦-٢):

يتحدد تابع سعر الطلب على سلعة ما بالعلاقة :

$$P = 12 - 2C$$

حيث C كمية الطلب و P السعر والمطلوب :

- تحديد مقدار تغير الإيراد الذي يتحقق إذا تزايد الطلب من وحدتين إلى ثلاث وحدات .

الحل :

تعلم أن الإيراد يتحقق وفق العلاقة :

الإيراد = عدد الوحدات المنتجة * سعر الوحدة الواحدة

أي :

$$T = C(12 - 2C)$$
$$T = 12C - 2C^2$$

أما الإيراد الحدي فهو يساوي مشتق تابع الإيراد :

$$T' = 12 - 4C$$

فعندما $C = 2$ يكون الإيراد الحدي مساوياً :

$$T' = 12 - 4(2) = 4$$

وهذا يعني أنه إذا تزايد الطلب من وحدتين إلى ثلاث وحدات فإن الإيراد الحدي يتزايد بمقدار ٤ وحدات تقريباً .

٢.٦ مرونة تابع (Elasticity) :

يمكننا باستخدام المشتقات حساب مقدار تزايدات المتحول التابع المقابلة للتزايدات الحاصلة على المتحول المتغير x . وهو ما يسمى مرونة تابع (المشتقات النسبية) .

لتكن لدينا العلاقة $y = f(x)$ ولنفرض أن المتحول المتغير x قد تغير بمقدار Δx . والتغير النسبي للمتحول المتغير x يعبر عنه بالنسبة $\frac{\Delta x}{x}$. ذلك يقابل تغيراً في المتحول التابع مقداره :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ويترافق معه تغير نسبي للمتحول التابع مقداره $\frac{\Delta y}{y}$.

يعطى مقدار التناسب بين التغيرين النسبيين بالشكل :

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

حيث تظهر هذه العلاقة بكم مرة يكون التغير النسبي للتابع أكبر من التغير النسبي للمتغير والتي يمكن صياغتها بالشكل :

$$E_{y/x} = \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} . \frac{x}{y} \qquad (٦-٣)$$

حيث $E_{y/x}$ تعبر عن المرونة .

أما إذا رسمنا شكل الانتشار للظاهرة المدروسة ، وبالتالي تمكنا من الحصول على معادلة التمثيل للعلاقة القائمة بين المتحولين فإن العلاقة (٦– ٣) تكتب بدلالة المشتق أي :

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y}.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$E_{y/x} = \frac{x}{y}.\frac{dy}{dx} = y'_x\,\frac{x}{y}$$ (٦– ٤)

وتعبر المرونة عن درجة حساسية التابع بنسبة مئوية فيما إذا حدث تغير على المتحول x بمقدار ١% . وذلك بأخذ الإشارة الجبرية بعين الاعتبار (الإشارة الموجبة للمرونة تدل على علاقة طردية بين المتغيرين . أما الإشارة السالبة فتدل على وجود علاقة عكسية بينهما) .

مثال (٦– ٤) :

ليكن لدينا التابع التالي :

$$y = 2x^2 - 5$$

والمطلوب :

- إيجاد مرونة التابع y عند النقطة $x = 2$.

الحل :

نسعى أولاً لإيجاد قيمة التابع في النقطة المطلوبة فيكون :

$$x = 2 \Rightarrow y = 3$$

بعد ذلك نحسب المشتق :

$$y'_x = 4x$$

وقيمته في النقطة المحددة $x = 2$ تساوي :

$$y'_x = 4(2) = 8$$

وبتطبيق العلاقة (٦–٤) نجد :

ذلك يعني أنه التابع يتزايد بمقدار ٥.٣٣ % إذا ما تزايد المتغير x بنسبة ١% .

