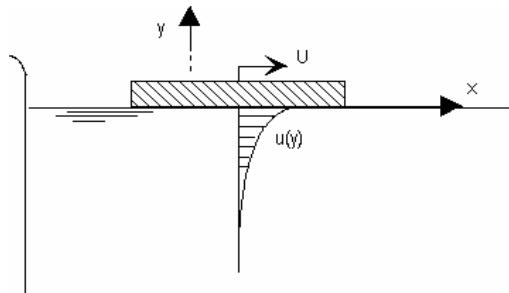


1 تعریفات أساسیة

1.1 تُطلق كلمة **مائع** بشكل عام على السوائل والغازات. ومتناهياً المواقع تُعني باستنباط العلاقات الأساسية التي تحكم حركة و سكون المواقع. وتضم وسائل هذا الاستنباط النماذج الرياضية التي تُبني على ما يعرف بقوانين الحفظ الأساسية، إضافةً إلى التجربة حين تقصّر الوسائل النظرية عن الاستنباط.
يُعرف المائع بأنه المادة التي يتغير شكلها باستمرار عند تعرضها لاجهاد قصبي،
مهما صغر هذا الإجهاد.



الشكل 1.1

يتضح معنى هذا التعريف من التجربة البسيطة الموضحة في الشكل (1.1) حيث نرى جسمًا صلبًا يتعرض لقوة أفقية صغيرة تعمل على تحريكه في اتجاه x الموجب. طبقة السائل المتاخمة للجسم تتحرك بسرعة تساوي تماماً سرعة الجسم. ويلاحظ في التجربة

تحرك طبقات السائل الأبعد فالأبعد بسرعات تقل تدريجياً في اتجاه y السالب حتى تختفي تماماً. وهذه هي السمة المميزة للموائع، ولا تُعرف في غيرها إذا ضعف الإجهاد القصبي المبذول.

1.2 **نظام الوحدات المستخدم في هذا الكتاب هو النظام العالمي للوحدات (SI).**
القائمة أدناه تبين وحداته الأساسية.

الضغط	القدرة	الطاقة	القوة	درجة الحرارة	الزمن	الكتلة	الطول
Pa	W	J	N	K	s	kg	m
باسكال	وات	جول	نيوتون	كلفن	ثانية	كيلوغرام	متر

ويمكن اشتقاق وحدات المتغيرات الأخرى من الوحدات أعلاه. كما يمكن استخدام المعامل $E3$ أو 10^3 ومشتقاته إذا صارت أو كبرت قيمة المتغير كما يلي:

10^{-6}	10^{-3}	10^6	10^3
E-6	E-3	E6	E3
μ	m	M	k
مايكرو	ملي	ميغا	كيلو

1.3 الكمية المتصلة

يمكن اعتبار المائع كمية متصلة إذا كانت أصغر مسافة في التحليل أكبر كثيراً من متوسط المسار الحر للجزئين. وبصدق هذا الاعتبار على كل التحليلات الواردة في هذا الكتاب.

1.4 الكثافة

باعتبار أن الحجم V_0 هو مكعب أصغر مسافة ترد في التحليل و تستوفي شرط الكمية المتصلة فإن الكثافة ρ تعرف كما يلي:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow V_0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \right)$$

حيث m الكتلة بالكيلوغرام و V الحجم بالمتر المكعب و وحدة الكثافة .kg/m³

1.5 الكثافة النسبية s

هي كثافة المادة منسوبة إلى الكثافة المعيارية للماء ، وهي . 1000kg /m³

$$s = \rho / \rho_w$$

1.6 قانون الغاز الكامل

$$\rho = R\rho T (1.1)$$

يربط القانون الضغط المطلق للغاز p بالدرجة المطلقة للحرارة T و الكثافة ρ . R ثابت . الغاز و قيمته للهواء . 287J K⁻¹kg⁻¹

1.7 السريان الانضغاطي والسريان الانضغاطي

يوصف السريان بأنه انضغاطي إذا كانت تغيرات الكثافة فيه معتبرة. أما إذا كانت تغيرات الكثافة صغيرة نسبياً فعنده يوصف السريان بأنه لانضغاطي.

1.8 السريان الرتيب

هو السريان الذي لا تتغير صفاته مع الزمن عند أي موضع محدد.

1.9 السريان المنتظم

يوصف السريان بأنه منتظم عند مقطع إذا كانت قيمة كل من خواصه ثابتة في كل نقاط المقطع .

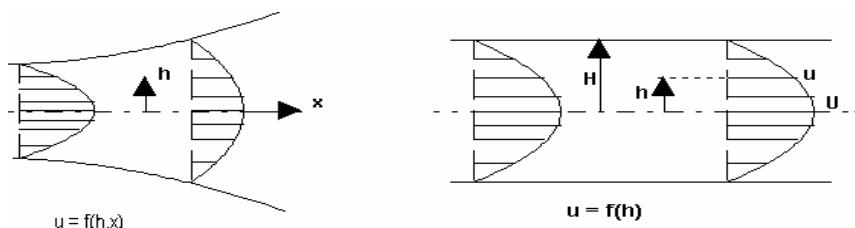
1.10 خط الانسياب

يُعرف خط الانسياب بأنه الخط الذي تشكل المماسات له في كل أجزائه اتجاهات السرعة في وقت محدد.

1.11 أبعاد السريان

يوصف السريان بأنه أحادي، ثنائي أو ثلاثي البعد بناءً على العدد الأدنى من الإحداثيات المكانية التي يمكن أن يوصف بها.

الشكل (1.2) يعطي مثالاً لسريان أحادي البعد وآخر ثنائي البعد، حيث تعتمد السرعة على الإحداثي h في المثال الأول وتعتمد على الإحداثيين x و h في الثاني.



الشكل 1.2

1.12 السريان الصفائي والسريان الماء

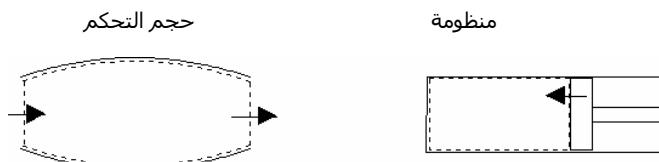
يتصف السريان الصفائي بثبات الشكل والأنسيابية بحيث يمكن اعتبار طبقاته تنزلق فوق بعضها البعض في شكل صفائح أو رقائق، بينما يتصرف السريان الماء بالعنف والاضطراب.

يمكن استنباط الأسس التي تحكم تحول السريان من إحدى الحالتين إلى الأخرى بتأمل سريان الماء من صبورة. عند فتح الصبورة قليلاً نلاحظ انتظاماً في سريان الماء وثباتاً في شكله دون اضطراب كأنه مكون من صفائح أسطوانية تنزلق على بعضها البعض. يوصف هذا السريان بأنه صفائي. بزيادة معدل السريان يمُور الماء ويضطرب وي فقد انتظامه ويوصف حينئذ بأنه ماء.

ويمكن إثبات أن التحول من الحالة الصفائية إلى الحالة الماء عند معدل سريان ثابت يحدث بزيادة السرعة أو زيادة القطر أو إنفاس الزوجة. ويجتمع المتغيرات الثلاثة مقدار لا يُبعد يعرف بعدد رينولز Re يحكم التحول المذكور. ويحدث هذا التحول للسريان في الأنابيب في المدى $2000 \geq Re_c \geq 4000$. ويسمى عدد رينولز الذي يحدث عنده التحول **عدد رينولز الحرج** Re_c .

يتسم توزيع السرعة للسريان الصفائي داخل الأنابيب بشكل المقطع المكافئ بينما يكون هذا التوزيع معقداً نسبياً في حالة السريان الماء.

1.13 المنظومة وحجم التحكم



الشكل 1.3

المنظومة معنية بكمية محددة من المادة يحدوها عن بقية المائع جدار تخيلي أو حقيقي ويمكن أن يتغير موقعها وشكلها مع الوقت. حجم التحكم منطقة محددة وثابتة في المكان، ويمكن أن تتغير المادة داخل حجم التحكم مع الزمن. الشكل (1.3) يبين أمثلة للمفهومين.

1.14 القوة الجسمية والقوة السطحية

القوة الجسمية هي التي تنشأ عن كتلة الجسم مثل قوة الجاذبية والقوة الكهرومagnطيسية. والقوة السطحية هي تلك التي تعمل على سطح المادة وتحصر في الضغط والقص.

1.15 الإجهاد

الإجهاد هو القوة السطحية العاملة على وحدة مساحة

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right)$$

و للإجهاد مركبتين إداهما عمودية والأخرى مماسة

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_n + \underline{\sigma}_t$$

ويُفضل في ميكانيكا الموات استخدام تعبير الضغط μ في الاتجاه المتعامد حيث

$$\underline{\sigma}_n = -p\underline{n}$$

ويستخدم تعبير الإجهاد القصي τ في الاتجاه المماس حيث

$$\underline{\sigma}_t = \underline{\tau}$$

وبذلك

$$\underline{\sigma} = -p\underline{n} + \underline{\tau} (1.2)$$

1.16 الضغط المقياسي والضغط الفراغي

الضغط المقياسي = الضغط المطلق - الضغط الجوي

الضغط الفراغي = - الضغط المقياسي

1.17 الإجهاد القصي

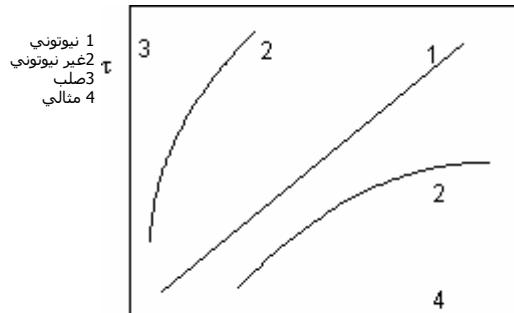
تنسب إلى نيوتن العلاقة النظرية بين الإجهاد القصي τ وممالي السرعة في الاتجاه

المتعامد $\frac{\partial u}{\partial y}$ للسريان الصفائي وهي:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} (1.3)$$

وقد أجريت تجارب للتحقق من المعادلة معملياً و عُلم أنها صحيحة لمعظم الموائع المستخدمة في التطبيقات الهندسية مثل الماء والهواء والوقود النفطي. و سُمي ثابت المعادلة μ باللزوجة أو الزوجة المطلقة أو الزوجة الحركية، ووحدتها Pa.s . وتعرف الموائع التي تستجيب لهذه العلاقة عند درجة حرارة ثابتة بالموائع **النيوتونية** -

الشكل (1.4).-



الشكل (1.4)

تُسمى فصيلة الموائع التي لا تُعطي علاقة خطية بين القص وممالي السرعة موائع **لانيوتونية**. أمثلة لها البيوية والنفط الشمعي.

تؤثر درجة الحرارة في قيمة الزوجة حيث تنقص مع ازدياد الحرارة للسوائل وتزيد مع ازدياد الحرارة للغازات .
تُعرّف الزوجة الكينماتية τ كما يلي:

$$\tau = \frac{\mu}{\rho}$$

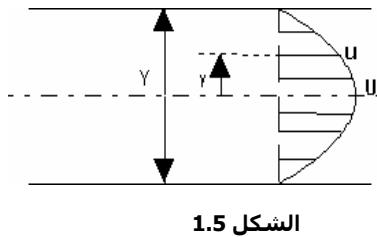
ووحدتها m^2/s .

1.18 السريان اللزجي والسريان اللازلجي

يُعرف السريان بأنه لزجي إذا نشأت فيه قوة قص ذات مقدار تعتبر مقارنةً بالقوى الأخرى و إلا فيعتبر السريان اللازلجي. و بمراجعة المعادلة (1.3) نرى أن مقدار القص ينبع بحاصل ضرب الزوجة وممالي السرعة. فإذا عظم إحداهما أو كلاهما عظمت القوة اللزجية و سُمي السريان لرجياً .

مثال

يسري ماء سرياناً صفائحيًّا رتبًّا في مجرٍ متوازي الجدران عرضه 20mm . السرعة في خط النصف 0.1m/s . درجة حرارة الماء 25°C . قدر الإجهاد على الجدران.



توزيع السرعة في مقطع المجرى للسريان الصفائحي

$$\frac{u}{U} = 1 - \left(\frac{2y}{Y} \right)^2$$

المعادلة (1.3) تربط الإجهاد القصي بالسرعة عند الجدار

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w$$

$$\frac{du}{dy} = U \left[-\frac{8Y}{Y^2} \right] = -8 \frac{YU}{Y^2}$$

$$\frac{du}{dy} \Big|_w = \frac{du}{dy} \Big|_{y=\pm\frac{Y}{2}} = 4 \frac{U}{Y} = 20 s^{-1}$$

قائمة خواص الماء عند 25°C (الملحق أ)

$$\rho = 997.1 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.897 \text{E-}6 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\mu = \rho \nu = 8.94 \text{E-}4 \text{ Pa.s}$$

$$\tau_w = 0.018 \text{ Pa}$$

اتجاه القوة اتجاه x الموجب.

مثال

يتتحرك مكبس قطره 50.0mm داخل اسطوانة قطرها الداخلي 50.1mm. أحسب النقصان في المائة في القوة المقاومة عندما ترتفع درجة حرارة المُزلق بفعل الحركة من 20°C إلى 120°C.

استخدم الخواص المدرجة أدناه لزيت التزلق وافترض ثبات سرعة المكبس وثبات أبعاده.

$T^{\circ}C$	$\nu \times 10^6, m^2/s$	$\mu \times 10^3, Pa.s$
20	9.2	8.2
30	7.5	6.6
40	6.5	5.5
60	4.7	4.0
80	3.7	3.2
100	3.2	2.46
120	2.8	2.10

$$F = \text{القوة المقاومة}$$

$$F = \tau A_w = A_w \mu \frac{du}{dr}$$

بافتراض ثبات السرعة والأبعاد

$$F = \text{const. } \mu$$

$$\frac{\Delta F}{F} 100 = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}} 100$$

خواص الزيت

$$\mu_{20} = 8.2E-3 \text{ Pa.s}, \mu_{120} = 2.1E-3 \text{ Pa.s}$$

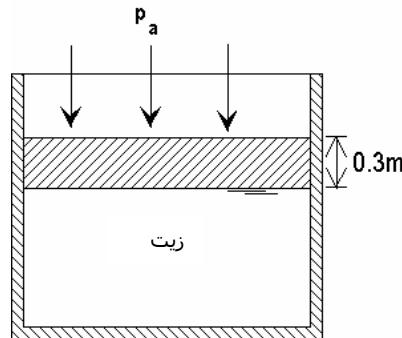
$$\Delta \mu = 6.1E-3$$

$$\frac{\Delta F}{F} (100) = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}} (100) = 74\%$$

مسائل

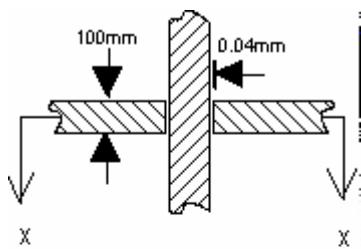
1.1 اللزوجة المطلقة للهواء عند درجة الحرارة 35°C تساوي $2.0\text{E-}5 \text{ Pa.s}$. أحسب اللزوجة الكينماتية عندما يكون الضغط 0.1 MPa [$17.7 \text{ E-}6 \text{ m}^2/\text{s}$].

1.2 يوضح الشكل (1.6) مقطع اسطوانة ومكبس مستو تماماً على سطح زيت. سمك المكبس 0.3m . بافتراض أن الضغط الجوي 0.101MPa و أن الكثافة النسبية للمكبس المصنوع من الصلب 7.8 أحسب الضغط على سطح الزيت. [0.124MPa]

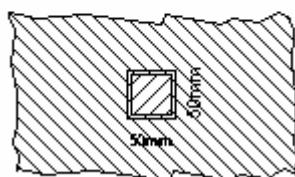


الشكل 1.6

1.3 جسم يزن 500N ومساحة سطحه السفلي 0.2m^2 ينزلق على سطح مائل بزاوية 30° مع الأفقي . لزوجة المُزلق 0.2 Pa.s . وسرعة الجسم المتحرك 1.0m/s . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المُزلق خطى أحسب سمك طبقة المُزلق. [0.16mm]



1.4 يوضح الشكل (1.7) قضيب ذو مقطع مربع، ضلعه 50mm يتحرك في مجرى معدني مغطى بمُزلق لزوجته الكينماتية $5\text{E-}6 \text{ m}^2/\text{s}$. وكثافته النسبية 0.86 . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المُزلق خطى أحسب قوة الإعاقبة اللزجية على القضيب عندما تكون سرعته 20m/s . [43 N]



المقطع XX

الشكل 1.7

القائمة أدناه توضح نتيجة تجربة لسريان ماء درجة حرارته 20°C في قناة عرضها

1.5
:100mm

y (mm)	40	30	20	10	5	0	-5
u (m/s)	5.0	8.0	11.0	12.5	13.0	13.2	13.0

حسبت u من الخط المركزي للقناة . أرسم توزيع السرعة وأثبت إمكانية تقريرها للعلاقة الرياضية:

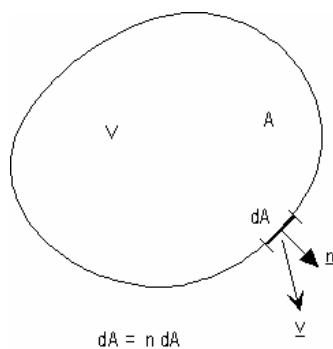
$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

حيث a_0 و a_1 و a_2 ثوابت.

[0.5Pa] أحسب الإجهاد القصي عند الجدارين مستخدماً العلاقة أعلاه .

2 المعادلات الأساسية في ميكانيكا الموضع

تُرسى في هذا الفصل القواعد الأساسية لميكانيكا الموضع. وهي معادلات الحفظ الثلاث: حفظ الكتلة وحفظ الطاقة وحفظ كمية التحرك. ويقدم لذلك بتعريف متوجه السريان الذي يشكل عنصراً مشتركاً في كل معادلات الحفظ.



الشكل 2.1

2.1 متوجه السريان

الحجم التحكمي الموضح في الشكل (2.1) حجمه V و مساحة سطحه A . بالتركيز على المساحة التفاضلية dA فإن الكتلة الخارجية عبرها هي dm في الوقت dt ليصبح معدل السريان $d\dot{m}$. سرعة السريان في الموضع هي المتوجه \underline{v} بزاوية α مع المتوجه أحادي الطول \underline{n} والمتعمد على المساحة dA حيث

$$d\dot{A} = \underline{n} dA$$

$$d\dot{m} = \rho dV = \rho \underline{v} \cos \alpha dA = \rho \underline{v} \cdot dA$$

معدل سريان الكتلة عبر كل السطح

$$\dot{m} = \iint_A \rho \underline{v} \cdot dA \quad \dots \dots \dots \quad (2.1)$$

نُعرّف متوجه سريان الكتلة كما يلي:

متوجه سريان الكتلة = (متوجه السرعة) (الكتلة في وحدة حجمية) = $\rho \underline{v}$

وبالمثل:

متوجه سريان الطاقة = (متوجه السرعة) (الطاقة في وحدة حجمية)

$$= \rho \left(e + \frac{\underline{v}^2}{2} + gz \right) \underline{v}$$

وبالمثل:

متجه سريان كمية التحرك = (متجه السرعة) (كمية التحرك في وحدة حجمية)

$$= \rho u \underline{\mathbf{v}}, \rho v \underline{\mathbf{v}}, \rho w \underline{\mathbf{v}}$$

في الاتجاهات x, y, z على التوالي.

وبذلك فان معدل سريان الطاقة عبر السطح $= A$

$$\iint \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{A} (2.2)$$

ومعدل سريان كمية التحرك عبر السطح $= A$

$$\iint_A \rho v (\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{A}) (2.3)$$

2.2 حفظ الكتلة

صيغة قانون حفظ الكتلة مطبقاً على سريان المائع:
"معدل تراكم الكتلة داخل الحجم التحكمي مضافاً إليه خالص معدل سريان الكتلة إلى
خارج الحجم التحكمي يساوي صفر "

$$\iiint_V \rho dV = \text{الكتلة الكلية داخل الحجم التحكمي}$$

معدل ازدياد الكتلة داخل الحجم التحكمي

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

لأن حدود التكامل لا تعتمد على الوقت.

من المعادلة (2.1) خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي

$$= \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A}$$

و بذلك

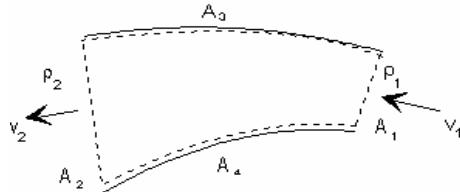
$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

المعادلة (2.4) هي معادلة حفظ الكتلة في الصورة التكاملية.

تطبيق على سريان رتب أحادي البعد (الشكل 2.2):

الحد الأول في المعادلة (2.4) يساوي صفر نسبياً لرتابة السريان.

السطحان (3) و (4) لا تعبّر عنهما كتلة ولذلك يصير فيهما تكامل الحد الثاني من معادلة الكتلة صفرأً.



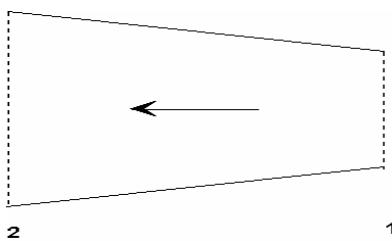
الشكل 2.2

تُختزل معادلة الكتلة بذلك إلى الصورة :

$$\iint_{A1} \rho_1 \underline{v}_1 \cdot d\underline{A}_1 + \iint_{A2} \rho_2 \underline{v}_2 \cdot d\underline{A}_2 = 0$$

و بملاحظة أن المتجه \underline{A} يتجه إلى خارج الحجم التحكمي

$$\begin{aligned} - \iint_{A1} \rho_1 \underline{v}_1 \cdot d\underline{A}_1 + \iint_{A2} \rho_2 \underline{v}_2 \cdot d\underline{A}_2 &= 0 \\ - \rho_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{A}_1 + \rho_2 \underline{v}_2 \cdot \underline{A}_2 &= 0 \\ \rho \underline{v} \cdot \underline{A} &= \text{ثابت} \end{aligned} \quad (2.5)$$



مثال

سريان لانضغاطي في مجرى ناشر

A_1	A_2	v_1	ρ
0.2 m^2	0.3 m^2	2.0 m/s	1000 kg/m^3

أحسب السرعة المتوسطة في المقطع (2) ومعدل سريان الكتلة.

السرعات v_1 و v_2 هما السرعات المتوسطتان في المقطعين (1) و (2). بذلك يمكن استخدام معادلة الكتلة في صورتها أحادية البعد (2.5)

$$\begin{aligned} \rho v A &= \text{ثابت} \\ \rho &= \text{ثابت} \quad \text{بما أن السريان لا انضغاطي} \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 \\ v_2 &= v_1 (A_1 / A_2) = 2.0 (0.2 / 0.3) = \mathbf{1.33 \text{ m/s}} \\ m &= \rho v A = \rho v_1 A_1 = 1000(2.0)0.2 = \mathbf{400 \text{ kg/s}.} \end{aligned}$$

معادلة الاستثمارية:

يطلق هذا الاسم عامّةً على معادلة حفظ الكتلة في صورتها التفاضلية.
بدءً من المعادلة (2.4) يمكن تحويل الحد الثاني من صورة التكامل السطحي إلى صورة التكامل الحجمي باستخدام نظرية التباعد - أنظر المعادلة (3) في الملحق (ب).

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V (\nabla \cdot \rho v) dV = 0$$

تبعاً لقوانين التكامل تكون قيمة المُكامل صفرًا إذا كانت قيمة التكامل صفرًا و كانت حدود التكامل اختيارية.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \dots \dots \dots (2.6b)$$

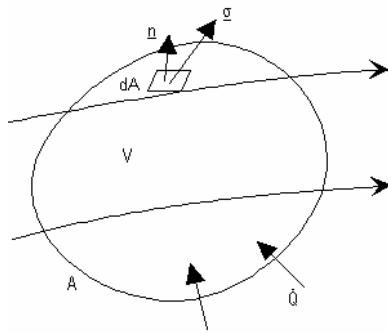
حيث u, v, w هي مركبات السرعة في الاتجاهات x, y, z ، وفي حال أن السريران لا إنضغاطي

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \quad (2.7)$$

2.3 حفظ الطاقة

تُستمد معادلة حفظ الطاقة من القانون الأول للحركية الحرارية مطبقاً على حجم تحكمي :

"معدل تراكم الطاقة داخل الحجم التحكمي مضافة إليه خالص معدل سريان الطاقة إلى خارج الحجم التحكمي بانتقال الكتلة يعادل القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي مضافة إليها معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي".



الشكل 2.4

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(e + \frac{v^2}{2} + gz) dV + \iint_A \rho(e + \frac{v^2}{2} + gz) v \cdot dA = \iint_A (\sigma \cdot v) dA + P + \dot{Q}$$

الحدان الأوليان في جانب المعادلة الأيمن يعبران عن القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي، و \dot{Q} معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي.

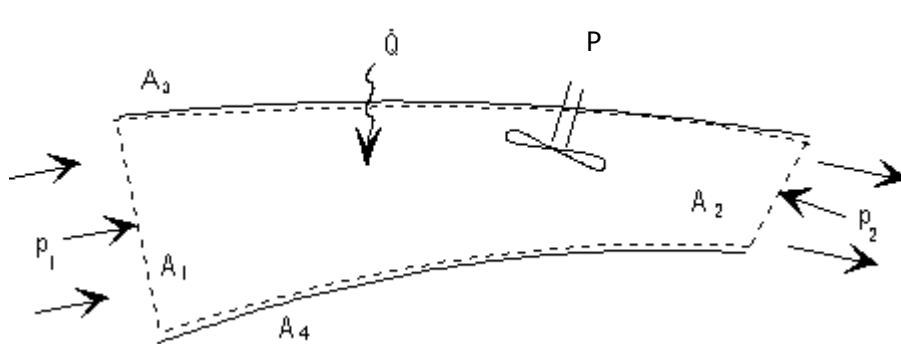
بتجاهل اللزوج يصبح الإجماد

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [\rho(e + \frac{v^2}{2} + gz)] dV + \iint_A \rho(e + \frac{v^2}{2} + gz) v \cdot dA = - \iint_A p v \cdot dA + P + \dot{Q}$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [\rho(e + \frac{v^2}{2} + gz)] dV + \iint_A \rho(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz) v \cdot dA = P + \dot{Q}(2.8)$$

تطبيق على سريان رتب أحادي البعد:

رتابة السريان تعني أن الحد الأول في المعادلة (2.8) يساوي صفر، و لا انتقال للكتلة عبر الأسطح (3) و (4). وبذلك تختزل المعادلة إلى الصورة



الشكل 2.5

$$-\rho_1(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1)v_1A_1 + \rho_2(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2)v_2A_2 = P + \dot{Q}$$

بالاستعانة بمعادلة حفظ الكتلة للسريان الرتب أحادي البعد (2.5)

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = m$$

$$m(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1) + P + \dot{Q} = m(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2)$$

$$\frac{e_1}{g} + \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{mg} + \frac{\dot{Q}}{mg} = \frac{e_2}{g} + \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2(2.9)$$

$$\dot{Q} = 0$$

في كثير من التطبيقات الهندسية يمكن تجاهل انتقال الحرارة

$$T_1 = T_2, \quad e_1 = e_2$$

وتجاهل التغير في درجة الحرارة

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

ويمكن اعتبار السريان لا انضغاطي

فتبيح المعادلة (2.9)

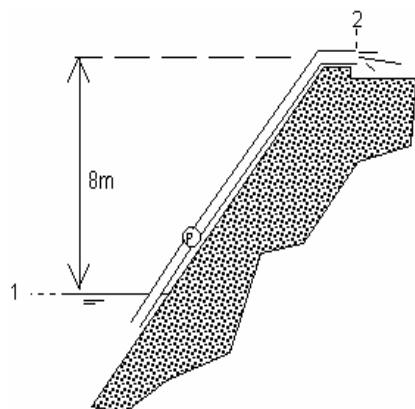
في حال أن القدرة P موجبة فإنها تمثل مضخة و إذا كانت سالبة فتمثل عنفة.
في حال عدم وجود مضخة أو عنفة بين المقطعين (1) و (2) تصبح المعادلة (2.10.18)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \quad = \quad \text{السمت الالكتري (2.11)}$$

أي: السمت الكلّي = سمت الرفع + سمت السرعة + سمت الضغط

مثال

**يُعرَفُ الْأَتَيُّ عَنْ وَحْدَةِ صَخْ تَرْفَعِ الْمَاءِ مِنْ
النَّبْلِ إِلَى أَعْلَى الْحُرْفِ:**



الرفع: 8m
معدل السريان الحجمي 15 l/s
قطر الأنابيب صعيد المضخة: 154mm
قطر الأنابيب سافل المضخة: 102mm
كتافة الماء: 1000kg/m³

المطلوب حساب:

- (أ) السرعة صعيد وسائل المضخة
(ب) القدرة الخارجة من المضخة إذا
اعتبرنا السربان لا لرجي.

الشكل (2.6)

(أ) معادلة حفظ الكتلة (2.5) للسريان الإنضغاطي تُعطي

$$v_u \cdot A_u = v_d \cdot A_d = V = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_u = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.154)^2} = 0.81 \text{ m/s}$$

$$v_d = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.102)^2} = 1.84 \text{ m/s}$$

حيث اللاحقة u تعني صعيد المضخة و اللاحقة d تعني سافل المضخة.

(ب) معادلة الطاقة لهذه الحالة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{m g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$P = m g \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) \right]$$

المقطعين (1) و (2) مفتوحان للجو و يعني ذلك

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$p_2 - p_1 = 0$$

كما أن $z_2 - z_1 = 8$

السطح (1) سطح النيل: سرعة نقصانه صفر !

$$v_1 = 0, v_2 = v_d$$

معدل سريان الكتلة m

$$m = \rho V = 1000(0.015) = 15.0 \text{ kg/s}$$

وتصبح المعادلة

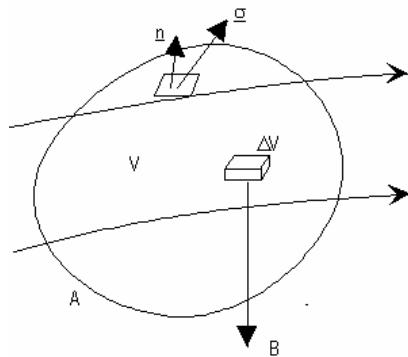
$$P = (15.0)(9.81) \left[\frac{(1.84)^2}{2(9.81)} + 8 \right] = 1203 \text{ W}$$

القدرة الخارجية = **1.2 kW**

2.4 حفظ كمية التحرك

يُستمد هذا القانون من قانون نيوتن الثاني للحركة مطبقاً على حجم تحكمي:

"معدل تراكم كمية التحرك داخل الحجم التحكمي مضافةً إليه خالص معدل سريان كمية التحرك إلى خارج الحجم التحكمي بإنتقال الكتلة يعادل مجموع القوى المؤثرة على المائع".



