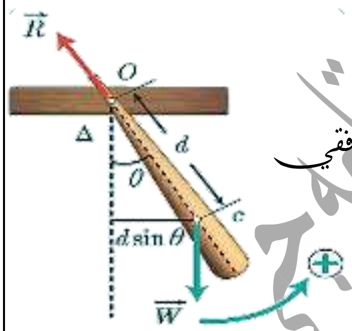
النواس الثقلي المركب

تعريفه: هو كل جسم صلب يهتزّ بتأثير عزم قوّة ثقله في مستوٍ شاقولي حول محور دوران أفقي عمودي على مستويه، ولا يمرّ من مركز عطالته.

الدراسةُ التحريكيّةُ للنوّاس الثقلي:

نعلّقُ جسماً صُلباً كتلته m ، مركزُ عطالته c إلى محور دوران أفقي Δ ، مارٍ من النقطة O من الجسم حيث البعد $d = Oc$



نزيحُ الجسمَ عن موضع توازنه الشاقولي زاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائيّة ليهتزّ في مستوٍ شاقولي.

تؤثّر في الجسم قوّتان هما:

قوّة ثقله $\vec{W}$ و قوّة ردّ فعل محور الدوران على الجسم $\vec{R}$.

بتطبيق العلاقة الأساسيّة في التحريك الدوراني (نظرية التسارع الزاوي):

$$\sum \bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_\Delta \bar{\alpha}$$

وباختيار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجدُ:

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$: لأنّ حاملَ القوّة يمرُّ من محور الدوران.

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -(d\sin\theta)\, W$$

بالتعويض نجدُ: $-(d\sin\theta)\, W + 0 = I_\Delta \bar{\alpha}$

$$-mgd\sin\theta = I_\Delta \bar{\alpha}$$

لكن: $\bar{\alpha} = (\theta)''_t$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\bar{\theta} \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تحتوي $\sin\bar{\theta}$ بدلاً من θ فحلّها ليس جيبيّاً، ومن ذلك فإنّ حركة النوّاس الثقلي هي حركةٌ اهتزازيّةٌ غيرُ توافقيّة.

و من أجل السّعات الزاوية الصغيرة $(\theta \le 0.24\ \text{rad} = 14^0)$

في هذه الحالة يكون $\sin\bar{\theta} \approx \theta$.

نعوّضُ في العلاقة (1) فنجدُ:

$$\boxed{(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\,\bar{\theta}} \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلّاً جيبيّاً

من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقّق من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرّتين بالنسبة للزمن نجدُ:

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \;\ldots\ldots\ldots (3)$$

بالمطابقة بين (2) و (3) نجدُ:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Rightarrow \boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0}$$

وهذا محقّقٌ لأنّ المقادير (m, g, d, I_Δ) موجبة، فحركة النوّاس الثقلي من أجل السّعات الزاويّة الصغيرة هي حركةٌ جيبيّةٌ دورانيّة توافقيّة بسيطة .

استنتاجُ علاقة الدّور الخاصّ للنواس:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \Rightarrow T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

وهي العلاقةُ العامّةُ للدّور الخاصّ للنوّاس الثقلي في حالة الاهتزازات صغيرة السّعة.

T_0 دورُ النوّاس الثقلي الخاص بسعة زاويّة صغيرة، واحدته s

I_Δ عزمُ عطالة الجسم الصُلب، واحدته $Kg.m^2$

d بعدُ محور الدوران عن مركز عطالة الجسم الصُلب واحدته m

ويمكن حسابها:

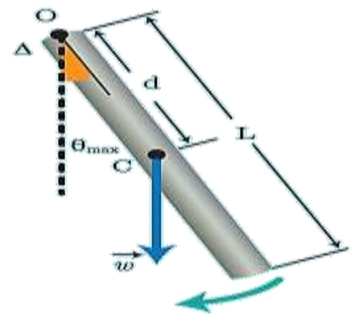
$$d = OC = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 \dots\dots\dots + m_i\bar{r}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

$\bar{r}$ مقدارٌ جبريٌّ نعدّهُ موجباً إذا كان مركزُ عطالة الكتلة المهتزّة تحت محور الدوران، وسالباً إذا كان مركزُ عطالة الكتلة المهتزّة فوق محور الدوران.

