انشر مايلي:

١- $X(2x+1) = 2x^2 + x$

٢- $(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2X - 3$

١) حلل ما يلي:

١- $A(x) = (x-1)(2-x) + (x-1)(2x+1)$

$(x-1)[2-x+2x+1] = (x-1)(x+3)$

٢- $A(x) = x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}$

٣- $A = (x+1)(2x+3) - (x+1)(-x+2)$

$= (x+1)(2x+3+x-2) = (x+1)(3x+1)$

مراجعة المتطابقات

المتطابقة التربيعية:

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

المتطابقة التكعيبية:

I) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

II) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

III) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

IV) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

المعادلات الجبرية: حل المعادلات التالية:

1) $(x-5)(x+11) = 0$

إما : $(x-5) = 0 \Rightarrow x = +5$ أو: $(x+11) = 0 \Rightarrow x = -11$

حلول المعادلة: $\{+5, -11\}$

2) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow = (x-3)(x+3)$

إما: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = +3$ أو: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

حلول المعادلة: $\{\pm 3\}$

3) $(x-1)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 - (4)^2 = 0$

$(x-1-4)(x-1+4) = 0$

$(x-5)(x+3) = 0$

مجموعة الحلول: $\{+5, -3\}$

4) $$(x+5)^2 = 5 \Rightarrow (x+5)^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$$
$$(x+5-\sqrt{5})(x+5+\sqrt{5}=0)$$

إما : $x+5-\sqrt{5}=0 \Rightarrow x = -5+\sqrt{5}$
أو: $x+5+\sqrt{5}=0 \Rightarrow x = -5-\sqrt{5}$

5) أثبت أن $\sqrt{2}+1$: حل للمعادلة $(x^2-2x-1=0)$ وهل هناك حل أخر:
الحل:
نعوض:
$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right) - 1 = 0$$
$$2+2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}-2-1=0 \quad \Rightarrow 0=0$$

إذاً $\sqrt{2}+1$ هو جذر للمعادلة لأنه حقق المعادلة
ولإيجاد الجذر الآخر نحلها بطريقة المميز

$ax^2+bx+c=0$

$$x^2-2x-1=0$$
$$\Delta = b^2-4a.c \quad \Rightarrow \Delta = (-2)^2-4(1)(-1) = 8$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

وهذا الحل الاخر
نستخدم المميز لحل المعادلات من الدرجة الثانية:
$$ax^2+bx+c=0$$
القانون: $\Delta = b^2-4a.c$
- إذا كان Δ موجب لها حلان
- إذا كان $\Delta = 0$ لها جذر مضاعف
- إذا كان Δ سالب مستحيلة الحل

في حالة $\Delta > 0$ الجذران يكونان:
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

في حالة $\Delta = 0$ جذر مضاعف: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

دراسة الاشارة:
لدراسة الإشارة إذا كان التابع من الدرجة الأولى نوجد أولاً حل المعادلة ثم نطبق القاعدة ما قبل الجذر يخالف إشارة أمثال x وما بعد الجذر يوافق المعادلة شكلها ax+b

أمثلة:

١) ادرس الإشارة:

$$5x+2=0$$
$$5x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{5}$$

x		$-\frac{2}{5}$	
$5x+2$	-	0	+

٢)

$$F=\frac{4-3x}{5x+2}$$

الحل:

ندرس إشارة البسط والمقام

البسط:

$$4-3x=0 \Rightarrow 4=+3x \quad \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

المقام:

$$5x+2\neq 0 \Rightarrow 5x\neq -2 \Rightarrow x\neq \frac{-2}{5}$$

x		$-\frac{2}{5}$		$\frac{4}{3}$	
$4-3x$	+		+	0	−
$5x+2$	-	0	+		+
F	-	0	+	‖	-

٣)

$$(2x+3)^2-4\leq 0$$
$$(2x+3)^2-2^2\leq 0 \Rightarrow$$
$$[2x+3-2][2x+3+2]\leq 0$$
$$(2x+1)(2x+5)\leq 0$$
$$2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2} \quad , \quad 2x+5=0\Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		-		-	0	+	
$2x+5$		-	0	+		+	
		+	0	-	0	+	
		مرفوض		محققة		مرفوض	

$$x \in [\frac{-5}{2}, \frac{-1}{2}]$$

في حل المتراجحة ننظر إلى إشارة المتراجحة ونضع الحلول المقبولة والمرفوضة

مجموعة تعريف تابع

$F(x) = 2x^2 + 1$

✓ *تابع صحيح:* مجموعة تعريفه R $]-\infty, +\infty[$

$F(x) = 2x + \frac{7}{2}$

✓ *تابع صحيح* مجموع تعريفه R

$x\sqrt{2} + 1$

✓ *تابع صحيح* مجموعة تعريفه R

$F(x) = \frac{1}{x^2}$

✓ *تابع كسري* معرف على R ماعدا القيم التي تعدم المقام إذاً معرف على R^*

$F(x) = \frac{2}{x(x+1)}$

معرف على $R\backslash[0,-1] \Rightarrow]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$$Fx = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

تابع مؤلف من تابعين نأخذ الحل المشترك بينهما

البسط:

$\sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$[-1, +\infty[$

المقام:

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq +1$

معرف على $R\backslash\{+1\}$

$$D = [-1, +\infty[\cap R\backslash\{+1\}$$

$$D = [[-1, +1[\cup [+1, +\infty[$$

إطراد تابع:

ملاحظة:

عندما يكون الخط البياني هابطاً على المجال((من اليسار إلى اليمين)) يكون متناقص

وعندما يكون الخط البياني صاعداً على مجال يكون التابع متزايد

تمرين-١-

ليكن التابع

$$f(x) = x^2 + 2x - 5$$

هل النقطة $M(0,1)$ تقع على الخط البياني للتابع وهل $A(-1,-6)$ تقع على الخط البياني

