ملخص التعامل مع مسائل الأشعة بكالوريا

١) إنشاء المعلم : يتعين المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (المتجانس والمتعامد والكيفي) بنقطة المبدأ O وأشعة الأساس $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ وتحسب إحداثيات النقاط وفق القواعد التالية :

- نقطة المبدأ $(0,0,0)$
- كل نقطة تقع على محور (ox) الفواصل $(x,0,0)$
- كل نقطة تقع على محور (oy) التراتيب $(0,y,0)$
- كل نقطة تقع على محور (oz) الراقم $(0,0,z)$
- كل نقطة تقع في مستوي الفواصل والتراتيب $(x,y,0)$
- كل نقطة تقع في مستوي الفواصل والراقم $(x,0,z)$
- كل نقطة تقع في مستوي التراتيب والراقم $(0,y,z)$
- تحسب إحداثيات بقية النقاط عن طريق الاسقاط على المحاور أو مستويات المحاور وتأخذ كل نقطة إحداثيات مسقطها على المحور أو المستوي وبالعكس و تعطى إحداثيات بعض النقاط المميزة بالعلاقات :

منتصف قطعة مستقيمة $[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

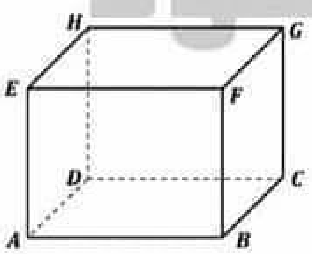
مركز ثقل المثلث ABC : $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين $\left(\frac{\alpha.x_A+\beta.x_B}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha.y_A+\beta.y_B}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha.z_A+\beta.z_B}{\alpha+\beta}\right)$

مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط $\left(\frac{\alpha.x_A+\beta.x_B+\gamma.x_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha.y_A+\beta.y_B+\gamma.y_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha.z_A+\beta.z_B+\gamma.z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$

ملاحظة : يستخدم قانون طول الشعاع في المعلم المتجانس فقط ولتحويل معلم متعامد علمت أطوال أشعة الأساس فيه إلى متجانس نضرب تلك الأشعة بمقلوب طول كل منها

مثال (١) : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث $AB = 3 \;,\; AD = 2 \;,\; AE = \sqrt{7}$



- $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ معلم متعامد إحداثيات نقاطه :

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$
$C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$, $H(0,1,1)$, $G(1,1,1)$

- $(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{\sqrt{7}}\overrightarrow{AE})$ معلم متجانس إحداثيات نقاطه :

$A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $D(0,2,0)$, $E(0,0,\sqrt{7})$
$C(3,2,0)$, $F(3,0,\sqrt{7})$, $H(0,2,\sqrt{7})$, $G(3,2,\sqrt{7})$

٢) قوانين الهندسة التحليلية : في معلم لتكن إحداثيات النقاط $A(x_A, y_A, z_A)\ ,\ B(x_B, y_B, z_B)$

- مركبات شعاع : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- طول الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ في معلم متجانس : $\|\vec{u}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

ملاحظة : تعطى إحداثيات نقطة مجهولة (x, y, z) معينة بعلاقة شعاعية بتحويل العلاقة الشعاعية إلى علاقات عددية عن طريق قانون مركبات الشعاع وإجراء العمليات الحسابية ثم حل جملة المعادلات الناتجة

طلب إضافي مثال(١) : أوجد في المعلم المتعامد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GD}$

- بفرض $M(x, y, z)$ ومنه $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

وبالتالي $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ومنه $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ومنه $x = -1\ ,\ y = 2\ ,\ z = 0$

أي $M(-1, 2, 0)$

٣) إثبات الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

- شعاعياً : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow \vec{u} = k.\vec{v}$ (أي نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي k)
- تحليلياً : $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} \acute{X} \\ \acute{Y} \\ \acute{Z} \end{pmatrix}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow \frac{X}{\acute{X}} = \frac{Y}{\acute{Y}} = \frac{Z}{\acute{Z}}$

٤) إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{k}$:

- طريقة (١) : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً (ثنائي) $\Leftarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{k}$ مرتبطة خطياً (ثلاثي)
- طريقة (٢) : أي شعاعين من الأشعة الثلاث غير مرتبطين خطياً (ثنائي) عندئذ :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{k}$ مرتبطة خطياً (ثلاثي) $\Leftrightarrow \vec{u} = a.\vec{v} + b.\vec{k}$ (*)

(أي إذا وجد عددان حقيقيان a , b يحققان العلاقة السابقة)

ملاحظة : لإيجاد العددين الحقيقيين a , b تحليلياً نحول العلاقة (*) إلى علاقات عددية عن طريق قانون المركبات وحل المعادلات الثلاث الناتجة

ملخص التعامل مع مسائل الأشعة

لكل من يجد صعوبة في ايجاد حل طلبات المسائل

_ يتضمن الملخص ملاحظات وطرق الحل الموجودة ضمن المنهاج لكل طلب ممكن أن يطرح في المسألة

_ طرق الحل الموجودة تشمل كل ما تعلمه الطالب خلال العام الدراسي دون زيادة أو نقصان ولكن بطريقة مرتبة لكل طلب على حدا مما يساعد في تنظيم الأفكار والقدرة على تحليل طلبات المسألة وحلها بسهولة

_ اقرأ طرق الحل الموجودة بتمعن ثم قم بحفظها وعندما تواجه الطلب في الامتحان تذكر أن واحدة من هذه الطرق هي التي ستساعدك على حل الطلب

_ يوجد في الملخص بعض الأمثلة التوضيحية الغير مطروحة الحل بشكل واضح في الكتاب

_ يشمل هذا الملخص 95% من طرق وأساليب حل الطلبات ويبقى 5% تترك لمهارات وقدرات الطالب في التعامل مع المسائل بما يمتلكه من معلومات من السنوات السابقة

_ يوجد في نهاية الملخص جميع القوانين الهندسية التي يحتاجها الطالب من محيط ومساحة وحجم و ....