تطبيق: نوّاسٌ ثقليٌّ مؤلّفٌ من ساقٍ متجانسةٍ طولها L= 0.375m وكتلتُها M معلّقةٌ من طرفها العلويّ بمحورٍ أفقيّ عموديّ على مستويها الشاقوليّ، نزيحُ الساق عن موضع توازنها الشاقوليّ زاويةً صغيرةً $(\theta \le 14^\circ)$ ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة. استنتِجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدةَ للدّور الخاصّ انطلاقاً من العلاقة العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثقليّ المركّب ثمّ احسب قيمتَها .

علماً أنّ عزمَ عطالة السّاق حول محور عموديّ على مستويها ومارّ من مركز عطالتها $(I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}M.L^2)$.

الحل:



يُعطى دورُ النوّاس الثقليّ بالعلاقة: $T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

لإيجاد عزم عطالة السّاق حول المحور المارّ من O نطبّقُ نظرية هايغنز:

$$d = \frac{L}{2} \qquad I_{\Delta/O} = I_{\Delta/c} + Md^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

نعوّضُ في علاقة الدّور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}M.L^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 0.375}{3\times 10}} = 1\ S$$

النوّاس الثقليّ البسيط:

نظريّاً: نقطةٌ ماديّةٌ تهتزُّ بتأثير ثقلها على بُعد ثابت من محور أفقيّ ثابت.

عمليّاً: كرةٌ صغيرةٌ كتلتُها m كثافتُها النسبيّة كبيرةٌ معلّقةٌ بخيطٍ مهملِ الكتلة لا يمطّ طولُهُ كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

الدراسة التحريكيّة:

الدراسة التحريكيّة:

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{W} = m\vec{g}$ ثقل الكرة.

$\vec{T}$ توتّر الخيط.

لنطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$$\Sigma\bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = 0$$

لأن حامل $\vec{T}$ يمر من محور الدوران Δ.

$$0 - m g \ell \sin\bar{\theta} = m \ell^2 (\bar{\theta})''_t$$

$$-g \sin\bar{\theta} = \ell (\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{\ell} \sin\bar{\theta}$$

نعوّض في العلاقة السابقة: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$

وفي حالة السّعات الزاويّة الصغيرة: $\theta \le 0.24\ rad$ فإن $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

معادلةٌ تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقّق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرّتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\bar{\theta} \quad \dots\dots\dots(2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجدُ

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0}$$

وهذا محقّقٌ لأنّ l, g مقداران موجبان، فحركةُ النوّاس الثقليّ البسيط من أجل السّعات الزاويّة الصغيرة هي حركةٌ جيبيّةٌ انسحابية (دائرية) توافقية بسيطة.

طريقة ثانية: القوى الخارجيّة المؤثّرة في الكرة:

ثقل الكرة $\vec{w} = m\vec{g}$ و توتّر الخيط $\vec{T}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور المَماسّ الموجّه بجهة إزاحة الكرة:

$$-mg\sin\theta + 0 = ma_t$$

$$a_t = -g\sin\theta$$

لكن $\bar{a}_t = r\bar{\alpha} = l\bar{\alpha} = l(\bar{\theta})''_t$

نعوّض في العلاقة السابقة فنجد: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$

وفي حالة السّعات الزاويّة الصغيرة: $\theta \le 0.24\ rad$ فإن $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

معادلةٌ تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيّاً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقّق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرّتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\bar{\theta} \quad \dots\dots\dots(2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجدُ

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0}$$

وهذا محقّقٌ لأنّ l, g مقداران موجبان، فحركةُ النوّاس الثقليّ البسيط من أجل السّعات الزاويّة الصغيرة هي حركةٌ جيبيّةٌ توافقية بسيطة.