الحل:

نعوض M في التابع

$$f(1) = 1^2 + 2(1) - 5 = 1 + 2 - 5 = -3 \neq 0$$

إذاً: $M(0,1) \not\in C$ إذاً:

نعوض A في التابع

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 5 = 1 - 2 - 5 = -6$$

$$\Rightarrow -6 = -6$$

إذاً A تقع على C

(إيجاد مجموعة تعريف تابع و النهايات والتوابع الزوجية والفردية):

أوجد مجموعة تعريف التوابع التالية

$1) f(x) = \frac{3}{x^2}$ R^* معرف على

$2) g(x) = \frac{x+1}{x(x-1)}$ مجموعة تعريفه $R \setminus \{0,1\}$

مثال:

ليكن التابع:

$$Fx = \frac{x+1}{x-2}$$

والمطلوب:

١. أوجد مجموعة تعريف التابع
٢. ادرس اطراد التابع على المجال $]2,+\infty[$ و $]-\infty,2[$
٣. اكتب جدول اطراد التابع
٤. حل المتراجحتين: $fx > 1$ و $fx < 1$
٥. نظم جدولاً بقيم fx الموافقة لقيم التابع $\{-1,0,1,3,4,5\}$

الحل:

التابع معرف على $R\backslash\{-2\}$

$]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

X	$-\infty$		-1		$+2$		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+	
$x-2$		-	-		0	+	
Fx	$+\infty$	↘	0	$-$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	+

لحل المتراجحة $fx>1$ أو $fx<1$

نأخذ الفرق:

$$F(X-1)=\frac{x+1}{x-2}-\frac{-1}{1}=\frac{x+1-x-2}{x-2}=\frac{3}{x-2}$$

$fx<1$ محققة في المجال $]-\infty,2[$

$fx>1$ محققة في المجال $]2,+\infty[$

لرسم الخط البياني نستعين بالنقط:

$f(-1)=0$ $\quad f(0)=-\frac{1}{2}$

$f(1)=-2$ $\quad f(3)=4$

$f(4)=2.5$ $\quad f(5)=2$

x	-1	0	1	2	3	4	5
F(x)	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↘	-2	‖	4 ↘	2.5 ↘	2

العمليات على التوابع

مثال: التابع f و g معرفان وفق:

$$f(x)=x^2+2x-3$$
$$g(x)=x^2-1$$

أوجد $(f.g)(x)$ ، $(f+g)(x)$:

الحل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=x^2+2x-3+x^2-1$

$2x^2+2x-4$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)$

$=(x^2+2x-3).(x^2-1)$

$=x^4+2x^3-3x^2-x^2-2x+3$

$=x^4+2x^3-4x^2-2x+3$

قسمة كثيرات الحدود:

أوجد ناتج ما يلي:

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x+2 \\ \hline X-1 & x^3+x^2+3 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \\ \hline & 2x^2+3 \\ & \mp 2x^2 \pm 2x \\ \hline & 2x+3 \\ & \mp 2x \pm 2 \\ \hline & +5 \end{array}$$

ملاحظة: نبدل الإشارة

الناتج $= x^2 + 2x + 2$

الباقي $= 5$

الاشتقاق ونهاية التابع:

مثال : هل التابع اشتقاقي عند 5 ؟ $P(x) = 3x^2 - 4$

$$f(x) = 3x^2 - a \qquad f(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f(h) = \frac{3(a+h)^2-4-(3a^2-4)}{h} = \frac{3(a^2+2ah+h^2)-4-3a^2+4}{h}$$

$$= \frac{3a^2+6ah+3h^2-4-3a^2+4}{h}$$

$$\frac{6ah+3h^2}{h} = \frac{h(6a+3h)}{h} = 6a+3h$$

$$\lim_{x\to 0} f(h) = 6a$$

$$f'(5) = \lim f(h) = 30\epsilon R$$

اذاً الدالة قابلة للاشتقاق

قواعد الاشتقاق:

1- $f(x) = mx + P$ مشتقه $\Rightarrow f'(x) = m$

2- $f(x) = \sqrt{x}$ $\dfrac{\text{مشتق ما داخل الجذر}}{\text{ضعفي الجذر}}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

4- مشتق مجموع تابعين = مشتق التابع الأول +مشتق التابع الثاني

5- مشتق جداء ضرب تابعين هو : مشتق الأول×الثاني +مشتق الثاني×الأول

6- مشتق تابع كسري هو $\dfrac{\text{مشتق البسط بالمقام}(-)\text{مشتق المقام بالبسط}}{\text{مربع المقام}}$

أمثلة : أوجد مشتق التوابع:

1) $f(x) = x + \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x + 3$

$f'(x) = 15x^2 - 6x + 10$

3) $f(x) = \sin(2x + \pi)$

$f'(x) = 2\cos(2x + \pi)$

4) $f(x) = 3x^2 - 5x$ $\quad f'(x) = 6x - 5$

إيجاد نهاية تابع:

١- حالات عدم التعيين:

$+\infty, -\infty, 0, -\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

أوجد نهاية ما يلي:

ملاحظة [illegible]

1- $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1-2}{1-1} = \frac{-1}{+0} = -\infty$

2- $\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2 - x} = \lim \frac{5}{x^2} = \frac{5}{(-\infty)^2} = 0$

3- $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - x) = 2(+\infty)^3 = +\infty$

تمرين شامل:

$f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$ وليكن خطه البياني c_f يقبل المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل

والمطلوب: ١- أوجد مجموعة تعريف التابع

٢-أثبت أن يقبل c_f المستقيمΔذا المعادلة $y = 1 - x$

٣-ادرس الوضع للمقاربΔ بالنسبة إلى المنحني c_f

٤-ادرس التابع f

الحل:

التابع معرف على R^*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x-y_\Delta) = \lim -\frac{1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$x - y_\Delta = 1 - x - \frac{1}{x} - 1 + x = \frac{-1}{x}$$

فالمستقيم y_Δ مقارب للمنحني c_f بجوار $\pm\infty$

ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{1}{x}$$

$$]-\infty,0[\Rightarrow f(x) - y_\Delta \Rightarrow f(x) > y_\Delta$$

المنحني c_f يقع فوق المقارب

$$]0,+\infty[\Rightarrow f(x) - y_\Delta < 0 \Rightarrow f(x) < y_\Delta$$

المنحني c_f يقع تحت المقارب ولدراسة التابع:

$$D = R^* =]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\frac{1}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\frac{1}{-0} = +\infty$$

المستقيم $x = 0$ مقارب منطبق على yy' في جوار $\pm\infty$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0$$

$$(1-x)(1+x) = 0$$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -1$ قيمة كبرى محلية

$x = -1 \Rightarrow f(1) = 3$ قيمة صغرى محلية

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	||	$+ + +$	0	$- - -$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$ $+\infty$	||		-1	$\searrow$	$-\infty$

معادلة القطع المكافئ:

مثال : $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5)$

١- توثق أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين

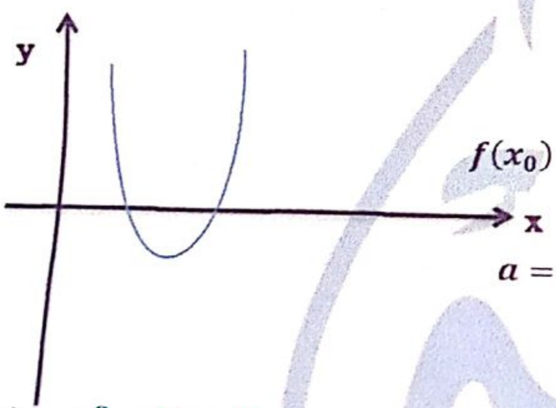
٢- عين إحداثيات ذروة القطع f وارسم محور تناظره

٣- أين تقع فتحة القطع

الحل:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-5)(x-1) = 0$$

إما : $x - 5 = 0 \Rightarrow x = +5$　　أو: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = +1$



إذاً يوجد جذرين:

فاصلة الذروة: $x_0 = \frac{1+x_2}{2} = \frac{1+5}{2} \Rightarrow \frac{6}{2} = 3$

$$f(x_0) = f(3) = -2$$

لمعرفة فتحة القطع ننظر إلى أمثال x^2

أي: $a = \begin{cases} 0<a & \text{فتحة القطع للأعلى} \\ 0 > a & \text{فتحة القطع للأسفل} \end{cases}$

تدريب: ادرس التابع:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

التابع معرف ومستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0$$

$$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \underset{(1)}{\frac{25}{4}} - \underset{(2)}{\frac{25}{2}} + \underset{(4)}{\frac{6}{1}} = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

إ $x = 3$　　$x = 2$ أو　$\Rightarrow$　$x = \frac{5}{2} = 2.5$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$- -$	0	$+ +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

المتتاليات

المتتالية (U_n) $n \geq 0$ معرف بقيمة U_0 وبعلاقة تدريجية ، عين فيما يلي التابع f الذي يحقق أياً كان n العلاقة:

$$U_0 = -1$$

$$U_n + 1 = (U_n + 1)^2$$

$$U_1 = (-1 + 1)^2 = 0$$

$$U_2 = (0 + 1)^2 = 1$$

$$U_3 = (1 + 1)^2 = 4$$

$$U_4 = (4 + 1)^2 = 25$$

$$U_5 = (25 + 1)^2 = 676$$

❖ أوجد : $(U_n + 1)$, $(U_n - 1)$, $(U_2 n)$

الحل:

$$U_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n + 1}$$

$$U_n + 1 = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{2(n+1) + 1}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1}{2n + 2 + 1} = \frac{n^2 + 3n + 3}{2n + 3}$$

$$U_n - 1 = \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 1}{2(n-1) + 1} = \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$$

$$U_2 n = \frac{(2n)^2 + 2n + 1}{2(2n+1)} = \frac{4n^2 + 2n + 1}{4 - n + 1}$$

المتتالية المتزايدة والمتناقصة

نقول إن المتتالية متزايدة تماماً إذا وفقط مهما يكن $n \geq 0$ يكن

$U_n + 1 > U_n$

والمتتالية متناقصة تماماً إذا تحقق الشرط:

$U_n + 1 <_n$.

ملاحظة : لدراسة اطراد متتالية نقوم بدراسة إشارة الفرق بين

(U_n) و $(U_n + 1)$ أو بمقارنة $\frac{U_n + 1}{U_n}$

مثال: لتكن المتتالية

المعرفة بالعلاقة : $U_n = n^2 - 10n + 26$

أحسب $(U_n + 1 - U_n)$ وبرهن أن المتتالية متزايدة بدءاً من الدليل $n = 5$

الحل:

نحسب الفرق:

$$U_n + 1 - U_n = [(n+1)^2 - 10(n+1) + 26] - [n^2 - 10n + 26]$$

$$= n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 + 26 - n^2 + 10n - 26)$$

$$= 2n - 9$$

$$U_n + 1 - U_n > 0$$

عندما: $2n - 9 > 0 \Rightarrow n > \frac{9}{2}$

والمتتالية متزايدة تماماً اعتباراً من الحد الخامس

في المتتالية الهندسية:

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m}$$

هل المتتالية هندسية أم لا؟

$U_n = 3^n + 3n$

$U_{n+1} = 3^{n+1} + 3(n+1) = 3.3^n + 9n - 6n + 3$

$3(3^n) - 6n + 3 \Rightarrow 3U_n - 6n + 3$

والمتتالية ليست هندسية

تمرين: $U_n = 5^{n+3}$

$U_{n+1} = 5^{n+4} = 5.5^{n+3} = 5U_n$

المتتالية هندسية أساسها $r = 5$

تمرين:

فيما يأتي متتالية $n \geq 0$ (U_n)متتالية هندسية أساسها $q = 5$ ، $U_0 = 4$

- اكتب U_n بدلاً من (n)

الحل: $U_n = U_0 \cdot q^n \Rightarrow U_n = 4.5^n$

الاحتمالات:

الحدث البسيط:

١)التجارب غير متساوية الاحتمال:

مسالة:

في صندوق ثلاث كرات سوداء اللون وواحدة بيضاء وكلها متماثلة الملمس ، نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة ، ونسجل زوج الألوان مع أخذ الترتيب في الحسبان، عين فضاء العينة وقانون الاحتمال لهذه التجربة:

الحل: نرمز للكرة البيضاء بw ، وللكرة السوداء بb

وبالتالي يكون لدينا الاحتمالات $(w,b)(b,w)(b,b)$

وبالتالي احتمال $(b,w) <$ احتمال (bb)

والتجربة غير متساوية الاحتمال

فضاء العينة: $= \{(bb)(w,b)(b,w)\}$

وبالتالي قانون الاحتمال:

النتيجة	b,b	b,w	w,b
وقوعها	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

٢)التجارب العشوائية متساوية الاحتمال يكون احتمالها: $p = \frac{1}{n}$

نتيجة مهمة

في تجربة عشوائية متساوية الاحتمال

احتمال وقوع حدث A : حاصل قسمة عدد عناصر الحدث A على عناصر فضاء العينة Ω

$$p(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{\Omega \text{ عدد عناصر}} = \frac{n\,A}{n\,\Omega}$$

عمليات على الأحداث

١) A و B هو الحدث الذي يقع في A و B معاً

A و B هو $A \cap B$

عندما يكون $A \cap B = \emptyset$ الحدثان منفصلان

٢) أما A أو B فهو وقوع أحد الحدثين على الأقل ويوافق $A \cup B$

٣) الحدث المعاكس A' هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A أي النتائج التي لا تنتمي إلى الحدث A

٤) نقول إن الحدثان A و B يؤلفان تجربة للحدث الأكيد إذا كانا منفصلين وغير مستحيلين وكان $A \cup B = \Omega$

تمرين:

لنتأمل المجموعة: $\Omega = \{0, 1, , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

A الحدث الموافق للأعداد الزوجية في Ω

B الحدث الموافق للأعداد الفردية في

C الحدث الموافق لمضاعفات العدد ٤ في Ω

المطلوب:

١- أوجد ما يلي:

$$A \cap B, A \cup B, A \cup C, A \cap C, B \cup C, B \cap C, A', (A \cup B)'$$

٢- هل يؤلف الحدثان A, B تجزئة للمجموعة

الحل:

١.

$A \cap B = \phi$ المجموعة الخالية

$A \cup B = \Omega = \{0, 1, , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B \cap C = \phi$

$B \cup C = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$A \cup C = A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$A \cap C = \{0, 4, 8\}$

$(A \cup B)' = A' \cap B' = \phi$

$$A' = B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

٢. نلاحظ أن $A \cup B$ هو Ω و $A \cap B = 0$

إذاً الحدثان A و B يشكلان تجزئة للمجموعة Ω

خواص الاحتمالات

1) إذا كان الحدثان منفصلان يكون $P(A \cup B) = p(A) + P(B)$

إذا كان الحدثان منفصلان أي أن $(A \cap B) = \phi$

٢) أما في الحالة العامة

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

٣) $P(A') = 1 - P(A)$

٤) إذا كان الحدثان مستقلان احتمالياً

$$P(A \cup B') = P(A) - P(A \cap B')$$

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$P(A \cap B)' = P(A' \cup B')$$

$$P(A \cup B)' = P(A' \cap B')$$

مسألة:

يطلق راميان كل منهما على حدا طلقة واحدة على هدف نفترض أن احتمال أن يصيب الرامي الأول الهدف $\frac{6}{10}$ الحدث ،واحتمال أن يصيب الرامي الثاني الهدف $\frac{7}{10}$ الحدث B

المطلوب:

١. احتمال أن يصيب الراميان الهدف معاً
٢. احتمال أن يصيب أحدهما الهدف على الأقل
٣. احتمال عدم إصابة الهدف
٤. احتمال أن يصيب أحدهما فقط الهدف
٥. إذا علمت أن أحدهما على الأقل أصاب الهدف ، فما احتمال أن يكون هو الرامي الأول فقط؟
٦. إذا علمت أن أحدهما على الأقل أصاب الهدف ، فما احتمال أن يكون الرامي الأول

الحل:

إن الحدثان مستقلان لأنه لا يؤثر أحدهما في الآخر

١- $P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{50}$

٢- احتمال إصابة أحدهما الهدف هو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{7}{10} - \frac{42}{100} = \frac{22}{25}$$

٣- إن عدم إصابة الهدف من قبل الراميين

أو $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{25}$

$$P(A\cup B)' = P(A'\cap B') = P(A').P(B') = \frac{2}{5}\times\frac{3}{10} = \frac{3}{25}$$

٤- ليكن C هو احتمال إصابة أحد الراميين فقط الهدف

$$P(C) = P(A\cup B) - P(A\cap B) = \frac{44}{50} - \frac{21}{50} = \frac{23}{50}$$