ملاحظة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

أ مهدي زهوة
دمشق
0932522825

لمتابعة كل جديد ((مجموعة الرياضيات مع الاستاذ مهدي زهوة)) face book

٦) **إنشاء G مركز الأبعاد المتناسبة :**

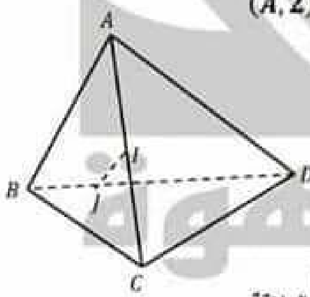
أولاً : عندما تكون تثقيلات النقاط متساوية :

- G م أ م للنقطتين $(A,\alpha)\,,(B,\beta)$ لأجل $\alpha=\beta\neq 0$ يقع في منتصف $[AB]$
- G م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$ لأجل $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ يقع عند مركز ثقل المثلث ABC
((مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته والمتوسط يصل بين الرأس ومنتصف الضلع المقابل))
- G م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)\,,(D,\lambda)$ لأجل $\alpha=\beta=\gamma=\lambda\neq 0$ يقع عند مركز ثقل رباعي الوجوه $DABC$
((مركز ثقل رباعي الوجوه هو نقطة تلاقي متوسطاته والمتوسط في رباعي الوجوه يصل بين الرأس ومركز ثقل القاعدة المقابلة))

ثانياً : عندما تكون تثقيلات النقاط غير متساوية

- G م أ م للنقطتين $(A,\alpha)\,,(B,\beta)$ لأجل $\alpha+\beta\neq 0$ ينشى من العلاقة $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$
- G م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$ لأجل $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ ينشى حسب مبرهنة الخاصة التجميعية بأن ننشى النقطة I م أ م للنقطتين $(A,\alpha)\,,(B,\beta)$ فتكون G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,\alpha+\beta)\,,(C,\gamma)$ ونقوم بإنشائها
- G م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)\,,(D,\lambda)$ لأجل $\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$ ينشى حسب مبرهنة الخاصة التجميعية وذلك بتجميع كل نقطتين أو أكثر بمركز أبعاد جديد

مثال : $ABCD$ رباعي وجوه أنشئ G م أ م للنقاط $(A,2)\,,(B,3)\,,(C,2)\,,(D,1)$



- لتكن $(I,4)$ م أ م ل $(A,2)\,,(C,2)$ ومنه I تقع في منتصف $[AC]$
ولتكن $(J,4)$ م أ م ل $(B,3)\,,(D,1)$ ومنه تنشى J بالعلاقة
$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{1+3}.\overrightarrow{BD}$ أي $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}.\overrightarrow{BD}$
وبالتالي فإن G م أ م ل $(I,4)$ و $(J,4)$ ومنه G منتصف $[IJ]$

٧) **اختزال عدة أشعة لها نفس نقطة البداية M (نقطة اختيارية في الفراغ) :**

- **اختزال شعاعين** : ننشى G م أ م للنقطتين $(A,\alpha)\,,(B,\beta)$ ثم نعوض بالعلاقة
$\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta).\overrightarrow{MG}$ ((مبرهنة الاختزال))
- **اختزال ثلاث أشعة** : ننشى G م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$ ثم نعوض بالعلاقة
$\alpha.\overrightarrow{MA}+\beta.\overrightarrow{MB}+\gamma.\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma).\overrightarrow{MG}$ ((مبرهنة الاختزال))

((يمكن تعميم مبرهنة الاختزال لأجل أربع نقاط أو أكثر))

ملاحظة (١) : تعين مجموعة النقاط الاختيارية M في الفراغ التي تحقق العلاقة $AM=BM$ المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

١١) إيجاد المعادلات :

• المعادلات الوسيطية للمستقيم في الفراغ

تعطى المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ويمر بنقطة (x_0, y_0, z_0) بدلالة الوسيط الحقيقي t بالعلاقة : $(AB) : \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad , t \in R$

ملاحظة (١) : لإيجاد المعادلات الوسيطية لمستقيم يجب إيجاد نقطة من المستقيم بالإضافة لشعاع توجيه

ملاحظة (٢) : يمكن الاستفادة من المعادلات الوسيطية في إيجاد مركبات شعاع توجيه للمستقيم $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ وهي أمثال الوسيط الحقيقي t في المعادلات السابقة

ملاحظة (٣) : لإثبات أن نقطة معلومة تنتمي للمستقيم نعوض إحداثيات النقطة بالمعادلات الوسيطية ونحسب الوسيط t من كل معادلة فإن كانت قيمة الوسيط نفسها فالنقطة تنتمي للمستقيم

• معادلة مستوي في الفراغ :

تعطى معادلة مستوي (p) في الفراغ (في معلم متجانس) ناظمه $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ويمر بنقطة (x_0, y_0, z_0) بالعلاقة :

$(p):\ ax + by + cz + d = 0$ ويحسب الثابت d من تعويض إحداثيات النقطة (x_0, y_0, z_0) بالمعادلة السابقة