0988440574
0947205146

استنتاجُ علاقة الدّور الخاصّ للاهتزاز:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}\Rightarrow \frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{g}{l}}\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقةُ الدّور الخاصّ للنوّاس الثقلي البسيط في السعات الزاويّة الصغيرة.

ملاحظة: يمكنُ الوصول لعلاقةِ الدّور الخاصّ للنوّاس البسيط انطلاقاً من العلاقة العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثقلي المركّب في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة، وذلك بتعويض كلٍ من:

$$d=l\ ,\ I_\Delta=mr^2=ml^2$$

في علاقة الدور:

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

استنتج:

1- لا يتعلّقُ دورُ النوّاس البسيط بكتلته، ولا بنوع مادّة كرته.

2- النوسات صغيرة السّعة لها الدورُ نفسُه (متواقتة فيما بينها).

3- يتناسبُ دورُ النوّاس البسيط من أجل السعات الزاويّة الصغيرة:

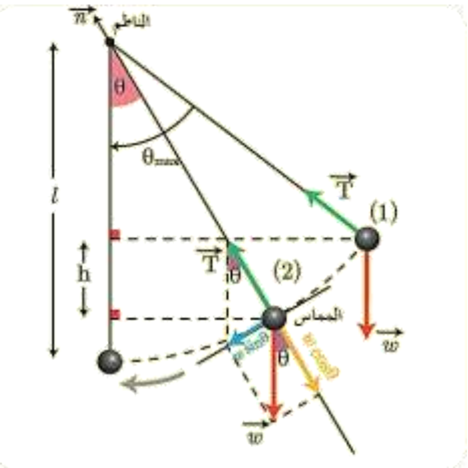
طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط.

عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبيّة الأرضية.

يعطى دورُ النوّاس الثقلي في حال السّعات الزاويّة الكبيرة بالعلاقة: $T_0'\approx T_0\left[1+\frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$

استنتاجُ العلاقة المحدّدة لسرعة كرة النوّاس وعلاقة توتّر خيط التعليق في نقطة من مسارها:

نزيحُ كرة النوّاس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{max} ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة: لإيجاد العلاقة المحدّدة لسرعة الكرة في الوضع (2)



القوى الخارجيّة المؤثّرة:

ثقل الكرة $\vec{W}$، توتر الخيط $\vec{T}$.

نطبّق نظريّة الطاقة الحركيّة بين وضعين:

الأوّل: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max} ويترك بدون سرعة ابتدائيّة.

الثاني: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ.

$$\Delta\bar{E}_{K(1\to2)}=\sum\bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K2}-E_{K1}=\bar{W}_{\vec{W}}+\bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\bar{W}_{\vec{W}}=mgh$$

$\bar{W}_{\vec{T}}=0$ لأنّ حامل $\vec{T}$ يعامدُ الانتقال في كلّ لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2-0=mgh+0$$

وبملاحظة الشكل نجد:

$$h = l\cos\theta - l\cos\theta_{max}$$

$$h = l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

نعوّضُ: $\frac{1}{2}mv^2 = mgl\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

$$v^2 = 2gl\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gl\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})}}$$

حالةٌ خاصّة: عند المرور بالشاقول: $\theta = 0$ تصبح:

$$v = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\theta_{max})}$$

لإيجاد العلاقة المحدّدة لقوّة توتّر الخيط في الوضع (2) نطبّق العلاقة الأساسية في التحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W\cos\theta + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta$$

$$T = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max}) + mg\cos\theta$$

$$T = 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max} + mg\cos\theta$$

$$T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$\boxed{T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})}$$

حالةٌ خاصّة: عند المرور بالشاقول

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

الطاقةُ الميكانيكيّةُ للنوّاس الثقليّ البسيط:

إنّ الطاقة الميكانيكيّة للنوّاس الثقليّ البسيط ثابتةٌ بإهمال القوى المبدّدة للطاقة، إذْ يهتزُّ بسعة زاويّة ثابتة θ_{max} إلى جانبَي موضع توازنه الشاقوليّ.