أو :

$$P(C) = P(A\cap B') + P(A'\cap B)$$

٥- احتمال إصابة الأول فقط

$$A_1 = A\cap B' \Rightarrow P(A)_1 = \frac{6}{10}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

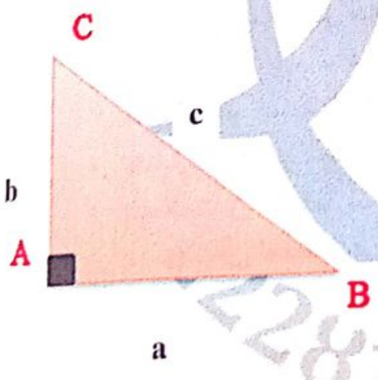
أو بطريقة الاحتمال المشروط:

$$PA_1\backslash P(A\cup B)$$

٦-

$$P(A)\backslash P(A\cup B) = \frac{\{P(A\cup B)\cap A\}}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{22}{25}} = \frac{15}{22}$$

تطبيقات الجداء السلمي



نرمز للضلع $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$

<u>العلاقات العددية في المثلث القائم:</u>

١- ترتبط أضلاع المثلث بعلاقة فيثاغورث

$$a^2 + b^2 = c^2$$

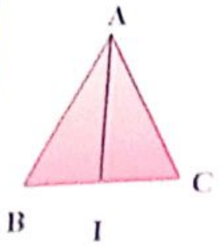
٢- الخط المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر

٣- نحسب مساحة المثلث: $s = \frac{1}{2}b.c$

٤- ترتبط أطوال أضلاع المثلث وزواياه بعلاقات مثل $b = a\sin B$

<u>علاقة الكاشي:</u>

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos A$$



مبرهنة المتوسط:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI + \frac{BC^2}{2}$$

نتيجة هامة:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال: ABC مثلث فيه:

$C = 45^\circ$ $B = 75^\circ$ $a = 4$ احسب b , c

الحل:

نستفيد من العلاقة:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$A = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{b}{\sin 75} = \frac{c}{\sin 45}$$

$$a = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} = 3.27$$

$$b = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin 75 \approx 4 \cdot 46$$

- إذا كان لدينا مستقيمان d , d' معادلتاهما:

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + 'c = 0$$

يكون المستقيمان متعامدان إذا كان $aa' + bb' = 0$

- إذا كان المستقيمان معادلتاهما:

$$y' = m'x + p'$$

$$y = mx + p$$

شرط التعامد : $mm' = -1$

- معادلة الدائرة في معلم متجانس:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

تمرين:

معادلة الدائرة: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6$

أوجد مركزها ونصف قطرها

الحل: $R^2 = 6 \Rightarrow R = \sqrt{6}$

مركزها: $(-2, +3)$

ملاحظة:

لمعرفة المعادلة إذا كانت تمثل معادلة الدائرة أم لا ؟

نكتب المعادلة بالصيغة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=K$

- $0<K$ دائرة ونصف قطرها $\sqrt{K}$
- $0=K$ نقطة وحيدة
- $K<0$ كانت خالية

تمرين:

هل هذه المعادلة تمثل دائرة؟

$$x^2+y^2-2x+4y+5=0$$

$x^2-2x=(x-1)^2-1$

$y^2+4y=(y+2)^2-4$

$\Rightarrow (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+5=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2=0$

فالمجموعة تمثل نقطة إحداثياتها $(+1,-2)$

المستقيم الحقيقي والدائرة المثلثية

قياس الزاوية بالدرجات	30	45	60	120	135	160
قياس الزاوية بالراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

توجد علاقة تربط الزاوية بالدرجات بقياس الزاوية بالراديان

$\frac{180}{\pi}$ $\frac{\text{قياس الزاوية بالدرجات}}{\text{قياس الزاوية بالراديان}}$

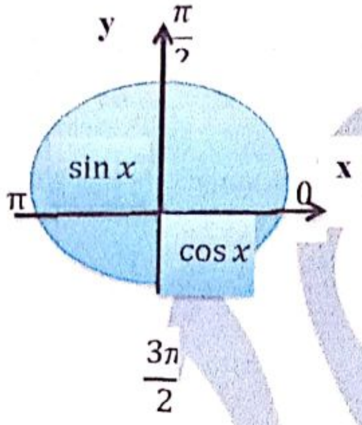
مثال:

١) ما قياس زاوية بالراديان إذا علمت أنها تساوي $d=20^\circ$

$$a=\frac{20\times\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$$

٢) ما قياس زاوية بالدرجات إذا علمت أن قياسها بالراديان $a=\frac{2\pi}{7}$

$$d=\frac{180\times\frac{2\pi}{7}}{180}=\frac{360}{7}=51^\circ$$



ملاحظة-١-:

$$-1 \le \sin x \le +1$$
$$-1 \le \cos x \le +1$$

ملاحظة-٢-:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\cos x(x + 2\pi) = \cos x$$

ملاحظة-٣-:

$$sin(-x) = -sin\, x$$

$$\cos(-x) = -\cos x$$

ملاحظة-٤-:

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

ملاحظة-٥-:

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$
$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

1 – أوجد sin , cos الاعداد يمكنك الاستفادة من الدائرة المثلثية .