ملاحظة (١) : لإيجاد معادلة مستوي يجب إيجاد نقطة من المستوي بالإضافة لشعاع ناظم

ملاحظة (٢) : يمكن الاستفادة من معادلة المستوي في إيجاد مركبات شعاع ناظم للمستوي $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ وهي أمثال كل من المتغيرات x , y , z في المعادلة السابقة

ملاحظة (٣) : إذا لم يكن شعاع الناظم معلوماً نفرض وجود ناظم $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ وننشئ معادلتين من الجداء السلمي للناظم مع أي شعاعي توجيه للمستوي ونفرض أحد ثوابت الناظم عدداً معلوماً ونقوم بعدها بحل جملة المعادلات الناتجة للحصول على مركبات الناظم

مثال : في معلم متجانس $A(0,0,0)\ B(1,1,0)\ C(0,1,1)$ أكتب معادلة المستوي (ABC)

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ناظماً للمستوي حيث $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

ولدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ومنه $\begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$ وبفرض $c = 1$ نجد أن $\begin{cases} a + b = 0 \\ b = -1 \end{cases}$

وبحل جملة المعادلتين السابقتين نجد أن $a = 1 , b = -1 , c = 1$

ومنه بتعويض مركبات $\vec{n}$ وإحداثيات A في معادلة المستوي نجد $d = 0$ ومنه $(ABC) :\ x - y + z = 0$

تحليلياً :

تعطى معادلة الكرة التي مركزها $I(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها R بالتعويض بالعلاقة :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

ملاحظة (١) : لإثبات أن نقطة تنتمي للكرة نثبت أن بعد النقطة عن مركز الكرة I يساوي طول نصف القطر R باستخدام قانون طول الشعاع أو من تعويض إحداثيات النقطة في معادلة الكرة في حال وجودها

ملاحظة (٢): تمثل مجموعة النقاط الاختيارية M في الفراغ الممثلة بالمعادلة :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$$

حيث $k < 0$ مجموعة خالية ولأجل $K = 0$ تمثل M نقطة المركز (x_0, y_0, z_0)

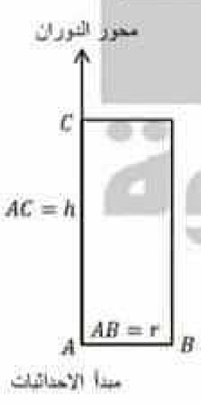
أي ليس بالضرورة أن تمثل المعادلة من الشكل :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

كرة وذلك تبعاً لقيم العدد الحقيقي k وذلك بعد إصلاح شكل المعادلة بالإتمام لمربع كامل لتصبح من الشكل

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$$

- **معادلة اسطوانة نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h تنتج عن دوران مستطيل حول أحد أضلاعه :**

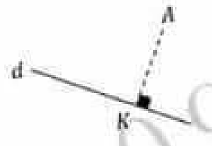


١) الناتجة من الدوران حول محور الفواصل (ox) : $\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ 0 \le x \le h \end{cases}$

٢) الناتجة من الدوران حول محور التراتيب (oy) : $\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ 0 \le y \le h \end{cases}$

٣) الناتجة من الدوران حول محور الراقم (oz) : $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$

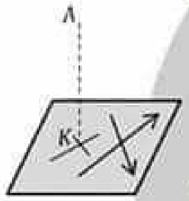
ملاحظة : تستنتج معادلة الاسطوانة من علاقة التعريف $HM = r$ وذلك بعد فرض النقطة الاختيارية $M(x, y, z)$ وحساب إحداثيات النقطة H مسقطها القائم على محور الدوران والتعويض بقانون طول الشعاع في علاقة التعريف بعد تربيعها (اقرأ نشاط صفحة٣٣)



١٣) حساب إحداثيات المسقط القائم لنقطة معلومة A :

- على مستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}$:

نفرض إحداثيات المسقط $K(a,b,c)$
نعوض إحداثيات النقطة K بالمعادلات الوسيطية للمستقيم d كون نقطة المسقط تنتمي للمستقيم
نوجد المعادلة $\overrightarrow{AK}.\vec{u} = 0$ كون الشعاع $\overrightarrow{AK}$ عمودي على شعاع توجيه المستقيم
نحل جملة المعادلتين السابقتين ونوجد الوسيط t
نعوض الوسيط t بالمعادلات الوسيطية للمستقيم d فنحصل على إحداثيات النقطة K



- على مستوي P شعاعا توجيهه $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

نفرض إحداثيات المسقط $K(a,b,c)$
نعوض إحداثيات النقطة K بمعادلة المستوي P كون نقطة المسقط تنتمي للمستقيم
نوجد المعادلتين $\overrightarrow{AK}.\vec{u} = 0$ و $\overrightarrow{AK}.\vec{v} = 0$ كون الشعاع $\overrightarrow{AK}$ عمودي على شعاعي توجيه المستوي
نحل جملة المعادلات الثلاث السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة K

ملاحظة : يمكن حساب بعد النقطة A عن المستوي P في حال علمت نقطة المسقط K من طول الشعاع $\overrightarrow{AK}$

١٤) بعد نقطة عن مستقيم في معلم متجانس : وهو بعد النقطة عن مسقطها القائم على المستقيم

يعطى بعد نقطة معلومة A عن المستقيم d المعطى بمعادلاته الوسيطية وشعاع توجيهه $\vec{u}$ وذلك بعد حساب إحداثيات النقطة k المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d والتعويض بقانون طول الشعاع $\overrightarrow{AK}$