إنّ الطاقة الميكانيكيّة هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقاليّة، والحركيّة حيث أنّ مبدأ قياس الطاقة الكامنة الثقاليّة هو المستوي الأفقيّ المارُّ من مركز عطالة الكرة عند مرور النوّاس في وضع توازنه الشاقوليّ.

اختبر نفسي:

أولاً: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

1- قمتَ بزيارة بيتِ جدّك، وطلبتْ إليك جدّتك تصحيحَ الميقاتيّة المعلّقة على الجدار، وهي مؤلّفة من ساق منتهية بقرص قابل للحركة صعوداً أو هبوطاً، فاتّصلت بالساعة الناطقة فأشارت إلى السادسة تماما عندما كانت الميقاتيّة تشيرُ إلى السادسة وخمسِ دقائقَ، ولتصحيح الوقت يجبُ:

a) إيقافُ الميقاتيّة، وخفضُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها

b) إيقافُ الميقاتيّة، ورفعُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها

c) تصحيحُ عقرب الدقائق، وإعادته ليشيرَ الوقتُ إلى السادسة تماماً.

d) إيقافُ الميقاتيّة مدّة خمسِ دقائقَ، ثمّ إعادةُ تشغيلها مرّةً أخرى.

الإجابة الصحيحة: (a)

التوضيح: الميقاتية تقدم لذا يجب إبطاؤها بتكبير دورها

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$ لتصبح حركة القرص أبطأ وانخفاض القرص يؤدي لزيادة عزم العطالة وتكبير الدور.

2- ميقاتيان متماثلتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت المحلّي، نضع الأولى بالطابق الأرضي لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة.

a) تشيران إلى التوقيت نفسه.

b) تقدّمُ الثانية، ويجب تعديلها.

c) تؤخرُ الثانية، ويجبُ تعديلها.

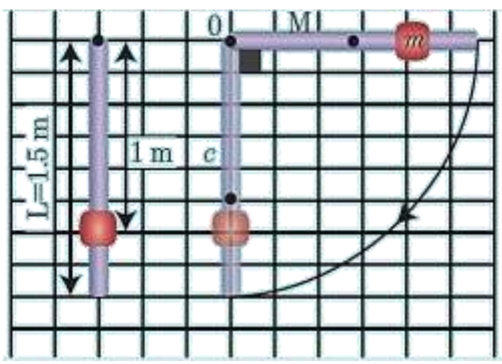
d) تؤخرُ الأولى، ويجبُ تعديلها.

الإجابة الصحيحة: تؤخرُ الثانية، ويجبُ تعديلها.

التوضيح: في الطابق الأخير تنقص قيمة الجاذبية الأرضية وبالتالي تزداد قيمة الدور.

ثانياً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: يتألّفُ نوّاسٌ ثقليٌّ مركّبٌ من ساقٍ شاقوليّةٍ متجانسةٍ كتلتُها M = 0.5 kg، طولُها 1.5m، يمكنُها أنْ تنوسَ حولَ محورٍ أفقيٍّ مارٍّ من طرفها العلويّ، ومثبّت عليها كتلةٌ نقطيّةٌ $m' = 0.5kg$ على بعد 1m من هذا الطرف العلوي كما في الشكل المجاور



1- احسبْ دورَ هذا النوّاس في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

2- نزيحُ جملة النوّاس عن موضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\frac{\pi}{2} rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية احسب الطاقة الحركيّة للنوّاس لحظة مروره بالشاقول، ثمّ احسب السرعة الخطّيّة للكتلة النقطيّة m' عندئذٍ.