ملاحظات :

- إذا كانت $E_{y/x}=0$ ، فإن ذلك يعني أن أي تغير على قيمة المتحول x لن يؤدي إلى تغير على قيمة المتحول y . ونسمي هذه الحالة بالمرونة الصفرية (المعدومة).
- إذا كانت $E_{y/x}=1$ ، فهذا يدل على المرونة المتكافئة والتي تعني أنه إذا طرأ تغير على قيمة المتحول x بنسبة ١% فإن ذلك يؤدي إلى تغير مقابل على قيمة المتحول y بنسبة مماثلة مقدارها ١%.
- إذا كانت $E_{y/x}>1$ ، فهذا يعني أنه إذا طرأ تغير على قيمة المتحول x بنسبة ١% فإن ذلك سيؤدي إلى إحداث تغير بنسبة أكبر على قيمة المتحول y مقدارها $\left|E_{y/x}\right|\%$.
- إذا كانت $E_{y/x}<1$ ، فهذا يعني أنه إذا طرأ تغير على قيمة المتحول x بنسبة ١% فإن ذلك سيؤدي إلى إحداث تغير بنسبة أقل على قيمة المتحول y مقدارها $E_{y/x}\%$.

وتقبل العلاقات التالية بدون برهان :

١– مرونة جداء تابعين (u,v) تساوي لمجموع مرونتي التابعين (بالنسبة للمتغير نفسه) أي :

$$E_{uv/x}=E_{u/x}+E_{v/x} \qquad (٦-٥)$$

إذا علمنا أن :

$u=f(x)$ و $v=f(x)$

٢– مرونة تابع يعبر عن النسبة بين تابعين يساوي للفرق بين مرونة التابع الأول ومرونة التابع الثاني بالنسبة لنفس المتغير .

$$E_{(u/v)/x}=E_{u/x}-E_{v/x} \qquad (٦-٦)$$

مثال(٦–٥):

ليكن لدينا التابع التالي :

$$y=x^2e^{2x}$$

والمطلوب :

- إيجاد مرونة التابع y .

الحل :

لنفرض إن :

$$u(x) = x^2$$
$$v(x) = e^{2x}$$

وبالتالي يكون :

$$y = u.v$$

لإيجاد مرونة التابع السابق ، نجد مرونة كل تابع على حدة فنجد :

مرونة التابع $u(x)$ تساوي :

$$E_{u/x} = u'_x \frac{x}{u}$$

بالتعويض نجد :

$$E_{u/x} = 2x_x \frac{x}{x^2} = 2$$

ثم نجد مرونة التابع $v(x)$ وهي تساوي :

$$E_{v/x} = v'_x \frac{x}{v}$$

بالتعويض نجد :

$$E_{v/x} = 2e^{2x} \frac{x}{e^{2x}} = 2x$$

وتكون المرونة الكلية :

$$E_{y/x} = 2(x+1)$$

- **مرونة الطلب بالنسبة للسعر :**

من المعلوم أن العلاقة بين الطلب على سلعة ما وسعر هذه السلعة (بفرض أن أسعار بقية السلع ودخول المستهلكين وكذلك بنية الاستهلاك تعتبر غير متغيرة) تختلف باختلاف مستوى السعر وتغيراته من فترة لأخرى . وغالباً ما تحسب في المسائل الاقتصادية التغيرات التي تطرأ على توابع الطلب للمستهلكين في حال تغيرات السعر وهذا ما يدعى اقتصادياً بدراسة مرونة الطلب بالنسبة للسعر .

لنفرض أن الطلب على سلعة D يتعلق بالسعر P أي :

$$D = f(p)$$

وإذا اعتبرنا أن السعر سيتغير بمقدار ΔP فإن هذا يعني حدوث تغير ممكن على D بمقدار ΔD وبالتالي فإن المرونة تعطى بالعلاقة :

$$E_{D/P} = \frac{\Delta D}{\Delta P}.\frac{P}{D} \qquad (٦- ٧)$$

أما في حال دراسة توابع الطلب والتي يمكن الحصول على مشتقاتها فإن قانون المرونة السابق يصبح :

$$E_{D/P} = D'_P.\frac{P}{D} \qquad (٦- ٨)$$

ما ينطبق غلى تفسيرات القيم الجبرية للمرونة بشك عام ينطبق على مرونة الطلب بالنسبة للسعر مع العلم أن العلاقة بين الطلب والسعر بأغلب المسائل الاقتصادية هي علاقة عكسية لان زيادة الأسعار على السلع الاقتصادية تؤدي إلى خفض قدرة المشتري وإحجامه على شراء نفس الكميات من هذه السلعة .