الشكل (2.7)

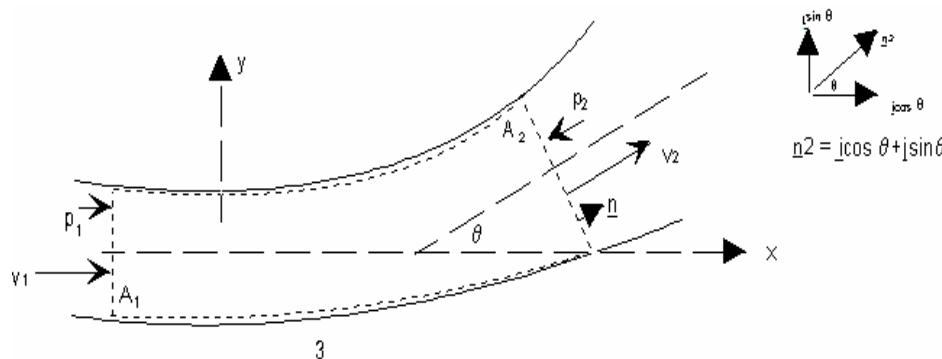
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA \quad \dots \dots \dots (2.12)$$

نسترجع هنا أن الإجهاد $\underline{\sigma}$ يساوي مجموع المتجهين $\rho \underline{n}$ - و $\underline{\tau}$. كما أن \underline{B} هي القوة الجسمية على وحدة حجمية و تمثل في الأحوال الأعم في قوة الجاذبية على وحدة حجمية أي $\underline{B} = -\rho g \underline{k}$.

القوة الناشئة عن السريان داخل أنبوب منحنٍ:

نسعى هنا للاستفادة من معادلة حفظ كمية التحرك (2.12) لنُقِرِّ القوة المؤثرة على الأنبوب المنحنٍ نتيجة لسريان رتيب لا انضغاطي أحادي البعد.



الشكل (2.8)

نفترض كذلك اسْتَوَاءُ الخط المركزي للأنبوب على المستوى $y-x$. بتطبيق هذه الافتراضات على المعادلة (2.12) تُجُوز رتابة السريان إلغاء الحد الأول. ويعطي الحد الثاني:

$$\iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = -\rho \underline{v}_1^2 A_1 \underline{i} + \rho \underline{v}_2^2 A_2 \underline{n}_2 \\ = -\rho \underline{v}_1^2 A_1 \underline{i} + \rho \underline{v}_2^2 A_2 (\cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j})$$

والحد الثالث:

$$\iiint_V \underline{B} dV = \iiint_V -\rho g \underline{k} dV = -\rho g V \underline{k}$$

عند تطبيق الحد الرابع على السطحين (1) و (2) نراعي أن مركبة القص عليهما تساوي الصفر و يُمثّل الحد الرابع بالضغط وحده. أما على السطح المنحنٍ (3) فكلاً من القص والضغط ذوا قيم غير صفرية، إلا أن توزيعهما على السطح غير منتظم. ويمكن استخلاص تأثيرهما سوياً كرد فعل \underline{R} من السطح (3) على الحجم التحكمي.

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$\begin{aligned}
\iint_A \underline{\sigma} dA &= \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1 dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2 dA_2 + \iint_{A_3} \underline{\sigma}_3 dA_3 \\
&= \iint_{A_1} p_1 dA_1 \underline{i} + \iint_{A_2} -p_2 dA_2 (\cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j}) + \underline{R} \\
&= p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \cos \theta \underline{i} - p_2 A_2 \sin \theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}
\end{aligned}$$

و تصبح معادلة حفظ كمية التحرك

$$\begin{aligned}
&- \rho \mathbf{v}_1^2 A_1 \underline{i} + \rho \mathbf{v}_2^2 A_2 \cos \theta \underline{i} + \rho \mathbf{v}_2^2 A_2 \sin \theta \underline{j} \\
&= -\rho g \underline{k} + p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \cos \theta \underline{i} - p_2 A_2 \sin \theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}
\end{aligned}$$

تعطي المعادلة المتجهة أعلاه ثلاث معادلات مقدارية للحركة في الاتجاهات x, y, z

$$R_x = m (\mathbf{v}_2 \cos \theta - \mathbf{v}_1) + p_2 A_2 \cos \theta - p_1 A_1$$

$$R_y = m \mathbf{v}_2 \sin \theta + p_2 A_2 \sin \theta$$

$$R_z = \rho g V$$

وبالرمز لقوى المائع على الأنابيب في الاتجاهات الثلاث بـ

$$F_x = m (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cos \theta) + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta \dots \quad (2.13a)$$

$$F_y = -m \mathbf{v}_2 \sin \theta - p_2 A_2 \sin \theta \dots \quad (2.13b)$$

$$F_z = -\rho g V \dots \quad (2.13c)$$

مثال

أحسب القوى في الاتجاهات x, y, z على كوع قائم الزاوية حجمه الداخلي 2 لتر و قطر مقطعيه 100mm نتيجة لسريان زيت كثافته 850 kg/m^3 بمعدل 30 l/s إذا عُلم أن الضغط في المقطع الداخلي 0.20 MPa والضغط في المقطع الخروجي 0.19 MPa . اعتَبر أن محور الكوع يطابق المستوى $y-x$.

تطابق الافتراضات في هذا المثال افتراضات المعادلات (2.13)

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4}(0.1)^2 = 7.85E-3 \text{ m}^2$$

$$\dot{m} = \rho V = (850)30E-3 = 25.5 \text{ kg/s}$$

$$v_1 = v_2 = V/A = 30E-3 / 7.85 E-3 = 3.82 \text{ m/s}$$

والزاوية θ لهذه الحالة تساوي 90°

$$\cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$$

وبذلك تعطي المعادلات (2.13)

$$F_x = 1668 \text{ N}, \quad F_y = -1590 \text{ N}, \quad F_z = -17 \text{ N}.$$

مسائل

2.1 أنبوب دائري المقطع نصف قطره R_1 موصل على التوالي بأنبوب أصغر نصف قطره R_2 . توزيع سرعة السريان في الأنابيب (1) يرتبط بالمسافة نصف القطرية r حسب العلاقة

$$v = b \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right]$$

حيث b ثابت . أحسب :

(أ) معدل السريان الحجمي

(ب) السرعة الفصوى في الأنابيب (1)

(ج) متوسط السرعة في الأنابيب (2) .

$$[\frac{1}{2}\pi b R_1^2, b, \frac{1}{2}b(R_1/R_2)^2]$$

2.2 يُعبر عن مركبات السرعة u و v في الاتجاهين x و y لسريان لا انضغاطي بالمعادلتين:

$$u = b(x^2 + xy - y^2)$$

$$v = b(-2xy - 2yz + 2z^2)$$

حيث b ثابت. بتحقيق حفظ الكتلة استخلص مركبة السرعة في الاتجاه z ، علماً بأن محصلة السرعة عند نقطة الأصل تساوي صفر. $[b(z^2 - yz)]$

2.3 سريان غير رتيب أحادي البعد سرعة التيار فيه u حيث $u = u(x, t)$ ، يعبر فيه عن الكثافة ρ بالمعادلة

$$\rho = \rho_0 (2 - \cos \omega t)$$

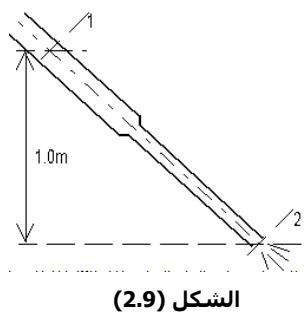
حيث ρ_0 و ω ثوابت.

حدد العلاقة $u(o, t) = U$ إذا كانت U

$$[U - \frac{\omega x \sin \omega t}{2 - \cos \omega t}]$$

2.4 يوضح الشكل (2.9) أنبوب يستخدم لنقل سائل كثافته 917 kg/m^3 . الضغط القياسي عند المقطع (1) 1.8 kPa و عند المقطع (2) (ضغطاً جوياً). مساحة المقطع العرضي (1) 0.012 m^2 و المقطع (2) 0.01 m^2 أحسب السرعة عند المقطعين (1) و (2) ومعدل السريان الحجمي متجلهاً الاحتراك و الفواد الأخرى.

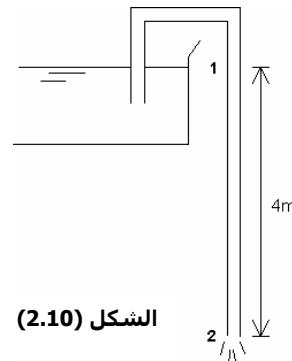
$$[7.32 \text{ m/s}, 8.78 \text{ m/s}, 88 \text{ l/s}]$$



الشكل (2.9)

2.5 يوضح الشكل (2.10) مستودع لسائل يجري إفراغه بخرطوم قطره 50 mm . متجلهاً اللزج وغيره من الفواد أحسب معدل السريان الحجمي. بين إمكانية زيادة معدل السريان بزيادة المسافة الرأسية (1-2).

$$[17 \text{ l/s}]$$

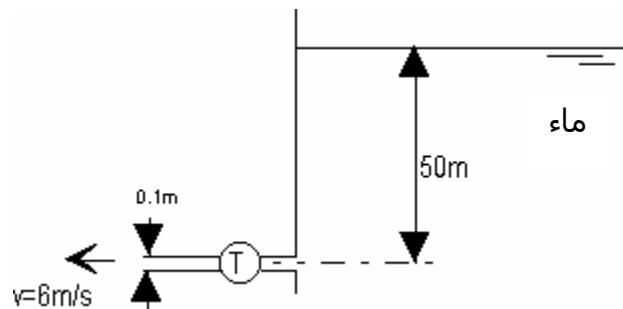


الشكل (2.10)

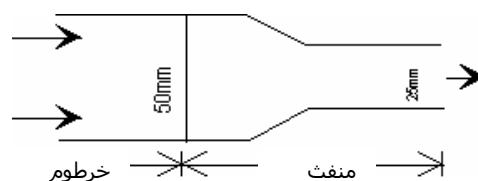
2.6 تستخدم مضخة لضخ منتج نفطي كثافته النسبية 0.86 بمعدل 1.5 l/s . القطر الصعيدي للأنبوب 20 mm والقطر السافل 15 mm . سمت الضغط الفراغي صعيد المضخة 1.35 m وسمت الضغط القياسي سافل المضخة يساوي 7 m . أحسب (أ) السمت الناتج من المضخة (ب) القدرة المنتقلة من المضخة للمنتج النفطي .

$$[10.9 \text{ m}, 137 \text{ W}]$$

2.7 أحسب القدرة الداخلة للعنفة T المبينة في الشكل (2.11) متجاهلاً الفوائد.
[22.3kW]



الشكل 2.11



الشكل (2.12)

2.8 يوضح الشكل (2.12) مقدمة خرطوم إطفاء. باعتبار أن السمت الكلي القياسي المستخدم يساوي 100m أحسب مقدار واتجاه القوة الناتجة عن المنفذ على أيدي رجل الإطفاء .

[1.1kN]

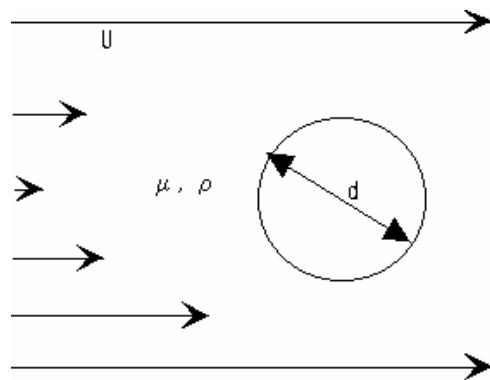
2.9 يسري ماء عبر كوع صافي إلحناء 180° إلى الجو . مساحة المقطع الدخولي 0.0025m^2 و مساحة المقطع الخروجي 0.0005m^2 . السرعة في المقطع الدخولي 30m/s . متجاهلاً الفوائد وأثر الجاذبية أحسب مقدار القوة اللازمة لثبيت الكوع و حدد اتجاهها .

[40.5kN, 0]

3 التحليل البعدى والمذبحة

3.1 أساس التحليل البعدى

يبدأ عادةً تحليل المسألة الهندسية بوضع الأنماذج الرياضي المبني على المعادلات الحاكمة والتي تشمل قوانين الحفظ و العلاقات الثانوية. و من ثم السعي لحل هذا الأنماذج والحصول على فهم كامل للحالة الهندسية المدروسة. إلا أن هناك قطاع كبير من المسائل الهندسية لا يمكن بلوغ الفهم الوافي لدوالها بالنمط النظري الخالص. و يتطلب بالتالي إجراء تجارب معملية لإدراك ما لم يدرك بالطرق النظرية. في ميكانيكا الموائع يتمثل ذلك في كل ما يتعلق بقوى الإعاقه و حركة السريان المائي. التجربة إذن تشكل جانباً رئيسياً من التحليل الهندسي. و نهدف من هذا الباب إلى التبصير بالأسس التي تنظم التجربة. على وجه التحديد أساس تسمية العدد الأدنى من المتغيرات التي ينبغي إجراء التجارب فيها. و سنتخذ مثلاً تصويرياً نوضح من خلاله الأساس المذكورة و هو مسألة الإعاقه الناتجة عن سريان المائع عبر كُرة .



الشكل 3.1

معلوم عن هذه الحالة أن قوة الإعاقة D على كرة مستقرة في تيار رتيب تتأثر بسرعة التيار U ولزوجة المائع μ وكتافته ρ وقطر الكرة d ، وبذلك

$$f(D, d, U, \rho, \mu) = 0$$

للحصول على العلاقة بين الإعاقة D والمتغيرات الأربع الأخرى معملياً فإن الأسلوب المباشر هو تثبيت قيم ثلاثة من العناصر الأربع وأجراء تجربة لتحديد تغيير D مع العنصر الرابع. ثم تكرار التجربة لعلاقة D مع العناصر الثلاثة الأخرى كل على حدة. ونلاحظ صعوبة هذا الأسلوب المباشر في العمل التجاري للآتي :

- (1) يحتاج لجهد كبير و وقت طويل إذا كثرت عدد العناصر
 - (2) صعوبة أو استحالة تثبيت بعض العناصر وترك عناصر أخرى متعلقة بها متغيرة. في المثال المطروح - مثلًا - يتم التغيير في الزوجة عادةً بتغيير المائع. إلا أن تغيير المائع يغير في الكثافة أيضًا!
- والبديل لهذا الأسلوب المباشر في التجربة هو إجراء التجارب بين مقادير لا بعدية مكونة من هذه العناصر بدلاً من إجراءها على العناصر نفسها.

نحصل على المقدار اللا بعدي بأن نضرب أو نقسم العناصر على بعضها البعض بحيث يصبح

المقدار الناتج بغير أبعاد. عدد رينولز - على سبيل المثال - يساوي $\frac{\rho U d}{\mu}$. و تعطي

وتصبح بذلك وحدته 1 ، فهو إذن مقدار $\frac{(kg m^{-3})(ms^{-1})(m)}{(kg m^{-1}s^{-1})}$ مكوناته الوحدات لابعدى.

كيف يمكننا إذن تحويل العناصر الحاكمة للسريان إلى مقادير لا بعدية؟ نتبع في ذلك ما يعرف بنظرية بكنغهام.

نظريّة بكنغهام (نظريّة Π)

" إذا شملت مسأّلة ما العناصر: p_1, p_2, \dots, p_n ، حيث $f(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ وشُملت العناصر مجتمعة m بعدها فإن عدد المقادير الابعدية المستقلة تكون " $(n - m)$

عند تطبيق النظريّة على مثال الإعاقات على الكرة فإن: $n = 5$ و $m = 3$. والأخرّي هي الطول والكتلة والوقت (L, M, T) ، ولا نجد في العناصر الخمسة بعد آخر . يصبح بذلك عدد المقادير الابعدية المستقلة لهذه الحالة $n - m = 2$. أي انه يمكن اختصار المتغيرات إلى اثنين بحيث $f(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ حيث Π_1 و Π_2 مقادير لا بعديّة مكونة من عناصر المسألة الخمسة.

كيف يمكننا تحديد المقادير الابعدية ؟

(1) نبدأ باختيار m عنصراً أساسياً من العناصر n . تستوفّي العناصر الأساسية المختارّة الشروط التالية :

(أ) يستثنى العنصر الأول p_1 .

(ب) تشمل أبعاد العناصر المختارّة مجتمعةً كل الأبعاد الأساسية للسريان.

(ج) لا يكون أي من العناصر الأساسية المختارّة أحد مضاعفات عنصر أساسي آخر .

بالعودة إلى مثال الإعاقات على الكرة يمكن أن نختار ρ, U, d كعناصر أساسية.

(2) تكون $(n - m)$ معادلة بعديّة تربط العناصر الأساسية بكل من العناصر الأخرى.

في مثال الإعاقات على الكرة :

$$\Pi_2 = \rho^{\alpha_4} U^{\alpha_5} \rho^{\alpha_6} \mu \quad \text{و} \quad \Pi_1 = \rho^{\alpha_1} U^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3} D$$

توازن الأبعاد في المعادلة الأولى يعني

$$M^0 L^0 T^0 = L^{\alpha_1} \left(\frac{L}{T} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{M}{L^3} \right)^{\alpha_3} \left(\frac{ML}{T^2} \right)^1$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{\alpha_{3+1}} L^{\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + 1} T^{-\alpha_2 - 2}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + 1 = 0$$

$$a_3 + 1 = 0$$

$$-a_2 - 2 = 0$$

$$a_1 = -2, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = -1$$

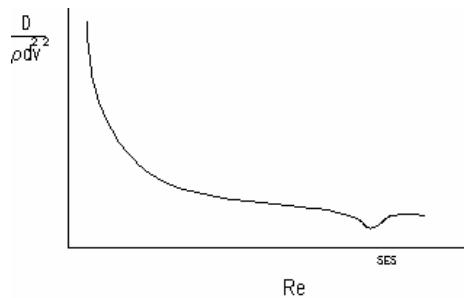
$$\Pi_1 = d^2 U^2 \rho^{-1} D = \frac{D}{\rho d^2 U^2}$$

و للمعادلة الثانية

$$\Pi_2 = d^4 U^5 \rho^{n6} \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a4} \left(\frac{L}{T}\right)^{a5} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a6} \left(\frac{M}{LT}\right)^1$$

$$a_4 = -1, \quad a_5 = -1, \quad a_6 = -1$$



$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D}$$

و تحدد العلاقة النهائية بتجربة يرصد فيها

: Π_2 مع Π_1 تغير

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

الشكل 3.2

3.2 بعض المقاييس الابعدية المهمة في ميكانيكا الموائع

(1) عدد رينولز Re

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$$

يبرز عدد رينولز كمقدار مهم حيثما يكون **التأثير اللزج** مهماً مقارناً بالتأثيرات الأخرى.

(2) عدد ماخ M

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث c سرعة الصوت. ويكون عدد ماخ مهماً في دراسة السريان إذا أعتبر السريان انضغاطياً.

(3) عدد فرود Fr

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$$

حيث g تسارع الجاذبية. ويكون عدد فرود مهماً حيث تكون قوة **الجاذبية** ذات قيمة مقدرة مقارنةً بالقوى الأخرى.

3.3 النمذجة

تعني النمذجة إجراء تجارب معملية على **أنموذج** للجسم الذي يراد استخدامه في الواقع. تتبع الحاجة للنمذجة من صعوبة أو استحالة إجراء التجارب على الجسم الأصل. و تنشأ الصعوبة المذكورة لكبر حجم الجسم مثلاً أو صغره في أحوال أخرى أو صعوبة إعداد الأحوال التشغيلية الملائمة. تتطلب النمذجة إذن إعداد أحوال معملية لإجراء التجارب على الأنماذج ثم التكهن بالأحوال الفعلية للحركة عند استخدام الجسم الكامل في بيئته. وبسمى هذا الجسم الكامل في مرحلة التجرب **الطراز البدائي**.

تتطلب النمذجة استيفاء ما يُعرف بالتشابه الفيزيائي بين الأنماذج و الطراز البدائي. ويعني هذا في ميكانيكا المواقع:

- (أ) وجود تشابه هندسي بين الأنماذج و الطراز البدائي
- (ب) وجود تشابه حركي بين الأنماذج و الطراز البدائي. و يؤدي التشابه الحركي إلى تساوي القوى الابعدية في الجسمين.

مثال

أنماذج كرة يساوي قطره نصف قطر الطراز البدائي. يُراد استخدام الطراز البدائي في الهواء عند سرعة نسبية تساوي 15 m/s و يراد استخدام الماء في المعلم.

- (أ) كم يجب أن تكون سرعة الماء لاستيفاء التشابه الحركي؟
- (ب) إذا كانت قوة الإعاقة في المعلم 5 N كم تكون قيمتها في حالة الطراز البدائي؟

$$\rho_a = 1.15 \text{ kg/m}^3 \quad \mu_a = 1.6E-5 \text{ Pa.s}$$

$$\rho_w = 1E3 \text{ kg/m}^3 \quad \mu_w = 8E-4 \text{ Pa.s}$$

(أ) المعادلة الابعدية الخاصة بهذه الحالة

$$\frac{D}{\rho v^2 d^2} = f\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)$$

استيفاء التشابه الحركي يعني

$$\left. \frac{\rho v d}{\mu} \right|_p = \left. \frac{\rho v d}{\mu} \right|_m$$

$$v_m = v_p \frac{d_p}{d_m} \frac{\mu_m}{\mu_p} \frac{\rho_p}{\rho_m} = 15(2) \frac{8E-4}{1.6E-7} = 1.7 \text{ m/s}$$

(ب) لإيجاد الإعاقبة على الطراز البدائي

$$\left. \frac{D}{\rho v^2 d^2} \right|_m = \left. \frac{D}{\rho v^2 d^2} \right|_p$$

$$D_p = D_m \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{v_p}{v_m} \right)^2 \left(\frac{d_p}{d_m} \right)^2 = 5 \frac{1.15}{1E3} \left(\frac{15}{1.7} \right)^2 2^2 = \mathbf{1.8 N}$$

مسائل

3.1 كرّة من الفولاذ قطرها d وكتافتها ρ وضعت في مائع لزج كتافته ρ ولزوجته المطلقة μ . عقب التسارع الأولى بفعل الجاذبية g ثبتت السرعة إلى أسفل عند v . استخلص تعبيرًا رياضيًّا يربط المقاييس الابعدية الحاكمة للسربان، مستخدماً التحليل البعدى.

$$f\left(\frac{\rho v d}{\mu}, \frac{v}{\sqrt{gd}}, \frac{\rho_s}{\rho}\right) = 0$$

3.2 الفقد في الضغط Δp لسربان لأنضغاطي في أنبوب مستقيم يعتمد على كثافة المائع ρ ، متوسط السرعة v ، قطر الأنبوب d ، طول الأنبوب L ، اللزوجة الحركية μ وارتفاع الخشونة k استخلص تعبيرًا عن Δp مستخدماً التحليل البعدى.

3.3 أنبوب قطره 15mm يستخدم لنقل الماء. لوحظ أن السربان يمور عندما ترتفع السرعة إلى 0.15m/s . كم تكون السرعة الصفائحية القصوى لسربان هواء في أنبوب قطره 50mm و ذي خشونة مماثلة لأنبوب الماء. اعتبر $v_w = 1.7E-5 \text{ m}^2/\text{s}$ و $v_a = 1.7E-6 \text{ m}^2/\text{s}$

$[0.77 \text{ m/s}]$

3.4 أنموذج لقاع سفينة مصغر إلى خُمس حجمها أختبر في نفق هوائي بسربان كثافته 25kg/m^3 و لزوجته $1.85E-5\text{Pa.s}$ و سرعة تساوي 35m/s . قيست قوة الإعاقة على الأنموذج فكانت 65kN . قدر السرعة والإعاقة على السفينة الكاملة في ماء البحر بكثافة تساوي 1025kg/m^3 و لزوجة $1.65E-3\text{Pa.s}$.

3.5 تطير طائرة فوق سطح البحر بسرعة 450m/s . على أي سرعة تطير لتحقيق تشابه القوى الانضغاطية على ارتفاع :

(أ) 1600m (ب) 800m ؟

تتغير درجة الحرارة مع الارتفاع على النحو :

1600	800	0	الارتفاع (m)
217	236	288	درجة الحرارة (K)

و تتغير سرعة الصوت مع درجة الحرارة على النحو: $c = const.\sqrt{T}$

4 السريان الانضغاطي في الأنابيب

4.1 أثر الاحتكاك على السريان في الأنابيب

عند استخلاص معادلة الطاقة (2.10) تجاهلنا الأثر اللزجي للسريان باعتبار أن الإجهاد القصي في المعادلة الأساسية للطاقة يساوي الصفر. على الرغم من وجود أحوال تطبيقية تُخول هذا التبسيط إلا أن معظم التطبيقات الهندسية للسريان في الأنابيب تستدعي الاهتمام بالآثار اللزجية. وبذلك نحتاج إلى تعديل المعادلة (2.10) التي تخص السريان الرتيب أحادى البعد اللالزجي لتشمل السريان اللزجي. ونُقدم هنا بالقول أن الإضافة المطلوبة تعتمد على علاقات تجريبية في حالة السريان المائر بينما يمكن في حالة السريان الصفائحى استخلاصها بعلاقات نظرية بحثة.

بدءً من المعادلة (2.10)، وهي القاصرة عن معالجة الاحتكاك

$$\frac{P}{mg} = \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \right]$$

فهي بذلك تنص على أنه إذا أريد نقل مائع من الموضع (1) إلى الموضع (2) لمقابلة رفع يساوى $z_2 - z_1$ متر و زيادة في الضغط من p_1 إلى p_2 و زيادة في السرعة من v_1 إلى v_2 فاننا نحتاج إلى سمت ضخ يعادل $\frac{P}{mg}$ متراً. ويدو قصور المعادلة وعدم توافقها مع الواقع إذا نظرنا في حالة سريان في أنبوب طويل وأفقى لا نحتاج فيه لرفع ولا زيادة في الضغط أو السرعة فتشير المعادلة أعلاه إلى عدم الحاجة إلى مضخة ($P=0$)!

يدل التحليل أعلاه إلى الحاجة إلى إضافة حد رابع إلى المعادلة لمقابلة الأثر الاحتكاكي. ولأن وحدات كل الحدود طولية (m) فإن الحد المضاف يكون أيضاً ذا وحدة طولية ويسمى سمت الاحتكاك h_f .

وبذلك نصحح كتابة المعادلة إلى الصورة

$$\frac{P}{mg} = (z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \dots \dots \dots (4.1)$$

للوصول إلى العلاقة بين h_f ومتغيرات السريان الأخرى نطبق المعادلة (4.1) على سريان في أنابيب ثابت المقطع وأفقي بين موضعين (1) و (2) لا تخللها مضخة. فتصبح المعادلة

النقصان في الضغط هنا ناتج كلباً عن الاحتكاك.

للتمهيد لإيجاد العلاقة التجريبية المطلوبة بين Δp_f وعناصر السريان نستخدم التحليل البعدي - الباب III - ونبدأ بتحديد العناصر المؤثرة :

حيث k متوسط ارتفاع الخشونة في باطن الأنبو.

اللهم أذن له في قبرنا واجعله من ذريته وآله وآله

k(mm)	مادة الأنابيب	k(mm)	مادة الأنابيب
0.15	حديد مخرصن	0.0015	أنابيب مسحوبة
0.25	حديد زهرة	0.045	فولاذ تجاري
0.3 - 3.0	خرسانة	0.045	حديد مطاوع
1.0 - 10.0	فلالذ مبرشم	0.12	حديد زهرة مسفلت

العلاقة (1) تدل إلى عدد العناصر $n = 7$ وعدد الأبعاد الأساسية $m = 3$ ، وهي الكتلة والطول والوقت . بذلك تكون عدد المقاييس اللاعدية المستقلة الحاكمة للسريان أربعة.

نستخراج التحليل العدلي لهذه الحالة - المسألة (3.2) - هي :

$$\frac{\Delta p_f}{\rho V^2} = f_2(\text{Re}, \frac{L}{d}, \frac{k}{d})$$

تدل التجربة إلى أن $\frac{L}{d}$ تتغير خطياً مع $\frac{\Delta p_f}{\rho v^2}$

$$\frac{\Delta p_f}{\rho v^2} = \frac{L}{d} f_3(\text{Re}, \frac{k}{d})$$

و يقتضى العرف اعتبار مقام المقدار يسار المعادلة

$$\frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{L}{d} f(\text{Re}, \frac{k}{d})$$

و بالرجوع إلى المعادلة (4.2)

$$h_f = \frac{v^2}{2g} \frac{L}{d} f(\text{Re}, \frac{k}{d})$$

تعرف هذه بمعادلة دارسي .

يتبين ذلك أن قيمة f في تلك المراجع تعادل ربع قيمتها هنا. كما يمكن استخدام العلاقات الرياضية الآتية لحساب قيمة f :

الملحق (ج) به قائمة عددية تعطي معامل الاحتكاك f بدلالة Re و k/d . ينبع ذلك أن قيمة f في تلك المراجع تضع المعامل 4 في الجانب الأيمن للمعادلة (4.3). ينفي الانبهاد إلى أن بعض المراجع تضيّع المعامل f في أوجه مختلفة.

(أ) للسريان الصفائي

وهذه المعادلة مستخلصة نظرياً ومثبتة بالتجربة .

(ب) للسريان المائر

تعرف العلاقة (4.5) بعلاقة **كولبروك - وابت**. ويمكن ملاحظة التعقيد الناشئ عن أن تظاهر في كلٍ من جانبي العلاقة.

(ج) معايير سوامي للسريان المائز

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(\frac{0.27k}{d} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad \dots \dots \dots \quad (4.6)$$

معادلة سوامي أسهل استخداماً من معادلة كولبروك - وابت نسبة الخطأ فيها لا تتجاوز 2% إذا كانت قيم k/d و Re في الحدود

$$10^{-6} \leq k/d \leq 10^{-2}$$

$$5 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8$$

مثال

أنبوب من الفولاذ التجاري قطره 250mm به سريان ماء بمعدل $0.1\text{m}^3/\text{s}$ و درجة حرارة 35°C .

(أ) قدر فقد في السمت والنقسان في الضغط لمسافة أفقية 100m .

(ب) كم يكون معدل السريان الأقصى اذا اشترط ألا يزيد الفقد الاحتاكي عن 1m ؟

(أ) معادلة دارسي (4.3)

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{q}{A} = \frac{0.1}{\frac{\pi}{4} 0.25^2} = 2.04 m/s$$

: 35°C من قائمة خواص الماء عند

$$\nu = 0.727 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho = 994.1 \text{ kg/m}^3$$

$$Re = \nu d / v = 7E5$$

و هذا يعني أن السريان مائز

$$k/d = 0.045E-3 / 0.25 = 0.00018$$

٤.٦ استخدام معادلة سوامي

$$f = 0.015$$

$$h_f = 0.015 \frac{100}{0.25} \frac{2.04^2}{2(9.81)} = \mathbf{1.3m}$$

النقصان في الضغط = Δp_f

$$\Delta p_f = \rho g h_f = 994.1(9.81)1.3 = \mathbf{12.3\text{kPa}}$$

(ب) اذا اشترط ألا يزيد الفقد الاحتاكي عن 1m فان معادلة دارسي تتخذ الصورة:

نسبة لاعتماد على السرعة^٧ فإن المعادلة أعلاه تحتاج لأسلوب تكرري، و يمكن البدء بافتراض سريان مفترض التمور لاتعتمد^٨ فيه على عدد رينولز، و من ثم السرعة. و يمكن من قوائم السريان الاحتاكي الحصول على^٩ لهذه الحالة بمعرفة الخشونة الابعدية فقط.