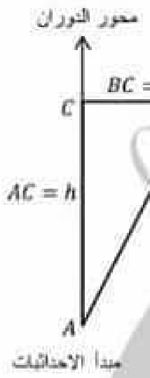
مثال : في معلم متجانس لتكن $A(1,2,0)$ أحسب بعد النقطة A عن المستقيم $d:\begin{cases} x = 1-t \\ y = 0 \ ,\ t \in R \\ z = t \end{cases}$

نفرض نقطة المسقط $K(a,b,c)$ ومنه $\begin{cases} a = 1-t \\ b = 0 \\ c = t \end{cases}$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} a-1 \\ b-2 \\ c \end{pmatrix}.\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - a + c = 0$ ومنه $1-(1-t)+t=0$ ومنه $t = 0$ ومنه $k(1,0,0)$

ومنه $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ومنه $dist(d,A) = AK = 2$

- **معادلة مخروط نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h ينتج عن دوران مثلث قائم حول أحد أضلاعه القائمة :**



١) الناتج من الدوران حول محور الفواصل (ox) : $\begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{r^2}{h^2}x^2 \\ 0 \le x \le h \end{cases}$

٢) الناتج من الدوران حول محور التراتيب (oy) : $\begin{cases} x^2 + z^2 = \frac{r^2}{h^2}y^2 \\ 0 \le y \le h \end{cases}$

٣) الناتج من الدوران حول محور الراقم (oz) : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2}z^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$

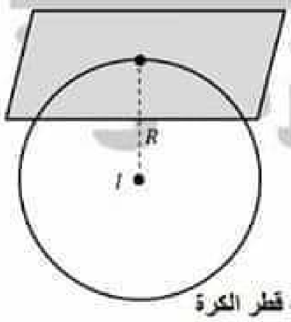
ملاحظة : تستنتج معادلة المخروط من علاقة التعريف $HM = \frac{r}{h}OH$ وذلك بعد فرض النقطة الاختيارية $M(x, y, z)$ وحساب إحداثيات النقطة H مسقطها القائم على محور الدوران والتعويض بقانون طول الشعاع في علاقة التعريف بعد تربيعها (اقرأ نشاط صفحة ٣٤)

١٢) **بعد نقطة عن مستوي في معلم متجانس :**

يعطى بعد نقطة $A(\alpha, \beta, \gamma)$ (وهو بعد النقطة عن مسقطها القائم على المستوي) عن المستوي الذي معادلته $P: ax + by + cz + d = 0$ بالعلاقة :

$$dist(P, A) = \frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}$$

ملاحظة (١) : نستفيد من قانون البعد السابق في معرفة وضع مستوي p بالنسبة لكرة مركزها I ونصف قطرها R وذلك وفق الحالات التالية :



- المستوي p خارج الكرة $dist(P, I) > R \Leftrightarrow$
- المستوي p يقطع الكرة $dist(P, I) < R \Leftrightarrow$
- المستوي p مماس للكرة $dist(P, I) = R \Leftrightarrow$

المستوي المماس للكرة هو مستوي يشترك مع الكرة

بنقطة واحدة هي نقطة التماس ويبعد عن مركزها مسافة تساوي طول نصف قطر الكرة

((يستفاد من المستوي المماس في معرفة نصف قطر الكرة وذلك بحساب بعد مركز الكرة عن المستوي المماس))

ملاحظة (٢) : إذا كان بعد النقطة عن المستوي يساوي الصفر فإن النقطة تنتمي للمستوي

قوانين المحيط والمساحة للأشكال المألوفة

الشكل	المحيط P	المساحة S	ملاحظات
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$	
المثلث القائم	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}$	
المثلث متساوي الأضلاع	طول الضلع $\times 3$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$	a طول ضلع المثلث
متوازي الأضلاع	مجموع أطوال أضلاعه	القاعدة × الارتفاع	
شبه المنحرف	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{(\text{مجموع القاعدتين}) \times \text{الارتفاع}}{2}$	
المستطيل	(الطول + العرض) $\times 2$	الطول × العرض	
المعين	طول الضلع $\times 4$	$\frac{\text{جداء القطرين}}{2}$	
المربع	طول الضلع $\times 4$	الضلع^2	أو تحسب المساحة بقانون مساحة المعين
الدائرة	$2\pi r$	πr^2	

ملاحظة : يحسب الارتفاع h في مثلث متساوي الأضلاع بالعلاقة $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

قوانين المجسمات

المجسم	المساحة الجانبية S_L	المساحة الكلية S_T	الحجم V	ملاحظات
الموشور القائم والأسطوانة	$P \times h$	$S_L + 2S_b$	$S_b \times h$	P محيط القاعدة h ارتفاع المجسم S_b مساحة القاعدة R نصف قطر الكرة
الهرم والمخروط	......	......	$\frac{1}{3} \times S_b \times h$	
الكرة	مساحة السطح الكروي $4\pi R^2$		$\frac{4}{3}\pi R^3$	

مثال : أثبت أن الأشعة $\vec{k}\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ مرتبطة خطياً

- بنسب الأشعة لبعضها لا نجد أي شعاعين من الأشعة السابقة مرتبطة خطياً (ثنائي)

ومنه ليكن $\vec{u} = a.\vec{v} + b.\vec{k}$ ومنه $\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$ وبالتالي $\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a-5b\\5a-5b\\-a+5b\end{pmatrix}$

