600 →

ملاحظات قراءة جدول تغيرات تابع

- جميع الملاحظات التي ستحتاجها لحل سؤال الجدول .
- تمارين داعمة وشاملة مرفقة بالحل .
- اسئلة النماذج الوزارية جميعها المتعلقة بسؤال الجدول مرفقة بالحل .
- اسئلة الدورات من عام 2017 وحتى 2022 المتعلقة بسؤال الجدول مرفقة بالحل .

إعداد : أ . رامز عنيزان

ملاحظات قراءة جدول تغيرات

1) مجموعة التعريف :

- عند السؤال عن مجموعة تعريف التابع نأخذ المجالات من الحقل الأول، عند وجود خطين متوازيين || (انقطاع) تحت عدد **قد** يكون العدد من ضمن مجموعة التعريف وقد يكون لا لذا نميز الحالتين :
  - امتداد || ينتهي عند آخر حقل $\boxed{f'(x)}$ فقط عندها يكون العدد **ضمن** مجموعة التعريف ولكن غير اشتقاقي عند هذا العدد.
  - امتداد || ينتهي عند آخر حقل $\boxed{f(x)}$ عندها يكون العدد **خارج** مجموعة التعريف.

❖ ملاحظة : قد يكون التابع معرف عند عدد وغير اشتقاقي عليه، ولكن العكس غير صحيح (~~اشتقاقي وغير معرف~~).

2) حساب صورة عدد $f(x_0)$ أو قيمة المشتق عند x_0 $f'(x_0)$:

- نحدد x_0 من الحقل الأول إذا كان السؤال $f(x_0)$ نأخذ المقابل لها في حقل $f(x)$ ليكن y_0 عندها $f(x_0) = y_0$ ، و إذا كان السؤال قيمة المشتق عند x_0 أو احسب $f'(x_0)$ نأخذ المقابل لها في حقل $f'(x)$ ليكن a عندها $f'(x_0) = a$.

❖ ملاحظة : إذا كان f **متزايد** فإنّ صورة العدد الأكبر هي الأكبر، أما إذا كان f **متناقص** فإنّ صورة العدد الأصغر هي الأكبر.

3) حساب النهايات :

- أسفل كل x تكون النهاية بالحقل الثالث، حيث نأخذ منطقة السعي $(x \longrightarrow \cdots)$ من الحقل الأول والجواب في حقل $f(x)$.

$$\boxed{\lim_{x \to \text{أول حقل}} f(x) = \text{آخر حقل}}$$

- إذا كان الطلب $\lim_{x\to a} f(f(x))$ وكان $\lim_{x\to a} f(x) = b$ عندها $\lim_{x\to a} f(f(x)) = \lim_{x\to b} f(x)$.
- إذا كان الطلب $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تكون جواب النهاية $f'(a)$ حسب تعريف العدد المشتق.

♥ معنى $\lim_{x\to a^-} f(x)$ أي نهاية f عند a من **اليسار**، و معنى $\lim_{x\to a^+} f(x)$ نهايته عند a من **اليمين**.

4) السؤال عن المقارب المائل :

- ستكون صيغة السؤال هل من الممكن أن يقبل C مقارب مائل عند $\mp\infty$ ، ننظر إلى نهايتي f عند $\mp\infty$ فنميز حالتين :
  - إذا كانت النهاية **عدد** نقول أنّ C لا يقبل مقارب مائل.
  - إذا كانت النهاية هي $\mp\infty$ عند احداها أو كليهما نقول $\boxed{\text{من الممكن}}$ أن يقبل C مقارب مائل.
- إذا طلب **التعليل** عن عدم وجود مقارب مائل نكتفي بذكر أنّ $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = a$ حيث a جواب النهاية و هو عدد حقيقي.

5) معادلة المقارب الشاقولي $x = x_0$:

- نبحث في الحقل الأول عن عدد x_0 ويكون تحت العدد خطّان || إلى آخر الجدول والمقابل للعدد بالحقل الثالث $\mp\infty$ عندها معادلة المقارب الشاقولي هي $x = x_0$.

6) معادلة المقارب الأفقي $y = y_0$:

- نبحث في الحقل **الثالث** عن عدد y_0 ويكون المقابل له بالحقل الأول $\mp\infty$ عندها معادلة المقارب الأفقي هي $y = y_0$.

7) معادلة المماس الأفقي $y = f(x_0)$:

- نبحث في الحقل الأول عن عدد x_0 ويكون المقابل له في الحقل الثاني **العدد 0** فتكون معادلة المماس الأفقي عندها $y = f(x_0)$.