عند هذا الافتراض، الابتدائي

باستخدام المعادلة (1) نحصل على

و يمكن الآن الدخول للتقريب الثاني بحساب عدد رينولز ثم المعامل f

$Re = 6.6E5$, $f = 0.015$

و باستخدام المعادلة (1) نحصل على $v = 1.81 \text{ m/s}$

. 0.089 m³/s

مثال

أنبوب من الفولاذ المخرصن قطره الداخلي 78mm وطوله 200m ينقل الماء عند درجة الحرارة 25°C بمعدل $1/5$ m³/s من الموضع (1) إلى الموضع (2) حيث يرتفع الموضع الثاني عن الأول بمقدار 2m . سمت الضغط عند الموضع (1) يساوي 1.0m (فراغي) و الضغط جوي عند الموضع (2) .
المطلوب حساب القدرة الخارجة من المضخة.

25°C مدعى

معادلة الطاقة (4.1) تعطى

$$P = mg \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \right]$$

$v_1 = v_2$ يعني $A_1 = A_2$

$$m = \rho q = (997.1)(7E-3) = 6.98 \text{ kg/s}$$

$$v = q/A = 7E-3 / 4.78E-3 = 1.46 \text{ m/s}$$

$$Re = vd/v = 1.27E5$$

$$k/d = 0.15 / 78 = 0.0019$$

$$f = 0.025$$

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} = 6.88 \text{ m}$$

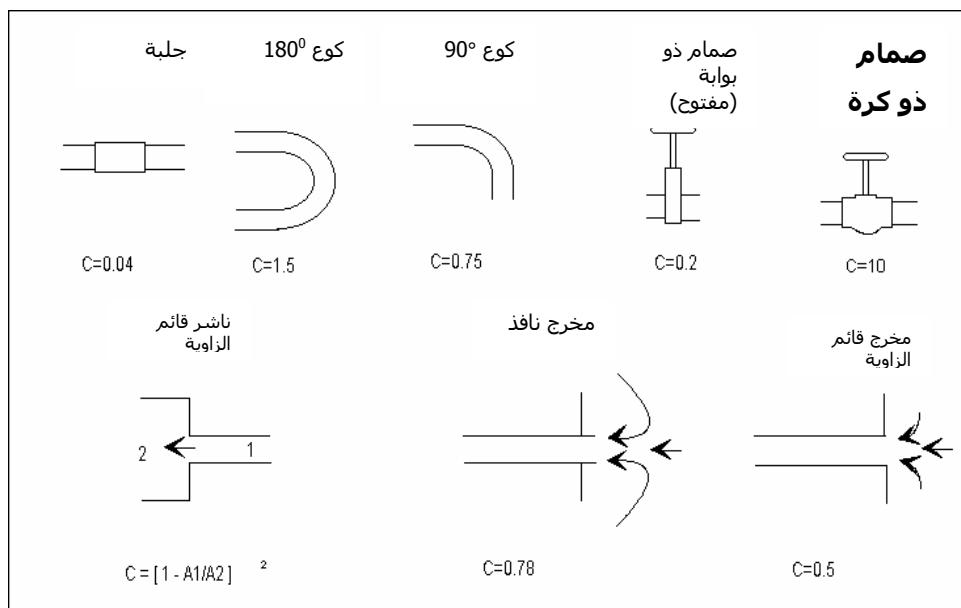
$$P = 6.98(9.81)[2.0 + 1.0 + 6.88] = \mathbf{0.68kW}$$

4.2 الفوائد الموضعية في الأنابيب

نعني هنا بالفوائد في الطاقة الناشئة عن الانحناءات والعوائق في مسار المائع. على نحو ما فعلنا لفقد الاحتكاكى نعدل هنا المعادلة (4.1) بإضافة سمت لفقد الموضعى h

تدل التجارب على أن فقد الموضع h يمكن تقديره بالعلاقة العامة:

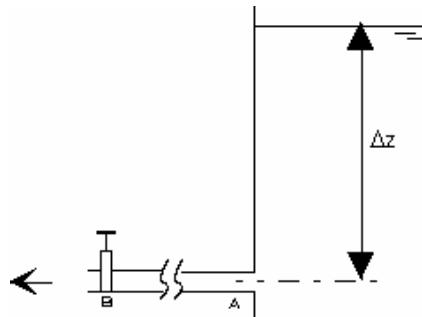
تحدد C لكل نوع من أنواع العوائق بالتجربة . الشكل(4.1) يوضح قيم C لبعض العوائق المألوفة.



الشكل 4.1

مثال

في الشكل (4.2) أدناه الأنابيب A-B من الفولاذ التجاري قطره 150mm وطوله 10m . الصمام المستخدم صمام ذو بوابة مفتوح تماماً. معدل السريان 5 l/s واللزوجة الكينماتية $8E-7 \text{ m}^2/\text{s}$



الشكل 4.2

- المطلوب :
- (أ) الفقد الكلي في السمت
 - (ب) ارتفاع الماء فوق الخط المركزي للأنبوب .

باتخاذ المقطع (1) على سطح السائل في المستودع والمقطع (2) عند مخرج الأنبوب

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$v_1 = 0$$

بالرجوع لمعادلة الطاقة (4.7)

$$P = 0, \quad z_1 - z_2 = \Delta z$$

$$\Delta z = \frac{v_2^2}{2g} + h_f + h_i (1)$$

الفقد الكلي في السمت =

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{q}{A} = \frac{0.05}{0.0177} = 2.83 \text{ m/s}$$

$$Re = vd/v = 0.53E6 \\ (\text{سريان مائر})$$

$$k/d = 0.045 / 150 = 0.0003$$

$$f = 0.016$$

$$h_f = 0.016 \frac{10}{0.15} \frac{2.83^2}{2(9.81)} = 0.44\text{m}$$

$$h_l = \left(\sum C\right) \frac{v^2}{2g} = [0.5 + 0.2] \frac{2.83^2}{2(9.81)} = 0.29\text{m}$$

(أ) الفقد الكلي في السمت

$$= 0.44 + 0.29 = \mathbf{0.73\text{m}}$$

(ب) المعادلة (1)، Δz

$$\Delta z = \frac{2.83^2}{2(9.81)} + 0.73 = 0.41 + 0.73 = \mathbf{1.14\text{m}}$$

4.3 الأنابيب المتفرعة

مثال

يوضح الشكل (4.3) منظومة أنابيب متفرعة. الأنابيب **0** يتفرع إلى الأنابيب **1** و **2** أقطارهما d_1 و d_2 وأطوالهما L_1 و L_2 وارتفاعى الخشونة فىهما k_1 و k_2 . نقطة التفرع هي **A** ونقاط الخروج **B** و **C** جوى - أي صفر مقياسياً. المراد في هذا المثال التوضيحي معرفة معدلى السريان في الفرعين **1** و **2** إذا كان معدل السريان عند الموضع **A** بساوى

$\cdot q_A$

معادلة الطاقة بين الموضعين A و B

و بين الموضعين A , C

بـخـصـم (2) مـن (1)

و باستخدام علاقه دارسي

$$f_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} - f_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{f_1 \frac{L_1}{d_1} + 1}{f_2 \frac{L_2}{d_2} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots \quad (4)$$

حفظ الكتلة :

لأن المتغيرين f_1 و f_2 دوال للسرعتين v_1 و v_2 فإن المعادلتين (4) و (5) كافيتان للحل، ولأن f_1 و f_2 دوال غير بسيطة يفضل إجراء الحل تكتريلاً.

مُعطيات عدديّة :

d_1	d_2	k_1	k_2	L_1	L_2	q_A	V
0.1m	0.2m	0.04mm	0.04mm	100m	100m	0.1m ³	8E-7m ² /s

المعادلة (4) تعطي

المعادلة (5)

المعادلتان (6) و (7) تعطيان

$$v_2 = \frac{12.73 \sqrt{\frac{1000f_1 + 1}{500f_2 + 1}}}{1 + 4 \sqrt{\frac{1000f_1 + 1}{500f_2 + 1}}} \dots \dots \dots (8)$$

التقريب الأول : سريان مفرط التموج (قيمة f لا تعتمد هنا على Re)

$$k_1/d_1 = 0.0004, \quad f_1 = 0.016$$

$$k_2/d_2 = 0.0002, \quad f_2 = 0.014$$

المعادلتان (8) و (7) تعطيان

$$v_1 = 1.86 \text{ m/s}, \quad v_2 = 2.72 \text{ m/s}$$

التقريب الثاني:

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu_1} = \frac{1.86(0.1)}{8E-7} = 2.3E5$$

$$Re_2 = 6.8E5$$

$$f_1 = 0.018$$

$$f_2 = 0.015$$

المعادلتان (8) و (7) تعطيان

$$v_1 = 1.83 \text{ m/s}, \quad v_2 = 2.73 \text{ m/s}$$

التقريب الثالث :

$$Re_1 = 2.3E5$$

$$Re_2 = 6.8E5$$

وهي مطابقة لقيم Re في التقريب الثاني. ويعني ذلك

$$v_1 = 1.83 \text{ m/s}, \quad v_2 = 2.73 \text{ m/s}$$

وبذلك

$$q_B = 0.014 \text{ m}^3/\text{s}, \quad q_C = 0.086 \text{ m}^3/\text{s}.$$

سؤال للطلاب: أحسب السمت المطلوب عند الموضع A ؟

مسائل

4.1 خط أنابيب أفقي من الحديد الزهرة قطره الداخلي 250mm ينقل نفطاً خاماً درجة حرارته 30°C ب معدل 50 l/s . قدر الفقد في السمت بسبب الاحتاك للكيلومتر الواحد.

(عند درجة الحرارة 30°C خذ كثافة النفط 880 kg/m^3 و لزوجته $7.5E-6 \text{ m}^2/\text{s}$)
[5.1m]

4.2 أنبوب أفقي من الحديد المُخرصن قطره 50mm و طوله 100m ينقل نفطاً خاماً عند درجة الحرارة 20°C ب معدل 1.0 l/s .

- (أ)وضح أن السريان في المدى الحرج لعدد رينولز.
- (ب) أحسب الفقد الاحتاكي إذا كان السريان صفائحيا.
- (ج) أحسب الفقد الاحتاكي إذا كان السريان مائراً.

(عند درجة الحرارة 20°C خذ كثافة النفط 890 kg/m^3 و لزوجته $9.2E-6 \text{ m}^2/\text{s}$)
[0.6m, 1.3m]

4.3 يراد ضخ كيروسين درجة حرارته 30°C عبر أنبوب قطره 300 mm وخشونته 0.25mm لمسافة 1500m ب معدل $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$. يمكن اعتبار الضغط متساوي عند مدخل ومخرج الأنبوب. قدر القدرة المطلوبة من المضخة. (عند 30°C خذ كثافة الكيروسين 800 kg/m^3 ولزوجته $2E-6 \text{ m}^2/\text{s}$).
[8.2 kW]

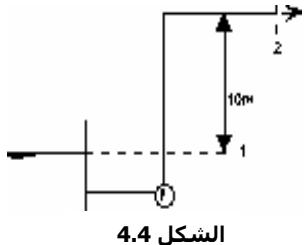
4.4 يسري الماء في أنبوب أفقي ناعم قطره 15mm . قيس الضغط في صعيد قطاع من الأنبوب طوله 50m و وجد مكافئاً لـ 12m من الماء و عند المخرج مساوياً للضغط الجوي. باعتبار اللزوجة الكينماتية تساوي $1E-6 \text{ m}^2/\text{s}$. أحسب معدل السريان الحجمي.
[0.3 l/s]

4.5 يصل بلدتي هجليل و صمت الجزء الرئيسي من الخط الناقل للنفط الخام. تقع هجليل على ارتفاع 400m فوق سطح البحر و صمت على ارتفاع 930m . المسافة بين الموقعين 1400km تقريباً. القطر الداخلي للأنبوب 0.7m . بافتراض أن السريان نيوتونى و أن معدله $0.35 \text{ m}^3/\text{s}$ و كثافته $2E-5 \text{ m}^2/\text{s}$ و لزوجته 860 kg/m^3 و متوسط ارتفاع خشونة الأنابيب $4.5E-5 \text{ m}$ أحسب:

- (أ) سمت الفقد الاحتاكي
 (ب) السمت الكلي المطلوب
 (ج) قدرة الضخ الكلية المطلوبة.
 يمكن تجاهل الفوا قد الثانوية.

[1960m, 2490m, 7.4MW]

4.6 أنبوب ناشر قائم الزاوية قصير الطول قطره الصعيدي 0.35m وقطره السافلي 0.7m يسري فيه الماء بمعدل $0.3\text{m}^3/\text{s}$. ضغط الماء في الجانب الصعيدي 5.0kPa . أحسب الفقد في السمت بسبب الناشر وأحسب الضغط في الجانب السافلي منه.
 $[0.28\text{m}, 6.8 \text{ kPa}]$



4.7 يوضح الشكل (4.4) منظومة ضخ تستخدم لرفع زيت عبر أنبوب قطره 50mm وطوله 100m وخصوشه 0.1mm بمعدل 5 l/s . كثافة الزيت 870 kg/m^3 ولزوجته الحركية 0.008 Pa.s . أحسب القدرة المطلوبة من المضخة.
 أحسب النسبة المئوية للخطأ في إجابتكم عند تجاهل الفوائد الموضعية.
 $[1.36\text{kw}, 1.3\%]$

4.8 يعرف ما يلي عن منظومة أنابيب بفرعين (1) و (2):
 $d_1 = 200\text{mm}$, $d_2 = 100\text{mm}$
 $k_1 = k_2 = 0.2\text{mm}$
 $L_1 = L_2 = 15\text{m}$

عند مخرج الأنابيب (2) صمام ذو كرة مفتوح كلياً. المعدل الكلي للسريان عند نقطة التفرع $8.5 \text{ E-7}\text{m}^2/\text{s}$ وتساوي اللزوجة الكينماتية للسائل 100 l/s .
 (أ) أحسب معدل السريان في الأنابيب.
 (ب) أحسب معدل السريان إذا أستبعد الصمام.
 $[92.4 \text{ l/s} ; 7.6 \text{ l/s} ; 86.1 \text{ l/s} ; 13.8 \text{ l/s}]$

ميكانيكا المواقع عند الاتزان النسبي 5

5.1 المعادلة الأساسية

يغطي هذا الباب ميكانيكا المواقع عند ما لا تكون لعناصر المائع حركة بالنسبة لبعضها البعض. ويشمل ذلك ما يعرف بسكن المواقع كما يشمل حركة المائع كوحدة واحدة تتقارب ثابت.

وبالنظر إلى معادلة كمية التحرك (2.12) فإن الاتزان النسبي يعني أن المقدار المعبر عن سريران التحرك عبر السطح التحكمي يساوي صفر أي:

$$\oint_A \rho \cdot v \cdot (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = 0$$

كما أن الإجهاد القصي يساوي صفر ، فيصبح الإجهاد $\sigma = -pn$ ونضيف الفرض الخاص بلانضباطية السربان فتصبح المعادلة (2.12)

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) \, dV = \iiint_V \rho g \underline{k} \, dV - \iint_A p \underline{n} \, dA$$

وبالرمز لمتجه التسارع ب \ddot{a} حيث

$$\iiint_V \rho \underline{a} \, dV + \iiint_V \rho g \underline{k} \, dV + \iint_A p \underline{n} \, dA = 0$$

و باستخدام نظرية التباعد - الملحق ب :

$$\iint_A p \underline{n} \, dA = \iiint_V \nabla p \, dV$$

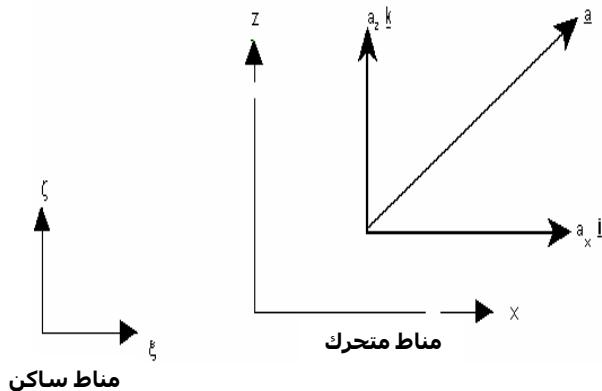
فتصرح معاذلة كمية التحرك

$$\iiint_V [\rho \underline{a} + \rho g \underline{k} + \nabla p] dV = 0$$

ويمى أن الحجم التحكمى ٧ اختبارى ونتيجة التكاما، صفر :

$$\rho a + \rho g k + \nabla p = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (5.1)$$

5.2 توزيع الضغط في مجال ثانوي الأبعاد لسائل في حاوية تتحرك بتسارع ثابت



الشكل 5.1

ندرس هنا حركة حاوية تتحرك بتسارع ثابت $\ddot{\zeta}$ بالنسبة للمناطق الساكن $\zeta - \xi$.
بالمقابل المناطق $x-z$ مثبت على الحاوية المتحركة.

بما أن التسارع ثابت

$$\text{المقدار } \ddot{\zeta} = a_x = \text{ثابت}, \quad \text{المقدار } \ddot{\zeta} = a_z = \text{ثابت} \quad (5.1)$$

بالتعويض في المعادلة

$$\rho(a_x i + a_z k + g k) + \frac{\partial p}{\partial \xi} i + \frac{\partial p}{\partial \zeta} k = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(a_z + g), \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x$$

استخلصت المعادلتان أعلاه بالنسبة للمناطق الثابت $\zeta - \xi$. لتحويلهما للمناطق المتحركة $x-z$ لاحظ الآتي :

$$\dot{\zeta} = a_x t + c_1$$

باعتبار السرعة = 0 عند t = 0

$$\xi = \frac{1}{2} a_x t^2 + c_2$$

باعتبار أن المناطين يتطابقان عند بدء الحركة

$$\xi = x + \frac{1}{2} a_x t^2$$

وبالمقابل

$$\zeta = z + \frac{1}{2} a_z t^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x \dots \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(g + a_z) \dots \quad (5.2b)$$

ويمكملة (5.2a)

$$p = -\rho a_x x + f(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$$

تعطى (5.2b)

$$f'(z) = -\rho(g + a_z)$$

$$f = -\rho(g + a_z)z + c$$

$$p = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z + c \dots \quad (5.3)$$

وهي معادلة توزيع الضغط . ويحدد الثابت c من القيم الحدودية .

معادلة سطح السائل

تدل التجربة على أن سطح السائل يكون مستواً مستقيماً ومائلاً في حال تعرض الحاوية لتسارع ثابت. لنقصي ما يدل عليه التحليل النظري في المعادلة (5.3)

$$p = p_a , \quad z = z_s$$

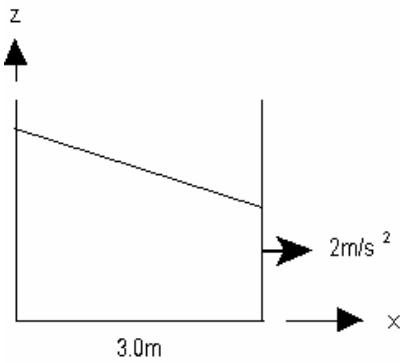
حيث p_a الضغط الجوي و z_s قيمة z عند سطح السائل .

$$p_a = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z_s + c$$

$$z_s = c' - \frac{a_x}{g + a_z} x \quad \dots \dots \dots \quad (5.4)$$

وهو خط مستقيم ميله

مثال



حاوية تحوي زيتاً كثافته 850 kg/m^3 وتحرك بتسارع ثابت 2.0m/s^2 في اتجاه x الموحّب (الشكل 5.2). طول الحاوية 3.0m . لوحظ أن أدنى مستوىً للزيت 2.0m فوق القاع. استخلص
(أ) معادلة توزيع الضغط.
(ب) مقدار وموضع أقصى ضغط على الحاوية.
(ج) معادلة سطح السائل وزاوية ميله.

الشكل 5.2

(i)

$$a_x = 2.0 \text{ m/s}^2, a_z = 0, \rho = 850 \text{ kg/m}^3$$

المعادلة (5.3) تعطي

$$p = -850(2.0)x - 850(9.81)z + c_1 = -1.7E3 x - 8.34E3 z + c_1$$

القيمة الحدودية $x = 3, z_s = 2, p = 0$

$$c_1 = 27.8E3$$

معادلة توزيع الضغط :

$$p = (27.8 - 1.7x - 8.34 z) \text{ E3}$$

(ب) معادلة توزيع الضغط تعطي موضع الضغط الأقصى : $x = 0, z = 0$

مقدار الضغط الأقصى = 27.8 kPa

(ج) المعادلة (5.4) تعطي سطح السائل z_s

لحساب قيمة ثابت المعادلة

$$z_s = -\frac{2}{9.81}x + c_2 = -0.2x + c_2$$

عند $z_s = 2$ ، $x = 3$

$$c_2 = 2.6$$

$$z_s = 2.6 - 0.2x$$

- ميل السطح 0.2

$$\tan\theta = -0.2$$

$$\theta = -11.3^\circ$$

توزيع الضغط في سائل ساكن 5.3

سُكُون السائل يعني أن التسارع \ddot{x} في المعادلة (5.1) يساوي صفر . فتبيّن المعادلة

$$\rho g k + \nabla p = 0$$

$$\rho g \underline{k} + \frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = 0$$

وهذا يعني أن p لا تعتمد على x, y

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

z هو المحور الرأسي ويكون موجباً في عكس اتجاه الجاذبية .
ونعرف البعد h في الاتجاه المعاكس ل z ونقطة الأصل فيه عند سطح السائل. وبذلك فإن قيمة h هي العمق . و بالتالي

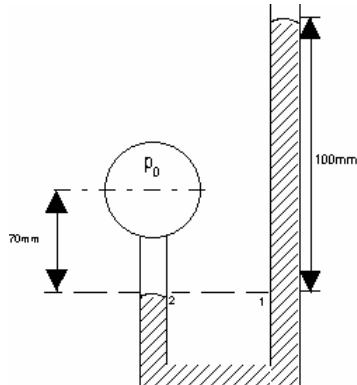
$$dh = -dz$$

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

$$p = \rho gh + c$$

وباعتبار الضغط جوي عند السطح

$$p = \rho gh + p_a \dots \quad (5.5)$$



مثال

يستخدم مانومتر زبقي لقياس ضغط زيت يسري في أنبوب . الكثافة النسبية للزيت والزبق 0.85 و 13.6 .

(أ) قدر الضغط القياسي في الخط المركزي للأنبوب .

الشكل 5.3

- (ب) قدر الضغط المطلق في الخط المركزي للأنبوب إذا كانت قراءة البارومتر 0.75m
 (ج) إذا استخدم مانومتر مائي كم يكون الفرق في ارتفاعات السائل المانومטרי ؟

الضغط عند الموضع (1) = الضغط عند الموضع (2)
 باستخدام المعادلة (5.5) عند الموضعين

$$p_0 + 0.07 \rho_0 g = p_a + 0.1 \rho_m g$$

$$p_0 + 0.07(0.85E3)9.81 = p_a + .1(13.6E3)9.81$$

$$p_0 = 12.8E3 + p_a$$

(أ) الضغط القياسي في مركز الأنبوب = 12.8 kPa

(ب) الضغط البارومטרי = 0.1MPa = 0.75 (13.6E3)9.81 = $h_b \rho_m g$

الضغط المطلق = 112.8 kPa = $12.8E3 + 100E3$

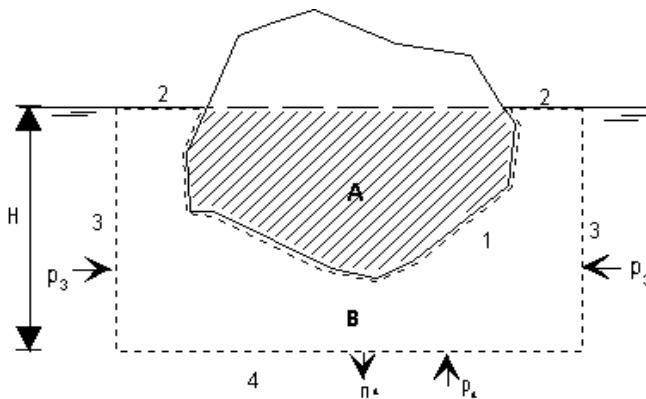
(ج) عند استخدام مانومتر مائي

$$h_w \rho_w g = h_m \rho_m g$$

$$1E3(9.81)h_w = 13.6E3(9.81)0.1$$

$$h_w = \mathbf{1.36m}$$

5.4 الطفو



الشكل 5.4

تعرف قوة الطفو بأنها القوة التي ت العمل إلى أعلى على الأجسام المغمورة جزئياً أو كلياً في ماء . لاستخلاص تعريف عن هذه القوة نبدأ من معادلة حفظ كمية التحرك (2.12) مطبقةً على الحجم التحكمي المبين في الشكل (5.4).

الحدين الأول والثاني من المعادلة يساويان الصفر.

الحد الثالث:

$$\iiint_{V_B} \underline{B} dV = -\rho g V_B \underline{k}$$

الحد الرابع :

$$\iint_A \underline{\sigma} dA = \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1 dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2 dA_2 + \iint_{A_3} \underline{\sigma}_3 dA_3 + \iint_{A_4} \underline{\sigma}_4 dA_4$$

على السطح (1): يساوي التكامل \underline{R} وهي القوة التي يؤثر بها السطح الصلب على الحجم التحكمي .

على السطح (2) : قياسياً $\underline{p}_2 = \underline{p}_a = 0$

على السطح (3) : تعمل الضغوط إشعاعياً إلى الداخل فتلغى بعضها البعض .

على السطح (4) :

$$\underline{\sigma}_4 = -\rho_4 \underline{n}_4 = \underline{p}_4 \underline{k} = \rho g H \underline{k}$$

$$\iint_{A^4} \underline{\sigma}_4 \, dA_4 = \rho g H A_4 \underline{k} = \rho g (V_A + V_B) \underline{k}$$

بالتعويض في معايير كمية التحرك:

$$O = -\rho g V_B \underline{k} + \underline{R} + \rho g (V_A + V_B) \underline{k}$$

$$\underline{\underline{R}} = -\rho g \underline{V_A} \underline{k}$$

القوة على الجسم الطافي F_B

$$\underline{F}_B = -\underline{R} = \rho g V_A \underline{k}$$

V_A يساوي حجم الجزء المغمور

ويذلك تكون قوة الطفو

مثال

برمیل من الصلب قطره 0.6m وارتفاعه 0.9m وزنه فارغاً 300N . ملاً بزیت کشافته 800kg/m³ ووضع في ماء کشافته 1000 kg/m³ .

(أ) أثبت أن البرميل لا يغطس بكماله في الماء .

(ب) إذا بقى البرميل قائماً أحسب ارتفاع الجزء البارز منه .

(أ) في حالة التوازن :

$$F_B = W_d + W_o$$

حيث W_d وزن البرميل الفارغ و W_0 وزن الزيت .

$$W_d = 300$$

$$W_o = (AH)\rho_0 g = (\pi/4)(0.6)^2 0.9(0.8E3)9.81 = 1997N$$

$$F_h = 300 + 1997 = 2297\text{N}$$

وبيان القانون الطفو

$$F_b = \rho_w g V_I = 1000(9.81)V_i = 2297N$$

$$V_i = 0.234m^3$$

$$V = AH = 0.254m^3$$

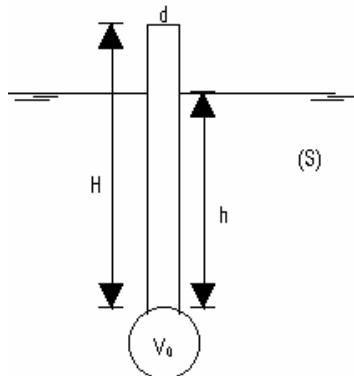
$$V > V_i$$

إذن البرميل لا يغطس تماماً .

$$(ب) \text{ ارتفاع الجزء البارز} = \frac{V - V_i}{A}$$

$$\frac{0.254 - 0.234}{\frac{\pi}{4} 0.6^2} = 71\text{mm}$$

5.5 الهايدرومتر



الهايدرومتر جهاز يستخدم لقياس الكثافة النسبية للسوائل ويعتمد تصميمه على نظرية الطفو.

الشكل (5.5) يوضح هايدرومتر قطر ساقه d وطوله H وزنه W . حجم الثقل المثبت في قاعدته V_0 . الهايدرومتر مغمور جزئياً في سائل كثافته النسبية s . طول الجزء المغمور من الساق h

الشكل 5.5

$$F_B = W$$

$$W = \rho g V_I = \rho_w s g (V_0 + \frac{\pi}{4} d^2 h)$$

$$h = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2 s} - \frac{4V_0}{\pi d^2} \dots \dots \dots (5.7)$$

إذا غمس الهايدرومتر في الماء المقطر

$$s = 1, \rho = \rho_w, h = h_0$$

$$h_0 = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2} - \frac{4V_0}{\pi d^2}$$

حيث h_0 الارتفاع الذي يشير إلى $s = 1$.

وتصح بذلك العلاقة العامة

$$h = h_0 + \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \dots \quad (5.8)$$

مثال

يراد تصميم هايرومتر لقياس الكثافة النسبية في المدى $s \leq 1.5$. قطر ساق الهايرومتر 10mm وطول الساق 200mm المطلوب تحديد W و V_0 (وزن الهايرومتر و حجم الثقل).

عند $s = 1.5$ الحد الأدنى للساق $h = 0$

و عند $s = 0.5$ الحد الأقصى للساق $h = H = 0.2$

بالتعميض للقيم أعلاه في المعادلة (5.7) و الطرح تعطى

$$h_{0.5} - h_{1.5} = \frac{4W}{g\rho_w\pi d^2} \left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5} \right)$$

$$0.2 - 0 = \frac{4W}{9.81(1000)\pi(0.01)^2} \left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5} \right)$$

$$W = \mathbf{0.115 \text{ N}}.$$

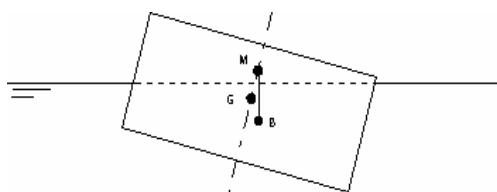
و بالتعميض ثانيةً في (5.7) عند $s = 1.5$ و $h = 0$ و $s = 0$ و $h = 0.116 \text{ N}$

$$V_0 = \mathbf{7.85E-6 \text{ m}^3}$$

أي بقطر **24.6mm** إذا كان شكل الثقل كروي $(V = \frac{4\pi R^3}{3})$.

5.6 استقرار الأجسام الطافية

تعريفات :

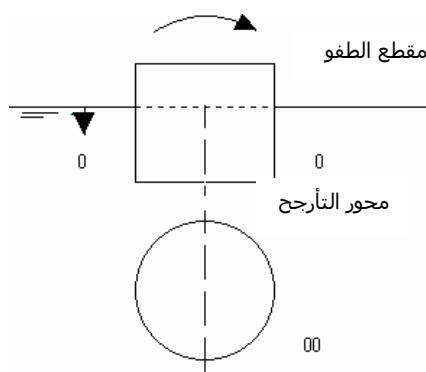


الشكل 5.6

- 1** مركز الطفو B : هو مركز الكتلة للجزء المغمور من الجسم الطافي.