- **مرونة الطلب بالنسبة للدخل :**

إذا كانت جميع العوامل التي يتعلق بها الطلب ثابتة خلال فترة زمنية معينة باستثناء الدخل الذي يعتبر متغيراً فإن الطلب على السلعة A يتعلق بالدخل S أي :

$$D_A = f(S)$$

فإذا ما طرأ تغير على S بمقدار ΔS وأدى ذلك لحدوث تغير في تابع الطلب على السلع الاقتصادية بمقدار ΔD فإن مرونة الطلب بالنسبة للدخل تعطى بالعلاقة التالية :

$$E_{D/S} = \frac{\Delta D}{\Delta S}.\frac{S}{D} \qquad (٦- ٩)$$

أو من خلال علاقة المشتق :

$$E_{D/S} = D'_S.\frac{S}{D} \qquad (٦- ١٠)$$

وتعبر مرونة الطلب بالنسبة للدخل عن مدى استجابة توابع الطلب للتغيرات الحاصلة على دخول المستهلكين .

مثال (٦- ٦):

يقوم مستهلك بشراء كميات مختلفة من أربع سلع (A,B,C,M) فإذا فرضنا أن الدخل الشهري لهذا المستهلك والذي كان يبلغ ١٠٠٠ وحدة نقدية قد ارتفع بمقدار ١٠ وحدات نقدية ونتيجة لذلك طرأت بعض التغيرات على شراء المواد الأربع السابقة وفق الجدول التالي :

الدخل (وحدة نقدية)	الكميات المطلوبة من السلع			
	A	B	C	M
١٠٠٠	٢٠٠	١٠٠	٥٠	١٠٠
١٠١٠	٢٠٢	١٠٠	٤٠	٩٩

والمطلوب دراسة مرونة الطلب على السلع السابقة .

الحل :

من خلال الجدول نجد :

$$\Delta S = 10, \Delta D_A = 2, \Delta D_B = 0, \Delta D_C = -10, \Delta D_M = -1$$

وبالتالي نجد مرونة الطلب على السلعة الأولى بالنسبة للدخل كالتالي :

$$E_{D_A/S} = \frac{2}{10}\frac{1000}{200} = 1$$

هذا يعني إذا ازداد دخل المستهلك بمقدار ١% فإن الطلب على السلعة A سيزداد أيضا بمقدار ١% والمرونة متكافئة وطردية .

بالانتقال إلى السلعة B فإننا نجد مرونة الطلب على هذه السلعة كما يلي :

$$E_{D_B/S} = 0$$

هذا يدل على المرونة المعدومة أي إذا ازداد دخل المستهلك بمقدار ١% فإن الطلب على السلعة B لن يتأثر. وهذه المرونة مقترنة عادةً بالطلب على السلع الأساسية (مادة الخبز مثلاً) .

أما مرونة الطلب على السلعة Cبالنسبة للدخل نجد :

$$E_{D_C/S} = \frac{-10}{10}.\frac{1000}{50} = -20$$

إن المرونة عكسية وكبيرة أي إذا ازداد دخل المستهلك بمقدار ١% فإن الطلب على السلعة C سوف ينخفض بمقدار ٢٠% . وهذا ما يفسر ظاهرة اتجاه المستهلكين نحو شراء بعض السلع الأخرى البديلة .

وأخيراً فإننا نجد أن مرونة الطلب على السلعة Mبالنسبة للدخل تساوي :

$$E_{D_M/S} = \frac{-1}{10}.\frac{1000}{100} = -1$$

إن المرونة عكسية ومتكافئة أي إذا ازداد دخل المستهلك بمقدار ١% فإن الطلب على السلعة M سوف ينخفض بمقدار ١% .