(عزم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} ML^2$)

الحل: 1) حساب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس:

- عزم عطالة الساق: حسب نظرية هايغنز:

$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + Md^2$$

$$I_{\Delta/o} = \frac{1}{12} ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I_{\Delta/o} = \frac{1}{3} \times 0.5 \times (1.5)^2 = \frac{3}{8} Kg.m^2$$

- عزم عطالة الكتلة النقطية:

$$I_{\Delta/m'} = m'r'^2 = 0.5 \times (1)^2 = \frac{1}{2} Kg.m^2$$

- عزم عطالة جملة النواس: $I_{\Delta/جملة} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} Kg.m^2$

حساب d: $d = \frac{M\bar{r}_1 + m'\bar{r}_2}{M+m'}$

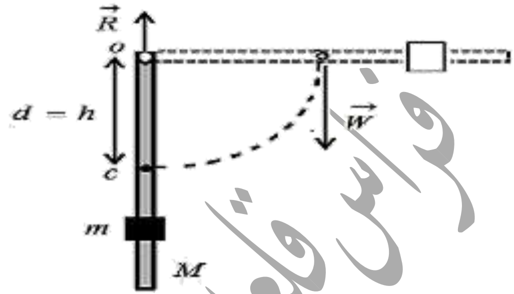
$$d = \frac{M\frac{L}{2} + mr'}{M+m} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times 1}{0.5 + 0.5} = \frac{7}{8} m$$

$$m_{جملة} = (m' + M) = 0.5 + 0.5 = 1kg$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1 \times 10 \times \frac{7}{8}}} = 2 S$$

2) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$ وبدون سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$



$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{R}}$$

$$E_k - 0 = (M + m')gh + 0$$

$\bar{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$E_k = (M + m')gh$$

$$h = d \Rightarrow E_k = (M + m')gd$$

$$E_k = (0.5 + 0.5) \times 10 \times \frac{7}{8} = \frac{70}{8}\ J$$

- السرعة الزاوية عند المرور بالشاقول:

$$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{70}{8}}{\frac{7}{8}}}$$

$$\omega = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ rad.s^{-1}$$

- السرعة الخطية عند المرور بالشاقول:

$$v = \omega r = 2\sqrt{5} \times 1 = 2\sqrt{5}\ m.s^{-1}$$

المسألة الثانية: خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40\ cm$، نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m = 100\ g$،

المطلوب:

1_ يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية θ_{max}، ونترك الكرة بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v = 2 m.s^{-1}$ استنتج قيمة الزاوية θ_{max} .

2_ استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بوضع الشاقول ثم احسب قيمتها .

الحل: 1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$

وبدون سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

$$h = l(1 - \cos\theta_{max})$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gl(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2gl}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{(2)^2}{2(10)(0.4)}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$$

2) طريقة أولى للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg$$

$$T = 2mg(1 - \cos\theta_{max}) + mg$$

$$T = 2mg - 2mg\cos\theta_{max} + mg$$

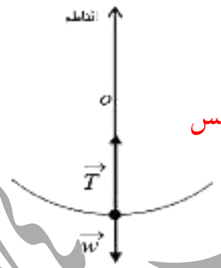
$$T = 3mg - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = 0.1\times10(3 - 2\times0.5) = 2N$$

طريقة ثانية للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$



بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = mg + m\frac{v^2}{l} = m(g + \frac{v^2}{l})$$

$$T = 0.1(10 + \frac{4}{0.4}) \Rightarrow T = 2N$$

المسألة الثالثة: نعلّق كرةً صغيرةً نعدّها نقطةً ماديّة، كتلتها m=0.5kg، بخيطٍ مهمل الكتلة، لا يمتط، طوله $l = 1.6\ m$، لتؤلّف نوّاساً ثقليّاً بسيطاً، ثمّ نزيح الكرة إلى مستوٍ أفقي يرتفع h = 0.8m عن المستوي الأفقي المارّ منها وهي في موضع توازنها الشاقولي، ليصنع خيط النوّاس مع الشاقول زاوية θmax، ونتركها دون سرعة ابتدائيّة والمطلوب:

1- استنتج بالرموز العلاقة المحدّدة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول، ثمّ احسبْ قيمتها موضحاً بالرسم.

2- استنتج قيمة الزاوية θ max ثمّ احسبْ قيمتها.

3 - احسبْ دورَ هذا النوّاس.