- 2** مركز التأرجح M : نقطة تقاطع الخط المركزي الرأسى للجسم في حال سكونه مع الخط الرأسى المار بمركز الطفو في حالة إمالة الجسم الطافى قليلاً.

- نصف القطر التأرجحي MB :** هي المسافة بين مركز الطفو B ومركز التأرجح M.



الشكل 5.7

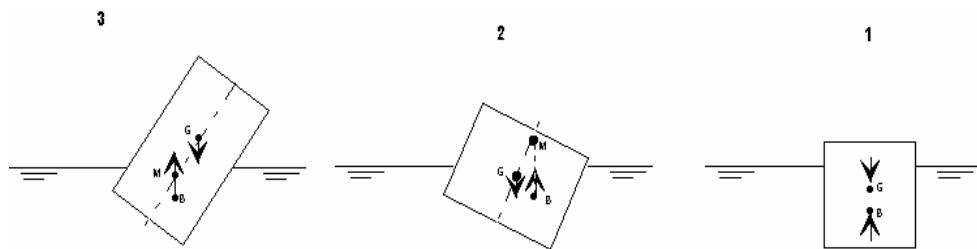
يمكن استخلاص العلاقة أدناه التي تربط
نصف القطر التأرجحي بحجم السائل
المزاح :

$$MB = \frac{I}{V_i} \dots \dots \dots (5.9)$$

حيث I العزم الثاني لمساحة مقطع الطفو حول محور التأرجح .

٧: حجم السائل المزاح .

استقرار الأجسام الطافية

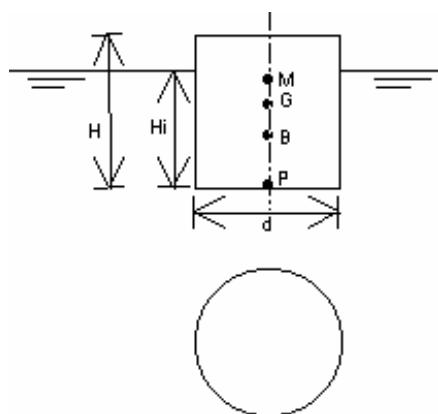


الشكل 5.8

الأوضاع الممكنة للجسم الطافي ثلاثة :

- 1 جسم متوازن . قوة الطفو F_B تعادل الوزن W ويعملان في خط واحد في الاتجاهين المتعاكسيين .
 - 2 جسم مستقر . قوة الطفو والوزن متساويان ومتوازيان في خطوط عملها ويشكلان مزدوجاً يعمل لإعادة الجسم لحالة التوازن . يسمى هذا المزدوج **مزدوج صحيح** . نلاحظ هنا أن النقطة M فوق النقطة G.
 - 3 جسم غير مستقر . قوة الطفو والوزن يتساويان ومتوازيان في خطوط عملهما . المزدوج الناتج يعمل على زيادة الميل ويسمى لذلك **المزدوج القالب** . نلاحظ هنا أن النقطة M تحت النقطة G .

نستنتج مما سبق ما يعرف بقاعدة الاستقرار:



مثال

جسم أسطواني صلب قطر مقطعيه d ، ارتفاعه H وكثافته النسبية s . استخلص القاعدة التي تحكم طفوه قائماً على وضع مستقر في الماء .

الشكل 5.9

قاعدة الاستقرار: $MB > GB$

$$MB = \frac{I}{V_i} = \frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 H_i / 4} = \frac{d^2}{16H_i}$$

$$GB = PG - PB = \frac{H}{2} - \frac{H_i}{2} = \frac{1}{2}(H - H_i)$$

قاعدة الطفو: $W = F_B = \rho g V_I$

وباعتبار الكثافة النسبية s

$$s \rho_w g V = \rho_w g V_i$$

$$sH = H_i$$

$$MB = \frac{d^2}{16H_i} = \frac{d^2}{16sH}$$

$$GB = \frac{1}{2}H(1-s)$$

إذن قاعدة الاستقرار:

$$\frac{d^2}{16sH} > \frac{1}{2}H(1-s)$$

أو

$$\frac{H}{d} < \frac{1}{2\sqrt{2s(1-s)}}$$

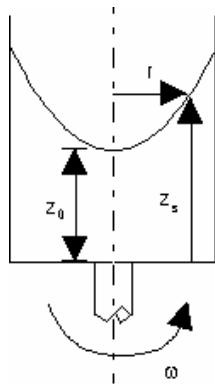
مسائل

5.1 حاوية طولها 1.0m، عرضها 0.5m وارتفاعها 0.3m . صب فيها الماء إلى عمق 0.25m . إذا حركت الحاوية بتسارع أفقي مقداره 2.0 m/s^2 أحسب :

(أ) زاوية ميل سطح الماء مع الأفقي .

(ب) كمية الماء المندليق .

(ج) القوى التي يؤثر بها الماء على السطحين الأمامي والخلفي.



الشكل 5.10

5.2 حاوية أسطوانية المقطع تحوي سائل وتدور حول محورها بسرعة $\omega \text{ rad/s}$ - الشكل(5.10). توسيع الضغط

لمثل هذه الحالة يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2r^2 - \rho g(z - z_0)$$

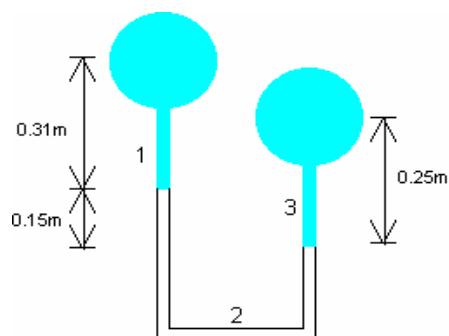
$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

في حالة محددة قطر الحاوية 0.5m وعمق الماء قبل بدء الدوران 0.1m .

(أ) أحسب السرعة الزاوية المطلوبة التي تجعل سطح الماء يلامس قاع الحاوية .

(ب) أحسب الارتفاع الأدنى للحاوية لمنع الماء من الاندلاع عند دوران الحاوية بالسرعة أعلىه .

[7.9 rad/s , 0.2m]



الشكل 5.11

5.3 الشكل (5.11) يوضح مانومتر تفاضلي يصل أنبوبيين (أ) و (ب) . أحسب فرق الضغط بين الأنبوبيين . إذا كان :

(أ) المائع (1) زيت ذو كثافة نسبية 0.8 ، المائع (2) زئبق ذو كثافة نسبية 13.6 والمائع (3) ماء .

(ب) الموائع (1) و (3) ماء والمائع (2) زئبق .

[20kPa , 20.6 kPa]

5.4 شيدت مقصورة على مجموعة من تسعة براميل تطفو رأسياً على ماء البحر ذي الكثافة 1030 kg/m^3 . وزن المقصورة وحدها 10kN . يزن البرميل الواحد 150N وارتفاعه 1.5m وقطره 0.7m . باعتبار أن متوسط وزن الشخص $N = 600$ أحسب :

(أ) العمق الذي تغطسه البراميل إذا كان في المقصورة 30 شخص .

(ب) العدد الأقصى الذي يسمح بدخوله للمقصورة إذا كان عمق الغطس الأقصى المسموح به يساوي 80% من ارتفاع البرميل .

[0.84m , 51]

5.5 هايرومتر قطر أنبوه 10mm يقرأ العدد 1.0 عند غمسه في الماء المقطر ويكون حجم الماء المزاح $15\text{E}-6\text{m}^3$. أحسب المسافة بين القراءة 1.0 وسطح السائل إذا غمس الهايدرومتر في:

(أ) زيت كثافته النسبية 0.85

(ب) حامض نتريك كثافته النسبية 1.5 .

[+34mm , - 64 mm]

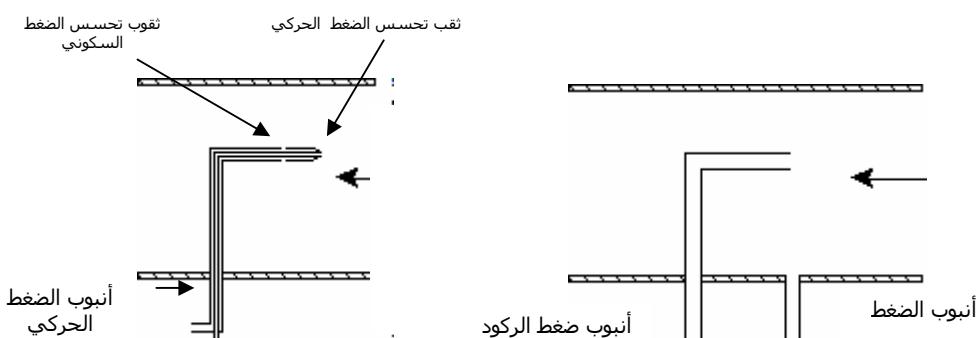
5.6 كتلة خشبية بقطع أفقي مربع مساحته 0.1m^2 وكتافة نسبية 0.6 . جد المدى المستقر لارتفاع الكتلة عند وضعها في سائل كثافته النسبية 0.9 .

[<0.3m]

٦ طرق القياس

6.1 مقدمة

يمكن تحسين مستوى الضغط عند أي مقطع متعمد على اتجاه السريان بواسطة أنبوب رفيع متعمد مقدمته على اتجاه السريان. ويعرف من التجربة أن الضغط يكون ثابت المستوى عند النقاط المتعمدة على السريان وفي مقطع واحد إذا كان المجرى مستقيماً أو إذا انحناه صغير مقارنة بعرض المجرى. ويوضح الشكل (6.1) أنبوب الضغط الذي يتحسن الضغط p عند المقطع المراد قياس الضغط عنده.



الشكل 6.2

الشكل 6.1

يعرف بالمقابل الضغط الركودي بأنه مستوى الضغط إذا هبطت سرعة السريان اللازجي إلى الصفر. وبذلك يمكن تحسين الضغط الركودي p_0 بأنبوب تستقيم مقدمته في اتجاه السريان - الشكل (6.2).

يمكن إدراك علاقة الضغط p بضغط الركود p_0 للسريان المثالي اللإنضغاطى من علاقة برنولي البسيطة

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{p_0}{\rho}$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \text{.....(6.1)}$$

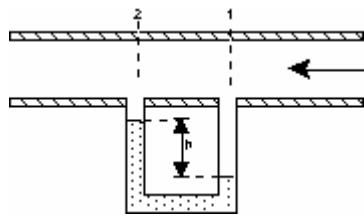
الشكل (6.2) يبين إمكانية جمع أنبوبي الضغط والضغط الركودي في أنبوب مركب واحد يعرف بـأنبوب الضغط الحركي.

6.2 أجهزة قياس الضغط

6.2.1 المِضغاط السائل

المِضغاط السائل أنبوب يستخدم أعمدة السوائل لتحديد الفروق في الضغط. و تبني قاعدة قياس الضغط بالمضغاط السائل على المعادلة (5.5) حيث نرى أن معرفة ارتفاع سائل المِضغاط وكثافته تُمكّن من تحديد الضغط. و يستخدم المِضغاط السائل عادةً في مدى الضغط $0.14E6 \text{ Pa}$ إلى 20 Pa .

اختيار سائل المِضغاط يعتمد على فرق الضغط المتوقع. فيستخدم الزئبق ذو الكثافة العالية لفروق الضغط العالية و يستخدم الماء عادةً لفروق الضغط المنخفضة.



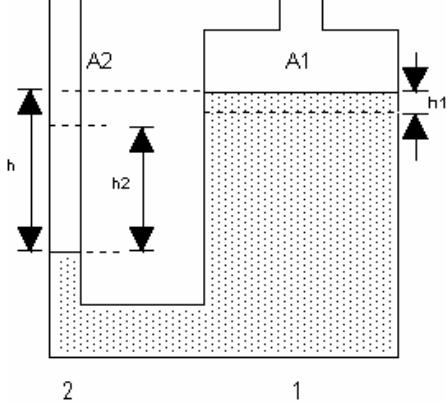
الشكل 6.3

6.2.1.1 المِضغاط السائل البسيط

المِضغاط السائل البسيط أنبوب زجاجي رفيع في شكل L ، يوصل طرفه إلى نقطتي تحسس الضغط (1) و (2) كما في الشكل (6.3). ينشأ عن التوصيل فرق مِضغاطي h و تستخدم المعادلة (5.5) لتعطي

$$p_1 - p_2 = \rho gh \dots \dots \dots (6.2)$$

6.2.1.2 مضغاط الصناعة



الشكل 6.4

لتحديد المقدار h في المِضغاط البسيط نحتاج لقراءة ارتفاع سائل المِضغاط في كلٍ من فرعى المِضغاط ومن ثم حساب الفرق. وقد صُمم مِضغاط الصناعة - الشكل (6.4) - للتمكن من القراءة من فرع واحد مما يبسط استخدام المِضغاط السائل.

فرعي مضغاط الصناعة لهما أقطار متباعدة $A_1 >> A_2$. عند توصيل الفرعين ببنقاط ضغط مختلفة ينشأ فرق الارتفاع h حيث

$$p_2 - p_1 = \rho gh(1)$$

$$h = h_1 + h_2$$

حيث h_1 الزيادة في عمود سائل المضغاط في الفرع (1) و h_2 النقصان في عمود السائل في الفرع (2). و نسبة لعدم تساوي المساحات فإن h_2 تكون أكبر من h_1 مرتبطتين بالعلاقة الحجمية

$$h_2 A_2 = h_1 A_1$$

$$h_1 = h_2 \frac{A_2}{A_1}$$

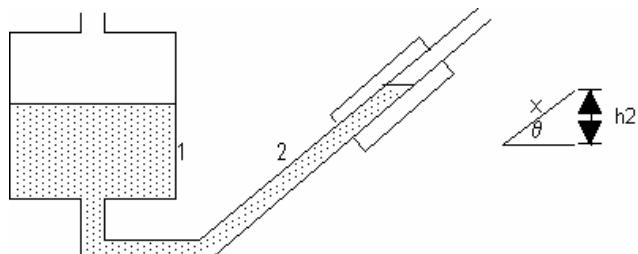
و بذلك تصبح المعادلة (1)

$$p_2 - p_1 = \rho g h_2 \left(\frac{A_2}{A_1} + 1 \right)$$

بما أن A_2/A_1 صغيرة مقارنة بالواحد الصحيح يمكن أن نكتب:

$$p_2 - p_1 = \rho g h_2(6.3)$$

يمكن هذا التصميم إذن من قراءة h_2 فقط لحساب $p_2 - p_1$ بدون فقدان يذكر في الدقة. إذا كانت $d_2/d_1 = 0.1$ ، مثلاً، فإن الخطأ في المعادلة (6.3) 1% فقط.



الشكل 6.5

6.2.1.3 المضغاط

السائلي المائل

الشكل (6.5) يوضح
مضغاط صناعة مائل.
نسبة لأن المساحة A_2

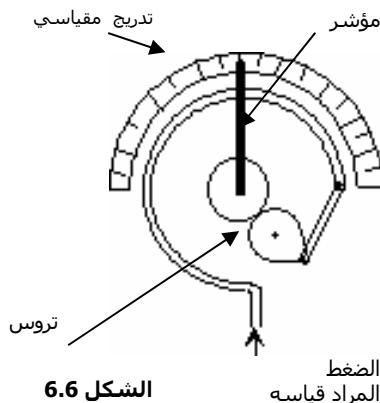
تقل كثيراً عن A فإن القراءة تؤخذ فقط من الفرع (2) كما سبق الشرح. بالرجوع إلى المعادلة (5.5) نرى أن إمالة الفرع (2) لا تؤثر في الارتفاع الرأسى لعمود السائل، أي h_2 .
إلا أنها تؤدي إلى زيادة الطول المائل للعمود x حيث

$$x = \frac{h_2}{\sin \theta}$$

(6.3) المعادلة المتصيحة

و لأن $\sin\theta > 1.0$ فإن $x < h_2$ مما يوفر "حساسية" أفضل للمضغاط.

6.2.2 مضغاط بوردون



شكل شبه دائري كما هو موضح في الشكل (6.6). عند تحسين ضغط أعلى من الضغط الجوي عند مدخله يعمل الضغط على تمديد الأنابيب وينشأ عن ذلك شد للمسنن المثلث الذي بدوره يدير المسنن الدائري فيحرك المؤشر.

ينبغي مراعاة اختبار مضغاط بوردون دوريًا للتيقن من عمله داخل مستوى الدقة المطلوب.

مضغاط بوردون للضغط واسع الاستخدام في الصناعة لصغر حجمه وسهولة استخدامه وللمدى الواسع للضغط مقارنة بالمضغاط السائل. حيث تتوفر مقاييس بوردون في المدى kPa حتى 100MPa إلا أنه أقل دقة من المضغاط السائل.

ويعتمد القياس بمضغاط بوردون على ما يعرف بأنبوب بوردون. وهو أنبوب ذو مقطع إهليلجي من معدن رفيع ولدن. يكون الأنبوب حراً في

6.3 أجهزة قياس معدل السريان

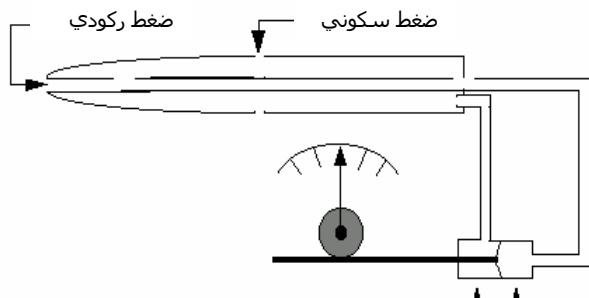
6.3.1 أنبوب الضغط الحركي

بتوصيل طرفي أنبوب الضغط الحركي- الشكل (6.2) - إلى مضغاط بواسطة أنبوبين مطاطيين يمكن قراءة فرق ارتفاعي أعمدة سائل المضغاط ومن ثم حساب الضغط الحركي الذي يساوي $\frac{1}{2}pv^2$ ، حسب المعادلة (6.1) . ونستنتج السرعة الموضعية وبالتالي من المعادلة :

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \quad \dots \dots \dots \quad (6.5)$$

لمعرفة معدل السريان تفاصي السرعة في مواضع متعددة عند مقطع عرضي واحد ويستخلص معدل السريان بتكاملة السرعة مع المساحة.

يتميز هذا الجهاز ببساطته و كلفته المنخفضة و دقته. و يمكن استخدامه لكل من

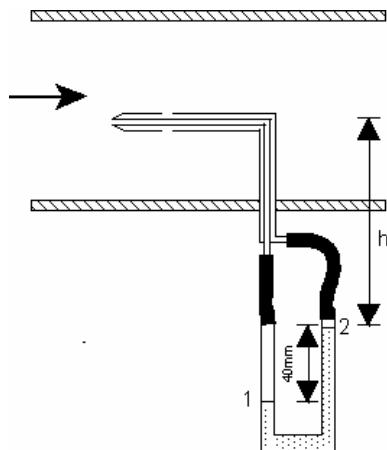


الشكل 6.7

السوائل والغازات. يجب إدراك أن صلاحية المعادلة (6.5) قاصرة على السريان على انضغاطي. في حالة السريان الانضغاطي تتطلب المعادلة الحاكمة تعديلاً يراعى أن الانضغاطية، كما هو موضح في القسم . (11.7)

مثال

أستخدم أنبوب ضغط حركي لقياس السرعة في موضع بسربان ماء كثافته 1000 kg/m^3 مستخدمن الرئيق كسائل مضغاطي. الفرق في مستوى الرئيق 40mm و الكثافة النسبية للرئيق 13.6 . أحسب السرعة الموضعية للسريران.



الشكل 6.7

مقاييس السريان الزامّة 6.3.2

تعتمد نظرية المقاييس الزامنة على أن انخفاض الضغط الناشئ عن تقلص مساحة المجرى (الزرم) له صلة مباشرة بازداد التفكير في أنابيب مساحة مقطوعه الابتدائية، فان معادلتي الطاقة و الكتلة تعطيان معدل

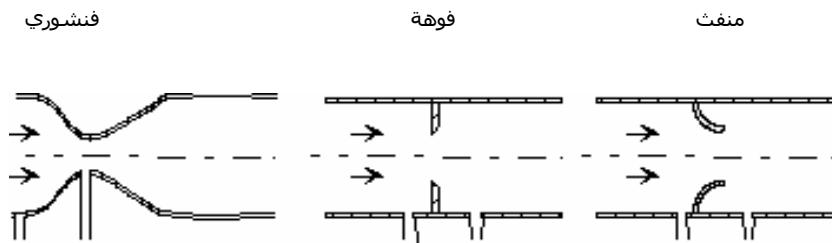
$$q = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p}$$

وحيث Δp الانخفاض في الضغط.

يأخذ الاعتبار للفواد في الطاقة يكون معدل السريان أقل مما توضحه المعادلة أعلاه. و يعرّف لذلك معامل السريان C_d و قيمته أقل من 1.0.

$$q = C_d \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} \quad \dots \dots \dots \quad (6.6)$$

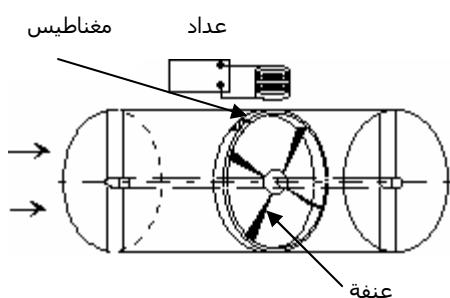
يوضح الشكل (6.8) الأنواع الأكثر شيوعاً لمقاييس السريان الزamaة. و هي المقاييس الفوهي و المقاييس المنفت و المقاييس الفنشوري. أبسطها وأقلها تكلفة المقاييس الفوهي. إلا أن معامل سريانه C_d هو الأقل قيمة، مما يعني فقداً أكبر في الطاقة. المقاييس الفنشوري يميزه فقد الصبيل في القدرة لأن أنه عالي التكلفة نسبياً. ويتوسط المقاييس المنفت المقاييس الآخرين أداءً وتكلفة. تتصرف المقاييس الزاماة عامةً ببساطة و عدم الحاجة للصيانة و العمر الطويل و تناسب كلًا من السوائل و الغازات.



الشكل 6.8

6.3.3 مقياس السريان العنفي

تدور العنفة بتأثير السريان وتعتمد سرعة دورانها على سرعة تيار المائع. وبذلك يمكن جعل سرعة دوران العنفة مقياساً لمعدل السريان. يتسبب المغناطيس الدائر مع العنفة في حد قوة كهربائية دافعة في الملف ويولد بذلك نبضات جهد كهربائي . عد هذه النبضات يمكن من معرفة سرعة العنفة ومن ثم تقدير معدل سريان المائع.

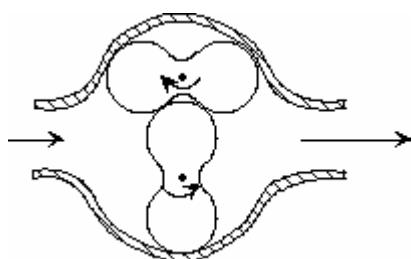


الشكل 6.9

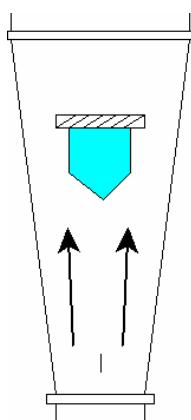
6.3.4 مقياس السريان الأزاحي

الدوار المستخدم في هذا المقياس موجب الإزاحة. في كل دورة كاملة يسري حجم محدد من السائل من أحد جانبي الأنابيب إلى الآخر. عدد دورات الدوار يمكن من تقدير السريان الكلي. عدد الدورات والوقت المناظر يمكن من تقدير معدل السريان.

يمتاز المقياس الدوار بالدقة ويستخدم عادةً في محطات الخدمة النفطية.



الشكل 6.10



الشكل 6.11

6.3.5 مقياس السريان الطفوي

يتكون هذا المقياس من أنبوب شفاف مخروطي الشكل يثبت رأسياً في مسار المائع وجسم صغير الحجم ضئيل الكثافة دوراني المقطع يوضع حراً داخل الأنابيب. عند مرور المائع في الأنابيب يتعرض الجسم إلى قوة إعاقة تعمل إلى أعلى تعادلها محصلة وزن الجسم وقوة طفوته. الشكل المخروطي للأنبوب يجعل السرعة المتوسطة للسريان تتناقص مع ارتفاع موضع الجسم. وبسبب الصلة المباشرة بين قوة الإعاقة وسرعة المائع فإن ارتفاع الجسم يعتمد على معدل السريان. ويمكن بذلك تعديل الأنابيب رأسياً ليدل موضع الجسم المغمور إلى معدل السريان. القرص المثبت أعلى الجسم الحر به أحاديد مائلة وظيفتها إحداث حركة دورانية في الجسم حول المحور الرأسي مما يؤدي لتوصيف الجسم في الأنابيب.

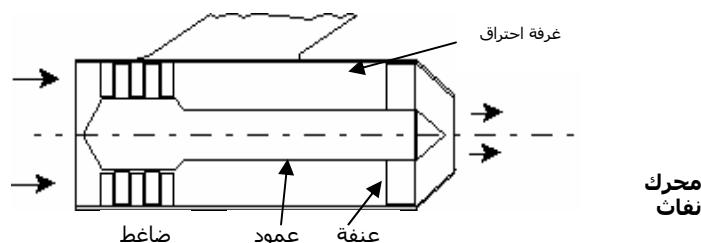
الدفعة ٧

تم استخلاص معادلة حفظ كمية التحرك في الصورة التكاملية في الباب (2) وهي

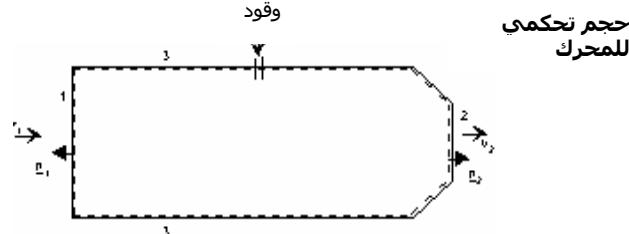
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \underline{v} dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA \dots\dots\dots(2.12)$$

حيث l حجم التحكم و A مساحة السطح التحكمي. تمثل الحدود الأربع على التوالي: القوة الناشئة عن التسارع و القوة الناشئة عن متجه السريران و القوة الجسمية ثم القوة السطحية.

7.1 الدفع النفاث



الشكل 7.1



يتم الدفع النفاث بهروب الغازات الناتجة عن احتراق الوقود بسرعة عالية من مؤخرة المحرك. يوفر الضغط المطلوب للهواء الداخل إلى غرفة الاحتراق بواسطة ضاغط يستمد قدرته من عنفة تدور بفضل اندفاع نوافذ الاحتراق.

$$\iint_A \rho v(v \cdot dA) = \iint_A \sigma dA$$

$$\rho v_1(-v_1 A_1) \underline{i} + \rho v_2(v_2 A_2) \underline{i} = p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \underline{i} + R_3$$

حيث R_3 هي القوة المؤثرة على حجم التحكم عند السطح (3).

وبذلك يكون الدفع على جسم المحرك

$$\underline{F}_t = -\underline{R}_3 = [\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1](-i)$$

اتجاه القوة هو الاتجاه السالب لـ x .

m_1 = وياعتیار معدل السیريان الكتلی للهواء عند المدخل

m_2 = معدل السربان الكتلي عند المخرج

معدل السريان الكتلي للوقود = m_f

فان

$$m_2 = m_1 + m_f$$

نسبة الوقود إلى الهواء بالوزن φ

$$\varphi = \frac{m_f}{m_i}$$

$$m_2 = m_1(1 + \phi)$$

: (1) المعادلة تصبح

مثال

يختبر محرك نفاث وهو ساكن على منصة اختبار. سرعة دخول الهواء إلى المحرك 150m/s وسرعة النفث 1000m/s . يمكن افتراض أن ضغط الهواء الداخل وضغط النفث يعادلان الضغط الجوي. نسبة وزن الوقود إلى الهواء تساوي 0.02 . مساحة المقطع الدخولي والخارجي 0.2m^2 كثافة الهواء الداخل 1.15 kg/m^3 . أحسب القوة اللازمة لمنع المحرك من الحركة.

باستخدام المعادلة (7.1b)

$$F_t = m_1 [(1 + \varphi) v_2 - v_1] + p_2 A_2 - p_1 A_1$$

v_1	v_2	φ	p_2	p_1
150	1000	0.02	0	0

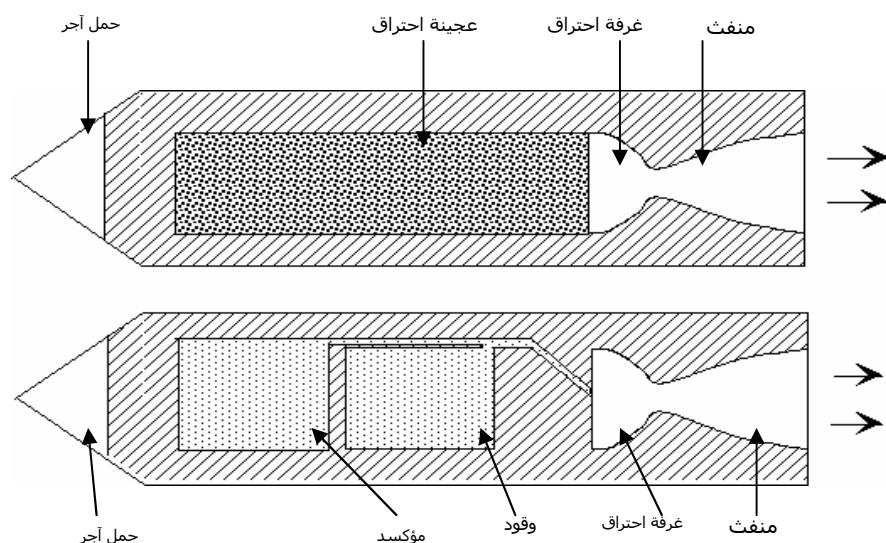
$$m_1 = \rho_1 v_1 A_1 = 1.15(150)0.2 = 34.5 \text{kg/s}$$

$$F_t = 34.5 [(1 + 0.02)1000 - 150] = \mathbf{30.0 \text{ kN}}$$

7.2 الدفع الصاروخي

السمة الرئيسية للصاروخ هي حمله لكل من الوقود والمؤكسد بداخله بينما يأخذ المحرك النفاث المؤكسد (الهواء) من الجو المحيط. السمة المشتركة في المحرك النفاث والمحرك الصاروخي هي إحداث تسارع للغازات المحترقة ومن ثم خلق قوة الدفع. يبين الشكل (7.2) الأجزاء الرئيسية للصاروخ بنوعيه: ذي الوقود الصلب وذي الوقود السائل. يحمل الصاروخ ذو الوقود الصلب خليط (عجينة) من الوقود والمؤكسد بينما

صاروخ ذو وقود صلب



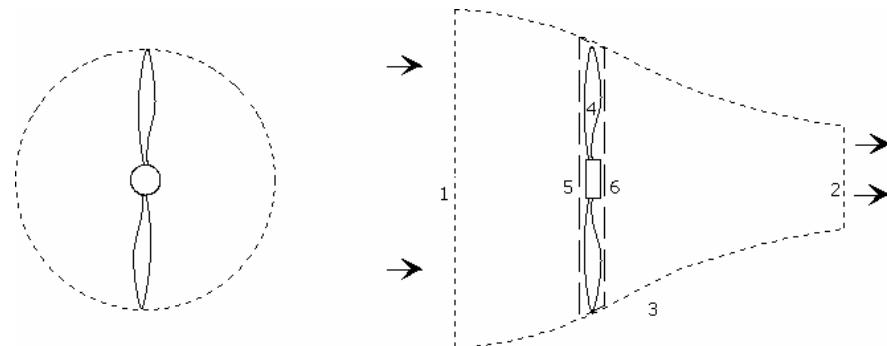
صاروخ ذو وقود سائل

الشكل 7.2

يحمل الثاني كلاً من الوقود والمؤكسد في صور سائلة.
باعتبار منفث الصاروخ هو حجم التحكم وبالنظر إلى أنه ليس ثمة هواء داخل إلى حجم التحكم عبر السطح (1) فإن المعادلة (1) تعطي

$$F_t = \rho v_2^2 A_2 + p_2 A_2$$

7.3 الدفّاع



الشكل 7.3

الدفّاع دوار مروحي يُستخدم في الطائرات والسفن حيث تُحول عبره القدرة الميكانيكية إلى قدرة حركية في السريان. ويؤثر رد الفعل على الجسم المراد دفعه ليحركه في الاتجاه المعاكس للسريان.