ومنه $\begin{cases}3a-5b=-1 & (1)\\5a-5b=-2 & (2)\\-a+5b=0 & (3)\end{cases}$ وبحل المعادلتين (2) و (3) نجد $a=\frac{-1}{2}\,,\, b=\frac{-1}{10}$

وبتعويض $a=\frac{-1}{2}\,,\, b=\frac{-1}{10}$ بالمعادلة (1) نجد أنها محققة وبالتالي $\vec{u} = \frac{-1}{2}.\vec{v} - \frac{1}{10}.\vec{k}$

فالأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{k}$ مرتبطة خطياً

٥) **حساب الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}.\vec{v}$:**

- إذا علم طولا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وطول شعاع المجموع : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$
- إذا علم طولا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\cos(\vec{u},\vec{v})$: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

ومنه يحسب قانون $\cos(\vec{u},\vec{v})$ بالعلاقة : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

حالات خاصة : ١- ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً ويقعان بجهة واحدة) ومنه : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

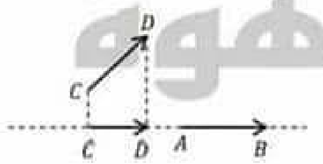
ومنه $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

٢- ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً ويقعان بجهتين مختلفتين) ومنه : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

٣- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

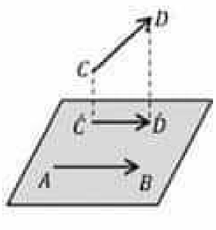
- في معلم متجانس : $\vec{u}.\vec{v} = X.\acute{X} + Y\acute{Y} + Z.\acute{Z}$
- مبرهنة المسقط القائم :

أولاً : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$



حيث $\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على حامل الشعاع $\overrightarrow{AB}$

ثانياً : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$

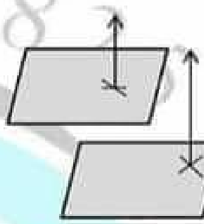


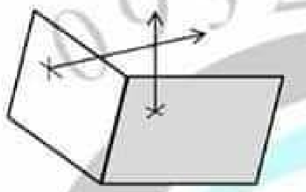
حيث $\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على مستوي يحوي الشعاع $\overrightarrow{AB}$

٢٠) **الوضع النسبي لمستويين P_1 و P_2 في الفراغ ناظماهما $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$:**

P_2 و P_1 متوازيان $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{n_2}$ و $\overrightarrow{n_1}$ مرتبطان خطياً

P_2 و P_1 متقاطعان بفصل مشترك $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{n_2}$ و $\overrightarrow{n_1}$ غير مرتبطين خطياً





- لإيجاد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك لمستويين متقاطعين نحل جملة معادلتيهما حل مشترك بعد أن نفرض أحد المتغيرات x , y , z وسيطاً حقيقياً t

مثال : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الفصل المشترك للمستويين $\begin{cases} p_1 : 3x - y - 2z = 1 \\ p_2 : x - y - z = 0 \end{cases}$

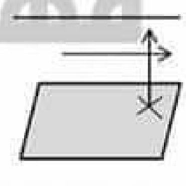
ليكن $t \in R$, $z = t$ ومنه $\begin{cases} 3x - y - 2t = 1 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3x - y - 2t = 1 \\ -x + y + t = 0 \end{cases}$ وبجمع المعادلتين نجد

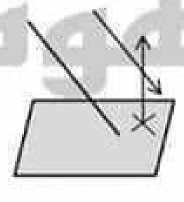
$2x - t = 1$ ومنه $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ وبالتعويض نجد $y = \frac{-1}{2}t + \frac{1}{2}$ ومنه نجد $d: \begin{cases} x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{-1}{2}t + \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$

٢١) **الوضع النسبي لمستقيم d شعاع توجيهه $\overrightarrow{u}$ و مستوى P في الفراغ ناظمه $\overrightarrow{n}$:**

d و P متوازيان $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{n}$ متعامدان

d يقطع المستوي P بنقطة $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{n}$ غير متعامدين





- لإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم والمستوي نحل جملة معادلتيهما حل مشترك ونحسب قيمة الوسيط الحقيقي t ثم نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم فنحصل على إحداثيات نقطة التقاطع

ملاحظة (١) : حل جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم والمستوي المتوازيان مستحيلة الحل والمستقيم المحتوى في المستوي لمعادلاته الوسيطية ومعادلة المستوي عدد غير منته من الحلول

١٩) الوضع النسبي لمستقيمين d_1 و d_2 في الفراغ شعاعا توجيههما $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$:

d_1 و d_2 متوازيان ⇔ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطان خطياً

- متوازيان تماماً ⇕ جملة معادلتيهما مستحيلة الحل
- طبوقان ⇕ لجملة معادلتيهما عدد غير منته من الحلول

d_1 و d_2 غير متوازيان ⇔ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطياً

- متقاطعان ⇕ لجملة معادلتيهما حل وحيد مشترك
- متخالفان (لا يقعان بمستوي واحد) ⇕ جملة معادلتيهما مستحيلة الحل

ملاحظة (١) : الحل المشترك لجملة معادلتي مستقيمين متقاطعين هو إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين

ملاحظة (٢) : المستقيمان المتوازيان أو المستقيمان المتقاطعان يعينان مستوي

ملاحظة (٣) : يمكن إثبات تقاطع مستقيمين عن طريق مراكز الأبعاد المتناسبة

مسألة 7 صفحة 96 : اقرأ النص من الكتاب

الحل : لدينا $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ومنه $(K,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(A,2)$, $(B,1)$

ولدينا $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ ومنه $(L,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(D,2)$, $(C,1)$

