حل دورات متتاليات ونهاياتها :

دورة : ٢٠١٧ / ١

التمرين الأول : ٦٠ د

$u_0 = 1$

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

$v_n = u_n + 3$

① اثبت أن v_n هندسية وعين أساسها

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

③ لتكن $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهايتها ....

①

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3} = \frac{\frac{1}{3}u_n - 2 + 3}{u_n+3} = \frac{1}{3}$$

ومنه متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

②

$v_n = v_0 \cdot q^n$

حيث $v_0 = u_0 + 3 = 4$

$v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $v_n = u_n + 3 \Rightarrow u_n = v_n - 3$

$u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

③

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 4$

وعدد حدودها $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= 4\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 4 \times \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 6(1-0) = 6$$

٦٠ د

دورة $\frac{٢٠١٧}{٢}$

التمرين الأول: ٦٠د

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

أ) $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة

ب) $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

$$u_n = f(n)$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \qquad x \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

$$2\sqrt{x+1} > 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ومنه فالمتتالية متناقصة تماماً

$$u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad (ع)$$

ومنه

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0$$

$$(ع) \quad u_n \geq 0 \ldots (1)$$

١٠

$$u_n \leq 1 \ldots (2) \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

من ① و ②

$$0 \leq u_n \leq 1$$

نلاحظ أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

١٠

٦٠د

حل دورات متتاليات ونهايتها :

دورة : $\frac{2018}{1}$

$u_n = 5 - \frac{1}{n}$ $\qquad$ $v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$

a) u_n متزايدة $\qquad$ b) v_n متناقصة

c) هل المتتاليتان متجاورتان

$$u_n = f(n)$$

$f(x) = 5 - \frac{1}{x}$ $\qquad x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

ومنه فالمتتالية u_n متزايدة تماما .

$g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ $\qquad x > 0$

$g'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} < 0$

فالمتتالية v_n متناقصة تماما .

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5 \end{array}\right\}$$

ومنه فالمتتاليتان متجاورتان

دورة $\frac{٢٠١٨}{٢}$

السؤال الرابع : ٤٠ د

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$

$n \geq 0$

$u_0 = 1$

احسب : u_3 ثم احسب المجموع

$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$

$u_n = u_0 \cdot q^n$ ٥

$u_3 = 1\,(2)^3 = 8$ ٥ ٥

$S = a\,\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ١٠ $a = u_3 = 8$

٥ $n = 5$

$= 8\,\dfrac{1-(2)^5}{1-2} = -8\,(1-32)$ ٥

$= -8(-31) = 248$ ٥

---

٤٠ د

حل دورات متتاليات ونهايتها :

دورة : $\frac{2019}{2}$

التمرين الثالث .

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1} \qquad n \geq 1$$

١) ادرس اطراد u_n

٢) اثبت أن 2 راجح .

٣) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]1{,}9 , 2{,}1[$ $n > n_0$

$$u_n = f(n)$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \qquad x \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

متزايدة تماماً .

٢)

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$$

$$= \frac{2n-1-2n-2}{n+1}$$

$$= \frac{-3}{n+1} \leq 0$$

$$u_n - 2 \leq 0 \Rightarrow u_n \leq 2$$

$$M = 2$$

٣)

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

$$1{,}9 < u_n < 2{,}1$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ n+1 \overline{)\, 2n-1} \\ \underline{2n+2} \\ -3 \end{array}$$

$$1{,}9 < 2 + \frac{-3}{n+1} < 2{,}1$$

$$-0{,}1 < \frac{-3}{n+1} < \cancel{0{,}1}$$

$$\frac{-1}{10} < \frac{-3}{n+1}$$

$$-10 > \frac{n+1}{-3}$$

$$30 < n+1$$

$$\left.\begin{array}{l} 29 < n \\ n_0 < n \end{array}\right\}$$

$$n_0 = 29$$

Scanned by CamScanner

دورة $\frac{٢٠١٩}{١}$

$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$

① S_n متزايدة تماماً

② $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج

نهاية S_n وبين أنها متقاربة.

(١) $S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$ ١٥

فهي متزايدة تماماً.