8) معادلة المماس الشاقولي $x = x_0$:

- نبحث في الحقل الأول عن عدد x_0 ويكون تحته خطين متوازيين || في سطر $f'(x)$ **فقط** فيكون عندها التابع غير اشتقاقي عند x_0 وتكون معادلة المماس الشاقولي $x = x_0$.

☒ احذر : لا تكتب معادلة المماس الشاقولي بالشكل $\boxed{\cancel{y = x_0}}$.

9) معادلة المماس المائل $y = ax + b$ عند x_0 :

- صيغة السؤال اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها x_0 نوجد عندها $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ونطبق :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- إذا طلب معادلة نصف المماس يكون تحت x_0 خطّان في حقل $f'(x)$ **فقط** ويكون على يسار الخطّان عدد يسمّى قيمة المشتق من اليسار عند x_0 ، وعلى يمين الخطّان عدد يسمّى قيمة المشتق من اليمين عند x_0، و لكتابة معادلة نصف المماس نميز الحالتين :
  - ♥ الطلب هو معادلة نصف المماس من **اليمين** نعوّض في معادلة المماس قيمة المشتق عند النقطة من **اليمين** بدل $f'(x_0)$.
  - ♥ الطلب هو معادلة نصف المماس من **اليسار** نعوّض في معادلة المماس قيمة المشتق عند النقطة من **اليسار** بدل $f'(x_0)$.

10) صورة مجال:

- نحدد المجال المفروض من حقل x ونوجد المجال المقابل له من حقل $f(x)$.
  - ♥ إذا كان التابع **متزايد** نأخذ صورة المجال من اليسار إلى اليمين مثلاً $\boxed{{}_4 \nearrow {}^5}$ يكون المجال عندها هو $]4,5[$.
  - ♥ إذا كان التابع **متناقص** نأخذ صورة المجال من اليمين إلى اليسار مثلاً $\boxed{{}^5 \searrow {}_4}$ يكون المجال عندها هو $]4,5[$.

❖ ملاحظة نتقيد بفتح وإغلاق المجال بحسب السؤال، فإذا كان السؤال يتضمن عند قيمة ما مجال مغلق فالجواب سيكون ضمنه المجال مغلق، وإذا كان المجال مفتوح عندها فالناتج كذلك يكون مفتوح.

11) المستقر الفعلي:

- المستقر الفعلي هو صورة مجموعة تعريف التابع أي هو اجتماع مجالات حقل $f(x)$.

❖ ملاحظة: اجتماع مجالين هو العناصر المشتركة وغير المشتركة بين هذين المجالين.

12) القيم الحدية:

- نبحث في الحقل الأول عن عدد x_0 **يغير إشارة المشتق** فتكون القيمة الحدية $f(x_0) = y_0$ ولها أنواع :
  - ♥ قيمة صغرى محلياً: يكون التابع متناقص وبعدها يتزايد أي من سطر $f(x)$ نجد الشكل $\boxed{\searrow y_0 \nearrow}$.
  - ♥ قيمة كبرى محلياً : يكون التابع متزايد وبعدها يتناقص أي من سطر $f(x)$ نجد الشكل $\boxed{\nearrow y_0 \searrow}$.

❖ ملاحظة: قد تكون القيمة الحدية **طرفية** أي صورة عدد x_0 عند بداية مجموعة التعريف أو نهايته بشرط أن يكون العدد ضمن مجموع التعريف ونميز الحالتين :

- ▪ قيمة صغرى محلياً : يكون التابع متناقص إلى صورة x_0 $\boxed{\searrow {}_{y_0}}$ أو متزايد منها $\boxed{{}_{y_0} \nearrow}$.
- ▪ قيمة كبرى محلياً : يكون التابع متزايد إلى الصورة x_0 $\boxed{\nearrow {}^{y_0}}$ أو متناقص منها $\boxed{{}^{y_0} \searrow}$.

❖ ملاحظة: إذا كان العدد x_0 $\boxed{\text{خارج مجموعة التعريف}}$ ورأينا أحد الاشكال الأربعة السابقة تسمى هذه النقطة **نقطة مقاربة** أي بالشكل $\boxed{\searrow {}_{y_0} \|}$ أو $\boxed{\| {}_{y_0} \nearrow}$ أو $\boxed{\nearrow {}^{y_0} \|}$ أو $\boxed{\| {}^{y_0} \searrow}$ وامتداد || يكون على كامل الحقول .