- **العرض و مرونة العرض :**

يعرف العرض اقتصادياً بأنه كمية السلع المعروضة في السوق بلحظة معينة . وأن تابع العرض لسلعة ما بالسوق مرتبط بعلاقة طردية ومتزايدة مع السعر . وذلك في الدول الرأسمالية والتي يسعى المنتجون فيها إلى زيادة الكميات المعروضة بقصد تحقيق أرباح باهظة على خلاف الدول الاشتراكية .

يرمز للعرض بالرمز Q، وتعطى علاقة المرونة بالنسبة للسعر كما يلي :

$$E_{Q/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} \qquad (٦- ١١)$$

أو من خلال علاقة المشتق :

$$E_{Q/P} = Q'_P \cdot \frac{P}{Q} \qquad (٦- ١٢)$$

- **مرونة تابع النفقات الكلية والتكاليف المتوسطة :**

ليكن لدينا منشأة اقتصادية تنتج x وحدة من سلعة ما ، نرمز للتكاليف الكلية بالرمز C.

يرمز لتابع النفقات الكلية بالرمز C، وتعطى علاقة مرونة التكاليف الكلية بالنسبة للوحدة المنتجة كما يلي :

$$E_{C/x} = \frac{\Delta C}{\Delta x} \cdot \frac{x}{C} \qquad (٦- ١٣)$$

أو من خلال علاقة المشتق :

$$E_{C/x} = C'_x \cdot \frac{x}{C} \qquad (٦- ١٤)$$

كما وسنرمز لتابع التكاليف المتوسطة بالرمز T، وتعطى بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{C}{x} \qquad (٦- ١٥)$$

أما علاقة مرونة التكاليف المتوسطة بالنسبة للوحدة المنتجة فهي على الشكل التالي :

$$E_{T/x} = \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \frac{x}{T} \qquad (٦- ١٦)$$

أو من خلال علاقة المشتق :

$$E_{T/x} = T'_x . \frac{x}{T} \qquad (١٧ -٦)$$

- **العلاقة بين مرونة التكاليف الكلية والمتوسطة :**

بالتعويض في العلاقة (٦- ١٧) نجد :

$$E_{T/x} = \frac{\frac{dc}{dx}x - c}{x^2} . \frac{x}{\frac{c}{x}}$$

$$E_{T/x} = \frac{x^2}{c} . \frac{x\frac{dc}{dx} - c}{x^2}$$

$$E_{T/x} = \frac{x}{c}\frac{dc}{dx} - 1$$

$$E_{T/x} = E_{c/x} - 1$$

وهذا يعني أن مرونة التكاليف المتوسطة للوحدة الواحدة من الإنتاج أقل من مرونة النفقات الكلية . فإذا كانت مرونة التكاليف المتوسطة ذات قيمة صفرية فإن ذلك يدل على أن النفقات المتوسطة للسلعة المدروسة تعبر عن كميات ثابتة وبالتالي يصبح لدينا :

$$x\frac{dc}{dx} - c = 0 \Rightarrow \frac{dc}{dx} = \frac{c}{x}$$

والتي تفسر بدورها أنه إذا كانت مرونة النفقات الكلية مساوية للواحد فإن التكاليف الحدية تساوي لمتوسط التكاليف الكلية .

مثال (٦- ٧) :

ليكن تابع العرض لسلعة ما في سوق تجاري يتحدد بالعلاقة :

$$Q = \frac{P+2}{1-P}$$

أما تابع الطلب فيكون :

$$D = \frac{3P-4}{1-P}$$

والمطلوب :

– تحديد السعر الذي يتم بموجبه توازن السعر .

– مرونة الطلب ومرونة العرض للسلعة المدروسة بالنسبة لسعر التوازن .