الحل :

$$*)\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$*)\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

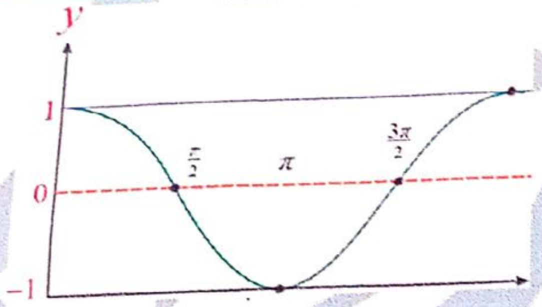
$$*)\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$*)\ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 – ارسم الخط البياني وأوجد الجدول المراد للتابع على المجال $[0, 2\pi]$ ، ادرس $\cos x$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

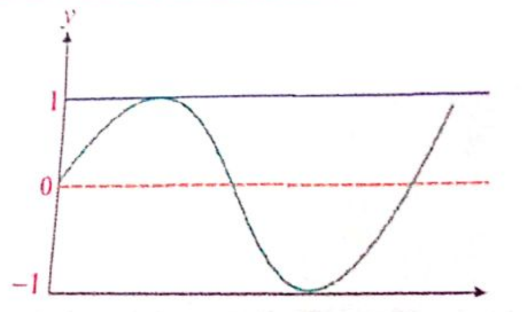
وخطّه البياني :



أما جدول أطراد $\sin x$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	١	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

وشكل خطّه البياني :



(*) تمرين : في حالة $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftarrow \cos x \neq 0$ والمطلوب :

١ – أثبت أنه أياً كان العدد x الذي يحقق $\cos x \neq 0$ كان $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

٢ – اذا علمت أن x تنتمي الى $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ وأن $\tan x = -2$ فاوجد $\cos x$, $\sin x$

الحل : $1+\tan^2 x = 1+\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

٢ – $\tan x = -2$

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftarrow 1+(-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1+4 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$5 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$ مرفوض

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ مقبول

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x+\frac{1}{5} = 1$$

مرفوض $\sin^2 x = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ أو مقبول $\sin x = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

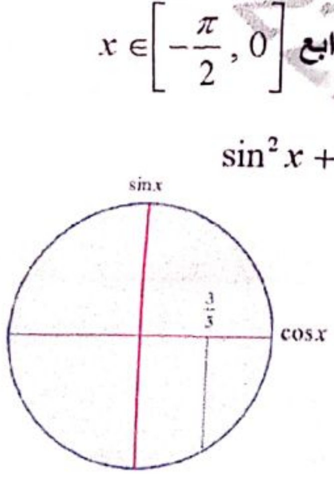
تمرين (٢) أثبت صحة العلاقة : $(\sin x+\cos x)^2 = 1+2\sin x\cos x$

$$(\sin x+\cos x)^2 = \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x$$

$= 1+2\sin x\cos x$ لأنه حسب ما نعلم : $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$

تمرين (٣) : عين على الدائرة المثلثية C النقطة M اذا علمت أن $\cos x = \frac{3}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ثم احسب كلاً من $\sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ، $\sin(\pi-x)$ للربع الرابع $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x+\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1-\frac{9}{5}$$



مقبول $\sin^2 x = \frac{16}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{-4}{\sqrt{5}}$ أو مرفوض $\sin x = \frac{+4}{\sqrt{5}}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x = -\frac{4}{5}$$

$$\cos(\pi-x) = -\sin x = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin(\pi-x) = \sin x = -\frac{4}{5}$$

نتائج هامة للهندسة :

١ – بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بمستوٍ وحيد .

٢ – اذا تقاطع مستويان كان تقاطعهما مستقيماً نسميه مضلعهم المشترك .

٣ – اذا وضع مستقيمان في مستوٍ واحد ولم يشتركا بأي نقطة ننا أنهما متوازيان .

٤ – اذا لم يشترك مستويان بأيّة نقطة كان المستويان متوازيان .

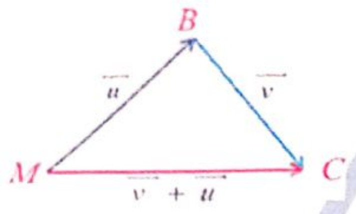
٥ – المستويان المتوازيان لثالث متوازيان .

٦ – المستويان العامودان على مستقيم واحد متوازيان .

٧ – المستويان العامودان على مستوي نفسه متوازيان .

جمع الأشعة وطرحها :

١) علاقة شال طريقة المثلث :

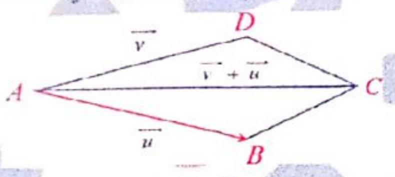


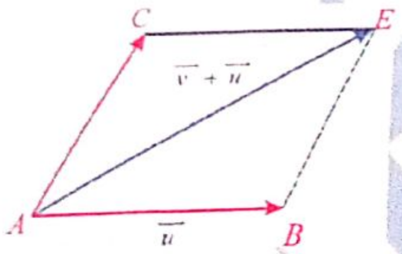
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$$

٢) طريقة متوازي الاضلاع :

اذا كان للشعاعين $\vec{v}$ + $\vec{u}$ المبدأ نفسه A نستخدم طريقة متوازي الاضلاع :

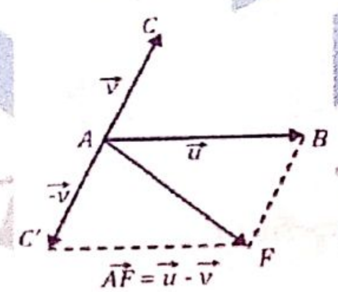




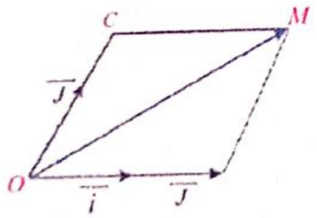
تمرين : لتكن A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

نضع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ أوجد كلاً من $AE = \vec{u} + \vec{v}$

لرسم الشعاع AF نرسم الشعاع $\vec{v}$



قوانين للهندسة التحليلية : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$



١) احداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad , \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

٢) الارتباط الخطّي : يكون الشعاعين غير المعدومين : $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

مرتبطين خطّياً اذا تحقق : $xy' - yx' = 0$

٣) قانون البعد بين نقطتين : $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

تدريب : لدينا في معلم متجانس $A(-2,3), B(4,5), C(0,5), D(5,1)$

١ ـ احسب محيط المثلث ABC . ٢ ـ احسب إحداثيات N منتصف القطة المستقيمة CB واستنتج طول المتوسط AN .