☒ احذر : قد يكون المشتق معدوم عند نقطة ولكن لا يغير إشارته عندها النقطة ليست قيمة حدية بل نقطة **تسرج** أو **انعطاف**.

- تعليل القيمة الحدية الكبرى : نوجد مجال D_1 يحوي x_0 ونكتب $x_0 \in D_1$ ونكتب $\forall x \in D_1 \cap D = D_1 \Rightarrow f(x) \leq y_0$ وأخيراً نجد $f(x) \leq f(x_0)$ إذاً $f(x_0) = y_0$ قيمة كبرى محلياً حيث D مجموعة تعريف التابع.

ملاحظات قراءة جداول التغيرات

- تعليل القيمة الحدية الصغرى : نوجد مجال D_1 يحوي x_0 ونكتب $x_0 \in D_1$ ونكتب $\forall x \in D_1 \cap D = D_1 \Rightarrow f(x) \geq y_0$ وأخيراً نجد $f(x) \geq f(x_0)$ إذاً $f(x_0) = y_0$ قيمة صغرى محلياً حيث D مجموعة تعريف التابع.

13) عدد حلول معادلة $f(x) = m$:

- ننظر إلى حقل $f(x)$ ونعد المجالات التي تنتمي m إلى صورها.
- إذا طلب إثبات أنّ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]a, b[$ حيث m عدد حقيقي نكتب :

♥ التابع مستمر ومطّرد (متزايد أو متناقص) تماماً على $]a, b[$ و $m \in f(]a, b[)$ ، إذا تحققت الشروط كان للمعادلة حل وحيد ضمن المجال المذكور .

14) حلول متراجحة $f(x)$:

- السؤال $f(x) > y_0$ نبحث في حقل $f(x)$ عن المجالات التي يكون فيها $f(x)$ أكبر تماماً من y_0 ونحدد المجال من حقل x .
- السؤال $f(x) < y_0$ نبحث في حقل $f(x)$ عن المجالات التي يكون فيها $f(x)$ أصغر تماماً من y_0 ونحدد المجال من حقل x .

♥ قد تكون صيغة أحد السؤالين السابقين جد حلول متراجحة $f(x) \geq y_0$ أو $f(x) \leq y_0$ عندها يكون نفس خطوات العمل السابقة ولكن نضم إلى المجال القيم التي يكون فيها $f(x) = y_0$.

15) حلول متراجحة $f'(x)$:

- السؤال $f'(x) > 0$ نبحث في حقل $f'(x)$ عن المناطق الموجبة ونحدد مجالها من حقل x .
- السؤال $f'(x) < 0$ نبحث في حقل $f'(x)$ عن المناطق السالبة ونحدد مجالها من حقل x .

♥ قد يكون احد صيغة السؤالين السابقين جد حلول متراجحة $f'(x) \geq 0$ أو $f'(x) \leq 0$ عندها يكون نفس خطوات العمل السابقة ولكن نضم إلى المجال القيم التي يكون فيها $f'(x) = 0$ ، اي تعدم المشتق.

16) استنتاج مجموعة تعريف g من خلال تغيرات f :

❖ أهم نماذج التوابع :

- $g(x) = ln\big(f(x)\big)$ نحدد المجال الذي يكون فيه $f(.) > 0$ في حقل $f(x)$ وأخذ المجال من حقل x .
- $g(x) = \sqrt{f(x)}$ نحدد المجال الذي يكون فيه $f(x) \geq 0$ في حقل $f(x)$ وأخذ المجال من حقل x .
- $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ فقط نستبعد من مجموعة التعريف النقاط التي تحقق $f(x) = 0$ أي تعدم المقام.

17) رسم التابع f :

- نرسم المستقيمات المقاربة (إن وجدت!).
- نعين نقاط التقاطع مع المحورين (إن وجدت!).
- نعين القيم الموافقة للقيم المحلية (إن وجدت!).
- نرسم المماسات (إن وجدت!).
- نرسم الخط C بما يوافق جدوله.

انتهى الشرح

الأسئلة المكررة ضمن الدورات، اسئلة مكررة **وليست متوقعة**:

- السؤال عن النهايات أو صورة نقطة ما.
- سؤال عن القيمة الحدية.
- متراجحات $f'(x)$ و $f(x)$ **وغالباً** المقارنة مع الصفر.
- معادلات المماس (المائل و الأفقي).
- عدد حلول معادلة $f(x) = m$.

نماذج شاملة حول قراءة جدول التغيرات

التمرين الأول : تأمل جدول التغيرات للتابع f الذي خطّه البياني C، ثم أجب عن الاسئلة التالية

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4

1) أوجد مجموعة تعريف التابع.