(٢) $S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

مجموع لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

وحدها الأول $a = 1$ وعدد الحدود

$n - 0 + 1 = n + 1$

$S_n = a\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ ٥

$= \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ ٥

$= \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$= \frac{1}{2}\left(3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ٥

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2}(3 - 0) = \frac{3}{2}$ ٥

المتتالية متزايدة ونهايتها $\frac{3}{2}$ إذن

$M = \frac{3}{2}$ ٥

وجدنا أن S_n متزايدة تماماً ومحدودة

من الأعلى فهي متقاربة. ٥

٦٠

حل دورات متتاليات ونهايتها :

دورة : $\frac{2020}{1}$

$u_0 = 3$

$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ $n \geq 0$

(1) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايدة تماماً على $[2, +\infty[$

(2) اثبت بالتدريج $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

(3) استنتج ان المتتالية متقاربة، واحسب نهايتها

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} > 0$

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
		+	0	—	0	+	

ومنه فالتابع متزايد تماماً على $[2,\infty[$

(2) $E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

من أجل: $n=0$

$2 \leq u_1 = \frac{13}{6} \leq 3$

محققة

الفرض: $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

الطلب: $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

الاثبات: لدينا فرضاً

$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

بما أن f متزايدة تماماً

$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي صحيحة.

(3) وجدنا أن

$u_{n+1} \leq u_n \iff u_{n+1} - u_n \leq 0$

فهي متناقصة.

كذلك وجدنا أن $2 \leq u_n$

فهي محدودة من الأدنى

اذن فهي متقاربة.

نحل المعادلة $f(x) = x$

$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$ $x > 0$

$\frac{x^2}{2} + 2 = x^2 \Rightarrow 2 = \frac{x^2}{2}$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

وبالتالي نرفض ومنه

$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

Scanned by CamScanner

دورة ٢٠٢٠ / ٢

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

1) $n \le 2^n$, $n \ge 1$

2) استنتج أن $u_n \le \frac{2}{e-2}$

3) أثبت u_n متقاربة.

$E(n): n \le 2^n$

من أجل $n=1$

$1 \le 2$ محققة

الفرض: $n \le 2^n$

الطلب: $n+1 \le 2^{n+1}$

الإثبات: لدينا فرضاً $n \le 2^n$

$$n+1 \le 1+2^n$$

لكن

$$1+2^n \le 2 \cdot 2^n$$

$$n+1 \le 2 \cdot 2^n$$

$$n+1 \le 2^{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

لدينا $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}$

$$u_n \le \frac{2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \frac{2^3}{e^3} + \dots + \frac{2^n}{e^n}$$

$$u_n \le \underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^1 + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{e}\right)^n}$$

مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$ وعدد الحدود n

$$u_n \le a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$u_n \le \frac{2}{e}\,\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}$$

$$u_n \le \frac{2}{e}\left(\frac{e}{e-2}\right)\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$$

$$u_n \le \frac{2}{e-2} - \cancel{\frac{2}{e-2}\left(\frac{2}{e}\right)^n}$$

$$u_n \le \frac{2}{e-2}$$

محدودة

$$M = \frac{2}{e-2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

فهي متزايدة تماماً.

نستنتج أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

تمارين خارجية في المتتاليات ونهاياتها

1) a ، b ، c ثلاثة أعداد متتالية لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث $a+b+c=9$

