السؤال الثاني/بنك الأسئلة

ABCDEFGH متوازي مستطيلات

$AB = 2$ ، $BC = CG = 1$

I منتصف [AB]

J منتصف [CG]

الطلب الاول

في الجملة المقابلة $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

اجب:

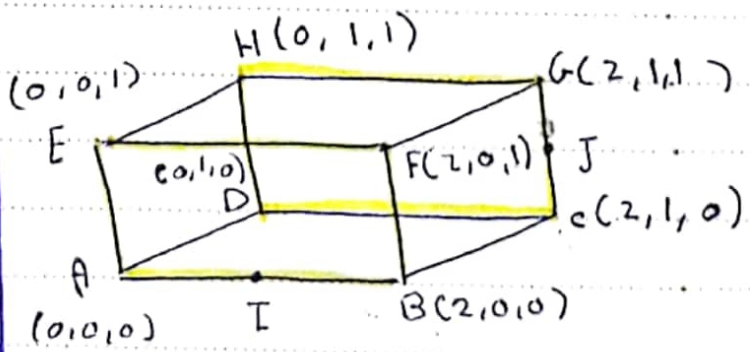
① DJ ③ ID

② IJ

④ $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IJ}$

⑤ مساحة المثلث (DIJ).

الحل نوجد احداثيات النقاط.



$A(0,0,0)$ ، $D(0,1,0)$

$B(2,0,0)$

$E(0,0,1)$

بما أن I منتصف [AB]

فإن إحداثيات I هي متوسطات قطعة

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

$I(1, 0, 0)$

J منتصف [CG]

$J(2, 1, \frac{1}{2})$

حساب DJ:

$D(0,1,0)$ $J(2, 1, \frac{1}{2})$

نعوض باستعمال قانون المسافة

$$DJ = \sqrt{(x_J-x_D)^2+(y_J-y_D)^2+(z_J-z_D)^2}$$

$$= \sqrt{(2-0)^2+(1-1)^2+(\frac{1}{2}-0)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{1}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$DJ = \sqrt{\frac{17}{4}}$$

Farah Notebook

CamScanner

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IJ}$ اوجد

$D(0,1,0)$ $I(1,0,0)$

$\overrightarrow{DI}(1-0, 0-1, 0-0)$

$\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$

$I(1,0,0)$ $J(2,1,\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{IJ}(2-1, 1-0, \frac{1}{2}-0)$

$\overrightarrow{IJ}(1,1,\frac{1}{2})$

ومنه

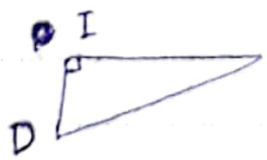
$\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$ $\overrightarrow{IJ}(1,1,\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IJ} = (1)(1) + (-1)(1) + (0)(\frac{1}{2})$

$= 1 - 1 + 0 = 0$

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$

DIJ استنتج مساحة المثلث



بما أن

$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$

الجداء السلمي لشعاعين معدوم

⇐ الشعاعين متعامدين

⇐ المثلث DIJ قائم في I

IJ حساب

$I(1,0,0)$ $J(2,1,\frac{1}{2})$

$IJ = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2 + (z_J - z_I)^2}$

$IJ = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (\frac{1}{2}-0)^2}$

$IJ = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}}$

$IJ = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4} + \frac{1}{4}}$

(4)

$IJ = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$IJ = \frac{3}{2}$

ID حساب

$I(1,0,0)$ $D(0,1,0)$

$ID = \sqrt{(x_D - x_I)^2 + (y_D - y_I)^2 + (z_D - z_I)^2}$

$= \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0)^2}$

$ID = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$ID = \sqrt{2}$

Farah Notebook

CamScanner

/ /

مساحة المثلث القائم = $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب الضلعين القائمين

$S_{DIJ} = \frac{1}{2} \times DI \times IJ$

↓

طول

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2}$

$S_{DIJ} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

الطلب الثاني

① اكتب معادلة المستوي (DIJ)

② احسب بعد H عن المستوي (DIJ)

③ استنتج حجم رباعي الوجوه (HDIJ)

الحل

معادلة المستوي DIJ

ناظم ← لإيجاد ناظم المستوي ناخذ شعاع توجيه للمستوي ويكون الناظم تحدد على كل منهما وكل حل مشترك

نقطة ← نقطة اختيارية من المستوي

لإيجاد ناظم المستوي (DIJ)

نعوض $\vec{n}(a,b,c)$

لدينا شعاعي توجيه من المستوي

$\vec{DI}(1,-1,0)$ $\vec{IJ}(1,1,\frac{1}{2})$

$\vec{n} \perp \vec{DI}$

$\Rightarrow (a,b,c)(1,-1,0) = 0$

$a - b = 0$ ①

$\vec{n} \perp \vec{IJ}$

$\Rightarrow (a,b,c)(1,1,\frac{1}{2}) = 0$

$a + b + \frac{1}{2}c = 0$ ②

كل المعادلتين ① و ② حل مشترك

نعوض $c = 1$

$a - b = 0$

$a + b + \frac{1}{2} = 0$ } نجمع

$2a + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow 2a = -\frac{1}{2}$

$a = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$a = -\frac{1}{4}$

Farah Notebook

CamScanner

$b = a = -\frac{1}{4}$

$b = -\frac{1}{4}$

$\vec{n}(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1)$

نختار النقطة $D(0,1,0)$

المستوي

ناظم: $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1)$

نقطة: $D(0,1,0)$

معادلة المستوي من الشكل

$a(x-x_D) + b(y-y_D) + c(z-z_D) = 0$

$-\frac{1}{4}(x-0) - \frac{1}{4}(y-1) + 1(z-0) = 0$

$-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} + z = 0$

نضرب بـ $-\frac{1}{4}$

$x + y - 4z - 1 = 0$

ومنه معادلة المستوي DIJ

$(DIJ): x + y - 4z - 1 = 0$

② احسب بعد H عن المستوي (DIJ)