✓ مجموعة تعريف التابع هي $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) عين ما له من قيم حديّة، مبيناً نوعها.

✓ $f(3) = -3$ قيمة كبرى محلياً .

☒ انتبه : $f(-3) = 0$ ليست قيمة حدية، إنما نقطة **تسرّج**.

3) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 3} f\big(f(x)\big)$.

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ وأيضاً $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4$ وأخيراً $\lim\limits_{x\to 3} f\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$.

4) عين ما له من مقاربات أفقية و شاقولية.

✓ المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C .

المستقيم الذي معادلته $y = -4$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$.

5) أوجد المستقر الفعلي للتابع.

✓ $f(D_f) = \overbrace{]-\infty, +\infty[}^{f(]-\infty,0[)} \cup \overbrace{]-\infty, -3]}^{f(]0,3])} \cup \overbrace{]-4, -3]}^{f([3,+\infty[)} =]-\infty, +\infty[$

6) جد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$.

✓ $]-\infty, -3]$

♥ لو كان الطلب $f(x) > 0$ نفتح المجال عند $\{-3\}$ أي تكون حلول المتراجحة هو المجال $]-\infty, -3[$.

7) جد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

✓ $]0,3[$

♥ لو كان الطلب $f'(x) \geq 0$ تكون حلول المتراجحة وفق $]0,3] \cup \{-3\}$.

8) هل يملك التابع مقارب مائل عند $+\infty$ ؟ علل إجابتك؟

✓ لا يملك التابع مقارب مائل عند $+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4$.

♥ لو كان الطلب عند $-\infty$ كتبنا من الممكن أن يملك مقارب مائل عند $-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

9) ما عدد حلول معادلة $f(x) = -2$ ؟

✓ يوجد حل وحيد فقط .

10) جد مجموعة تعريف التوابع $\boldsymbol{g(x)=\sqrt{f(x)}\,,h(x)=ln(f(x))\,,k(x)=\frac{1}{f(x)}}$.

✓ $g(x)=\sqrt{f(x)}\Rightarrow f(x)\geq 0\Rightarrow D_g=]-\infty,-3]$

✓ $h(x)=ln(f(x))\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow D_h=]-\infty,-3[$

✓ $k(x)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x)\neq 0\Rightarrow D_k=\mathbb{R}\backslash\{-3\}$

التمرين الثاني :

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$، والمطلوب :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	$-\ \|\|\ +$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty\ \|\|\ -\infty \nearrow$	3	$\searrow 0$

1) جد $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)\,,\lim_{x\to-\infty} f(x)}$**، ثمّ** $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(f(x))}$.

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

2) دل على القيم الحديّة مبيناً نوعها.

✓ $f(0)=1$ و $f(4)=3$ قيم كبرى محلياً.

3) اكتب معادلة المقارب الأفقي ومعادلة المقارب الشاقولي للتابع $\boldsymbol{f}$.

✓ المستقيم الذي معادلته $x=2$ مقارب شاقولي للخط C .

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$.

4) أكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 0.

✓ التابع غير اشتقاقي عند النقطة التي فاصلتها 0 فهو يقبل مماس شاقولي معادلته $x=0$.

☒ انتبه : ((لا تكتب $y=0$ أو $y=1$)) .

5) جد حلول المتراجحة $\boldsymbol{f'(x)\geq 0}$.

✓ $]-\infty,0[\cup]2,4]$

التمرين الثالث : نجد جانباً جدول تغيرات f، أجب عن الأسئلة التالية :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-1\ \|\|\ +1$	$+$
$f(x)$	$2 \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

1) عين مجموعة تعريف التابع $\boldsymbol{f}$.

✓ $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

♥ ملاحظة : التابع عند $\{0\}$ فقط غير اشتقاقي بينما هو معرف عندها.

2) كم حلاً للمعادلة $\boldsymbol{f(x)=2}$ ؟

✓ يوجد حل وحيد ضمن المجال $]0,+\infty[$.

☒ انتبه : عند $-\infty$ التابع لا يصل إلى العدد 2 إنّما **يقترب** منه ، إذاً عند $-\infty$ يكون $f(x)\neq 2$.

3) أكتب معادلة نصف المماس للخط C عند النقطة التي فاصلتها صفر من اليمين.

✓ $y = f'(0^{+})(x-0) + f(0) = 1(x) + 0 \Rightarrow y = x$

4) جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$.