الحل :

يتوازن السوق عندما يكون الطلب مساوياً للعرض أي :

$$Q = D \Rightarrow$$
$$\frac{P+2}{1-P} = \frac{3P-4}{1-P}$$

بإصلاح هذه المعادلة نجد أن :

$$P = 3$$

أما تابع مرونة العرض بالنسبة للسعر يساوي :

$$E_{Q/P} = -2.7$$

يدل على أن زيادة السعر بمقدار ١% فإن العرض على السلعة ينخفض بمقدار ٢.٧ % .

أما تابع مرونة الطلب بالنسبة للسعر يساوي :

$$E_{D/P} = 0.3$$

يدل على أن زيادة السعر بمقدار ١% فإن الطلب على السلعة يزداد بمقدار ٠.٣ % .

مثال(٦– ٨):

قامت وزارة التموين بدراسة أوضاع سلعة ما في السوق الداخلي بدراسة الظروف الحالية للسوق والتغيرات المحتملة في المستقبل وجمعت المعلومات الخاصة بتلك السلعة بالجدول التالي :

المؤشر	القيم الحقيقية لعام ١٩٨٨	القيم التقديرية لعام ١٩٨٩
عدد السكان (مليون نسمة)	٢٠	٢١
الدخل القومي (مليون وحدة نقدية)	٦٠٠٠	–
متوسط استهلاك الفرد من السلعة (كغ)	٣٠	؟

فإذا علمت أن الدخل القومي لهذه الدولة سيزداد بنسبة ١٢% وأن مرونة الطلب على السلعة المدروسة مساوٍ ١.٥% . والمطلوب :

– متوسط استهلاك الفرد الواحد من المادة المدروسة المتوقع في عام ١٩٨٩.

– الكميات الواجب عرضها في السوق بهدف تحقيق توازن السلعة بفرض أن الأسعار ثابتة وان مرونة الطلب على السلعة بالنسبة للسعر –١.٦ .

– الكميات الواجب عرضها في السوق إذا ما ارتفعت الأسعار من ٤٠ وحدة نقدية إلى ٤٥ وحدة نقدية وذلك بالإضافة لتغيرات الدخل الحاصلة أولاً .

الحل :

لحساب متوسط استهلاك الفرد الواحد نقوم أولاً بحساب الدخل الفردي السنوي لعامي ١٩٨٨ و ١٩٨٩ أي :

$$X_{1988} = \frac{6000(10)^6}{20(10)^6} = 300 \text{ وحدة نقدية}$$

$$X_{1989} = \frac{6000 + 0.12(6000)(10)^6}{21(10)^6} = 320 \text{ وحدة نقدية}$$

وبالتالي فإن مقدار تغير الدخل الفردي ١٩٨٨ و ١٩٨٩ :

$$\Delta x = 20$$

لإيجاد متوسط استهلاك الفرد الواحد لا بد من إيجاد مقدار الزيادة المتوقعة لاستهلاك الفرد الواحد والتي يمكن حسابها من خلال تطبيق المرونة وذلك لأنها العنصر الوحيد المجهول في علاقة المرونة :

$$1.5 = \frac{\Delta y_1}{20}\frac{300}{30} \Rightarrow \Delta y_1 = 3k.g$$

ويكون مقدار الاستهلاك الفردي في عام ١٩٨٩ :

$$y_1 = 30 + 3 = 33k.g$$

أما الكميات الواجب توفرها في السوق فتبلغ :

$$Q_1 = 33(21)(10)^6 = 693(10)^3 K.G$$

من أجل تحقيق الطلب الثاني نطبق قانون المرونة ولكن على أساس أن هنالك طلباً متوسطاً من السلعة . يبلغ ٣٣ كغ وليس ٣٠ كغ أي :

$$-1.6 = \frac{\Delta y_2}{5}\frac{40}{33} \Rightarrow \Delta y_2 = -6.6K.G$$

وبالتالي يكون التغير الإجمالي في متوسط استهلاك الفرد الواحد من المادة المدروسة :

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = 3 - 6.6 = -3.6k.g$$

والكمية الناتجة تمثل مقدار التغير الإجمالي في استهلاك الفرد اخذين بعين الاعتبار تغير الدخل أولا ومن ثم تغير الأسعار .