4- استنتج بالرموز العلاقة المحدّدة لشدّة قوّة توتّر الخيط عند المرور بالشاقول، ثمّ احسب قيمته

الحل: 1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$ وبدون سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كلّ لحظة

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times0.8}$$

$$v = 4\ m.s^{-1}$$

2) $h = l(1 - \cos\theta_{max})$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{0.8}{1.6}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$$

3) حساب دور النواس: $T'_0 \approx T_0\left[1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right]$

$$T'_0 \approx T_0\left[1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right] \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'_0 \approx 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}}\left[1+\frac{(\frac{\pi}{3})^2}{16}\right] \approx 0.8\pi\left[1+\frac{(\frac{10}{9})}{16}\right]$$

$$T'_0 \approx 2.5\left[1+\frac{10}{144}\right] \approx 2.5(\frac{154}{144}) \approx 2.67\ S$$

4) طريقة أولى للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظمي الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg$$

$$T = 2mg(1 - \cos\theta_{max}) + mg$$

$$T = 2mg - 2mg\cos\theta_{max} + mg$$

$$T = 3mg - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = 0.5\times 10(3 - 2\times 0.5) = 10N$$

طريقة ثانية للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظمي الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = mg + m\frac{v^2}{l} = m(g + \frac{v^2}{l})$$

$$T = 0.5(10 + \frac{16}{1.6}) \Rightarrow T = 10N$$

المسألة الرابعة: نثبت ساقٌ شاقوليّةٌ، مهملة الكتلة، طولها $l = 1m$ نثبت في منتصفها كتلةً نقطيّة $m_1 = 0.4\ kg$ ونثبتُ في طرفها السفلي كتلة نقطيّة $m_2 = 0.2\ kg$ لتؤلفَ الجملة نوّاساً ثقليّاً مركباً يمكنهُ أن ينوسَ في مستوٍ شاقولي حول محورٍ أفقيٍ مارٍ من الطرف العلوي.

والمطلوب: 1- احسبْ دور نوساتها صغيرة السّعة.

2_ نزيح الجملة عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24\ rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية، فتكونُ السرعة الخطيّة لمركز عطالة جملة النوّاس لحظة مرورها بالشاقول $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$

المطلوب: a- احسب السرعة الخطيّة للكتلة النقطية m_2

b- استنتجْ قيمة الزاوية θ_{max} .

الحل: 1) حساب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس: (الساق مهملة الكتلة)

$$I_{\Delta/0} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2L^2$$

$$= 0.4 \times (\frac{1}{2})^2 + 0.2(1)^2 = 0.3Kg.m^2$$

حساب d: $d = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1 + m_2}$

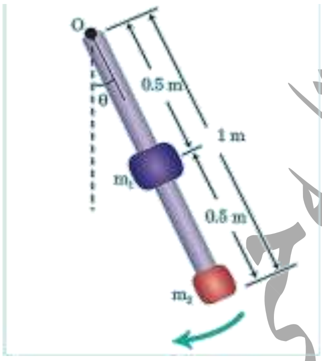
$$d = \frac{m_1(\frac{L}{2}) + m_2L}{m_1 + m_2} = \frac{0.4\times\frac{1}{2} + 0.2\times 1}{0.4 + 0.2} = \frac{2}{3}\ m$$

$m_{جملة} = (m_1 + m_2)$ =0.4+0.2=0.6kg

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{(0.6)\times 10\times\frac{2}{3}}} \Rightarrow T_0 = \sqrt{3}\ s$$

a) $v_c=\omega r_c \Rightarrow \omega = \frac{v_c}{r_c} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ rad.s^{-1}$

$$v_{m2} = \omega r_{m2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m.s^{-1}$$



b) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$

وبدون سرعة ابتدائية.

الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$$

$$E_k - 0 = (m_1+m_2)gh + 0$$

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 - 0 = (m_1+m_2)gd(1-\cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2}{(m_1+m_2)gd} =$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{0.5\times 0.3\times\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^2}{0.6\times 10\times\frac{2}{3}} = 1-\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$$

المسألة الخامسة: يتألف نوّاسٌ ثقليٌّ من ساقٍ شاقوليّةٍ، مهملة الكتلة طولها L، تحملُ في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطيةً m′ نعلّقُ الجملة بمحور دوران أفقيٍّ يبعد عن طرف الساق العلويِّ $\frac{L}{4}$، نزيحُ الجملة عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\frac{1}{2\pi}$ rad ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$ فتهتزّ بدور خاص $T_0 = 2.5\ s$. المطلوب:

1- استنتِج التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ لحركة هذا النوّاس انطلاقاً من شكله العام.