ولدينا I منتصف $[AD]$ ومنه $(I,4)$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(D,2)$, $(A,2)$

ولدينا J منتصف $[BC]$ ومنه $(J,2)$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(B,1)$, $(C,1)$

وبما أن $(G,6)$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(A,2)$, $(B,1)$, $(D,2)$, $(C,1)$

فإنه حسب الخاصة التجميعية $(G,6)$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(J,2)$, $(I,4)$ ومنه $G \in (IJ)$

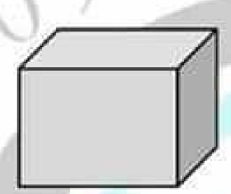
و حسب الخاصة التجميعية $(G,6)$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(K,3)$, $(L,3)$ ومنه $G \in (KL)$

وبالتالي المستقيمان (IJ) و (KL) متقاطعان في النقطة G ويعينان مستوي يحوي النقاط I , J , K , L , G

((يمكن حل المسألة السابقة في المعلم بعد إيجاد إحداثيات جميع النقاط وإثبات وقوع النقاط على استقامة واحدة وبعدها إثبات وقوعها في مستوي واحد بأحد الطرق المذكورة سابقاً))

ملاحظة (٢) : يمكن إثبات توازي مستقيم (MN) مع مستوي (ABC) عن طريق إثبات الارتباط الخطي للشعاع $\overrightarrow{MN}$ مع أحد أشعة المستوي (ABC) كالأشعة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$

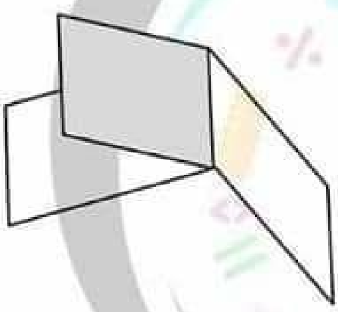
٢٢) الوضع النسبي لثلاث مستويات P_3 و P_2 و P_1:



- المستويات P_3 و P_2 و P_1 متقاطعة بنقطة

$\Updownarrow$

لجملة معادلاتها حل وحيد مشترك (نقطة التقاطع)



- المستويات P_3 و P_2 و P_1 متقاطعة بفصل مشترك

$\Updownarrow$

لجملة معادلاتها عدد غير منته من الحلول المشتركة وتتعين المعادلات الوسيطية للفصل المشترك بحل جملة معادلتي أي مستويين من المستويات الثلاث

- المستويات P_3 و P_2 و P_1 غير متقاطعة $\Leftrightarrow$ جملة معادلاتها ليس لها حل مشترك

ملاحظة : المستويات الثلاث غير المتقاطعة تكون :

١) متوازية $\Leftrightarrow$ معادلاتها مستحيلة الحل مثنى ((لا يوجد حل مشترك لكل معادلتين منها))

٢) متقاطعة بفصل مشترك مثنى $\Leftrightarrow$ يوجد فصل مشترك بين كل مستويين من مستوياتها

٣) مستويان متوازيان يقطعهما مستوي بفصلين مشتركين $\Leftrightarrow$ مستوياها المتوازيان معادلتاهما مستحيلة الحل ويوجد للمستوي القاطع فصل مشترك مع كل منها

((راجع الرسم صفحة 88))

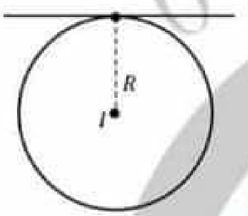
مع أطيب أمنياتي بالتوفيق والنجاح

أ مهدي جمال زهوة

دمشق

ملاحظة (١) : انتبه لا تستخدم قانون بعد نقطة عن مستقيم في المستوي $dist(d,A)=\frac{|a\alpha+b\beta+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ عندما يكون البعد مطلوباً في الفراغ

ملاحظة (٢) : يمكن الاستفادة من بعد نقطة عن مستقيم في معرفة وضع مستقيم بالنسبة لكرة



- مستقيم مماس للكرة بعده عن مركز الكرة يساوي R
- مستقيم يقطع الكرة بنقطتين بعده عن مركز الكرة أصغر تماماً من R
- مستقيم خارج الكرة بعده عن مركز الكرة أكبر تماماً من R

((يستفاد من المماس في معرفة نصف قطر الكرة وذلك بحساب بعد مركز الكرة عن المستقيم المماس))

ملاحظة (٣) : إذا كان بعد النقطة عن المستقيم يساوي الصفر فإن النقطة تنتمي للمستقيم

١٥) إثبات وقوع ثلاث نقاط A , B , C على استقامة واحدة (النقاط تعين مستقيم) :

- طريقة (١) : نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً

  (شعاعان من النقاط الثلاث مرتبطان خطياً بينهما حرف مشترك)

- طريقة (٢) : إذا علمت المعادلات الوسيطية للمستقيم المار بنقطتين من النقاط الثلاث نعوض إحداثيات النقطة الثالثة بمعادلات المستقيم الوسيطية فإن كانت النقطة تنتمي للمستقيم فالنقاط تقع على استقامة واحدة

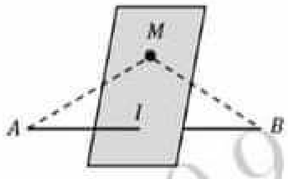
- طريقة (٣) : نثبت أن أحد النقاط الثلاث مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين وذلك بعد إيجاد الثوابت

١٦) إثبات أن ثلاث نقاط A , B , C لا تقع على استقامة واحدة (رؤوس مثلث) أو (تعين مستوى) :