✓ $]-\infty, 0[$

5) عين مجموعة تعريف التابع $g(x) = ln\big(f(x)\big)$.

✓ $g(x) = ln(f(x)) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty\,, 0[\, \cup\,]0\,, +\infty[$

<u>التمرين الرابع :</u> نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $[0, +\infty[$، والمطلوب :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1) دل على القيم الحدية، مبيناً نوعها.

✓ $f(0) = 0$ قيمة صغرى محلياً، و $f(1) = 2$ قيمة كبرى محلياً.

2) ما حلول معادلة $f(x) = 0$.

✓ $x = 0$ و $x = 3$

3) جد حلول المتراجحة $f(x) \le 0$.

✓ $x \in [3, +\infty[\cup \{0\}$

♥ لو كان الطلب $f(x) < 0$ تكون حلول المتراجحة $]3, +\infty[$

4) جد حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$.

✓ $x \in [1, +\infty[$

5) اكتب معادلة كل مماس في نقط تقاطعه مع محور الفواصل.

✓ معادلة المماس الشاقولي في المبدأ $x = 0$.

☒ انتبه : ((لا تكتب $y = 0$)).

معادلة المماس في النقطة $(3,0)$:

$$y_{\Delta} = f'(3)(x-3) + f(3) = -\sqrt{3}(x-3) + 0 \Rightarrow y_{\Delta} = -\sqrt{3}(x-3)$$

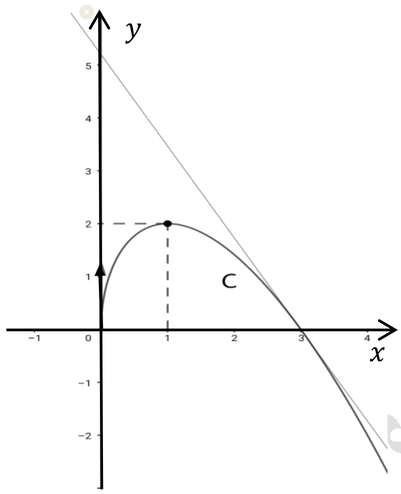
6) جد $\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)}{x-3}$.

✓ نلاحظ أن النهاية تحمل حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ ، و نلاحظ أنّ :

$$\lim_{x\to3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{f(x) - 0}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$$

وحسب تعريف العدد المشتق يكون $\lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = -\sqrt{3}$.

7) ارسم المماسات ثمّ ، ارسم الخط البياني.



8) بعد رسم التابع ! جد حلول حلول المتراجحة $f(x) < 3\sqrt{3} - \sqrt{3}x$.

✓ $f(x) < 3\sqrt{3} - \sqrt{3}x \Rightarrow f(x) < -\sqrt{3}(x-3) \Rightarrow f(x) < y_\Delta \Rightarrow x \in [0,3[\cup]3,+\infty[$

❖ ملاحظة : نأخذ مجموعة القيم التي تحت المماس، و لا نأخذ القيمة $\{3\}$ ضمن المجال لأن السؤال ليس $f(x) \leq y_\Delta$.

أسئلة الدورات و النماذج الوزارية المتعلقة بقراءة جدول تغيرات

النموذج الوزاري الرابع :

تجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

✓ حل وحيد.

2) ما عدد القيم الحدية ؟

✓ يوجد قيمة كبرى محلياً واحدة فقط $f(1) = 1$.

☒ انتبه : عند $+\infty$ التابع لا يصل إلى العدد 0 إنّما **يقترب** منه لهذا لا يوجد قيمة حديّة عند $+\infty$.

3) أكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$.

✓ $f(1) = 1$ و $f'(1) = 0$ تكون معادلة المماس $y = 1$ ((مماس أفقي)).

النموذج الوزاري السادس :

تجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C .

✓ المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب شاقولي للخط C .

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي للخط C .

المستقيم الذي معادلته $y = 3$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط C ؟

✓ لا يوجد.

♥ إذا طلب التعليل نقول لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$.

3) هل يوجد للخط C مماسات أفقية ؟

✓ لا يوجد.

4) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

✓ التابع f مستمر، ومتناقص تماماً على المجال $]-1,1[$ ، و $0\in f(]-1,1[)=\mathbb{R}$ إذاً للمعادلة حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

النموذج الوزاري العاشر :

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	4	↗	6

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=6$ ، وأيضاً $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$.

2) اذكر قيمة حدية للتابع وبين نوعها.

✓ $f(2)=0$ قيمة صغرى محلياً .

3) هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع ؟

✓ $f(5)=4$ ليست قيمة حدية ((المشتق لم يغير إشارته)).

4) أكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع.

✓ المستقيم الذي معادلته $y=6$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$.

المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب أفقي للخط C عند $-\infty$.

5) أكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=ln(f(x))$.

✓ $g(x)=ln(f(x))\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\backslash\{2\}=]-\infty\,,2[\,\cup\,]2\,,+\infty[$

الامتحان النصفي الموّحد دورة عام 2017 :

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف والمستمر على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	-2	↗	4	↗	$+\infty$

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وأيضاً $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$.

2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C .

✓ المستقيم الذي معادلته $y=3$ مقارب أفقي للخط C عند $-\infty$.

3) هل $f(2) = 4$ قيمة حدية للتابع ؟

✓ $f(2) = 4$ ليست قيمة حدية ((المشتق لم يغير إشارته)).

4) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ ؟

✓ يوجد حلّان مختلفان.

دورة عام 2018 الثانية :

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1)جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ وأيضاً $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع f.

✓ المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب أفقي للخط C عند $-\infty$.

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

✓ يوجد حلّان مختلفان.

4) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f.

✓ $f(2) = -1$

دورة عام 2019 الأولى :

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ وأيضاً $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C .

✓ المستقيم الذي معادلته $y = 3$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$.

3) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

✓ $f(-1) = -2$

4) احسب $f(]-1,2[)$.

✓ $f(]-1,2[) =]-2,4[$

♥ لو كان الطلب احسب $f([-1,2])$ كان الجواب $f([-1,2]) = [-2,4]$ أي نتقيد بإغلاق أو فتح المجال حسب السؤال.

☒ انتبه : لو كان الطلب احسب $f(]2,+\infty[)$ كان الجواب $f]2,+\infty[=]3,4[$ وليس $]4,3[$ لأن التابع متناقص على المجال.

ملاحظات قراءة جداول التغيرات

دورة 2020 الإضافية :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب :

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ وأيضاً $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2) دل على القيم الحدية للتابع f مبيناً نوعها.

✓ $f(0) = 2$ صغرى محلياً، و $f(4) = 6$ كبرى محلياً.

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

✓ لها حل وحيد.

4) جد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

✓ $]0,4[$

إضافي: اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها صفر.

✓ التابع لا يقبل الاشتقاق عند هذه النقطة بالتالي فهو يقبل مماس شاقولي معادلته $x = 0$.
☒ انتبه : ((لا تكتب $y = 0$ أو $y = 2$))

دورة 2021 الثانية :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ خطه البياني C والمطلوب :

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، واكتب معادلة المقارب الأفقي .

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، وأيضاً $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ، وأيضاً المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب افقي عند $+\infty$.

2) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

✓ لها حل وحيد .
☒ انتبه : عند $+\infty$ التابع لا يصل إلى الصفر إنما **يقترب** منه ، إذاً عند $+\infty$ يكون $f(x) \neq 0$.

3) دل على القيمة الحدية وبين نوعها .

✓ $f(1) = \frac{1}{e}$ كبرى محلياً.

4) جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.

✓ $]0,1[$

إضافي: احسب $f([1,+\infty[)$.

✓ $f([1,+\infty[) = \left]0,\frac{1}{e}\right]$.
☒ انتبه : بما أنّ التابع متناقص على المجال السابق فإننا عند أخذ صورة المجال نأخذها من اليمين إلى اليسار.

دورة 2022 الأولى :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	2

تأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C.

المطلوب:

1) جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

2) اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C.

✓ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط البياني C.

المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب أفقي للخط البياني C عند $+\infty$.

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

✓ يوجد حلّان مختلفان.

4) ما هي حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟

✓ $x\in\,]-\infty,-2[\backslash\{1\}$ أو بالشكل $]-\infty,1[\,\cup\,]1,2[$.

5) إضافي : جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$.

♥ أو بالشكل: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=f\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=f(2)=0$، فقط عندما يكون جواب نهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ ينتمي إلى مجموعة تعريف التابع.

6) إضافي: جد المستقر الفعلي للتابع.

✓ $f(]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[)=\overbrace{]-\infty,+\infty[}^{f(]-\infty,1[)}\cup\overbrace{[0,+\infty[}^{f(]1,2])}\cup\overbrace{[0,2[}^{f(]2,+\infty[)}=\,]-\infty,+\infty[$.

انتهى ما يتعلق بسؤال قراءة جدول التغيرات