2- استنتِجْ بالرموز العلاقة المحدّدة لطول الساق، ثمّ احسب قيمته.

3- احسبْ قيمة السرعة الزاويّة العُظمى للحركة (طويلة).

4- لنفرضْ أنّه في إحدى التّوسات انفصلتِ الكتلةُ السفليّة عن الساق، استنتج الدورَ الخاصَّ الجديد للجملة في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

الحل: (1) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام:

إيجاد ثوابت الحركة ω_0، θ_{max}، $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5}\ rad.s^{-1}$

السعة الزاوية: $\theta_{max} = \frac{1}{2\pi}\ rad$ لأن الساق تركت دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الحركة.

حساب $\bar{\varphi}$: لإيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع الزمني: t=0 كان $\theta = \theta_{max}$

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cos(0+\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 rad$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$

2) يعطى دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس:

$$I_{\Delta/0} = m'\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m'\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}m'L^2$$

حساب d:

$$d = \frac{-m'\frac{L}{4}+m'\frac{3L}{4}}{m'+m'} = \frac{m'\frac{L}{2}}{2m'} = \frac{L}{4}\ \text{m}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{8}m'L^2}{2m'g\frac{L}{4}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{4g}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{T_0^2 g}{5\pi^2} = \frac{(2.5)^2\times 10}{5\times 10} = 1.25\ \text{m}$$

3) $$\omega_{max} = |\pm\omega_0\theta_{max}| \Rightarrow \omega_{max} = \frac{4\pi}{5}\times\frac{1}{2\pi}$$

$$\omega_{max} = 0.4\,\text{rad.s}^{-1}$$

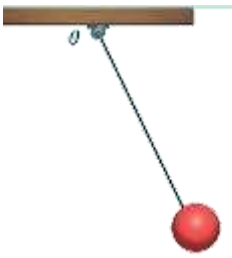
4) بعد انفصال الكتلة السفلية يصبح النواس في حالة توازن قلق فيهتز ليصبح في حالة توازن مستقر وتصبح كتلة النواس m′

عزم عطالة ، $I_{\Delta/c} = m'\left(\frac{L}{4}\right)^2$ ، $d = \frac{L}{4}$

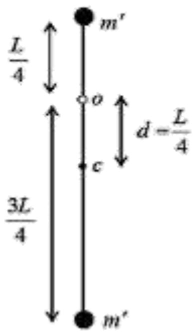
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m'gd}} \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{m'\left(\frac{L}{4}\right)^2}{m'g\frac{L}{4}}}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1.25}{4\times 10}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ s$$

التفكير الناقد: عند انعدام الثقل الظاهري ضمن المحطة الفضائية:



1_ لدينا كرة كتلتها m معلقة بخيط مهمل الكتلة طوله l كما هو موضح بالشكل جانباً لتشكل نواساً بسيطاً عند سطح الأرض ما قيمة الدور على متن المحطة الفضائية مع التعليل.



2_ كيف يمكن جعله يهتز بحركة جيبية توافقية بسيطة؟

الجواب: 1– في محطة الفضاء تكون قوة الثقل مساوية بالقيمة ومعاكسة بالجهة قوّة العطالة النابذة الناتجة عن الدوران فيحدث ما يسمّى انعدام الثقل الظاهري فيصبح الدور لانهائي.

2– لجعل الكرة تهتز بحركة جيبية توافقية نصل الكرة بنابض مرن فتصبح الحركة انسحابية توافقية بسيطة.

_ _ _ _ _ انتهى البحث _ _ _ _ _

ندعوكم للانضمام إلى قناتنا على التيلغرام:

قناة فراس قلعه جي للفيزياء والكيمياء