٣.٦ تطبيقات المشتقات في دراسة التوابع الإنتاجية :

إن دراسة المشتقين الأول والثاني لأي تابع من التوابع الاقتصادية ، يمكننا من دراسة الخواص المختلفة لتلك الظواهر من حيث تطور اتجاه الظاهرة والقيم العظمى والصغرى . وسوف ندرس ذلك من خلال الأمثلة التالية :

مثال (٦– ٩) :

لنفترض أن الطلب على سلعة والسعر على هذه السلعة يرتبطان وفق العلاقة التالية :

$$P = \frac{600}{x+20}$$

حيث :

P سعر السلعة .

x الطلب على السلعة .

والمطلوب : دراسة كيفية تغير الإيراد بتغير الطلب .

الحل :

نعلم أن الإيراد يتحدد بالعلاقة التالية :

الإيراد = عدد الوحدات المباعة * سعر مبيع الوحدة الواحدة

نرمز للإيراد بالرمز I فيكون :

$$I = x.P$$

بالتعويض نجد :

$$I = x\frac{600}{x+20}$$

لدراسة كيفية تغير الإيراد I بتغير الطلب نحسب المشتق أولاً :

$$I'_x = \frac{600(x+20) - 600x}{(x+20)^2}$$

$$I'_x = \frac{12000}{(x+20)^2}$$

نلاحظ أن I'_x موجب دائماً.

أما المشتق الثاني يساوي :

$$I''_x = \frac{-24000}{(x+20)^3}$$

وهو سالب دائماً (x تعبر عن قيم موجبة دائماً) ، أي : $I''_x < 0$.

وبالتالي للتابع نهاية عظمى .

ذلك يعني أن مع ازدياد الطلب يوماً بعد يوم فإنه لابد للإيراد أن يصل لنهايته العظمى وذلك من أجل بيع عدد محدد من السلعة المدروسة .

وهذا يعني أنه لابد من إنتاج عدد كاف من السلع وذلك لتحقيق الإيراد الأعظمي ، أما الإنتاج وبشكل عشوائي ومتزايد فلا يحقق دوماً الإيراد الأعظمي .

مثال (٦- ١٠) :

تقوم منشأة صناعية بصنع x فإذا علمت أن التكاليف الكلية للإنتاج تتبع عدد الوحدات المنتجة x وفق العلاقة :

$$c = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 800$$

وإن سعر السلعة يرتبط بعدد الوحدات المنتجة بالعلاقة :

$$P = 50 - 0.01x$$

والمطلوب تحديد قيمة الربح الأعظمي الذي يمكن للمنشاة أن تحققه .

الحل :

تابع الإيراد يساوي:

$$I = x(50 - 0.1) = 50x - 0.1x^2$$

تابع الربح = الفرق بين الإيراد والتكاليف الكلية

$$R = I - c$$

$$R = 50x - 0.1x^2 - \frac{1}{50}x^2 - 15x - 800$$

بالإصلاح نحصل على المعادلة النهائية التالية :

$$R = -0.12x^2 - 35x - 800$$

ويتحقق الربح الأعظمي عندما يكون لتابع الربح نهاية عظمى . لذلك نجد المشتق الثاني :

$$R'_x = -0.24x - 35$$

وبالتالي نجعله مساوياً للصفر للحصول على قيمة x التي تعدم معادلة الربح :

$$R'_x = 0 \Rightarrow -0.24x - 35 = 0$$
$$\Uparrow\ x = 146$$

وبالحصول على المشتق الثاني لمعادلة الربح نجد :

$$R''_x = -0.24 < 0$$

للتابع نهاية عظمى عند النقطة $x = 146$. أي أن المنشأة تحقق ربحاً أعظميا إذا ما تم تصنيع ١٤٦ وحدة بالسنة فقط وبذلك يكون السعر الموافق لهذه الوضعية محدد بالعلاقة :

$$P = 50 - \frac{1}{10}(146) = 35.4$$

بتعويض هذه القيمة في معادلة الربح نحصل على إجمالي الربح الأعظمي :