بتطبيق معادلة كمية التحرك (2.12) على حجم التحكم 1-2-3-4 :

$$\iint_A \rho v (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iint_A \sigma dA$$

$$\rho v_1 (-v_1 A_1) \underline{i} + \rho v_2 (v_2 A_2) \underline{i} = p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \underline{i} + R_4$$

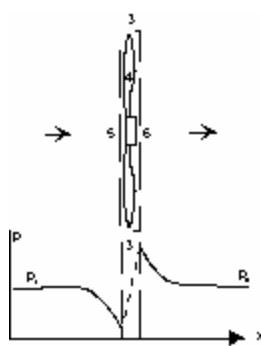
$$R_4 = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 - p_1 A_1 + p_2 A_2) \underline{i} \quad \dots \dots \dots (1)$$

الضغطان p_1 و p_2 جويان (يساويان الصفر مقياسيًا).

نُعرف q معدل السريان الحجمي لتيار المائع:

$$q = vA = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

حيث v متوسط السرعة عبر الدفّاع و A المساحة التي يدور فيها الدفّاع.



الشكل 7.4

قوة الدفع F_t هي القوة المؤثرة على الدفّاع بينما R_4 هي القوة على المائع في حجم التحكم، وبذلك

$$F_t = -R_4$$

$$F_t = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1) (-\underline{i})$$

$$F_t = \rho q(v_2 - v_1) \dots \quad (7.3a)$$

$$F_t = \rho v A(v_2 - v_1) \quad \dots \dots \dots \quad (7.3b)$$

5-6-3-4-3-1) على حجم التحكم الأصغر بتطبيق المعادلة

$$\underline{R}_4 = [\rho v A(v_6 - v_5) + p_6 A_6 - p_5 A_5] i$$

السطحان (5) و (6) متقاريان ويتمكن اعتبار

$$A_5 \sim A_6 = A$$

$$V_5 \sim V_6 = V$$

ويتبع ذلك

$$R_4 = (p_6 - p_5) Ai$$

$$F_t = (p_6 - p_5) A (-i)$$

المعادلتان (2) و (7.3b) تعطيان

6- وتطبيق معادلة الطاقة على القطاعين 1-5 و 2-6

$$v(v_2 - v_1) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad (3)$$

وتعزى هذه المعادلة بنظرية فرويد.

القدرة الخارجة من الدفع P_o

$$P_o = F_t v_1 = \rho A v v_1(v_2 - v_1) \dots \quad (7.5)$$

القدرة الداخلة إلى الدفاع P_i

$$\frac{v_1}{v} = \frac{P_o}{P_i} = \eta = \text{الكفاءة النظرية للدفاع}$$

مثال

القدرة الخارجية من محرك طائرة إلى دفاعها تساوي 1 MW . تطير الطائرة بسرعة 90 m/s في هواء ساكن، كنافته 1.1 kg/m^3 قطر الدفاع 3 m . أحسب:

- (أ) سرعة تيار الهواء في الجانب السافلي.

(ب) سرعة تيار الهواء عبر الدافع.

(ج) قطر مسار تيار الهواء صعيد وسافل الدفا

(د) قوة الدفع على المحرك.

(هـ) الكفاءة النظرية للدفاعة.

(أ) المعادلة (7.6) ، الدافع إلى الدخالة (القدرة الدخالة إلى الدافع)

$$P_i = \rho A v^2 (v_2 - v_1)$$

فروض نظرية استخدام باستخدا

$$P_i = \frac{1}{4} \rho A (v_1 + v_2)^2 (v_2 - v_1)$$

$$1E6 = \frac{1.2}{4} \left(\frac{\pi}{4}\right) (9)(90+v_2)^2 (v_2 - 90)$$

$$v_2 = 103.7 \text{ m/s}$$

(ب) المعادلة (7.4) - نظرية فرود

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 96.9 \text{ m/s}$$

(ج) معدل السريان الحجمي q

$$q = v A = 684.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A_1 = \frac{q}{v_1} = 7.61 \text{ m}^2, d_1 = 3.11 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{q}{v_2} = 6.63 \text{ m}^2, d_2 = 2.90 \text{ m}$$

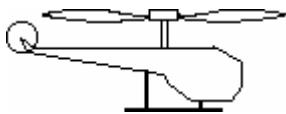
(د) الدفع F_t ، المعادلة (7.3a)

$$F_t = \rho q (v_2 - v_1) = 10.3 \text{ kN}$$

(هـ) كفاءة الدفع η ، المعادلة (7.7)

$$\eta = \frac{v_1}{v} = 0.93$$

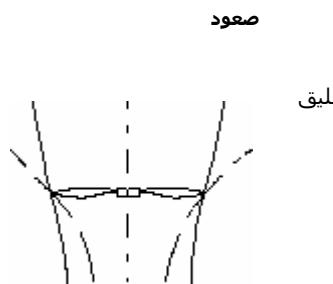
الدفع الرئيسي للطائرة الحوامة:



الشكل 7.5

تعتمد حركة الطائرة الحوامة اعتماداً كاملاً على الدفع الرأسي المحور - الشكل (7.5). بينما يقتصر دور الدفع الصغير الأفقي المحور على حفظ الاتزان بمقابلة الأثر الجانبي الناشئ عن دوران الدفع الرأسي المحور .

(أ) التحليق



الشكل 7.6

سرعة الطائرة الحوامة في الاتجاه العمودي صفر في هذه الحالة .

$$v_1 = 0$$

و بالرجوع لمعادلة الدفع (7.3b)

$$F_t = \rho v w_2 A$$

كما أن معادلة فرود تختصر إلى

$$V = \frac{1}{2}V_2$$

$$F_t = \frac{1}{2} \rho A V^2$$

9

القدرة الداخلية

المعادلتان (1) و (2) تعطيان

$$P_i = \frac{\rho A}{4} \left(\sqrt{\frac{2F_t}{\rho A}} \right)^3 = \sqrt{\frac{F_t^3}{2\rho A}}$$

كما أنه عند التحلية، تتساوى الدفع و وزن الطائرة

(ب) الصعود العمودي

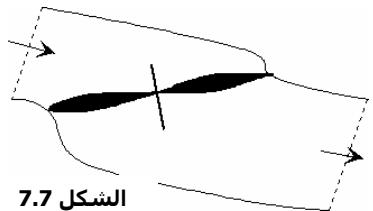
القدرة المطلوبة هنا تزيد عن القدرة المطلوبة في حالة التحليق. والدفع يفوق وزن الطائرة

$$F_t > Wt$$

(ج) الهبوط العمودي

القدرة المطلوبة في هذه الحالة تقل عن القدرة المطلوبة في حالة التحلق والدفع المطلوب يقل عن وزن الطائرة

$$F_t < Wt$$

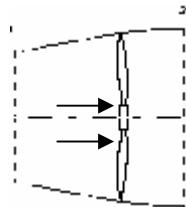


الشكل 7.7

(د) الحالة العامة

الدفع المطلوب هنا له مركبة عمودية

ومركبة أفقية. يعدل مستوى دوران الدفأع بزاوية ليعطي المركبات المطلوبة وتعديل القدرة الداخلية لتفادي محصلة القوتين والسرعة الانتقالية المطلوبة.



الشكل 7.8

عنفة الرياح:

عنفة الرياح تحول قدرة الرياح إلى قدرة ميكانيكية؛ وهي بذلك عاكسة لعمل الدفأع. القدرة الداخلية P_i هنا هي القدرة المتاحة للتيار عند مقطع العنفة ذات المساحة A . وتعتمد هذه القدرة على السرعة v_i وهي سرعة التيار في غياب جسم العنفة.

$$P_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \rho A v_i^3 \quad \dots\dots\dots(7.9)$$

والقدرة الخارجية P_o

$$P_o = \frac{1}{2} \rho A v (v_i^2 - v_2^2) \quad \dots\dots\dots(7.10)$$

الكافأة النظرية للعنفة η

$$\eta = \frac{v(v_i^2 - v_2^2)}{v_i^3}$$

ويستخدم نظرية فرود و اعتبار

$$r = \frac{v_2}{v_i} \quad \dots\dots\dots(1)$$

لتحديد أعلى قيمة نظرية ممكنة للكفاءة η

$$\frac{d\eta}{dr} = \frac{1}{2}(1 - 2r - 3r^2) = 0$$

$$r = \frac{1}{3}$$

أي، عند الكفاءة العليا

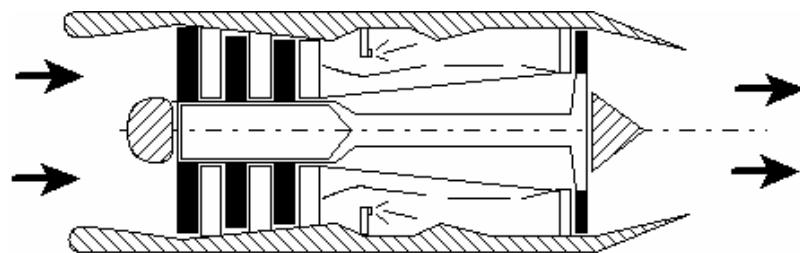
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3}$$

وبالتعويض في المعادلة (1)

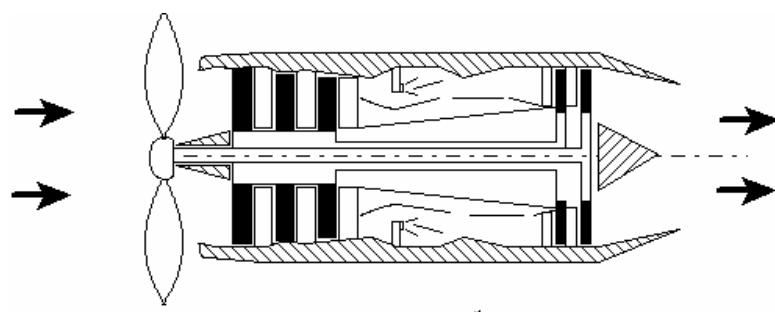
$$\eta_M = \frac{16}{27} = 0.593 \dots \dots \dots \quad (7.11)$$

وهذا هو السقف النظري للكفاءة.

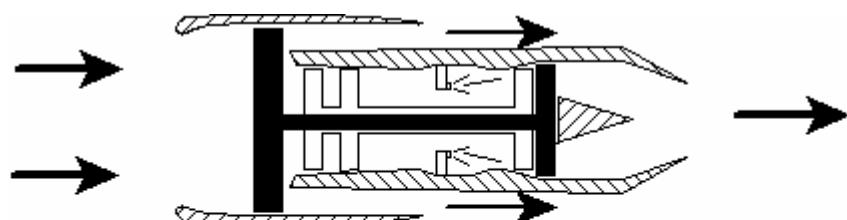
7.4 طرق الدفع النفاث



Turbojet engine محرك عنيفي-نفاث



Turboprop engine محرك عنيفي-دفاعي



turbofan engine محرك عنيفي-مروحي

مسائل

7.1 الأحوال التشغيلية لمحرك نفاث :

0.8m	القطر الداخلي
0.5m	القطر الخروجي
65kg/s	معدل سريان الهواء
1.39kg/s	معدل سريان الوقود
49kPa	الضغط الجوي
51kPa	الضغط الداخلي
70kPa	الضغط الخروجي
293K	درجة الحرارة الدخولية
700K	درجة الحرارة الخروجية

بافتراض أن الهواء الداخل والغازات الخارجة غازات مثالية وباعتبار قيمة R في الحالتين 287 J/kg-K

(أ) أحسب الدفع

(ب) أحسب القدرة إذا كانت سرعة الطائرة 300 km/h

[53.7 kN, 4.5MW]

7.2 معدل سريان خليط الوقود والمؤكسد لمحرك صاروخي 2.5 kg/s . ترك الغازات الساخنة منفذ الصاروخ بسرعة 600 m/s بالنسبة لجسم الصاروخ. الضغط في الغازات الخارجية يساوي الضغط الجوي. سرعة الصاروخ 300 m/s . أحسب دفع المحرك والقدرة. [1.5 kN, 450 kW]

7.3 دفع طائرة يعطي دفعاً يساوي 4 kN عندما تكون سرعة الطائرة 120 m/s عند ارتفاع تساوي كثافة الهواء فيه 1.0 kg/m^3 . قطر الدفع 2.5 m . أحسب القدرة الدنيا المطلوبة والسرعة النظرية لتيار الهواء سافل الدفع.

[480 kW, 127m/s]

7.4 يتحرك زورق بسرعة 10 m/s في ماء ساكن كثافته 1000 kg/m^3 . قطر دفع الزورق 0.5 m . يمر الماء عبر مستوى الدفع بمعدل $4 \text{ m}^3/\text{s}$. أحسب الدفع على الزورق والكفاءة النظرية والقدرة الداخلية للدفع. تجاهل الفوائد الناشئة عن بدن الزورق وعن سرعة الدفع.

[83kN , 49% , 1.7MW]

7.5 إذا افترضت أن عنفةً ريحية تعمل بكفاءتها المثالية عند سرعة الرياح 6 m/s أحسب سرعة التيار عبر العنفة وعلى مسافة منها في الجانب السافلي. إذا كان قطر العنفة 5 m وكثافة الهواء 1.2 kg/m^3 أحسب الدفع على العنفة. ما هي قيم الضغط صعيد وسافل العنفة مباشرةً؟

[4.0m/s, 2.0m/s, 377 N, 12 Pa , - 7.2 Pa]

8 حفظ كمية التحرك في الصورة التفاضلية

8.1 الصورة العامة للمعادلات

بدءً من المعادلة (2.12)، وهي معادلة حفظ كمية التحرك في الصورة التكاملية:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) dV + \oint_A \rho v \cdot dA = \iiint_V B dV + \oint_A \sigma dA$$

تُستخدم نظرية التباعد الرياضية - الملحق (ب)- لتحويل التكاملات السطحية في المعادلة إلى تكاملات حجمية، ثم تشكل الحدود المتكاملة حدود المعادلات التفاضلية المطلوبة.

بما أن نظرية التباعد تفترض الاستمرارية في كل المجال فان المعادلات التفاضلية تستدعي الاستمرارية كذلك. و هذا يجعل الصورة التكاملية للمعادلات أعم من الصورة التفاضلية لأن الأولى لا تستدعي استمرارية المجال.

خلال التحويل يُعرف المتجه \underline{s} ليحل محل ∇ حيث ∇ مركبة الإجهاد القصي. و يمكن تحليل المتجه \underline{s} في الاتجاهات الثلاث x, y, z كما يلي

$$\underline{s} = s_x \underline{i} + s_y \underline{j} + s_z \underline{k}$$

يقود ذلك للمعادلات الثلاث الآتية و التي تعرف بمعادلات نافير-ستوكس :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + s_x \quad \dots \dots \dots \quad (8.1a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + s_y \quad \dots \dots \dots \quad (8.1b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + s_z \quad \dots \dots \dots \quad (8.1c)$$

حيث w, v, u مركبات السرعة \underline{v} في الاتجاهات x, y, z على التوالي.

وقد استخلص ستوكس قيم s_x, s_y, s_z كما يلي :

$$s_x = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right\} \quad \dots \quad (8.2a)$$

$$s_y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \quad \dots \quad (8.2b)$$

$$s_z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} \quad \dots \quad (8.2c)$$

معادلات نافير - ستوكس أعلاه عامة بحيث تشمل السريان ثلاثي البعد، غير الرتيب، الانضغاطي واللزجي. ولا يشترط أن تكون اللزوجة منتظمة القيمة في المجال. إلا أن هذه المعادلات لا تغطي السريان الانيوتوني.

8.2 حالات خاصة

8.2.1 السريان اللالزجي

عند اعتبار السريان لا لزجي تصبح المقادير s_x, s_y, s_z في المعادلات (8.1) صفرًا. وتعرف المعادلات الثلاث الناتجة بـ **معادلات أويلر**.

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots \dots \dots \quad (8.3a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots \dots \dots \quad (8.3b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots \dots \dots \quad (8.3c)$$

8.2.2 السريان الانضغاطي منتظم للزوجة

معادلة حفظ الكتلة للسريان الانضغاطي التي سبق استخلاصها في القسم (2.2).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (8.4)$$

بتعويض هذا المقدار في المعادلات (8.2) وملاحظة ثبات قيمة الزوجة μ تصبح معادلات نافير-ستوكس:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \dots \dots \dots \quad (8.5a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \dots \dots \dots \quad (8.5b)$$

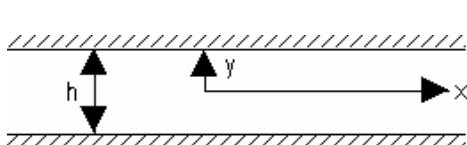
$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \dots \dots \dots \quad (8.5c)$$

8 حل معادلات نافير - ستوكس

يتعدّر حل معادلات نافير- ستوكس في صورتها العامة (8.2) حلاً مضبوطاً. وتكمن الصعوبة في أن الحدود الحاملة في الجانب الأيسر للمعادلة غير خطية. الا أن بعض الحالات الخاصة تسمح بتبسيط المعادلات بحيث يمكن حلها حلاً مضبوطاً. وسنمثل لذلك بالحالة في القسم (8.3.1) أدناه . أما في الحالات التي يتعدّر فيها الحل المضبوط تُحل المعادلات حلاً تقربياً حيثما يكون ذلك ممكناً أو تستخدم الطرق العددية.

8.3.1 السريان المتوازي في مجرٍ مستقيم (حل مضبوط)

افتراضات هذه الحالة: السريان لا انضغاطي، منتظم اللزوجة، خطوط انسيايه متوازية، رتيب ولا تؤثر عليه قوى جسمية. عند إعمال هذه الافتراضات في معادلات نافير- ستوكس (8.1) تختزل إلى المعادلة التفاضلية



الشكل 8.1

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots(8.6)$$

ويستخدم القيمة الحدوية

$$u = 0 \quad \text{عند } y = \pm \frac{1}{2}h$$

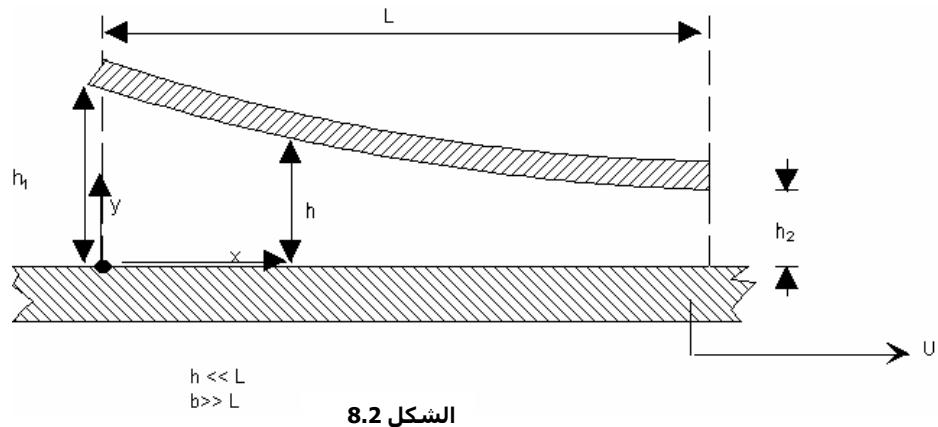
يعطي تكامل المعادلة (8.6)

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \dots\dots\dots(8.7)$$

8.3.2 النظرية الحركية للتزلق (حل تقريري)

نميز بدءً بين التزلق الحركي والتزلق السكوني. يُوفّر الضغط المطلوب لفصل الأجزاء ذات الحركة النسبية في الحالة الأولى من الحركة النسبية نفسها. بينما يُوفّر في الحالة الثانية بوسائل خارجية. ويعالج في هذا القسم الأنماذج الرياضي الحاكم للحالة الأولى.

8.3.2.1 المحامل ذات النسبة الباعية الكبيرة



تشمل الافتراضات هنا:

- ثنائية أبعاد السريان
- رتابة الحركة
- لانضغاطية السريان
- انتظام الزوجة
- صغر القوى الجسمية
- صغر عدد رينولز.

لا انضغاطية السريان وانتظام الزوجته يختزلان معادلات نافير- ستوكس إلى الصورة (8.5).
رتابة الحركة وثنائية البعد وتجاهل القوى الجسمية تختزل الصورة (8.5) إلى الصورة:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots \dots \dots (1a)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \dots \dots \dots (1b)$$

لأعمال أسلوب **الموازنة الحدية** نضع المعادلات (1) في صورة لابعدية ونأخذ لذلك القيّم المرجعية الآتية: L للأطوال و U للسرعات و μ للضغط؛ حيث L طول المحمول في اتجاه الحركة و U سرعته النابتة.

وبذلك نُعرّف المتغيرات الابعدية الآتية :

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad u' = \frac{u}{U}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$

باعتبار القيمة **1** للمقدار الابعدى قيمة كبيرة ومقدّرة و القيمة **ϵ** صغيرة ويمكن تجااهلها فإن أوزان المقادير الابعدية أعلىه تصبح $x' \sim 1, y' \sim \epsilon, u' \sim 1, v' \sim \epsilon, Re \sim \epsilon$

الصورة الابعدية للمعادلات (1a) و (1b)

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right] \dots \dots \dots (2a)$$

$$\sim 1 \quad \sim 1 \quad \sim \epsilon^{-1} \quad \sim 1 \quad \sim \epsilon^{-2}$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = - \frac{dp'}{dy'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right] \dots \dots \dots (2b)$$

$$\sim \epsilon \quad \sim \epsilon \quad \sim \epsilon^{-1} \quad \sim \epsilon \quad \sim \epsilon^{-1}$$

وبذلك تختزل المعادلات (1) الى الصورة أدناه نتيجة للتقرّيب بالموازنة الحدية:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \dots \dots \dots (8.8)$$

القيم الحدودية للسربان:

$$y = 0, \quad u = U \quad \dots \quad (3a)$$

$$y = h, \quad u = 0 \quad \dots \quad (3b)$$

$$x = 0, \quad p = 0 \quad (\text{قياسي}) \quad \dots \quad (3c)$$

$$x = L, \quad p = 0 \quad (\text{قياسي}) \quad \dots \quad (3d)$$

مع ملاحظة أن h دالة في x .

بمكاملة المعادلة (8.8) مرتين واستخدام القيم الحدودية (3a, 3b)

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} hy - U \frac{y}{h} + U \quad \dots \quad (8.9)$$

ويعطي حفظ الكتلة

$$q = b \int_0^h u dy = \frac{1}{2} b U h - \frac{1}{12} \frac{bh^3}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

مع ملاحظة ثبات قيمة q لكل المقاطع x .

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \left(\frac{U}{2h^2} - \frac{q}{bh^3} \right) \quad \dots \quad (4)$$

بمكاملة (4) بين الحدود 0 و h العامة ($h = h_1$ و $h = h_2$)

$$p = 6\mu U \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu \frac{q}{b} \int_0^x \frac{dx}{h^3}$$

$$p = 6\mu U \int_{h_1}^h \frac{dx}{dh} h^{-2} dh - 12\mu \frac{q}{b} \int_{h_1}^h \frac{dx}{dh} h^{-3} dh \quad \dots \quad (8.10)$$

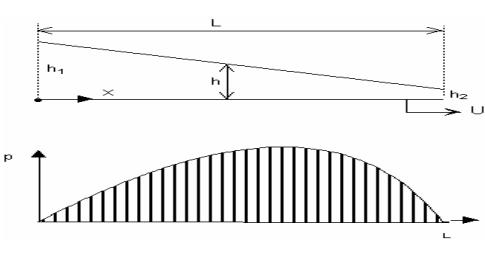
باستخدام القيمة الحدودية (3d) : $x = L, h = h_2, p = 0$ تصبح المعادلة (8.10)

$$q = \frac{\nu_2 b U}{\int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{dh} h^{-3} dh} \dots \quad (8.11)$$

بتحديد علاقة h بـ x يمكن استخلاص علاقة الضغط p بالاحادي x . مثال لذلك إذا كان الجانب الأعلى الساكن من المحمول ذا مستوىً مستقيماً يمكن أن نستخلص العلاقة (8.3)

$$h = h_1 - (h_1 - h_2) \frac{x}{L}$$

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{h_1 - h_2}{L}$$



الشكل 8.3

تعطي المعادلة (8.11)

$$q = bU \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \dots \dots \dots (8.12)$$

: (8.10) المعادلة تعطي و

$$\rho = 6\mu U L \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1^2 - h_2^2)} \dots \dots \dots (8.13)$$

يمكن استنتاج **الحمل** لهذه الحالة من

$$W = b \int_0^L pdx$$

وبالتعويض للضغط μ من المعادلة (8.13) وإجراء التكامل وتعريف النسبة

حيث

يمكن الوصول، من النظرية والتجربة، إلى أن أقصى حمل يكون عند $r = 2.2$ ويعطي

. $H_{WM} = 0.0267$ ذلك

وتعطي المعادلة (8.14a) عندها السعة الحملية W_M :

$$W_M = 0.16 \frac{\mu b L^2 U}{h_2^2} \dots \quad (8.15)$$

لاستنتاج قوة الإعاقه D على حركة المحمول

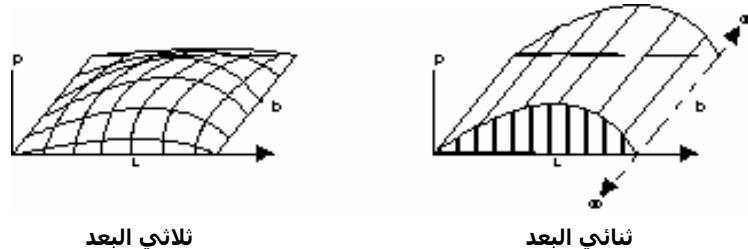
$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0}$$

بالتغيير من المعادلات (8.9) ، (8.12) و (4) في المعادلة (5)

حيث

$$H_D = 2 \ln r - 3 \frac{r-1}{r+1}$$

8.3.2.2 المحامل ذات النسبة الباوعية الصغيرة



الشكل 8.4

الافتراضات لهذه الحالة مطابقة للحالة السابقة باستثناء أن أبعاد السريان ثلاثة وليس اثنين. ويمكن ملاحظة أن ممالي الضغط في الاتجاه العرضي ليس صغيراً مما يقلل من المستوى العام للضغط.

نبأ ثانيةً من معادلات نافير-ستوكس ونطبق بدء الاختزال المضبوط للمعادلات ثم نعقب بالتقريب. وتكون النتيجة لهذه الحالة :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.17a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8.17b)$$

عند دمج المعادلات (8.17) بمعادلة حفظ الكتلة تعطي ما يعرف ب **معادلة رينولز للتزيلق** :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad (8.18)$$

عند حل المعادلة (8.18) بالطرق العددية ثبت، كما هو متوقع، أن النتيجة تقارب تلك التي حصلنا عليها من السريان ثانوي البعد إذا كانت النسبة الباوعية b/L كبيرة. تبعاً لذلك يمكن تحويل المعادلة (8.14) للصورة أدناه لتعبر عن السريان ثلاثي البعد:

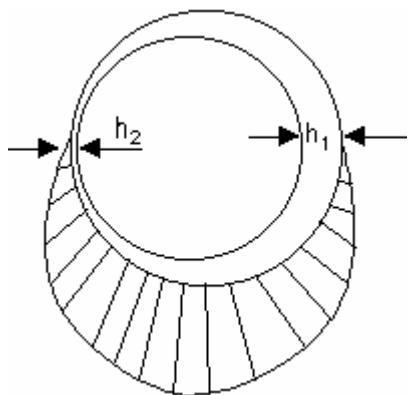
حيث يعتمد معامل التصحيح K على b/L كما يلي :

b/L	0.25	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0	1.5	2.0
K	0.06	0.085	0.140	0.185	0.34	0.44	0.61	0.68

3.0	4.0	5.0	6.0	∞
0.775	0.835	0.885	0.94	1.0

8.3.2.3 المحمول الحلقي

التحليل في الأقسام (8.3.2.1) و (8.3.2.2) اختص بمحامل مستقيمة القاعدة. يمكن اتباع نفس التحليل للحالة الخاصة بالمحمل الحلقي بفرد أحد جوانب المحمل الحلقي طولياً على استقامته، مع إبقاء المسافة h كما هي في المحمل الحلقي الأصل. و من ثم تحديد (x) h وإجراء التحليل كما سبق.