حساب بعد النقطة H عن المستوي (DIJ)

نستخدم القانون:

$H(0, 1, 1)$

$dist(H, DIJ) = \frac{|ax_H + by_H + cz_H + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$= \frac{|(1)(0) + (1)(1) + (-4)(1) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-4)^2}}$

$= \frac{|0 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 16}}$

$= \frac{|-4|}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$

$dist(H, DIJ) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$

Notebook

CamScanner

③ استنتج حجم رباعي الوجوه (HDIJ)

$V_{HDIJ} = \frac{1}{3}$

الطريقة الثالثة

أعد معادلة المستوى (HDI)

② احسب بعد النقطة J عن المستوى (HDI)

③ احسب بعد J عن المستقيم IH

أعد معادلة المستوى (HDI)

- نقطة: نقطة اختيارية من المستوى
- ناظم: الناظم عمودي على شعاعي توجيه في المستوى

يكون الناظم عمودي على كل من شعاعي التوجيه وعلى مشترك ولو حد الناظم

$\frac{1}{3}$ حجم رباعي الوجوه = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة: مساحة المثلث DIJ كما سبق

الارتفاع: البعد بين H والمستوى DIJ كما سبق

$= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{4\sqrt{2}}{3}$

بالاختصار يبقى

Farah Notebook

CamScanner

معادلة المستوي (HDI)

$H(0,1,1)$

$D(0,1,0)$

$I(1,0,0)$

$\overrightarrow{HD}(0,0,-1)$

$\overrightarrow{DJ}(1,-1,0)$

ان

$\vec{n}(a,b,c)$ يعرف

$\vec{n} \perp \overrightarrow{HD} \Rightarrow$

$(a,b,c)(0,0,-1) = 0$

$-c = 0$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{DJ}$

$\Rightarrow$

$(a,b,c)(1,-1,0) = 0$

$a - b = 0$

$\Rightarrow a = b$

نعرف

$a = 1$

$\Rightarrow b = 1$

$c = 0$ ودينا

$n(1,1,0)$

معادلة المستوي HDI

ناظم ← $n(1,1,0)$

نقطة ← $D(0,1,0)$

معادلة المستوي من الشكل

$a(x-x_D)+b(y-y_D)+c(z-z_D)=0$

$(1)(x-0)+(1)(y-1)+0(z-0)=0$

$x+y-1=0$

وهي معادلة المستوي HDI

$x+y-1=0$

(2) احسب بعد النقطة J عن المستوي (HDI)

HDI: $x+y-1=0$

$J(1, 1, \frac{1}{2})$

$dist(J, HDI) = \frac{|ax_J+by_J+cz_J+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Farah Notebook

CamScanner

الطلب الرابع

① أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من J ويعامد (HDI)

المستقيم

نقطة ← النقطة J
$J(2, 1, \frac{1}{2})$

مستقيم توجيه ← نعلم أنه يعامد (HDI)
$(1, 1, 0)$

التمثيل الوسيطي لمعادلة المستقيم هو:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_J + at \\ y &= y_J + bt \\ z &= z_J + ct \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + (1)t \\ y &= 1 + t \\ z &= \frac{1}{2} + 0t \end{aligned}\right\} \quad t \in R$$

$$= \frac{|(2)(1) + (1)(1) + (0)(\frac{1}{2}) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (0)^2}}$$

$$= \frac{|1 + 1|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}$$ نضرب البسط والمقام في $\sqrt{2}$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$dist(J, HDI) = \sqrt{2}$$

Farah Notebook

CamScanner

/ /

ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة J وموازي المستوي (HDJ).

$$\left.\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = \frac{1}{2} \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

استنتاج احداثيات J' نقطة تقاطع d و (HDI)

Note

لايجاد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي HDI نعوض المعادلات الوسيطية للمتغير في معادلة المستوي ثم نحسب t ثم نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية

المعادلات الوسيطية للمستقيم

$$\left.\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = \frac{1}{2} \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

معادلة المستوي HDI

$x + y - 1 = 0$

نعوض فنجد:

$2+t+1+t-1=0$

$2t+2=0$

$\Rightarrow t = -\frac{2}{2}$

$\Rightarrow t = -1$

نعوض في المعادلات الوسيطية للمستقيم

$x = 2-1 \Rightarrow x = 1$

$y = 1+t \Rightarrow y = 1-1 = 0$

$z = \frac{1}{2}$

ومنه

$J'\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$

نقطة تقاطع d مع المستوي HDI

انتهت المسألة الثانية

Monira Al-ebraheem
Notebook
CamScanner