ويمكن أن نجد تلك القيم بطريقة أخرى كما يلي :

نقوم بإيجاد تابع الإيراد الحدي ونساويه مع تابع التكلفة الحدية كما يلي :

تابع الإيراد يساوي :

$$I = 50x - 0.1x^2$$

أما تابع الإيراد الحدي يساوي :

$$I'_x = 50 - 0.1x$$

أما تابع التكلفة يساوي :

$$c = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 800$$

تابع التكلفة الحدية يساوي :

$$c'_x = \frac{1}{25}x + 15$$

بمساواة تابع الإيراد الحدي مع تابع التكلفة الحدية ، ينتج لدينا عدد الوحدات المباعة كما يلي :

$$50 - 0.1x = \frac{1}{25}x + 15$$
$$\Rightarrow x = 146$$

الربح الأعظمي = الإيرادات – التكاليف الكلية

$R = I - C \Rightarrow$
$R = -0.12x^2 + 35x - 800$

بالتعويض بقيمة $x = 146$ ، نجد :

$R = 1752.08$

٤.٦ تطبيقات المشتقات الجزئية في الأبحاث الاقتصادية :

تناولنا سابقاً الظواهر الاقتصادية التي تتأثر بمتغير واحد فقط ، ولكن حياتنا اليومية الاقتصادية تشمل ظواهر عدة تتأثر بعدة عوامل ويعبر عنها رياضياً :

$y = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$

إن نفس الاستخدامات التي تطبق على المشتق العادي بالنسبة للمسائل الاقتصادية ، يمكن تعميمها بالنسبة للمشتق الجزئي . بالنسبة لمفاهيم التوابع الحدية والمرونة وكذلك مسائل النهايات الصغرى والنهايات العظمى . سوف نورد بعض الأمثلة الاقتصادية .

مثال (٦- ١١) :

ليكن لدينا تابع الإنتاج y والمتعلق بعدة عوامل كما يلي :

$y = f(K, L, A) = 4LA^2 + 3K^2 + 6A^2K + 4A - 100$

حيث :

A يعبر عن عامل الأرض .

L يعبر عن عامل العمل .

K يعبر عن عامل رأس المال .

والمطلوب تحديد الإنتاجية الحدية للعوامل الثلاثة إذا علمت أن :

$L = 4, A = 10, K = 25$

الحل :

تتحد معادلة الإنتاجية الحدية بالمشتق الأول لتابع الإنتاج وبالتالي فإن الإنتاجية الحدية بالنسبة للأرض ما هي إلا المشتق الجزئي الأول لتابع الإنتاج بالنسبة لعامل الأرض .

$$\frac{\partial y}{\partial A} = y'_A = 8LA + 12AK + 4$$

بالتعويض بقيم L, A, K المعطاة نجد :

$y'_A = 3324$

أما الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل العمل فنجد :

$$\frac{\partial y}{\partial L} = L'_A = 4A^2 = 400$$

أما الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل رأس المال فنجد :

$$\frac{\partial y}{\partial K} = K'_A = 6K + 6A^2 = 750$$

- **تطبيقات المشتقات الجزئية في دراسة الأسعار :**

تخضع الأسعار لكثير من التقلبات والتغيرات مما يجعلها مادة أساسية للدراسة الاقتصادية ، والأخص فيما يتعلق بمرونتها .

مثال (٦-١٢):

ليكن لدينا تابع الطلب على السلعة A :

$$D_A = -2P_A + 10x - 10a$$

حيث :

P_A سعر السلعة A .

L الدخل الفردي .

K ثابت ما .

والمطلوب إيجاد مرونة الطلب على السلعة A . بالنسبة لسعرها المحدد بالقيمة $P_A = 5$.