- طريقة (١) : نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً

  (شعاعان من النقاط الثلاث غير مرتبطان خطياً بينهما حرف مشترك)

- طريقة (٢) : إذا علمت المعادلات الوسيطية للمستقيم المار بنقطتين من النقاط الثلاث نعوض إحداثيات النقطة الثالثة بمعادلات المستقيم الوسيطية فإن كانت النقطة لا تنتمي للمستقيم فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة



- **معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:**

وهو المستوي العمود على القطعة المستقيمة في منتصفها
وجميع نقاطه الاختيارية M تبعد أبعاداً متساوية عن طرفي القطعة
أي $AM = BM$

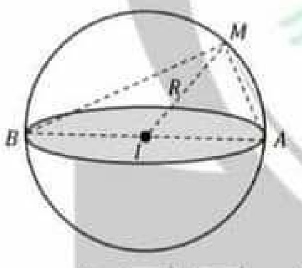
شعاعياً :

تعطى معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ من التعويض بقانون طول الشعاع في علاقة تعريف المستوي المحوري $AM = BM$ وذلك بعد تربيع الطرفين وفرض النقطة الاختيارية $M(x, y, z)$

تحليلياً :

باعتبار $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً للمستوي المحوري و النقطة I منتصف $[AB]$ نقطة منه والتعويض في معادلة المستوي $ax + by + cz + d = 0$

ملاحظة : لإثبات أن نقطة تنتمي للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ نثبت أن بعد النقطة عن طرفي القطعة المستقيمة $[AB]$ متساوي باستخدام قانون طول الشعاع أو من تعويض إحداثيات النقطة في معادلة المستوي المحوري في حال وجودها



- **معادلة الكرة :**

وهي مجموعة النقاط الاختيارية M في الفراغ والتي تبعد أبعاداً متساوية R عن نقطة ثابتة هي مركز الكرة I
أي $IM = R$ (حيث $R > 0$ هو نصف قطر الكرة)

أو هي مجموعة النقاط الاختيارية M في الفراغ التي تجعل الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدين حيث $[AB]$ هو قطر الكرة أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

شعاعياً :

- طريقة (١) : تعطى معادلة الكرة التي مركزها I ونصف قطرها R بالتعويض بقانون طول الشعاع في علاقة تعريف الكرة $IM = R$ وذلك بعد تربيع الطرفين وفرض النقطة الاختيارية $M(x, y, z)$

- طريقة (٢) : تعطى معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$ بالتعويض في علاقة الجداء السلمي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ بعد فرض النقطة الاختيارية $M(x, y, z)$ ومن ثم إصلاح شكل المعادلة بالإتمام لمربع كامل للوصول لمركز ونصف قطر الكرة

١٧) **إثبات أن أربع نقاط A , B , C, D تقع في مستوي واحد :**

- طريقة (١) : نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً

(ثلاث أشعة من النقاط الأربعة مرتبطة خطياً بينها أحرف مشتركة)

- طريقة (٢) : إذا علمت معادلة المستوي المار بثلاث نقاط من النقاط الأربعة نعوض إحداثيات النقطة الرابعة بمعادلة المستوي فإن كانت النقطة تنتمي للمستوي فالنقاط جميعها تقع في ذلك المستوي
- طريقة (٣) : نثبت أن أحد النقاط الأربعة مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاث الأخرى وذلك بعد إيجاد الثوابت
- طريقة (٤) : نثبت أن النقاط الأربعة تعين مستقيمين متقاطعين أو مستقيمين متوازيين

ملاحظة : ممكن أن تكون صيغة سؤال (النقاط الأربعة تقع في مستوي واحد) هي أثبت أن D تنتمي للمستوي (ABC) وذلك بعد إثبات أن النقاط A , B , C تعين مستوي (رؤوس مثلث)

١٨) **إثبات أن أربع نقاط A , B , C, D لا تقع في مستوي واحد** أو (نقطة لا تنتمي لمستوي النقاط الثلاث) :

- طريقة (١) : نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة خطياً

(ثلاث أشعة من النقاط الأربعة غير مرتبطة خطياً بينها أحرف مشتركة)

- طريقة (٢) : إذا علمت معادلة المستوي المار بثلاث نقاط من النقاط الأربعة نعوض إحداثيات النقطة الرابعة بمعادلة المستوي فإن كانت النقطة لا تنتمي للمستوي فالنقاط لا تقع في مستوي واحد
- طريقة (٣) : نثبت أن النقاط الأربعة يعينان مستقيمين متخالفين (لا يقعان بمستوي واحد)

ملاحظة : ممكن أن تكون صيغة سؤال (النقاط الأربعة لا تقع في مستوي واحد) هي أثبت أن D لا تنتمي للمستوي (ABC) وذلك بعد إثبات أن النقاط A , B , C تعين مستوي (رؤوس مثلث) أو أثبت أن A , B , C, D تعين رؤوس هرم رأسه D

ملاحظة (٢) : تعين مجموعة النقاط الاختيارية M في الفراغ التي تحقق العلاقة $AM = R > 0$ الكرة التي مركزها A ونصف قطرها R وفي حال $R = 0$ تكون M نقطة منطبقة على النقطة A ولأجل $R < 0$ تكون مجموعة النقاط M مجموعة خالية

٨) **إثبات أن نقطة G مركز أبعاد متناسبة و إيجاد تثقيلات نقاطها :**

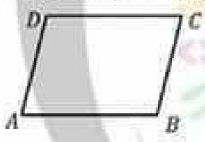
أولاً : نقطتين (A,α) , (B,β) غير طبوقتين :