أ) احسب b ثم اكتب a ، c بدلالة r

b) علما أن $a \times c = -16$

- عين الأساس r ثم استنتج a ، c

2) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها 5

أ) عبر عن الحد العام u_n بدلالة n

ب) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$$

3) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة

$$v_n - 8u_n = 0$$

- احسب المجموع

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{15}$$

---

1) أ) لدينا $2b = a + c$

ولدينا $a + b + c = 9$

$\Rightarrow 2b + b = 9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

• $b = a + r \Rightarrow a = b - r$ ، $\boxed{a = 3 - r}$

$c = b + r \Rightarrow \boxed{c = 3 + r}$

b) لدينا $a \times c = -16$

$(3-r)(3+r) = -16$

$9 - r^2 = -16 \Rightarrow$

$r^2 = 25 \Rightarrow r = \mp 5$

$\boxed{r=5}$ وبما أنها متزايدة

$a = 3 - 5 = -2$

$c = 3 + 5 = 8$

2) $u_n = u_0 + nr$

$u_n = -2 + 5n$

ب) $u_{15} = -2 + 5(15)$

$\boxed{u_{15} = 73}$

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$

$S = n\dfrac{a+l}{2}$

$n = 15 - 0 + 1 = 16$

$a = u_0 = -2$

$l = u_{15} = 73$

$S = 16\dfrac{-2+73}{2} = 8(71)$

$= 568$

3) لدينا

$v_n - 8u_n = 0$

$\boxed{v_n = 8u_n}$

$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{15}$

$= 8u_0 + 8u_1 + 8u_2 + \cdots + 8u_{15}$

$= 8(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15})$

$= 8S = 8(568)$

$= 4544$

تمارين خارجية في المتتاليات ونهاياتها

U_n متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 1}$$

أ) احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ثم خمن عبارة U_n بدلالة n

ج) ادرس اطراد U_n واحسب نهايتها.

$$U_1 = \frac{U_0}{U_0 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{U_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$U_3 = \frac{U_2}{U_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

م $U_n = \frac{1}{n+1}$

الفرض: $U_n = \frac{1}{n+1}$

الطلب: $U_{n+1} = \frac{1}{n+2}$

البرهان: لدينا $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 1}$

$$U_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{\cancel{n+1}}}{\frac{1+n+1}{\cancel{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{n+2}$$

والقضية محققة.

ج)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

ومنه متناقصة تماما

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

Scanned by CamScanner

تمارين خاصة في المتتاليات ونهايتها

$u_0 = 3$

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3}$

1) احسب u_1 , u_2 , u_3

2) $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ ، $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$

- عين α ، β حتى تكون المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

3) نضع $\alpha = 6$ ، $\beta = -23$

a) اكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n

b) نضع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

- احسب S_n بدلالة n ثم استنتج عبارة S'_n

$u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 2(0) + \frac{5}{3}$

$= 2 - 0 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 2(1) + \frac{5}{3}$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{11}{3} - 2 + \frac{5}{3} = \frac{19}{9}$

$u_3 = \frac{2}{3}u_2 - 2(2) + \frac{5}{3} = \frac{-25}{27}$

2)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta}{u_n + \alpha n + \beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta}{u_n + \alpha n + \beta}$$

لدينا

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta}{u_n + \alpha n + \beta}$$

$2u_n + 2\alpha n + 2\beta = 2u_n - 6n + 5 + 3\alpha n + 3\alpha + 3\beta$

$2\alpha n + 2\beta = -6n + 5 + 3\alpha n + 3\alpha + 3\beta$

$\alpha n - 6n + 3\alpha + \beta = 0$

$(\alpha - 6)n + 3\alpha + \beta + 5 = 0$

الحل

$\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 6$

$3\alpha + \beta + 5 = 0 \Rightarrow \beta = -23$

$v_n = u_n + 6n - 23$

3) a) $v_n = v_0 \cdot q^n$

لدينا $v_0 = u_0 + 6(0) - 23$

$= 3 - 23 = -20$

$v_n = -20\left(\frac{2}{3}\right)^n$

نعوض

$u_n = v_n - 6n + 23$

$u_n = -20\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6n + 23$

b)

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$= a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}$

$a = v_0 = -20$

$n = j - i + 1 = n + 1$ $\quad q = \frac{2}{3}$

$$S_n = -20\,\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$S_n = -60\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

- $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$= v_0 - 6(0) + 23 + v_1 - 6(1) + 23 + \dots$

$\dots + v_n - 6n + 23$

$= v_0 + v_1 + \dots + v_n - 6(0) - 6(1) - \dots - 6(n)$

$+ 23 + 23 + \dots + 23$

$= S_n - 6(0 + 1 + \dots + n) + 23(n+1)$

$= S_n - 6\,\frac{n(n+1)}{2} + 23(n+1)$

$= S_n - 3n(n+1) + 23(n+1)$

$= S_n + (-3n + 23)(n+1)$