الحل :

فإذا أردنا حساب مرونة الطلب على السلعة A بالنسبة لسعرها المحدد بالقيمة $P_A = 5$ فإنه يكون :

$$E_{D_A/P_A} = D'_{A/P_A} \frac{P_A}{D_A}$$

$$E_{D_A/P_A} = (-2)\frac{P_A}{-P_A + 10x - 100}$$

$$E_{D_A/P_A} = \frac{5}{5 - 5x + 5a}$$

$$E_{D_A/P_A} = \frac{1}{1 - 1x + a}$$

- **المرونة الانعكاسية :**

وهي المرونة التي تدرس مدى استجابة الطلب على سلعة A لتأثيرات تغير الأسعار على سلع أخرى .

مثال (٦-١٣):

لنفرض أن D_A تابع الطلب على سلعة يخضع للعلاقة :

$$D_A = -5P_A{}^2\sqrt{P_B} + \frac{1}{\sqrt{P_B}} + 50$$

حيث :

P_A سعر الوحدة الواحدة من السلعة A .

P_A سعر الوحدة الواحدة من السلعة B البديلة .

إذا علمت أن أسعار التوازن هي :

$$P_A = 3, P_B = 9$$

والمطلوب :

- إيجاد مقدار التغير في كمية الطلب على السلعة A المدروسة عندما يتزايد P_A بمقدار ٠.٠١ ويتناقص P_{AB} بمقدار ٠.٠٢ ، وذلك اعتباراً من وضع التوازن .
- أوجد مرونة الطلب على السلعة A.
- أوجد المرونة الانعكاسية لتابع الطلب على السلعة A بالنسبة لسعر السلعة B.

الحل :

لدينا :

$$dD_A = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} dP_A + \frac{\partial D_A}{\partial P_B} dP_B$$

ويمكن كتابتها بدلالة التزيدات الحقيقية للأسعار كما يلي :

$$dD_A = D'_{A/P_A}\Delta P_A + D'_{A/P_B}\Delta P_B$$

ولنحسب الآن المشتقات الجزئية :

$$D'_{A/P_A} = -10P_A = 10(3) - 30$$

$$D'_{A/P_B} = \frac{-1}{2\sqrt{P_B}}(5P_A{}^2) - \frac{\frac{1}{2\sqrt{P_B}}}{P_B}$$

$$= \frac{-5P_A{}^2}{2\sqrt{P_B}} - \frac{1}{(2\sqrt{P_B})(P_B)}$$

$$= \frac{-5(3)^2}{2\sqrt{9}} - \frac{1}{(2\sqrt{9})(9)}$$

$$= -7.51$$

ثم نعوض في معادلة التغير ، فنجد :

$$\Delta D_A = -30(0.01) + 7.51(0.02) = -0.15$$

هذا يعني أن التغير الذي حصل على سعر السلعة A وكذلك على السلعة B قد أدى بالمحصلة إلى انخفاض في الطلب على السلعة A بمقدار ٠.١٥ وحدة .

لحساب مرونة الطلب على السلعة A بالنسبة لسعرها :

$$E_{D_A/P_A} = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} \cdot \frac{P_A}{D_A}$$

وبإجراء التعويضات والإصلاح نجد :

$$E_{D_A/P_A} = (-30)\frac{P_A}{-5P_A{}^2\sqrt{P_B} + \frac{1}{\sqrt{P_B}} + 50}$$

$$E_{D_A/P_A} = (-30)\frac{(3)}{-5(3)^2\sqrt{9} + \frac{1}{\sqrt{9}} + 50} = 1.06\%$$

أما المرونة الانعكاسية لتابع الطلب على السلعة A بالنسبة لسعر السلعة B فهو :

$$E_{D_A/P_A} = \frac{\partial D_A}{\partial P_B} \cdot \frac{P_B}{D_A}$$

$$E_{D_A/P_A} = (-7.51)\frac{(9)}{-5(3)^2\sqrt{9} + \frac{1}{\sqrt{9}} + 50} = +0.8\%$$

أن ذلك يعني أن الطلب على السلعة A يتأثر بدرجة اكبر نسبياً عندما يتزايد سعرها عما لو تزايد سعر السلعة البديلة .

تمارين غير محلولة