مثال

الطول الأفقي لمحمل مستقيم في اتجاه الحركة 60mm . عرض المحمل 300mm . الارتفاعان الأعلى والأدنى للفجوة 100E-6m و 50E-6m ، على التوالي. كثافة زيت التزليق 900kg/m^3 ولزوجته 0.1Pa.s . إذا كانت سرعة المحمل ثابتة عند 0.5m/s أحسب:

- (أ) الحمل
- (ب) الإعاقة
- (ج) القدرة المفقودة في المحمل
- (د) الزيادة في درجة الحرارة لزيت التزليق إذا كانت قيمة الحرارة النوعية $c_p = 1000\text{J/kg-k}$

$$5 = 300/60 = b/L \quad (أ)$$

قيمة K المستخدمة في المعادلة (8.19) تساوي 0.885

$$H_W = \frac{\ln(2)}{[2-1]^2} - \frac{2}{(2)^2 - 1} = 0.0265$$

$$W = (0.885)6 \frac{(0.1)(0.3)(0.06)^2 0.5(0.0265)}{(50E - 6)^2} = 3.04E3$$

3.04 kN = الحمل

(ب) المعادلة (8.16)

$$D = \frac{2(0.1)0.3(0.06)0.5}{(100 - 50)E - 6} \left[2\ln(2) - 3 \frac{50E - 6}{150E - 6} \right] = 13.9$$

13.9N = الإعاقة

(ج) الفقد في القدرة الناشئ عن الإعاقة $D.U =$

$$D.U = (13.9)(0.5) = 7W$$

(د) بإدراك أن الفقد في القدرة P الذي حسب أعلاه يتحول إلى حرارة

$$P = c_p \ m \ \Delta T = c_p \rho \ q \ \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{P}{c_p \rho q}$$

المعادلة (8.12) تعطي معدل السريان الحجمي

$$q = 5E-6 \text{ m}^3/\text{s}$$

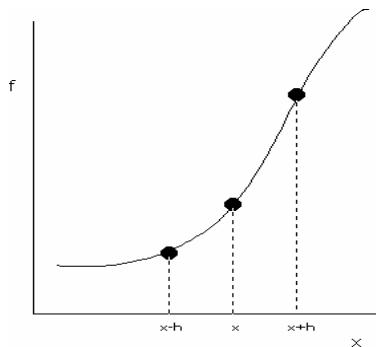
$$\Delta T = \frac{7}{1000(900)5E-6} = 1.6K = \mathbf{1.6^{\circ}\text{C}}$$

8.4 تحسين حركة المواقع (طرق عدديّة)

هذا الأسلوب يعتمد استبدال التكامل المباشر لمعادلات الحفظ بحل مجموعة مكافئة من المعادلات الجبرية الخطية، ويمكن استخدام أيٍ من ثلاث طرق عدديّة:

1. طريقة الفروق المحددة
2. طريقة الأحجام المحددة
3. طريقة العناصر المحددة

سنكتفي هنا باعطاء شرح موجز لـ **طريقة الفروق المحددة**.



الشكل 8.6

تستبدل حدود المعادلات التفاضلية الحاكمة بنسب الفروق و تستنبط منها المعادلة الجبرية. يسمى هذا التبديل **التغير العددي**. يبني التغير العددي على السلسلة الرياضية المعروفة بـ **سلسلة تيلور**.

و يمكن تصوير ذلك بتأمل الدالة $f(x)$ الموضحة في الشكل (8.6).

مفوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع $(x+h)$ ، حيث h إزاحة صغيرة، هو:

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (8.21)$$

و مفوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع $(x-h)$ هو:

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (8.22)$$

بطرح أو جمع المعادلين نحصل على المشتقية $\frac{df}{dx}$ أو المشتقية $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ، على التوالي:

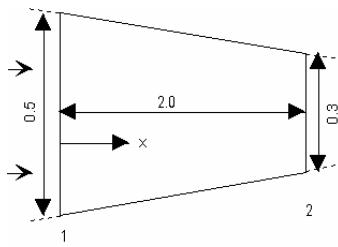
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] + O(h^2) \quad (8.23)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + O(h^2) \dots\dots\dots(8.24)$$

حيث تعني $O(h^n)$ حدود من الدرجة n , أو ما بعدها. و معلوم أن هذه الحدود تكون صغيرة إذا كانت h صغيرة.

المعادلات أعلاه توضح كيف يمكن أن تقرب حدود المعادلات التفاضلية الحاكمة إلى حدود مفروزة تحسب عددياً عند مواضع موزعة في مجال السريان.

مسائل



الشكل 8.6

8.1 يوضح الشكل (8.6) جزءاً من مجرى لام مستوى ينقل سائلاً بال معدل الثابت $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ لكل متر عرضي.

بافتراض انتظام السريان في كل المقاطع استنتاجاً عن التسارع "الكامل" عند المقطع العام x ثم استنتاج قيمة العددية عند المقطعين (1) و (2) إذا زيد معدل السريان زيادة مطردة تساوي $0.1 \text{ m}^3/\text{s}^2$ لكل متر عرضي أحسب التسارع الكامل في المقطعين (1) و (2) عندما يصبح معدل السريان $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ لكل متر عرضي.

$$[0.20 \text{ m/s}^2, 0.93 \text{ m/s}^2, 0.71 \text{ m/s}^2, 2.70 \text{ m/s}^2]$$

8.2 سريان رتيب لا لزجي ولا انضغاطي يمكن تعريف مجالى السرعة والقوة الجسمية فيه بالمعادلين :

$$\underline{v} = ax \underline{i} - ay \underline{j}$$

$$\underline{B} = -\rho g \underline{k}$$

إذا كان الضغط عند نقطة الأصل p_0 أثبت أن توزيع الضغط في المجال يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho a^2(x^2 + y^2) - \rho gz.$$

8.3 سريان صفائحي رتيب ولا انضغاطي بين لوحين متوازيين المسافة بينهما h . يتحرك اللوح الأعلى في مستواه بالسرعة \dot{y} بينما يظل اللوح الآخر ساكناً.

(أ) أثبت أن المعادلة أدناه تعطي حلّاً مضبوطاً لمعادلات نافير-ستوكس:

$$\frac{\underline{u}}{U} = \left[-\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \right] \underline{i}$$

خذ نقطة الأصل للمنظومة على اللوح الساكن .

(ب) في حالة خاصة لهذا السريان ، الذي يعرف بسريان **كويت** ، الفجوة بين اللوحين 10 mm وسرعة اللوح المتحرك 0.1 m/s . باعتبار أن اللزوجة

الحركية للماء تساوي 0.05 Pa.s أرسم التغير المتوقع ل $\frac{y}{h}$ مع $\frac{\underline{u}}{U}$ للحالات الآتية:

$$\frac{dp}{dx} = \mathbf{0} \quad (\text{i})$$

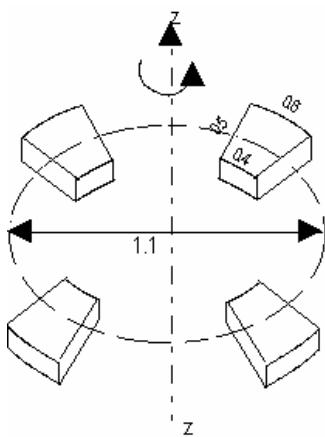
$$\frac{dp}{dx} = 1 \text{ Pa/m} \quad (\text{ii})$$

$$\frac{dp}{dx} = -1 \text{ Pa/m} \quad (\text{iii})$$

وحدد اتجاه القوة المؤثرة على اللوح المتحرك في كل حالة .

8.4 يوضح الشكل (8.7) محمل دفعي مكون

من أربع قطع متطابقة صمم لحمل مولد كهربائي يدور حول المحور zz . يمكن اعتبار كل من القطع الأربع حذاءً مستوي وسائل واعتبار أن المولد يسبب حملاً حركياً يساوي $3MN$. باعتبار الزوجة الحركية للمزلق 0.04Pa.s ونسبة سماكي طبقة الزيت الأعلى إلى الأدنى 2.0 قدر السرعة الدورانية للمولد بحيث لا يقل السماك الأدنى لطبقة الزيت عن 50E-6m . ملاحظة : قرب شكل [93 rpm] //الحذاء إلى مستطيل.



الشكل 8.7

8.5 ارتفاع الفجوة في محمل حذائي يتغير مع اتجاه الحركة x حسب المعادلة

$$h = a e^{-bx}$$

حيث a و b ثوابت .

(أ) استخلص علاقة للضغط p بدلالة h , h_2 , h_1 , L , U , μ

(ب) كون تعبيراً عن المقدار الابعد $\frac{p}{\rho U L / h_2^2}$ وأرسم منحنياً بدلالة

$$h_1/h_2 = 2.0 \quad h/h_2$$

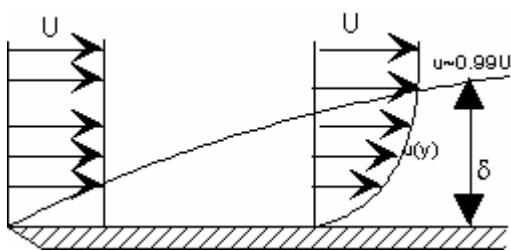
(ج) أرسم على نفس المنطاد المنحنى المقابل للحذاء المستقيم للمقارنة .

٩ الاعقة

٩.١ مقدمة

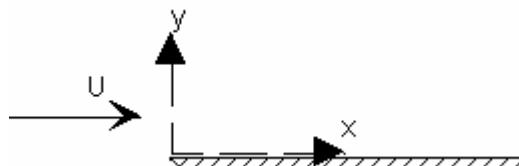
صعوبة التحليل الرياضي العام للسريان الكامل دفع إلى تقسيم مجال السريان لقسمين: أولهما السريان ضئيل التأثير بالجدران الحاوية، مما يضعف فيه ممارات السرعة و يجعل اللزج ضئيل الأثر، ويعرف هذا القسم بالسريان اللالزجي أو السريان الكَمُون. والقسم الثاني هو السريان المتأثر بممارات السرعة ويغلب فيه الأثر اللزجي، ويسمى سريان الطبقة الجدارية. ونحن في هذا الباب معنيون بدراسة هذا الأخير بينما نؤخر دراسة السريان اللالزجي للباب العاشر.

٩.٢ معادلات الطبقة الجدارية



الشكل 9.1

يوضح الشكل (9.1) تكوّن الطبقة الجدارية على لوح رفيع السمك على استقامة السريان. ويلاحظ تغير السرعة مع المسافة x ، حتى تبلغ موضعًا لا يلاحظ فيه تغييرًا يذكر. ويعرف هذا الموضع بحد الطبقة الجدارية. ويؤخذ عادةً على أنه الموضع الذي تساوي فيه السرعة U_{δ} ، حيث U_{δ} السرعة المنتظمة عند المقطع x بعيدًا عن اللوح. أول من قدم هذه الصورة للطبقة الجدارية وشفعها بالتحليل هو **لودفيك براندل**.



الشكل 9.2

يمكن أن نرى هنا ما ذكر في المقدمة عن المماثل $\frac{du}{dy}$ وقيمه داخل وخارج الطبقة الجدارية، ومن ثم التفكير في المعادلة (1.3):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

حيث يكون القص τ ذا قيمة مقدرة داخل الطبقة الجدارية، بينما يمكن تجاهله خارجها. ويمكن أن نرى أيضاً أن الطبقة الجدارية أوضح وأكثر تحديداً في السريان ذي القيمة العالية لعدد رينولز.

في التحليل الآتي لسريان الطبقة الجدارية نفترض:

- السريان رتيب، لأنضغاطي وثنائي البعد.
 - القوى اللزجية ذات وزن حدي مشابه للقصور الذاتي.
 - الجدار الصلب الذي يتاخم السريان هو لوح مستقيم حاد الحافة وموازي للتيار الرئيسي. ويعني ذلك أن زاوية الهجوم تساوي صفر .

القيم الحدودية للسريان في الطبقة الجدارية:

$$\begin{array}{lll} y = 0 & u = 0 & v = 0 \\ y \rightarrow \infty & u = U & du/dy = 0 \end{array}$$

بأعمال الافتراضات الأولى على معادلات نافير- ستوكس تختزل المعادلات إلى الصورة :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

المعادلة (1) في الصورة الابعدية:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \dots \quad (4)$$

1 1

يتم وزن الحدود في المعادلة (4) كما يلى: الحد الأخير في الجانب الأيمن (داخل القوس) وزنه $\epsilon^2 / 4$. عند ضربه في $1/Re$ ينبغي أن يعطي الوزن 1 ليزن الجانب الأيسر للالمعادلة، حسب الافتراض الثاني، وهذا يجعل وزن عدد رينولز $2\epsilon^2 / 1$.

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

$$1 \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \varepsilon^2 \qquad 1$$

الموازنة الحدية اذن تختزل المعادلة الى الصورة

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

و بالرجوع للصورة البعدية

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots \quad (9.1)$$

عند اعمال الموازنة الحدية على المعادلة (2) مستعينين بمعرفتنا الآن لوزن عدد رينولز يمكننا موازنة المعادلة الثانية.

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

$$\omega^3 \omega \omega$$

نجد أن أكبر الحدود بوزن ٤ . بذلك يمكن اغفال هذه المركبة من معادلات نافير - ستوكس.

معادلة الاستمرارية :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

1 1

وتعزى المعادلة (9.1) بـ معادلة برانتل للطبقة الجدارية .

أما خارج حدود الطبقة الجدارية فإن القيم الحدودية تصبح:

$$\gamma \geq \delta, \quad u = U, \quad du/dy = 0, \quad d^2u/dy^2 = 0$$

وتصير المعادلة (9.1)

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (9.3)$$

قدّم فون كارمن حلًّا للمعادلة (9.1) للسريان في الطبقة الجدارية في الصورة:

و يُرى الآتي في حل فون كارمن:

- (1) إذا لم يتغير الضغط في المجال فإن الحد الأخير يختفي.
 - (2) لحساب الإجهاد القصي على الجدار σ_w نحتاج لمعرفة توزيع السرعة (u).
 - (3) تصلح المعادلة (9.4) لكل من السريان الصفائحي والسريان المائي، بشرط استخدام دالة السرعة المناسبة.

9.3 حل فون كارمن عند ممالي الضغط صفر

عند $0 = dp/dx$ تأخذ المعادلة (9.4) الصورة :

$$\tau_w = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(U-u) dy$$

صورتها اللاحعديّة

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d \frac{y}{\delta} \right]$$

وتعريف القيم الابعدية φ و η

$$\varphi = \frac{u}{U}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

نحصل على

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \varphi(1-\varphi) d\eta \right] \dots \dots \dots (9.5)$$

9.3.1 الطيقة الجدارية الصفائية

بالاستفادة من معادلة السريان النيوتوني (1.3) التي تربط الإجهاد القصي بممالي السرعة

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{v=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{n=0}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \left. \frac{\mu}{\rho U \delta} \frac{d\phi}{d\eta} \right|_{n=0}$$

يمكن حساب $\frac{d\varphi}{d\eta}\Big|_{\eta=0}$ عدياً إذا عرفت الدالة $(\eta)\varphi$. وتعرف هنا α قيمة عدديّة لهذا الممّال اللابعدي.

أما الجانب الأيمن للمعادلة فيتحدد بمعرفة (η) و نرمز لهذا المقدار التكامللي بالحرف β
تُحدِّد المعادلة (1) بذلك الجانب الأيسر من معادلة فون كارمن.

: (9.5) في (1) و (2) من التعويض بالتعويض

$$\delta d\delta \frac{\mu\alpha}{\rho U\beta} dx$$

وُتعطى المُكاملة

المعادلتان (1) و (9.6) تعطيان

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \sqrt{\frac{\mu\alpha\beta}{2\rho U}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \dots \dots \dots (9.7)$$

وباجراء التكامل لـ τ على مساحة لوح عرضه b وطوله L

$$D = b \sqrt{2\alpha\beta\rho\mu L U^3} \quad \dots \dots \dots \quad (9.8)$$

نعرف هنا C_f ، معامل الإعاقة الجلدية

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$$

$$c_f = \sqrt{8\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \dots \quad (9.9)$$

النتائج التجريبية التي حصل عليها بلازيوس

$$\left. \frac{\delta}{x} \right|_{\varphi=0.99} = \frac{5.0}{\sqrt{\text{Re}_x}} \dots \quad (9.10a)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{0.332}{\sqrt{\text{Re}_x}} \dots \quad (9.10b)$$

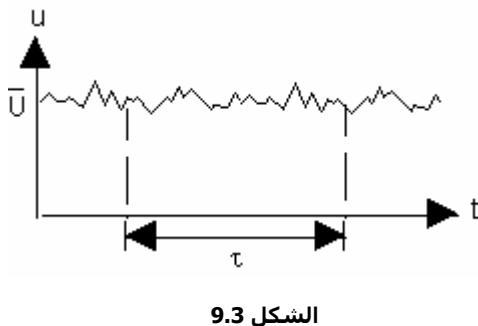
$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}} \dots \quad (9.10c)$$

9.3.2 الطبقة الجدارية المائرة

خصائص عامة للسريان المائز :

١) جزئيات السوريان المأير لا تنزلق في صورة صفائح كما هو الحال للسوريان الصفائي، ولكنها تتحدد في كتيلات وتنفصل باستمرار وتتحرك في كل الاتجاهات - مع محصلة سرعة في اتجاه السوريان الرئيسي.

إذا اهتممنا مثلاً بالسرعة في الاتجاه x , و سميئناها u , فإن u ترتبط عند أي وقت t بالسرعة المتوسطة \bar{u} والاضطراب $'u'$ حيث



$$\bar{u} = \bar{u} + u'$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u dt$$

وحيث ۲ هنا فترة الرصد .

وتعُرف حدة التمُور T كما يلي:

ويمكن اختزال المعادلة (9.11) إلى الصورة أدناه إذا كانت خصائص التمور لاتجاهية:

$$T = \frac{\sqrt{u'^2}}{U}$$

٢) من خصائص السريان المائر انه بجانب فقد اللزجية تنشأ فيه فقد إضافية بسبب عشوائية حركة الكتيلات وهذه:

- (أ) فقد بسبب الحركة في الاتجاه العرضي.
(ب) فقد بسبب الصدم المتواصل.

وبنهاً عن ذلك ما يُعرف بـ **اجهادات رينولز**.

وينشأ عن ذلك ما يعرف ب إجهادات رينولز .

(3) يتحول السريان من صفائحي إلى مائر عند عدد رينولز الحرج، Re_c . مدى هذا العدد الحرج للسريان في الأنابيب

$$2\,000 < Re_c < 10\,000$$

وللسريان على الألواح المستوية ($T \sim 0.5\%$)

$$0.35E6 < Re_c < 1E6$$

الإجهاد القصي الكلي في الطبقة الجدارية المأثرة يشمل الإجهاد اللزجي البسيط المعبر عنه في معادلة نيوتن للسريان الصفائحي و إجهاد قصي إضافي ناشئ عن التمدد.

$$\tau_l = \mu \frac{du}{dy} = \rho v \frac{du}{dy}$$

ويعبر عن الإجهاد القصي الإضافي الناشئ عن التمور بمعادلة **بوسينسك**

وتسمى ^٢ الإجهاض الموري الظاهري و ^٤ الزوجة الظاهرية.

ترتبط الزوجة الظاهرة بمتغيرات السريان:

$$\varepsilon = \varepsilon(u', v', w')$$

وستخلص هذه الدالة بالتجربة.

تمكننا التعریفات المذکورة من **نمذجة التمود** بإعادة صياغة المعادلات (9.1) و (9.2) لتشمل السریان المائز:

$$-\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d \bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \dots \quad (9.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (9.14)$$

تقود المعادلات (9.13) و (9.14) إلى حلول فون كارمن (9.4) و (9.5). وتحتاج المعادلة (9.5) لتحديد دالة السرعة وطبيعة الإجهاد القصي الجداري. يمكن اعتماد الدالة أدناه للسريان المأثير:

$$\varphi = \eta^{\gamma} \dots \quad (9.15)$$

للإجهاد القصي الجداري المائي على الأسطح الناعمة دلت تجارب بلازيوس إلى الصيغة التجريبية:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 Re_\delta^{-1/4} \dots \quad (9.16)$$

تصلح المعادلة (9.16) للسيران المائي على الألواح المستوية في المدى $Re_x < 1E7$

نمضى الآن في تحليل سريان الطبقة الجدارية المائرة بالتركيز على اللوح المستوى ذي السطح الناعم.

استخدام نسخة بلايز

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 \text{ Re}_\delta^{-1/4} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{1/4}$$

و استخدام القانون الأساسي لتوزيع السدعة

$$\varphi = \frac{u}{U} = \eta^{\gamma}$$

: (9,5) المعادلة تعطى

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \varphi(1-\varphi) d\eta \right]$$

$$0.0225 \left(\frac{v}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \eta^{\frac{1}{4}} (1 - \eta^{\frac{1}{4}}) d\eta \right]$$

$$0.0225 \left(\frac{v}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{7}{72} \delta \right)$$

$$\delta^{\frac{1}{4}} d\delta = 0.0225 \frac{72}{7} \left(\frac{v}{U} \right)^{\frac{1}{4}} dx$$

ويعطي التكامل

$$\delta = 0.37 \left(\frac{V}{U} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} dx \dots \quad (9.17)$$

بمقدار $x^{4/5}$ للسربان المائر مع المقدار $x^{1/2}$ للسردان الصفائي نرى أن الطبقية الجدارية المائرة تنمو أسرع من الطبقية الجدارية الصفائية.

بوضع المعادلة (9.17) في صورة لابعدية

ونلاحظ ضعف اعتماد سماكة الطبقة الجدارية على عدد رينولز مقارنةً بالسيريان الصفائحي.

من المعادلتين (9.16) و (9.18) نحصل على تعبير عن القص الحداري الابعد:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0288 Re_x^{-1/5} \dots \quad (9.19)$$

D بمكاملة (9.19) على اللوح نحصل على الاعاقة الحدية

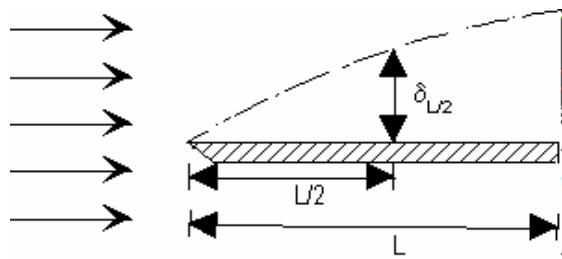
$$D = b \int_0^L \tau_w dx = 0.036 b \rho V^{1/5} L^{4/5} U^{9/5}$$

وتدل التجربة إلى أن المعامل الأدق هو 0.037

$$D = 0.037 b \rho v^{1/5} L^{4/5} U^{9/5} \dots \quad (9.20)$$

ثم نحصل على معامل الإعاقة الجلدية

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 b L} = 0.074 Re_L^{-1/5} \quad \dots \dots \dots \quad (9.21)$$



الشكل 9.4

مثال

سريان على لوح ناعم بممال
ضغط صفرى. طول اللوح متراً
واحد وعرضه 0.3 متراً.
اللزوجة الكينماتية للمائع
وكثافته $1E-6 \text{ m}^2/\text{s}$. السرعة 1000 kg/m^3

الخارجية للتيار s/m^2

(أ) إذا أمكن إبقاء

السريان صفائحياً على كل اللوح أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف طول اللوح وأحسب الاعاقة الحديدة على كا، اللوح.

(ب) إذا رُجَّ السريان صعيد اللوح بحيث أصبحت الطبقة الجدارية مائرة تماماً أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف طول اللوح وأحسب الإعاقـة الجلدية

$$\delta_x = \frac{5.0x}{\sqrt{\text{Re}_m}}$$

$$Re_{1/2} \equiv 0.35E6, \quad \delta_{1/2} \equiv 4.2E-3 \approx 4\text{mm}$$

$$Re_1 = Re_{1,c} = 0.7E6$$

• ٦٩

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 b L C_f$$

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} = 0.0016$$

$$D = \frac{1}{2}(1000)(0.7)^2(0.3)(1.0)(0.0016) = \mathbf{0.12N}$$

(ب) في حالة الطبقة الجدارية المائلة

$$Re_{L/2} = 0.35E6$$

و تعطى المعادلة (9.18)

$$\delta_{0.5} = 0.014 = 14mm$$

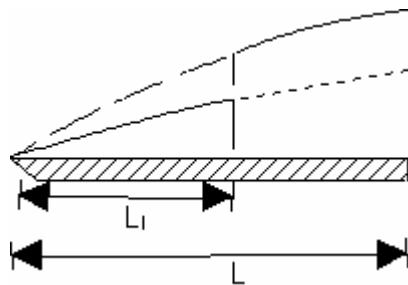
و من المعادلات (9.20) و (9.21)

$$Re_L = 0.7E6, C_f = 0.005$$

$$D = \frac{1}{2}(1000)(0.7)^2(0.3)(1.0)(0.005) = \mathbf{0.37N}$$

9.3.3 الطبقة الجدارية الدهنية

في القسمين السابقين (9.3.1) و (9.3.2) تم تحليل سريان الطبقة الجدارية الصفائحية والطبقة الجدارية المائرة على حدة لتبسيط التحليل. ما يحدث عادةً في الطبيعة أن تكون الطبقة الجدارية صفائحية في البدء (مقدمة اللوح) ثم تتحول عند قيمة رينولز الحرجة إلى طبقة جدارية مائرة. يجاور اللوح في هذه الحالة ما يعرف بالطبقة الجدارية الهجين.



الشكل 9.5

نود هنا حساب قوة الإعاقه الجلدية الناشئة عن الطبقة الجدارية الهنجين بافتراض أن التحول من الحالة الصفائحية إلى المائرة يتم في مسافة قصيرة يمكن تجاهلها واعتبار التحول موضعياً. نعتمد في هذا التحليل على الاستنباط المنسوب إلى برانتل و القائل: **عقب مقطع التحول يمكن اعتبار شكل الطبقة الجدارية امتداداً لطبقة جدارية مائرة وهمية تبدأ عند مقدمة اللوح**.

إذن القيمة الكلية للإعاقة D تساوي :
 الإعاقة الموربة على الطول L - الإعاقة الموربة على الطول L + الإعاقة
 الصفائحة على الطول L .

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 b \left[\frac{0.074L}{\text{Re}_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{0.074L_l}{\text{Re}_{L_l}^{\frac{1}{5}}} + \frac{1.328L_l}{\text{Re}_{L_l}^{\frac{1}{2}}} \right] \dots \dots \dots (9.22)$$

مثال

المعطيات مماثلة لمعطيات المثال (9.1) باستثناء أن الطبقة الجدارية هنا هجين، حيث تتحول من صفائحية إلى مائرة عند عدد رينولز الحرج 0.4E6 . المطلوب حساب قوة الإعاقة الجلدية.

$$\frac{UL_l}{\nu} = \text{عدد رينولز الحرج}$$

$$Re_c = \frac{UL_l}{\nu} = 0.4E6$$

$$L_l = \frac{Re_c \nu}{U} = 0.57m$$

$$Re_L = 0.7(1.0)/1E-6 = 0.7E6, \quad Re_{L_l} = 0.4E6$$

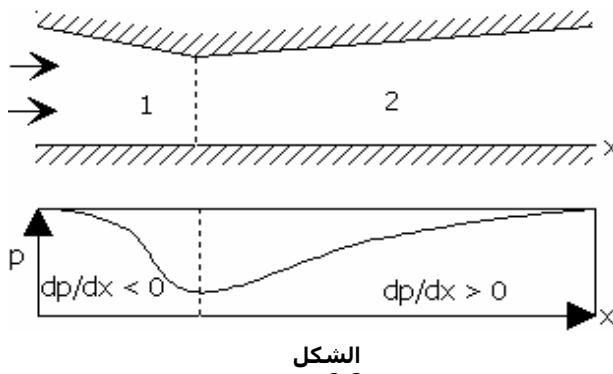
المعادلة (9.22) تعطي

$$D =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1E3)(0.7)^2 (0.3)(1.0) \left[\frac{0.074}{(0.7E6)^{1/5}} - \frac{0.57}{1.0} \frac{0.074}{(0.4E6)^{1/5}} + \frac{0.57}{1.0} \frac{1.328}{(0.4E6)^{1/2}} \right] \\ & = \mathbf{0.22N} \end{aligned}$$

نذكر أن الإعاقة تساوي 0.12N لهذه المعطيات في حالة الطبقة الجدارية الصفائحية، و 0.37N لحالة الطبقة الجدارية المائرة.

9.4 الطبقة الجدارية بممال ضغط لا صفرى



مما سبقت دراسته عن الطبقات الجدارية التي يساوي ممال الضغط فيها صفر نرى أن الإجهاد القصي الجداري w و ممال السرعة الجداري $\frac{du}{dy} \Big|_{y=0}$ يتناقصان

مع زيادة x - المعادلتان

(9.7) و (9.19). إلا أن قيمهما لا تهبط إلى الصفر مهما كبرت قيمة x . وعند تأمل ممال السرعة نرى أن إتجاه السرعة w لا يعكس أبداً في هذه الحالة. لدراسة ما يمكن أن يحدث لممال السرعة قرب الجدار في حالة ممال ضغط لا يساوي صفر نتفكر في السريان الانضغاطي داخل المجرى اللام- الناشر الموضح في الشكل (9.6).

معادلة الاستمرارية، ثابت $= vA$ ، تدل إلى أن السرعة المتوسطة v تتزايد في الجانب اللام لتبلغ مداها عند الحلقة ثم تتناقص في الجانب الناشر. و بالتعويض لذلك في معادلة حفظ الطاقة في صورتها المثلالية:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{ثابت}$$

نحصل على توزيع الضغط الموضح في الشكل (9.6) و نرى فيه أن ممال الضغط سالب في الجانب الصعيدي و موجب في الجانب السافلي. ماذا يحدث إذن للطبقة الجدارية النامية على الجدار السُّفلي؟

(أ) في الجانب الصعيدي، حيث $\frac{dp}{dx} < 0$ ، فإن الضغط خلف كل جزيئ قرب

الجدار أعلى من الضغط أمام الجزيئ. وهذا يؤدي إلى أن لا تهبط سرعة الجزيئ إلى الصفر قط .

(ب) في الجانب السافلي، حيث $\frac{dp}{dx} > 0$ ، فإن الضغط خلف كل جزئي يقل عن الضغط

أمامه. وهذا يؤدي إلى احتمال هبوط السرعة هناك إلى الصفر. ونعرف من التجربة أن

الحالة $\frac{dp}{dx} > 0$ حالة ضرورية لهبوط السرعة إلى الصفر ولكنها ليست كافية. و بافتراض

زاوية تباعد كبيرة نسبياً يهبط ممالي السرعة $\frac{du}{dy}$ عند الجدار إلى الصفر و يصبح توزيع

السرعة كالالميّن في المقطع (2) في الشكل (9.7).

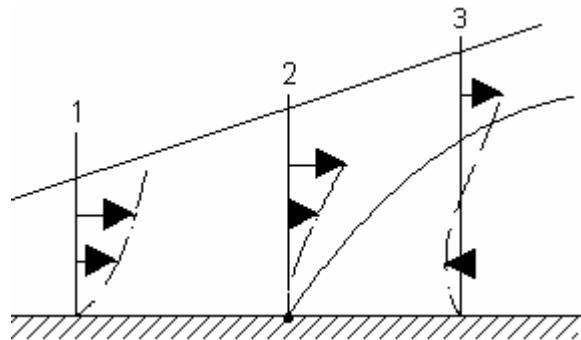
ما يلي ذلك في اتجاه

السريران x هو انعكاس اتجاه

السرعة، $\frac{du}{dy} < 0$ ، و يتكون

مجال سريان يدور فيه المائع
موضعياً. ويسمى السريان
في هذه الحالة سريان
منفصل .

ظاهرة الفصل تصاحبها مصار
عديدة في التطبيقات
الهندسية وينبغي التيقن من
غياب مسبباتها عند التصميم
أو استخدام أحد الوسائل المتّبعة لإزالة الفصل.