- حالة خاصة : G منتصف $[AB]$ $\Leftarrow \alpha = \beta \neq 0$ (يمكن إعطاء أي قيمتين متساويتين للتثقيلات)
- حالة عامة : الوصول للعلاقة $\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

ثانياً : ثلاث نقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) لا تقع على استقامة واحدة (مثلث) :

- حالة خاصة : G مركز ثقل ABC $\Leftarrow \alpha = \beta = \gamma \neq 0$ (يمكن إعطاء أي قيمة متساوية للتثقيلات)
- حالة عامة : الوصول للعلاقة $\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB} + \gamma.\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

مثال : $ABCD$ متوازي أضلاع . أوجد α , β , γ ليكون D م أ م للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ)

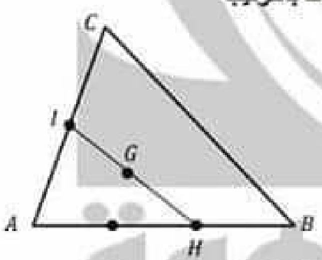


لدينا العلاقة $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ ومنه $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

فإن $(D,1)$ م أ م للنقاط $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$

- استخدام مبرهنة الخاصة التجميعية : بتوزيع ثقل مركز الأبعاد على النقاط بالترتيب

مثال : ABC مثلث كما هو موضح بالشكل المجاور

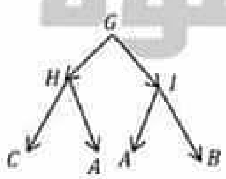


أوجد α , β , γ ليكون G م أ م للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) ؟

لدينا G منتصف $[IH]$ ومنه $(G,2)$ م أ م ل $(I,1)$, $(H,1)$

ولدينا I منتصف $[AC]$ ومنه $(I,1)$ م أ م ل $\left(A,\frac{1}{2}\right)$, $\left(C,\frac{1}{2}\right)$

وبما أن $\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{HB}$ ومنه $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$



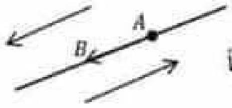
وبالتالي فإن $(H,3)$ م أ م ل $(A,1)$, $(B,2)$

ومنه $(H,1)$ م أ م ل $\left(B,\frac{2}{3}\right)$, $\left(A,\frac{1}{3}\right)$

وبالتالي حسب مبرهنة الخاصة التجميعية إن $(G,2)$ م أ م للنقاط $\left(C,\frac{1}{2}\right)$, $\left(B,\frac{2}{3}\right)$, $\left(A,\frac{5}{6}\right)$

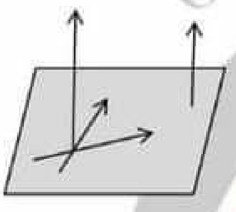
ثالثاً : أربع نقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) , (D,λ) (رباعي وجوه) : إذا كان مركز الأبعاد لرباعي الوجوه هو مركز ثقله فإن تثقيلات النقاط متساوية وفي الحالة العامة تحسب التثقيلات بتوزيع الثقل حسب الخاصة التجميعية

٩) **شعاع التوجيه وشعاع الناظم :**



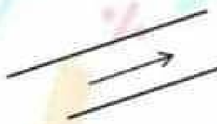
- **شعاع توجيه المستقيم حامله يوازي المستقيم**
 ويوجد للمستقيم الواحد عدد غير منته من أشعة التوجيه ولكن جميعها مرتبطة خطياً
 وقد ينطبق حامل شعاع التوجيه على المستقيم

- **للمستوي شعاعي توجيه ((غير مرتبطان خطياً))**
 وحامل كلٍ منهما يوازي المستوي
 وقد يحوي المستوي حاملي أشعة توجيهه

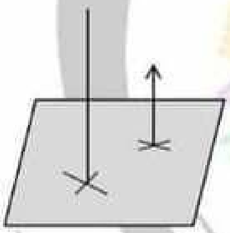


- **شعاع ناظم المستوي عمود على المستوي**
 ويوجد للمستوي عدد غير منته من النواظم ولكن جميعها مرتبطة خطياً
 وإن الشعاع الناظم عمودي على أشعة توجيه المستوي

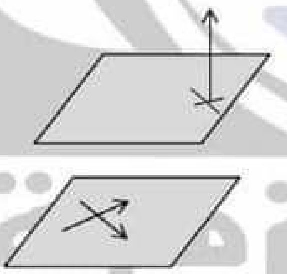
نتائج للمسائل :



١- المستقيمان المتوازيان لهما نفس شعاع التوجيه



٢- شعاع توجه المستقيم العمود على مستوي هو ناظم للمستوي
٣- ناظم المستوي هو شعاع توجيه للمستقيم العمود على المستوي



٤- المستويان المتوازيان لهما نفس الناظم ونفس أشعة التوجيه

١٠) **إثبات التعامد :**

- **شعاعان متعامدان ⇔ جداؤهما السلمي يساوي الصفر**
- **مستقيمان متعامدان ⇔ شعاعا توجيههما متعامدان**
- **شعاع عمود على مستوي (ناظم) ⇔ الشعاع عمود على شعاعي توجيه للمستوي (غير مرتبطان خطياً)**
- **مستقيم عمود على مستوي ⇔ شعاع توجيه المستقيم عمود على شعاعي توجيه المستوي**
 أو ⇔ شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع ناظم المستوي
- **مستويان متعامدان ⇔ الشعاعان الناظمان للمستويين متعامدان**