٣ ـ احسب مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. ٤ ـ أثبت أن المستقيمان AB , CD متقاطعان .

٥ ـ اكتب بدلالة K ، مركبات الشعاع $\overrightarrow{CM}$ التي تحقق $\overrightarrow{AM} = K\overrightarrow{AB}$

٦ ـ احسب بدلالة K مركبات الشعاع $\overrightarrow{CM}$. ٧ ـ عين K كي يكون الشعاعان مرتبطان خطّياً واستنتج احداثيات نقطة تقاطع المستويين AB , CD .

الحل : ١ ـ نستخدم قانون البعد بين نقطتين : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

نستخدم قانون البعد بين نقطتين : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$$AB^2 = (4+2)^2 + (5-3)^2 = 36 + 4 = 40$$

$$AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC^2 = (0-4)^2 + (5-5)^2 = 16 \Rightarrow BC = 4$$

$$AC^2 = (-2-0)^2 + (3-5)^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow Ac = 2\sqrt{2}$$

محيط المثلث مجموع اطوال أضلاعه : $2\sqrt{10} + 2\sqrt{2} + 4$

$$x_N = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$N(2,5) \quad y_N = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$AN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (2+2)^2 + (5-3) = 20$$

$$AN = 2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = (5-0)\vec{i} + (1-5)\vec{j} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$$

٤) لكي نثبت أنهما متقاطعان (غير مرتبطين خطّياً) أي مستقلان : $\overrightarrow{AB}(6,2)$, $\overrightarrow{CD}(5,-4)$

نضع قانون الارتباط الخطّي : $xy' - yx' = 0 = 6(-4) - 2(5) = -24 - 10 = -34 \neq 0$

اذن غير مرتبطين خطّياً فهما متوازيان .

٥) يتساوى شعاعين اذا تساوى مركبات الأول مع مركبات الثاني :

$$\overrightarrow{AM} = K\,\overrightarrow{AB}$$

$$x_M - x_A = K\left(x_B - x_A\right) \Rightarrow x_M + 2 = K\left(4+2\right) \Rightarrow x_M + 2 = 6K$$

$$y_M - y_A = k\left(y_B - y_A\right) \Rightarrow y_M - y_A = k\left(y_B - y_A\right)$$

$$y_M - 3 = k\left(5-3\right) \Rightarrow y_M = 2k + 3 \Rightarrow M\left(6k-2\,,\,2k+3\right)$$

٦) $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}5\\-4\end{vmatrix}$ ولكن $\overrightarrow{CM} = \begin{vmatrix}x_M - x_C\\ y_M - y_C\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}6k-2-0\\2k+3-5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}6k-2\\2k-2\end{vmatrix}$

لكي يكون مرتبطين خطّياً : $(6K-2)(-4)-(2k-2)(5)=0 \Rightarrow -24K+8-10K+10=0$

$-34K+18=0 \Rightarrow K = -\frac{18}{34} = -\frac{9}{17}$ نعوض قيمة K :

$$x_M = 6\left(-\frac{9}{17}\right) - 2 = \frac{-54}{17} - \frac{2}{1} = \frac{-54}{17} - \frac{34}{17} = \frac{-88}{17}$$

$$y_M = 2\left(-\frac{9}{17}\right) + 3 = \frac{-18}{17} + \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{51}{17} - \frac{18}{17} = \frac{+33}{17}$$

$$M\left(-\frac{88}{17}, \frac{33}{17}\right)$$

تمرين : هل الشعاعين $\vec{u}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{2}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ مرتبطين خطّياً ؟

$xy' - yx' = 0 = \frac{1}{3}\left(\frac{-3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0$ اذن مرتبطين خطّياً .

تمرين : $A(-1,2)\,,\,B(2,1)$ احسب طول AB .

$$AB^2 = \left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = (2+1)^2 + (1-2)^2 = 9+1 = 10$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{10}$$

أسئلة دورات

السؤال الأول:

اختر الإجابة الصحيحة لكل إجابة 20درجة (5×20) 100 درجة

١- اذا كان $A\,,B$ حدثان متنافيان(منفصلين) وكان $P(B)=0.4$ و $P(A)=0.3$

$P(A\cup B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.3+0.4=0.7$

٢- منتصف القطعة المستقيمة $[BA]$ حيث إحداثيتها $A(3\,,-2)\,,B(-1\,,6)$

$y_0=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=+2$ $\qquad x_0=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$

$(1\,,+2)$

٣- إذا كانت النقطةM هي $(3\,,2)$ وكانت المتجهة $4\vec{i}+7\vec{j}$ كانت إحداثيات النقطة Nهي:

$\vec{MN}=(x-2\,,y-3)=(4,7)$

$x-2=4\Rightarrow x=4+2=6$

$y-3=7\Rightarrow y=7+3=10$

النقطة Nهي $(6\,,10)$

٤- إن إحدى قيمx التي تحقق المعادلة $\sin^2x+\sin 2x=0$

$\sin^2x+2\sin x\cos x=0$

$\sin x[\sin x+2\cos x]=0$

إما$\sin x=0\Rightarrow x=\pi k$ أو $\sin x+2\cos x=0$

إذا الجواب هو π

٥- الخط البياني للدالة$f(x)=x^2-6x+4$ متناظر بالنسبة للمستقيم الذي معادلته:

الحل:

$x^2-6x+9+9+4+$

$(x+3)^2-9+4=(x+3)^2-5$

متناظر بالنسبة $x=3$

السؤال الثاني: 100درجة

لتكن الدالة $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{1-x^2}$

١) أوجد مجموعة تعريف الدالة

٢) أوجد$\lim_{x\to+\infty}f(x)$

الحل: $R\setminus\{-1\,,+1\}$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

دورة ٢

السؤال الأول:

اختر الإجابة الصحيحة:

❖ $\frac{5i}{c(5,3)} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}} = 3\times2\times2 = 12$

❖ المثلث ABC قائم في A وإذا كانت $B = 60$ فإن:

$\cos C + \sin B$ تساوي

$$C = 180^\circ(90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$$

❖ نقطة تقاطع مستقيمين هي:

$$d_1: 2x + y - 4 = 0$$
$$d_2: 2x - y - 4 = 0$$

الحل: بالحل المشترك نجمع d_1 و d_2

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = +2$$

نعوض في المعادلة الأولى: $2(2) + y - 4 = 0$

$$\Rightarrow 4 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 0$$

النقطة هي $(2\ ,0)$

❖ لتكن النقاط $N(-3\ ,0)$،$E(1\ ,\lambda)$،$M(0\ ,3)$ التي تجعل النقاط $(E\ ,N\ ,M)$ على استقامة واحدة هي :

الحل تكون النقاط على استقامة واحدة إذا كانت مرتبطة خطياً MN,ME

$\overrightarrow{MN}, (1-0\ ,\lambda-3)$ $\quad \overrightarrow{ME}\ (-3-0\ ,0-3)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MN}, (1\ ,\lambda-3)\ ,\quad ME\ (-3,-3)$

$$\frac{1}{-3} = \frac{\lambda-3}{-3} \Rightarrow -3\lambda + 9 = -3 \Rightarrow -3\lambda = -3 - 9$$

$$\Rightarrow -3\lambda = -12 \Rightarrow \lambda = \frac{-12}{-3} = +4$$

❖ الدالة المشتقة للدالة $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ هي:

حيث أن: $F: R\backslash\{1\}$

الحل:

$$\frac{\text{مشتق البسط بالمقام} - \text{مشتق المقام بالبسط}}{\text{مربع المقام}}$$

$$f(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

السؤال الثاني: 100درجة

لتكن الدالة f المعرفة على R وفق: $f(x) = x^2 + 1$ ، الدالة معرفة على R وفق : $g(x) = 2x$
والمطلوب:

١) أوجد مجموعة قيم الدالة f
٢) أوجد $(f.g)x$

الحل:

$f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = 2x$

١) مجموعة قيم الدالة f هي $[1, +\infty[$
٢) $(f.g)x = (2x)(x^2 + 1) = 2x^3 + 2x$

انتهت الدورات

الرياضيات : (٣٠٠ درجة)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي : (٥×٤٠ = ٢٠٠ درجة)

1- إذا كان A,B حدثان متنافيين (منفصلين) وكان $P(B)=0.4$, $P(A)=0.3$ فإن: $P(A\cup B)$ يساوي:

A	0.8	B	0.7	C	0.6	D	0.2

2- منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(3,-2)$, $B(-1,6)$ هو النقطة التي إحداثياها:

A	$(2,-4)$	B	$(2,4)$	C	$(4,-8)$	D	$(1,2)$

3- إذا كانت إحداثيات النقطة M هي $(2,3)$ وكان المتجهة $\overrightarrow{MN}=4\vec{i}+7\vec{j}$ كانت إحداثيات النقطة N هي:

A	$(-2,-4)$	B	$(6,-4)$	C	$(6,4)$	D	$(6,10)$

4- إن إحدى قيم x التي تحقق المعادلة $\sin^2 x+\sin 2x=0$ هي :

A	$\frac{\pi}{4}$	B	$\frac{\pi}{2}$	C	π	D	$\frac{\pi}{3}$

5- الخط البياني للدالة f : $f(x)=x^2-6x+4$ متناظر بالنسبة للمستقيم Δ الذي معادلته:

A	$x=-9$	B	$x=3$	C	$x=-3$	D	$x=9$

ثانياً- حل السؤال الآتي (١٠٠ درجة):

لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{1-x^2}$ والمطلوب :

1) أوجد مجموعة تعريف الدالة f .

2) أوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

الرياضيات : (٣٠٠ درجة)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي : (٤٠×٥ = ٢٠٠ درجة)

1- ليكن $\vec{v}(3,2)$ و $\vec{u}(a,1)$ فإن قيمة العدد الحقيقي a ليكون الشعاعان $\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطياً هي:

A	B	C	D
2	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$

2- قيمة الوسيط الحقيقي m التي يكون عندها للمعادلة $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ جذر مضاعف هي:

A	B	C	D
-9	9	$+10$	-10

3- التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، مشتقه $f'(x)$ هو:

A	B	C	D
$\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$	$1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

4- في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه متوازن تماماً مرقم من 1 إلى 4 ، إن احتمال الحصول على عدد زوجي يساوي:

A	B	C	D
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

5- ABC مثلث فيه AB=4 و AC=3 وقياس الزاوية $\hat{A} = 60°$ فإن مساحته تساوي:

A	B	C	D
6	3	$3\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$

ثانياً- حل المسألة الآتية (١٠٠ درجة):

ليكن لدينا التابعان f و g المعرفان وفق $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$.

1- أوجد مجموعة تعريف كلاً من التابعين f و g .

2- أوجد $f'(x)$ و $g'(x)$.

3- ادرس اطراد التابع g.

4- ليكن C_f الخط البياني للتابع f ، اكتب معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.