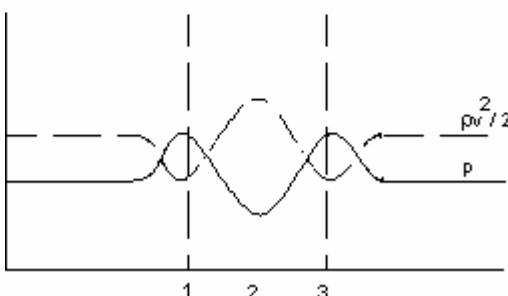
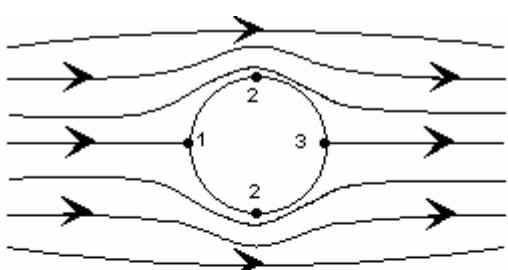
الشكل 9.7

9.5 الفصل والإعاقة الضغطية في السريان الخارجي

9.5.1 السريان عبر أسطوانة

نبدأ بدراسة سريان مثالي ثانوي بعد محكم بمعادلة برنولي في الصورة :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{ثابت}$$



الشكل 9.8

ونرى أن خصوص السريان لهذا الفرض يؤدي إلى تماثل خطوط السريان حول الأسطوانة، وأن الضغط p والمقدار $\frac{1}{2} \rho v^2$ متاثلان حول المحور الرأسي - الشكل (9.8).

بمتابعة مستوى الضغط في خط السريان 1-2-3 فإن مثالية السريان تعني

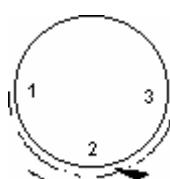
$$p_3 = p_1$$

أي أن الضغط يسترد تماماً عند الموضع (3) .

هذه هي الصورة المثلية للسريان عبر الأسطوانة. ما هي الصورة الفعلية؟

يبطئ السريان قرب السطح 3-2-1 بسبب قيد اللانزلاق - الشكل (9.9). وهو القيد الذي يؤدي لتكوين طبقة جدارية على السطح. ويعني تكون الطبقة الجدارية وجود ممارات سرعة و من ثم احتكاك لزجي و فقد في الطاقة.

في المسار 2-1 تزايد السرعة و ينخفض الضغط و يؤدي الاحتكاك اللزجي إلى فقد في الطاقة الحركية. و هذا

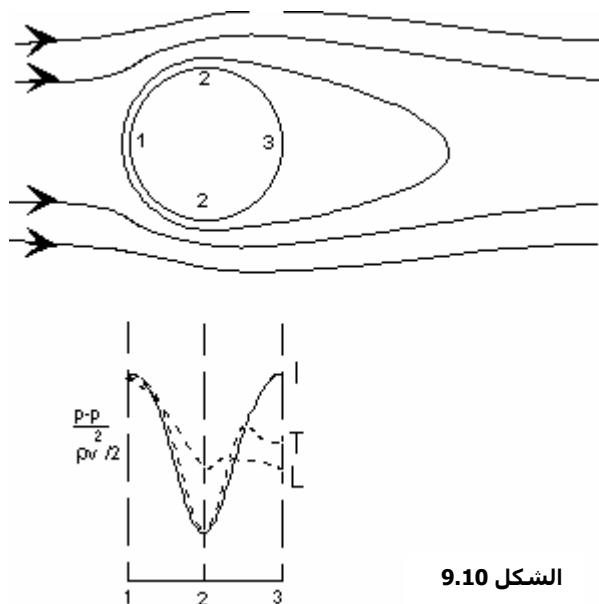


الشكل 9.9

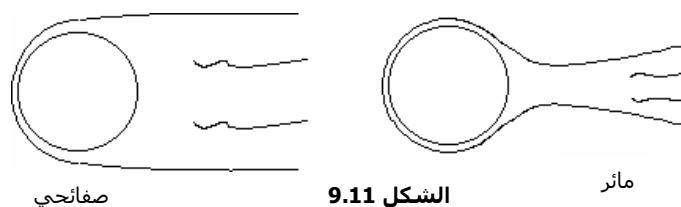
يعني أن محتوى الطاقة المفید أقل من محتوى الطاقة في حالة السريان المثالي. و يتبع ذلك في المسار 2-3 إستحاله استرداد كل قيمة الضغط p_1 عند الموضع 3 بسبب الفقد المذكور و أن ينخفض الضغط سافل الأسطوانة عن نظيره صعيد الأسطوانة، أي

$$p_1 - p_3 > 0$$

و تنشأ بذلك قوة إعاقة على الأسطوانة في الاتجاه 1-3. و تؤدي dp/ds الموجبة في المسار 2-3 إلى انفصال الطبقة الجدارية.



الشكل 9.10



الشكل 9.11

مائى

عند مقارنة السريان المائى عبر الأسطوانة بالسريان الصفائحي نرى أن توزيع الضغط في حالة السريان المائى أقرب إلى التوزيع المثالي - الشكلين (9.10) و (9.11). و نرى

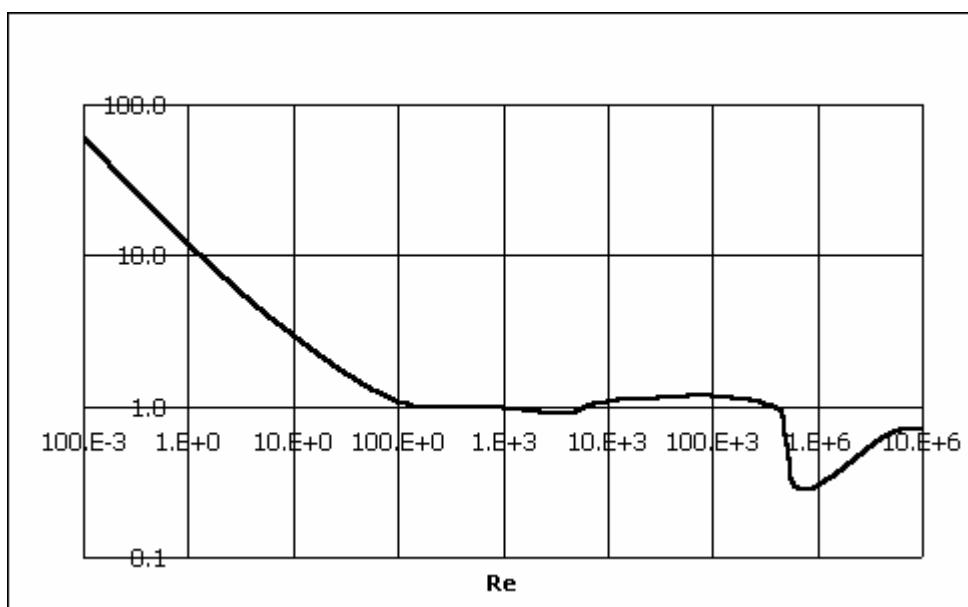
الطبقة الجدارية الصفائحية أسرع في الانفصال من الطبقة الجدارية المائرة. ويعزى ذلك إلى أن **الخلط الموري** في حالة السريان المائر يُغذي الطبقة الجدارية بطاقة حركية مستمدّة من التيار الرئيسي مما يؤدي إلى تنشيط الطبقة الجدارية وتأخير انفصالها. يعرف المقدار ($p_3 - p_1$) بـ **الإعاقة الضغطية**، حيث A هي المساحة المواجهة للسريان. ويسبّب هذه الإعاقة انفصال الطبقة الجدارية. **الإعاقة الجلدية**، من الجانب الآخر، يسبّبها السريان غير المنفصل.

يُعرَف المعامل الكُلّي للإعاقات C_D كما يلي :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \dots \quad (9.23)$$

حيث D قوة الاعاقة.

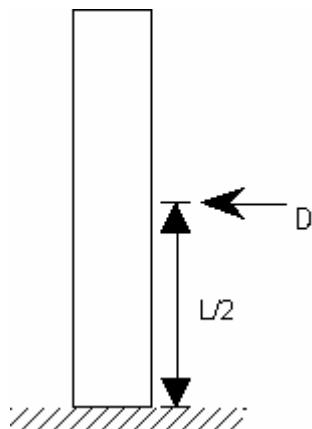
يعتمد هذا المعامل على عدد رينولز، ويوضح الشكل (9.12) هذه الصلة لأسطوانة ذات نسبة باعية عالية.



الشكل (9.12)

مثال

قدر عزم الثنبي على قاعدة مدخنة أسطوانية ارتفاعها 20m معروضة لرياح سرعتها 15m/s قطر المدخنة 1.5m . الضغط الجوي ودرجة الحرارة 0.1MPa و 30°C على التوالي.
اللزوجة الكينماتية $2.5E-6 m^2/s$



الشكل 9.13

$$Re = vd/\nu = 9E6$$

يعطي المنحنى في الشكل (9.12) عند هذه القيمة لعدد رينولز $C_D = 0.7$. ويعطي معادلة الغاز الكامل كثافة الهواء بمعرفة الضغط والحرارة

$$\rho = p/RT = 1.15 \text{ kg/m}^3$$

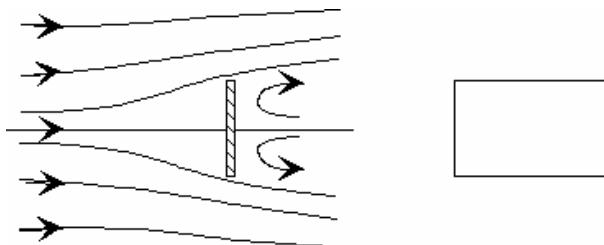
المساحة المواجهة للتيار

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho A v^2 = 2717 \text{ N}$$

العزم

$$M = \frac{1}{2} LD = 27167 \text{ Nm}$$

9.5.2 الإعاقه على الواح رفيعة متعامده على السريان



الشكل 9.14

(أ) لوح مسطح مستطيل:

معامل الإعاقه C_D للوح مستطيل ومواجه تماماً للتيار:

$$C_D = 1.17 + 0.012 (b/h) \dots \dots \dots (9.24)$$

في الحدود: $1 < b/h < 20$ و $Re_h > 1000$

(ب) قرص :

$$C_D = 1.17 \dots \dots \dots (9.25)$$

في الحدود: $Re > 1000$

(ج) نصف كره مفرغه :

في الحدود: $Re > 1000$

$$C_D = 1.42 \dots \dots \dots (9.26a)$$

التيار يواجه الجانب المقعر

$$C_D = 0.38 \dots \dots \dots (9.26b)$$

التيار يواجه الجانب المحدب

مثال

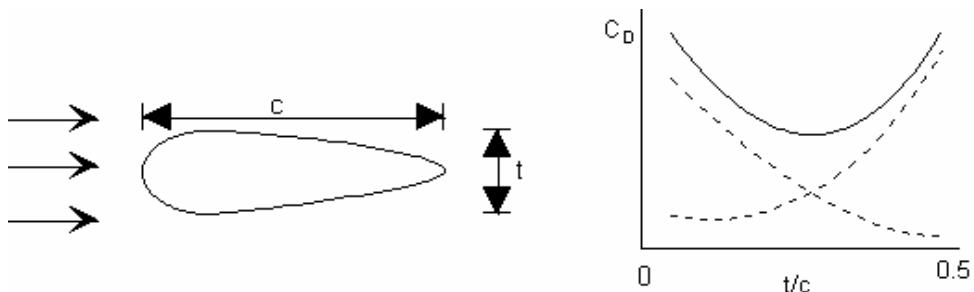
الدوار الموضح في الشكل (9.15) يراد استخدامه عند سرعة هواء 3m/s . كثافة الهواء 1.1kg/m^3 . العزم المطلوب حول نقطة الدوران 0.1Nm . أحسب نصف قطر شبه الكرة.



$$\begin{aligned}
 \text{عزم الدوران} &= F_1 R - F_2 R = (F_1 - F_2)R \\
 &= (F_1 - F_2)R = \frac{1}{2}\rho A v^2 (C_{D1} - C_{D2})R = \frac{1}{2}\pi R^3 v^2 (C_{D1} - C_{D2}) \\
 (F_1 - F_2)R &= \frac{1}{2}\rho A v^2 (C_{D1} - C_{D2})R = \frac{1}{2}\pi R^3 v^2 (C_{D1} - C_{D2}) \\
 0.1 &= \frac{1}{2}\pi(1.1)R^3(9)(1.42 - 0.38) \\
 R &= 0.18\text{m} \\
 \text{نصف القطر المطلوب} &\leq 0.18\text{m}
 \end{aligned}$$

الشكل 9.15

9.5.3 الجنحات



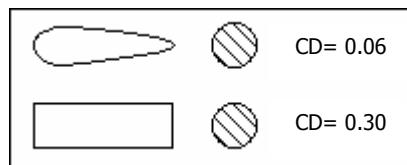
الشكل 9.16

الجنح هو المقطع التجريبي للجناح أو ريش آلات المروان. ويصمم ليقلل من تأثير الضغط الموجب سافل القطاع الأكثر سماكة عند استخدامه في الحالة التصميمية. كما يراعى في تصميمه الموئمة بين الإعاقات الضغطية والإعاقات الجلدية لتعطیان إعاقات كليّة دنيا كما هو موضح في الشكل (9.16).

9.6 التحكم في الطبقة الجدارية

9.6.1 الانسيابية

تعني الانسيابية أن الشكل الخارجي للجسم يُشكل خطوط الانسياب الطرفية للسريان بحيث تُعطي الحجم الأدنى للدّوامات، و من ثم القدر الأدنى من الإعاقة. المثال أدناه في الشكل (9.17) يوضح أن الشكل المعروف بالقطرة، مثلاً، يعطي معامل إعاقة 0.06 بينما يعطي الشكل الأسطواني لنفس القطر معامل إعاقة 0.3 .

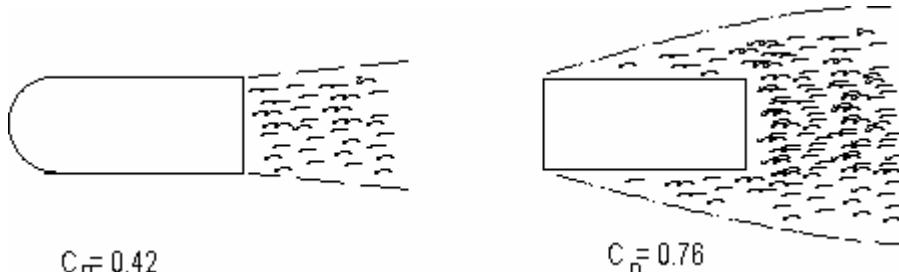


الشكل 9.17

ونرى شكل الأجسام الهندسية المعرضة للإعاقة الحركية - مثل: بدن الطائرة، محركات الطائرة النفاثة، الغواصة و الصاروخ - يُقرب إلى القطرة.

يستخدم مُصنفو السيارات الأنفاق الهوائية للوصول إلى تصميمات تعطي إعاقة حركية دنيا. الشكل (9.18) يبين أثر

الانسيابية في خفض الإعاقة وهو مستمد من تقرير تجاري عن حافلة فلوكسفاغن.



الشكل 9.18

عند تقدير الإعاقة الكلية على حركة السيارة نراعي أنه بالإضافة إلى الإعاقة الحركية هناك إعاقة الطريق الناتجة عن حركة الإطارات على الطريق. فالإعاقة الكلية R تساوي الإعاقة الحركية R_A مضافاً إليها إعاقة الطريق R_R

$$R = R_A + R_R = C_D \frac{1}{2} \rho A U^2 + C_R W t \dots \quad (9.27)$$

حيث W_t وزن السيارة و C_R معامل الطريق.

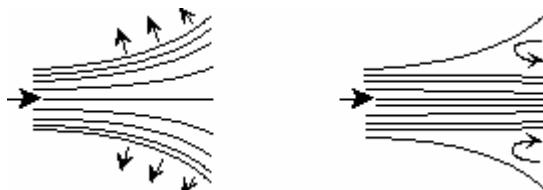
$$P = RU \quad \dots \dots \dots \quad (9.28)$$

تُعطى القائمتان أدناه قيمةً تقريريةً للمعاملات C_D و C_R

<i>C_R</i>	نوع الطريق
0.1 - 0.3	رمل
0.08	ترية (نصف صلبة)
0.04	حصى
0.02	أسفلت قديم
0.01	أسفلت جديد
0.0027	قضبان حديدية

C_D	نوع العربية
0.8 - 1.0	شاحنة
0.6 - 0.8	حافلة
0.6 - 0.7	شاحنة صغيرة
0.2-0.5	صالون

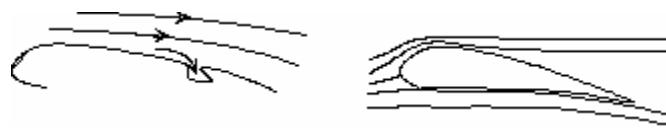
9.6.2 الامتصاص



الشكل 9.19

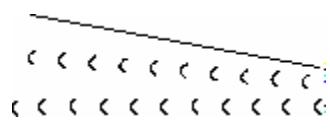
يمكن التحكم في الطبقة الجدارية بامتصاص الماء من منطقة الانفصال بوسائل خارجية. وبيدو في الشكل (9.19) تطبيق لهذه الوسيلة في سريان داخلي (ناشر). وتدل التجربة الى أن الفصل لا يحدث في الناشر إذا كانت زاوية النشر تقل عن 7° .

في الشكل (9.20) تطبيق لأسلوب الامتصاص على سريان خارجي (جنيح).



الشكل 9.20

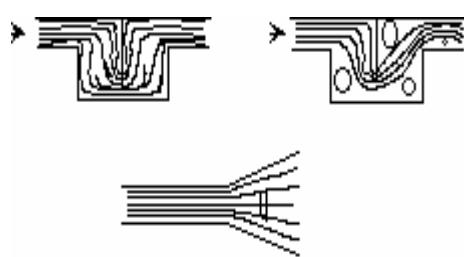
9.6.3 تنشيط الطبقة الجدارية



الشكل 9.21

يحدث انفصال الطبقة الجدارية، كما سبق الذكر، بسبب فقدان السريان لجزء من طاقته بسبب الاحتكاك اللزجى في الطبقة الجدارية. وتعتمد طريقة التنشيط على إضافة طاقة من التيار الرئيسي بخلق دوامات موربة بواسطة ريش صغيرة تعرف بمولدات الدوامات. وهذه من أكثر الطرق استخداماً في تصميم أجنحة الطائرات. الشكل (9.21).

9.6.4 الريش الساكنة



الشكل 9.22

تستخدم الريش الساكنة في السريان الداخلي للتحكم في خطوط الانسياب و الحد من انفصال الطبقة الجدارية . يوضح الشكل (9.22) تطبيقات لهذه الوسيلة في مجرى لسريان غير منتظم الاتجاه و مجرى ناشر.

مسائل

[حيث تحتاج لكثافة الهواء أعتبرها 1.2 kg/m^3]

9.1 سريان صفائي عبر لوح مسطح بزاوية هجوم صفر وبممال ضغط صفر. بافتراض

$$\frac{\tau_w}{\mu U^2} \quad \text{أن توزيع السرعة في الطبقة الجدارية من الدرجة الثانية استخلص تعبيرًا عن } \quad \text{و}$$

C_f بدلالة Re . قارن نتائجك بنتائج بلازيوس التجريبية.

$$[0.365 Re_x^{-1/2}, 1.461 Re_L^{-1/2}]$$

9.2 يسري هواء بسرعة 2.2 m/s على استقامة لوح مسطح طوله 0.5 m وعرضه 0.3 m الزوجة الكينماتية $20E-6 \text{ m}^2/\text{s}$ والكثافة 1.2 kg/m^3 . أحسب سمك الطبقة الجدارية عند ذيل اللوح وأحسب الإعاقبة الجلدية .

$$[11 \text{ mm}, 2.47E-3 \text{ N}]$$

9.3 عدد رينولز لسريان على استقامة لوح مسطح $5E6$. يتحول السريان من صفائي إلى مائر عند البعد $L = 0.4 \text{ m}$ من مقدمة اللوح، حيث L طول اللوح.

(أ) أحسب معامل الإعاقبة الجلدية، C_f

(ب) أحسب القدرة اللازمة لثبت اللوح في سريان سرعته الرئيسية 2 m/s وكتافته 1000 kg/m^3 إذا كان طول اللوح 1.0 m وعرضه 0.4 m .

$$[0.00213, 3.4 \text{ N}, 6.8 \text{ W}]$$

9.4 يمكن اعتبار جناح الطائرة لوح مسطح باستقامة السريان لحساب التقديرات الأولى للتصميم. في حالة محددة باع الجناح 7.5 m ووتره 2.0 m وسرعة الطيران 320 m/h . الزوجة الكينماتية للهواء $20E-6 \text{ m}^2/\text{s}$ و الكثافة 0.95 kg/m^3 .

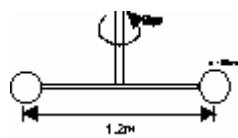
(أ) بافتراض أن السريان مائر على كل الجناح قدر الإعاقبة على الجناح .

(ب) بأى مقدار تقل القدرة المطلوبة إذا أمكن التحكم في الطبقة الجدارية لتصبح صفائحيّة على كل الجناح.

$$[340 \text{ N}, 25.8 \text{ kW}]$$

9.5 يهبط مظلي عمودياً بمظلة بسرعة 5 m/s . وزن المظلي والمظلة 1 kN . باعتبار أن المظلة نصف كره مفرغة قدر قطرها.

$$[7.7 \text{ m}]$$



الشكل 9.23

9.6 يوضح الشكل (9.23) خلاط دوار يستخدم لخلط محلول كثافته 1100g/m^3 . في طرفي الدوار قرصان معدنيان مثبتان في المستوى الرأسي. قطر أذرع الخلط صغير ويمكن تجاهل أثره الحركي. أحسب عزم اللي والقدرة اللازمة لتشغيل الخلط.

[86 Nm, 541W]

9.7 المساحة الأمامية لسيارة 2.2m^2 و وزنها الكلي 20kN . معامل الإعاقة الحركي 0.5 . إذا استخدمت السيارة على طريق مسفلت متوسط الحال ($C_R = 0.015$) أحسب السرعة التي تتجاوز عندها الإعاقة الحركية إعاقة الطريق. أحسب أيضاً القدرات اللازمة عند السرعتين 100 km/h و 120 km/h .

[77km/h ; 34.4kW, 22.5kW]

الرَّفِيع 10

مقدمة 10.1

يعنى هذا الفصل بدراسة الأنماذج الرياضي للسريان اللالزجي الإنضغاطى. تجعل هذه الافتراضات معادلات الحفظ بسيطة إلا أنها تظل حاكمة لطائفة من التطبيقات الهندسية الهامة. و نهتم هنا بصفة أساسية بالتطبيق ذي الصلة بقوة الرفع. سيقتصر التحليل على السريان الرتيب ثانى العدد.

نحتاج في هذا الفصل للتعریفات الآتیة :

(أ) دالة السريان ψ

المركبات ٦ و ٧ مركبات لمتحه السرعة ٧ في الاتاهين ٦ و ٧ لسيران ثنائي البعد

يمكن استبدال المتغيرات المعتمدة u و v بمتغير معتمد واحد هو ψ باستخدام علاقات التحوماً:

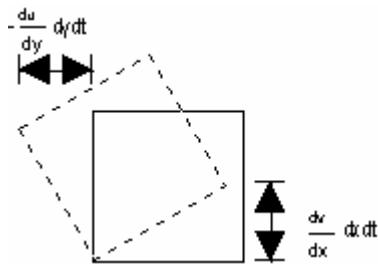
ـ بهذا التعرف تحقق الدالة ψ معادلة الاستمرارية:

(ب) السربان اللادوراني

يعرف السريان بأنه لا دوراني إذا لم يكن لأي من أجزاءه حركة دورانية خالصة.

يمكن من الشكل (10.1) استنتاج أن السرعة الزاوية المتوسطة تساوي:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



الشكل 10.1

ونرى من ذلك أن مقدار دوران أي من أجزاء المائع تتناسب مع المقدار داخل القوسين. وبذلك يمكن تعريف السريان اللادوراني بأنه الذي يحقق المعادلة

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (10.4)$$

يمكن أيضاً إثبات أن الدوران يرتبط فقط بالسريان اللزج. ويظل السريان لا دورانياً إذا كان لا لزجاً وبدأ لا دورانياً.

(ج) دالة الكُمُون ϕ

يوصف السريان بأنه ذو كُمُون إذا وُجدت دالة ϕ تعرف متوجه السرعة

$$\underline{V} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \underline{j}$$

حيث

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots \dots \dots (10.5)$$

ويمكن ملاحظة أن المعادلة (10.5) تتحقق المعادلة (10.4).

(د) معادلتي لابلاس لـ ψ و φ

بقرن المعادلتين (10.2) و (10.4) نحصل على:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (10.6)$$

ويقرن المعادلتين (10.5) و (10.3) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (10.7)$$

(ه) المناط القطبي

نعيد هنا صياغة المعادلات (10.1) إلى (10.7) بدلالة الإحداثيات القطبية θ و r .

متجه السرعة ٧ :

$$\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta \dots \quad (10.8)$$

دالة السريان ψ :

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \dots \quad (10.9)$$

دالة الْكُمُون : φ

معادلة الاستمرارية:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (10.11)$$

السريان اللادوراني:

معادلتي لابلاس:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (10.13)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \dots \quad (10.14)$$

(و) السريان المنتظم

$V = U_i$ يُعرف متوجه السرعة للسيريان المنتظم بالمعادلة:
 $v = 0$ و $u = U$ فتكون

ويتبع ذلك

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \dots \dots (1) \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \dots\dots(3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \dots\dots(4)$$

مكاملة (1) تعطي

$$\psi = Uy + f(x)$$

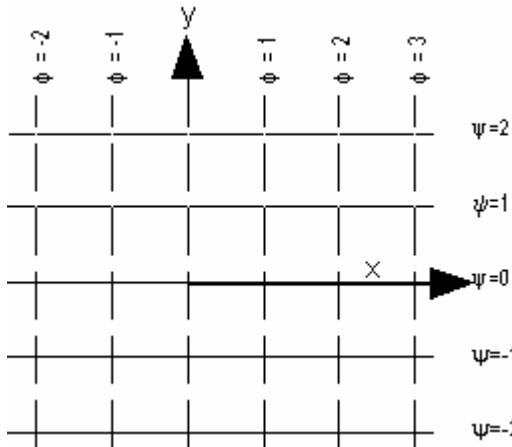
(2) والمفاضلة والمقارنة مع

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x) = 0$$

مكاملة (3) تعطى

$$\varphi = Ux + g(y)$$

(4) وبالمحاصلة والمقارنة مع



$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = g'(y) = 0$$

$$\varphi = Ux + c_2 \dots \dots \dots (6)$$

الشكل (10.2) يصور السريان

المتنظم عند

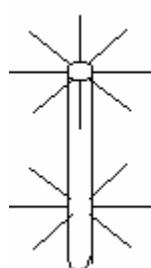
$$U = 1 \text{ m/s}, c_1 = c_2 = 0$$

الشكل 10.2

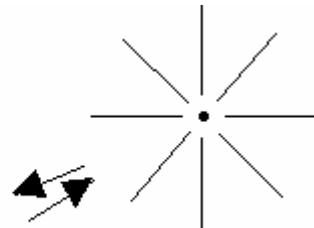
(ن) المُنبئ والمُصب

يُعرف المنهج في هذا التحليل بأنه

الموضع الذي ينبع منه المائع إشعاعياً والمصب هو الموضع الذي يختفي عنده المائع الداخل إشعاعياً. يوضح الشكل (10.3) ما يعرف بالمنبع النقطة و المصب النقطة و المربع الخطى و المصب الخطى .



منبع (مصب) خطی



نقطة (مصب) منبع

الشكل 10.3

يُستخلص من التعريف أعلاه أن السرعة الزاوية للسريان في المنبع والمصب η تساوي صفر، بذلك يكون معدل السريان الحجمي η لوحدة طول واحدة في المنبع الخطى

$$q = 2\pi r v_r$$

باستخدام المعادلة (10.9):

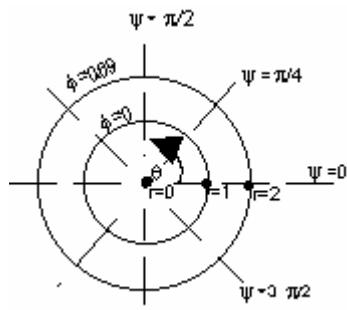
$$q = 2\pi r v_r = 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi}$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta + f(r)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = f'(r) = -v_\theta = 0$$

$$f(r) = \text{ثابت} = c_1$$



الشكل 10.4

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta + c_1 \dots \dots \dots (1)$$

فتعطي المعادلة (10.10)

$$q = 2\pi r \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + g(\theta)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} g'(\theta) = v_\theta = 0$$

$$g(\theta) = \text{ثابت} = c_2$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + c_2 \dots \dots \dots (2)$$

يبين الشكل (10.4) سريان منبع (مصب) عند

$$\frac{q}{2\pi} = 1, \quad c_1 = c_2 = 0$$

مثال

يعرف سريان لا انضغاطي بالمعادلة $\psi = xy$

(أ) أرسم لهذا السريان بعض خطوط الانسياب على المستوى الموجب لـ $y-x$.

(ب) أكتب معادلة متوجه السرعة.

(ج) بيّن أن السريان لا دوراني وأكتب التعبير الدال على دالة الكُمُون.

(أ) خطوط الانسياب :

عند خط الانسياب

$x=0$ ، $\psi = 0$: لكل قيمة y ، $x=0$.

عند خط الانسياب

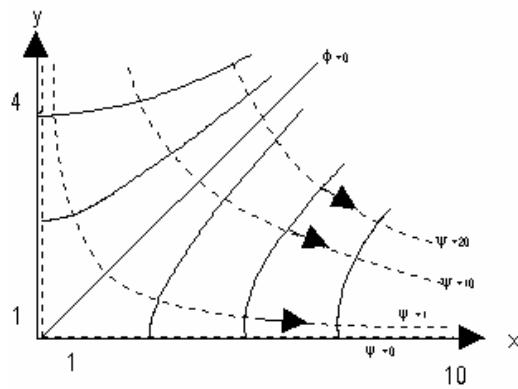
$y=1/x$: $\psi = 1$

عند خط الانسياب

$y=10/x$: $\psi = 10$

عند خط الانسياب

$y=20/x$: $\psi = 20$



الشكل 10.5

(ب) متوجه السرعة \underline{V} :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y$$

$$\underline{V} = u\underline{i} + v\underline{j} = x\underline{i} - y\underline{j}$$

ويمكن استنتاج اتجاهات خطوط الانسياب من توزيع السرعة أعلاه.

(ج) ليكون السريان لا دوراني ينبغي تحقيق المعادلة (10.4).

ومن (ب) أعلاه

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ويتحقق ذلك المعادلة (10.4)

لتحديد دالة الـ ϕ

$$u = x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} x^2 + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = -y$$

$$f(y) = -\frac{1}{2} y^2 + c$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) + c$$

10.2 اختزال معادلات نافير-ستوكس لحالة السريان اللازجي

10.2.1 الصورة العامة للمعادلات

عند افتراض أن السريان اللازجي ولاانضغاطي يمكن تبسيط معادلات نافير-ستوكس من الصورة (8.1) باعتبار المتجه اللزجي \vec{v} يساوي صفر فتأخذ المعادلات الثلاث الصورة التالية في مناطق ديكارتية:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (10.15a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (10.15b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (10.15c)$$

وقد سبقت كتابة هذه المعادلات، المعروفة بمعادلات أويلر، بالترقيم (8.3).

وفي المناطق الأسطوانى :

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = B_r - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (10.16a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (10.16b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (10.16c)$$

مثال

المعادلة أدناه تمثل توزيع السرعة في مجال ثلاثي البعد لسريان رتب:

$$V = cxj + cyj - 2czk$$

أثبت أن السريان لا إنضغاطي. (أ)

(ب) باعتبار المحور z رأسياً وأن الكثافة تساوي 1000 kg/m^3 و الثابت c يساوي 1.0 s^{-1} أحسب ممال الضغط عند النقطة $(1, 1, 5)$.

(أ) معادلة الاستمرارية للسريان الانضغاطي ثلاثي البعد (المعادلة 2.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

وفي هذا المثال: $u = cx$, $v = cy$, $w = -2cz$:
و هي تحقق المعادلة أعلاه و تتحقق وبالتالي الاستمرارية الانضغاطية.

(ب) بالتعويض لقيم w , v , u في معادلات أوبلر (10.15) و بملحوظة أن :

$$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k} = 0 + 0 - \rho g \underline{k}$$

تعطي (10.15a)

$$\rho [c^2 x] = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - 1000(1)^2(1) = - 1000 \text{ Pa/m}$$

و تعطي (10.15b)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - 1000 \text{ Pa/m}$$

و تعطي (10.15c)

$$\rho [-2cz(-2c)] = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g - 4c^2 z \rho = -1000(9.81+60) = -29810 \text{ Pa/m}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = -0.001 \underline{i} - 0.001 \underline{j} - 29810 \underline{k}$$

10.2.2 معادلة برنولي

باعتبار السريان ثنائي البعد لا دوراني ولا انضغاطي مع تجاهل القوى الجسمية تُختزل المعادلات (10.15) إلى الصور:

المعادلة (10.4) - شط حالة اللادوار:

(10.4) و (1) المعاذلتين من

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

وبالمثل تعطي المعادلتان (2) و (10.4)

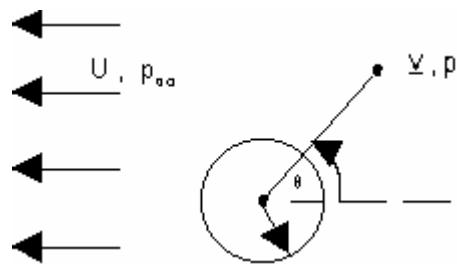
$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = g(x) \dots \dots \dots (4)$$

وتعطي المعادلتان (3) و (4)

وتعبر (10.17) بمعادلة برنولي.

يمكن ملاحظة أن المعادلة تشابه معادلة الطاقة التي سبق استخلاصها في الباب الثاني، آلا أنه ينبغي الانتباه إلى أن السرعة والضغط في معادلة برونولي قيم محددة عند موقع محدد في خطوط السريان بينما القيم المقابلة في معادلة الطاقة هي متى متوسطات لهذه المتغيرات عند المقاطع المشار إليها.

10.3 السريان اللادوراني عبر اسطوانة



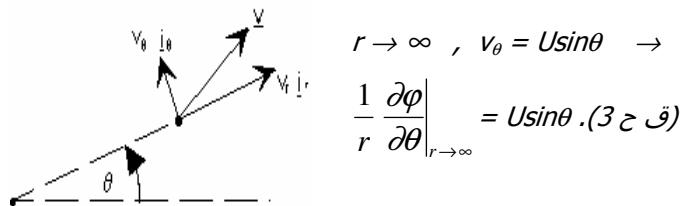
الشكل 10.6

نبدأ هذا التحليل بالعلاقة التفاضلية لل Kumon φ كعلاقة مُحاكية للسريان :

مع القيم الحدودية :

$$r = a, \quad v_r = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad \dots \dots \dots (1 \text{ c } \text{ق})$$

$$r \rightarrow \infty , \quad v_r = - U \cos \theta \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = - U \cos \theta \quad \dots \dots \dots \quad (2 \text{ ج})$$



الشكاوى

لحل المعادلة (10.14) باستخدام طريقة الضرب

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \dots \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = R' \Theta, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = R'' \Theta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = R\Theta', \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = R\Theta''$$

وبالتعويض في المعادلة (10.14)

$$R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Theta''}{\Theta} = k$$

وتعطى المعادلة الآخيرة المعادلة :

$$r^2 R'' + rR' - kR = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

توحد ثلاثة احتمالات لقيمة k :

$$k = \lambda^2 \iff \text{موجة } k \quad (1)$$

$$k = -\lambda^2 \iff k \text{ مالية} \quad (\text{ب})$$

$$k \equiv \Omega \quad (\tilde{z})$$

حيث λ عدد حقيقي.

ويكون الحل العام للمعادلة (10.14) هو مجموع حواصل ضرب الحلول R و Θ عند كل من حالات k الثلاث :

$$\varphi = R \Theta|_{k=\lambda^2} + R \Theta|_{k=-\lambda^2} + R \Theta|_{k=0}$$

يمكن الاستنتاج أن الحل العام $\varphi(r, \theta)$ يأخذ الصورة :

$$\begin{aligned}\varphi &= [c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] \\ &+ [c_3 \cos \lambda r + c_4 \sin \lambda r] [c_9 \theta^\lambda + c_{10} \theta^{-\lambda}] \\ &+ [c_5 + c_6 \ln r] [c_{11} \theta + c_{12}]\end{aligned}$$

بملاحظة أن φ ليست دالة دورية في r فإن السطر الثاني في الحل أعلاه يختفي

$$\begin{aligned}\varphi &= [c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] + [c_5 + c_6 \ln r] [c_{11} \theta + c_{12}] \dots (4) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \lambda [c_1 r^{\lambda-1} - c_2 r^{-\lambda-1}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] + \frac{c_6}{r} [c_{11} \theta + c_{12}] \dots \dots \dots (5)\end{aligned}$$

يمكن تحقيق القيمة الحدودية (ق ح 2) بالاتي :

$$\lambda = 1, \quad c_1 c_7 = -U, \quad c_8 = 0$$

وتصبح المعادلة (5)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U \cos \theta \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \frac{1}{r^2}\right) + \frac{c_6}{r} [c_{11} \theta + c_{12}] \dots \dots \dots (6)$$

وتعطى القيمة الحدودية (ق ح 1) $\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$

$$c_6 = 0, \quad \frac{c_2}{c_1} = a^2 \quad \text{أي}$$

فتصبح المعادلة (6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right). \dots \dots \dots (10.16)$$

(4) وتصبح المعادلة

$$\varphi = -U \cos\theta (r + \frac{a^2}{r}) + c_5 c_{11} \theta + c_5 c_{12}$$

الثابت c_5 اختياري في السريان الکمۇن ويمكن اعتباره صفر .

ويمكن إحلال الرمز c محل الثابت C_5C_{11} :

$$\varphi = -[r + \frac{a^2}{r}] U \cos\theta + c\theta \quad \dots \dots \dots \quad (10.17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = [r + \frac{a^2}{r}] U \sin \theta + c$$

لاحظ أن المعادلة (10.18) تحقق القيمة الحدودية (قح 3).

توزيع السرعة :

التعبير عن متجه السرعة عند أي نقطة (r, θ) في مجال السريان قرب سطح الاسطوانة هو:

$$v = v_r \dot{r} + v_\theta \dot{\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \dot{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

وبالتعويض لممالات الْكُمُون من المعادلات (10.16) و (10.18)

$$y = -[(1 - \frac{a^2}{r^2}) U \cos\theta] \dot{x} + [(1 + \frac{a^2}{r^2}) U \sin\theta + \frac{c}{r}] \dot{y} \quad \dots \dots \dots (10.19)$$

$r = a$ على سطح الاسطوانة

$$v_a = [2 U \sin\theta + \frac{c}{a}] i_\theta$$

ويذلك تكون سرعة المائع عند سطح الاسطوانة ناتجة عن إسهامين:

- (1) مقدار يعتمد على a والزاوية θ .
(2) مقدار ثابت يساوي c/a .

و يمكن تصور الإسهام الأخير بافتراض الآتي:

- (أ) تدور الأسطوانة حول محورها بسرعة زاوية ثابتة تنتج عنها سرعة طرفية تساوى c/a متر في الثانية.

(ب) يضيق دوران الأسطوانة حول محورها مقدار ثابت للسرعة يساوى c/a والتي يمكن أن تكتب ωa حيث ω السرعة الزاوية (rad/s) في الاتجاه الموجب لتصبح المعادلة:

$$v_a = [2 U \sin\theta + \omega a] i_\theta \dots \quad (10.20)$$

يمكن تحديد نقاط الركود على سطح الاسطوانة بتعويض $0 = h$ في المعادلة (10.20) لمعطى:

$$\theta_o = \sin^{-1} \left(-\frac{\omega a}{2U} \right)$$

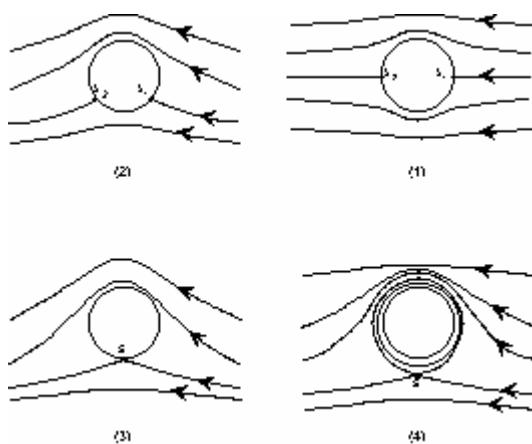
ويمكن ملاحظة ما يلى عند وضع قيم مختلفة للسرعة الدورانية (ω):

$$\theta_0 = 0, 180^\circ \text{ يعني } \omega = 0 \quad (1)$$

$$\theta_0 = 210^\circ, 330^\circ \quad \omega = U/a \quad (2)$$

$$\theta_0 = 270^\circ \quad \omega = 2U/a \quad (3)$$

$$\theta = 270^\circ \quad \text{نقطة الركود تبتعد عن السطح عند } \omega > 2U/a \quad (4)$$



الشكل 10.8

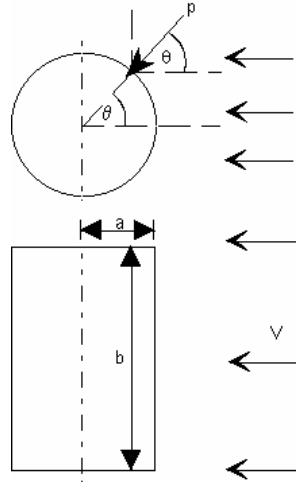
الضغط على سطح الاسطوانة

باستخدام معادلة برنولي

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{V^2}{U^2}\right)$$

ولإيجاد الضغط على سطح الاسطوانة نعوض للمقدار V^2 من المعادلة (10.20)

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - 4\sin^2\theta - 4\frac{\alpha a}{U} \sin\theta - \left(\frac{\alpha a}{U}\right)^2 \right] \dots\dots\dots (10.21)$$



القوة على سطح الاسطوانة

باعتبار F_x , F_y مركبتي القوة F على سطح الاسطوانة في الاتجاهين x و y

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$$

$$F_x = \iint_A -p \cos\theta dA$$

$$dA = (a d\theta) b$$

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \cos\theta ab d\theta$$

الشكل 10.9

وبالتعويض للضغط p من المعادلة (10.21)

$$F_x = -ab \int_0^{2\pi} p_\infty \cos\theta d\theta - ab \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \left[\int_0^{2\pi} (\cos\theta - 4\cos\theta \sin^2\theta - 4 \frac{\omega a}{U} \cos\theta \sin\theta \right.$$

$$\left. - \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \cos\theta) d\theta \right] = 0$$

وهذا يعني أن لا قوة ت العمل في الاتجاه x

$$F_y = \iint_A -p \sin\theta dA = -ab \int_0^{2\pi} p \sin\theta d\theta$$

$$= ab \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \int_0^{2\pi} (\sin\theta - 4\sin^3\theta - 4 \frac{\omega a}{U} \sin^2\theta - \frac{\omega^2 a^2}{U^2} \sin\theta) d\theta$$

$$= 2 \pi a^2 b \rho U \omega [\pi] = 2 \pi a^2 b \rho U \omega$$

$$\underline{F} = 2 \pi a^2 b \rho U \omega \underline{j} .$$

تعمل هذه القوة في الاتجاه y الموجب متعامدة على اتجاه السربان الرئيسي وتسمى الرفع ويرمز لها بـ F_L .

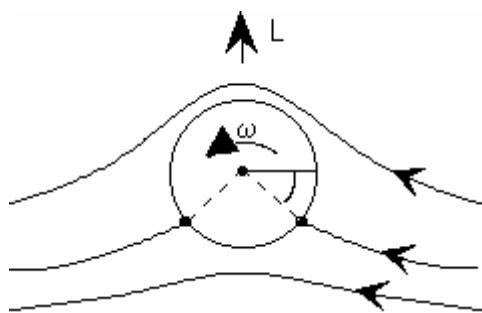
$$F_L = 2\pi\sigma^2 b\rho U\omega \dots \quad (10.22)$$

نرى ظاهرة الرفع هذه، على سبيل المثال، حين تُدفع كرة بضرية جانبية بحيث تتحدد سرعة انتقالية لا وسرعة زاوية ω تدور الكرة. ونلاحظ حينئذ أن الكرة تتحرك في مسار منحني مما يدل على نشوء قوة الدفع F_L . وقد طبّقت النظرية في سفينة استخدمت أسطوانات عمودية معروضة للرياح وتدار حول محورها. وممكن ذلك من الحصول على القوة F_L التي وفرت الدفع للسفينة.

نصيف هنا أن الرفع الحقيقي أقل مما تنبأ به المعادلة (10.22) بسبب إغفال هذه المعادلة للأثر اللرجي.

يعرف معامل الرفع C_L بالمعادلة :

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \frac{2\pi\alpha a}{U} \quad \dots \dots \dots \quad (10.23)$$



الشكل 10.10

مثال

$$\omega = 2\pi N/60 = 2\pi(300)/60 = 31.42 \text{ rad/s}$$

$$C_L = 2\pi(31.42)0.15/4.0 = \mathbf{7.40}$$

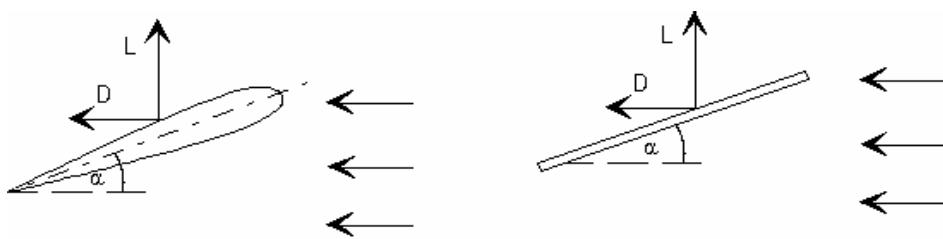
$$A = bd = 1(0.3) = 0.3 \text{ m}^2$$

$$F_L = 7.4(1/2)1.0(4.0)^2 (0.3) = \mathbf{17.77N}$$

$$\theta_s = \sin^{-1} \left(-\frac{\alpha a}{2U} \right) = \sin^{-1}(-0.589)$$

$$\theta_{s1} = -36.1^\circ = \mathbf{323.9^\circ}, \quad \theta_{s2} = \mathbf{216.1^\circ} .$$

10.4 الرفع على الجنيح



الشكل 10.11

الجنيح شريحة وترية من الأجسام ذات الخصائص الحركية. أمثلة لهذه الأجسام: جناح الطائرة، ريش الدفاع وريش المضخات والعنفات. نحن معنيون هنا باستخلاص قوة الرفع على الجنح وسنرى أن النظرية التي استخلصت لتقدير الدفع على الأسطوانة تفيد في استخلاص الرفع على الجنح. بُنِيَت نظرية الرفع على الأسطوانة على اعتبار السريران للزجي. إلا أنها أضفتنا الافتراض القاضي بانتقال سرعة دوران الأسطوانة إلى طبقة المائع للصققة بها.

وبدراسة سريان فعلي عبر جنح بزاوية هجوم ثابتة نرى أن قوة الرفع تنشأ دون الحاجة لدوران الجندي حول محوره كشأن الاسطوانة. إلا أنها ندرك أيضاً أن زاوية الهجوم للجندي الثابت تسبب في دوران المائع حول الجندي دوراناً جزئياً. وهذا يقود إلى الاستنتاج العام بأن الرفع في كل الأحوال، ملازم لدوران المائع حول الجسم.

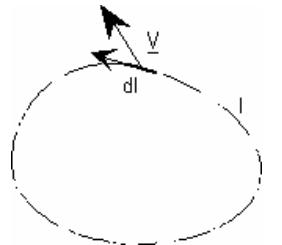
التدوير

يوضح الشكل (10.12) خط حلقي طوله λ في سربان رتيب. السرعة عند نقطة ما على الخط الحلقي λ وتعريف التدوير بالعلاقة:

$$\Gamma = \oint_{V.dl} \dots \dots \dots \quad (10.24)$$

بتطبيق هذا التعريف على حالة الاسطوانة بالتعويض

من المعادلة (10.20) في المعادلة (10.24)



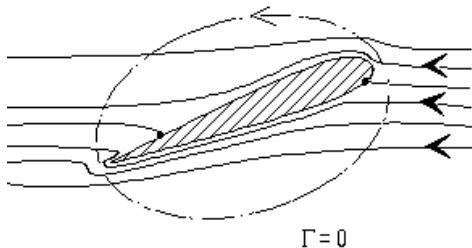
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (2U \sin\theta + \omega a) I_\theta \cdot a d\theta I_\theta \\ &= 2\pi a^2 \omega \end{aligned}$$

الشكل 10.12

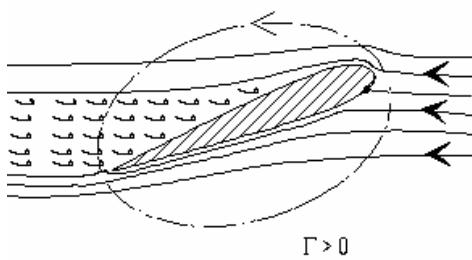
$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi a^2}$$

وبالتعويض له ω في المعادلة (10.22)

$$F_L = b\rho U \Gamma \dots\dots\dots(10.25)$$



بملاحظة أن التدوير يمكن استخلاصه للأجسام المختلفة بما فيها الجنبيات نرى عمومية المعادلة (10.25) و تُعرف هذه المعادلة العامة بقانون كوتا- يوكوفسكي.



ندرس الآن السلوك الفعلي للسريان حول جنح بزاوية هجوم صغيرة و موجبة. في بداية الحركة يكون السريان مثاليًا وتكون قيمة التدوير Γ حول الجنح صفرًا.

الشكل 10.13

إلا أن هذا الوضع المثالي لا يستمر طويلاً إذ أن الانعكاس الحاد في خطوط

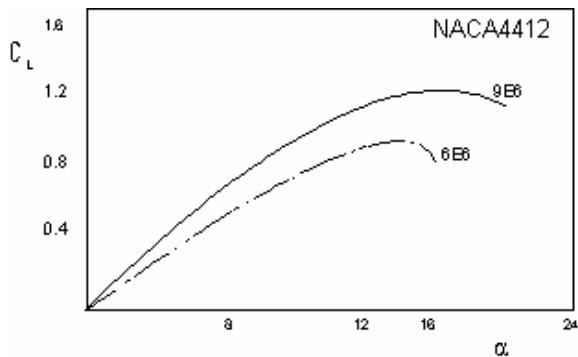
السريان عند ذيل الجنح لا يستمر. فتستقيم خطوط السريان مسببةً انفصال الطبقة الجدارية و ظهور الدوامات في مؤخرة الجنح التي يجرفها التيار باستمرار إلى سافل

المجال، وينتج عن استقامة هذه الخطوط فقد توازن الجوانب الموجبة والسلبية لتكامل التدوير مما يؤدي إلى أن يصبح التدوير حول الجنيح غير مساو للصفر. ويعني ذلك أن التدوير Γ لا ينتج عن طواف المائع حول الجنيح وإنما عن أن حالص التكامل حول الجنيح لم يعد صفرًا. وتنشأ بذلك قوة رفع على الجنيح يمكن معرفة قيمتها النظرية بتعويض قيمة التدوير في معادلة الرفع (10.25).

نرى أيضاً من التجربة أن الرفع على الجنيح يزيد مع زيادة زاوية الهجوم α في مدى زوايا الهجوم الصغيرة. وبذلك يكون أثر زاوية الهجوم على الجنيح مماثلاً لأثر السرعة الزاوية ω في حالة الاسطوانة التي سبق دراستها في القسم (10.3).

إذا كان الجنين لوحًاً مستويًاً و لزوايا الهجوم الصغيرة يمكن استخلاص العلاقة النظرية:

$$C_l = 2\pi \sin \alpha \dots \quad (10.26)$$



الشكل 10.14

عند زوايا الهجوم العالية للجنحات يزداد الانفصال وتزداد الدوامات عرفاً وينشأ عن ذلك نقصاناً في معدل زيادة C_L مع α ثم يتبع ذلك نقصاناً في قيمة C_L وزنادة في C_D وتعرف هذه حالات الانهيارات ويوضح الشكل (10.14) العلاقة للجنيح التجريبية عند عددي NACA4412 . رينولز $6E6$ و $1E6$

الأثر الناشئ عن محدودية الباع

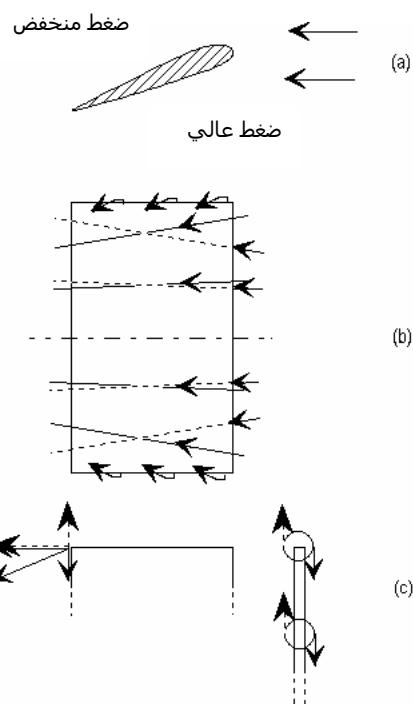
التحليل السابق اعتمد ثنائية أبعاد السريان. ويعني أن الجنيح أو الاسطوانة ذوا باع طويل جداً مقارناً بالوتر. أي أن النسبة الاباعية عالية. وتعرف النسبة الاباعية كما يلي:

النسبة الاباعية

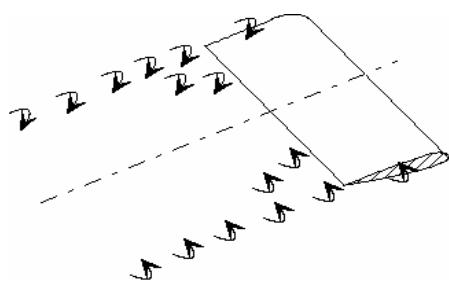
$$AR = \text{باع الجناح} / \text{الوتر}$$

لحالات النسبة الاباعية غير العالية نحتاج لدراسة طبيعة السريان ثلاثي البعد حول الجناح. ضغط المائع تحت الجناح أعلى من ضغطه فوق الجناح، كما هو موضح في الشكل (10.15a). ينشأ عن الفرق في الضغط هروب المائع من أسفل الجناح إلى أعلى عند طرفي الجناح - الشكل (10.15b).

تؤدي بالإضافة المذكورة في الجانب الأعلى إلى محصلة سرعة تتجه حزئياً نحو الخط النصفي للجناح. كما أن نقصان الكتلة في الجانب السفلي يؤدي إلى محصلة سرعة تتجه حزئياً نحو جانبي الجناح (b,c). نشوء هذه الدوامات - الشكل (10.16) - يعني فقدان في الطاقة ترتب على محدودية الطول في البعد المكاني الثالث ونقصان في الرفع عن قيمته المثالية.



الشكل 10.15

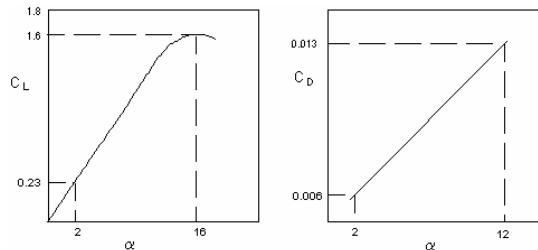


الشكل 10.16

تبني في الصناعة بعض الطرق العملية للتقليل من أثر محدودية الباع، منها زيادة النسبة البعوية أو وضع حواجز جانبية للحد من هروب المائع إلى أعلى الجناح.
لحساب الرفع الحقيقى على الجناح يضرب الرفع المثالي المحسوب في نسبة تحدد تجريبياً على نوع الجنيح المستخدم.

مثال

طائرة تزن 20kN . المساحة المؤثرة للجناح 30m^2 . سرعة التحلق 70m/s في هواء كثافته 1.16kg/m^3 . خصائص قطاع الجناح موضحة في الشكل (10.17). قدر زاوية الهجوم والقدرة المطلوبة لمقاومة الإعاقبة على الأجنحة. تجاهل أثر الهروب الطرفي.



الشكل 10.17

للتوازن عند التحلق :

الرفع = الوزن

$$Wt = \frac{1}{2} \rho U^2 A C_L$$

$$C_L = \frac{Wt}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \frac{20E3}{\frac{1}{2} (1.16)(70)^2 30} = 0.23$$

من منحنى الرفع - الشكل (10.17) - عند $C_L = 0.23$ ، $\alpha \approx 2^\circ$

القدرة اللازمة لمواجهة الإعاقبة

$$P = DU = \frac{1}{2} \rho A U^2 C_D U$$

من منحنى الجنح عند $\alpha = 2^\circ$ ، $C_D = 0.006$

$$P = \frac{1}{2} (1.16)(70)^3 (30)(0.006) = 35.8\text{kW}$$

مسائل

10.1 يتصرف سريان بدالة الكُمُون: $\varphi = y^3 - 3x^2y$

- (أ) استخلص مركبات السرعة .
- (ب) استخلص دالة السريان .

(ج) أرسم بعض خطوط السريان في المستوى $y-x$ لقيم x الموجبة.

$$[u=6xy, v=3y^2 - 3x^2, \psi = x^3 - 3xy^2]$$

10.2 بدءً من المعادلة (10.19) لمتجه السرعة للسريان قرب اسطوانة ثنائية البعد في مجال لالجي ، استخلص تعبيرًا عن دالة السريان .

$$[\psi = -(r - \frac{a^2}{r}) U \sin \theta - \delta^2 \omega \ln r]$$

10.3 خصائص السريان الأساسي لهواء كما يلي :

0.101 MPa	الضغط
300 K	درجة الحرارة
-70°C m/s	السرعة

يمر السريان بأسطوانة طويلة الباع قطرها 0.3m تدور حول محورها عكس عقارب الساعة بمعدل 40rps . مستخدماً نظرية السريان المثالي أحسب :

- (أ) الموضع الزاوي للركود .
- (ب) الضغط عند موضع الركود .
- (ج) السرعة والضغط قرب سطح الاسطوانة عند الزوايا : $270^\circ, 90^\circ, 0^\circ$
- (د) الرفع على وحدة طول .

$$[190.6^\circ, 344.4^\circ; 0.139 \text{ MPa}; -177.7 \text{ m/s} 0.0854 \text{ MPa}; -120.3 \text{ m/s}; 0.0978 \text{ MPa}; 2.92 \text{ kN}]$$

10.4 جناح طائرة من لوح مسطح طول وتره 1.5m يتحرك في هواء كثافته 1.2 kg/m^3 ولزوجته الكينماتية $6E-5 \text{ m}^2/\text{s}$ بزاوية هجوم 10° . عدد رينولز للطيران $3E6$ مبنياً على وتر الجناح . بافتراض أن السريان ثنائي البعد أحسب :

- (أ) قوة الرفع على كل متر من الباع .
- (ب) بارج الجناح إذا كان الوزن الكلي 0.1 MN

$$[14.1 \text{ kN}; 7.1 \text{ m}]$$

10.5 دلت اختبارات أجريت على جناح طائرة أنه يمكن تقرير تغير معاملي الرفع والإعاقه مع زاوية الهجوم α في مدى زاوية الهجوم $12^\circ - 0^\circ$ كما يلي :

$$C_L = 0.35(1+0.2\alpha)$$

$$C_D = 0.01(1+\alpha)$$

وزن الطائرة MN 0.15 ومساحة الجناح $35m^2$. زاوية الهجوم عند التحلق الثابت 3° .
أحسب سرعة الطائرة والقدرة اللازمه لمواجهة الإعاقه على الجناح . اعتبر كثافة الهواء $1.2kg/m^3$

10.6 قارب سريع مزود بجنيح مائي مساحته المؤثرة $0.5m^2$. معاملي الرفع والإعاقه للجنيح 1.2 و 0.02 ، على التوالي . وزن القارب 20kN وكثافة الماء $1000kg/m^3$.
متجاهلاً مقاومة الهواء أحسب :

- (أ) أقل سرعة ممكنة للقارب يحمل فيها الجنين وزن القارب كلياً .
- (ب) القدرة اللازمه لمواجهة الإعاقه عند السرعة المحسوبة أعلاه .
- (ج) أعلى سرعة للقارب إذا كانت القدرة القصوى 20kW .

[8.2m/s ; 2.7kW; 15.9 m/s]

١١ السريان الانضغاطي للغاز

11.1 مقدمة

تعريف: يوصف السربان بأنه انضغاطى إذا تغيرت الكثافة بقدر مؤثر عند تغير العوامل الأخرى ، مثل الضغط و درجة الحرارة.

بعض معادلات الديناميكا الحرارية ذات الصلة 11.1.1

$$p = \rho RT \quad \dots \dots \dots (11.1.1)$$

$$\frac{J}{kg \ K} : R \text{ ثابت الغاز ووحدته}$$

$$R = \frac{\bar{R}}{M_r} \text{ ثابت الغاز الكوني\الكتلة النسبية} =$$

$$\bar{R} = 8310 \text{ J/kg-K}$$

بالنسبة للهواء:

$$M_r \sim 29 \rightarrow R = 287 \text{ J/kg-K}$$

باعتبار c_v الحرارة النوعية عند ثبات الحجم
 c_p الحرارة النوعية عند ثبات الضغط
 k نسبة الحرارة النوعية

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad \dots \dots \dots (11.1.2)$$

$$c_v = \frac{R}{k-1} \quad \dots \dots \dots (11.1.3)$$

$$c_p = c_v + R = \frac{kR}{k-1} \quad \dots \dots \dots (11.1.4)$$

تظهر كل من c_p و c_v في تعابير الطاقة الداخلية والمحتوى الحراري:

$$u = c_v T \quad \dots \dots \dots (11.1.5)$$

$$h = c_p T \quad \dots \dots \dots (11.1.6)$$

$$\rho = \text{const. } \rho^k \quad \dots \dots \dots (11.1.7)$$

العلاقة التفاضلية بين المحتوى الحراري و التبديد

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho} \quad \dots \dots \dots (11.1.8)$$

الزيادة في التبديد بين الموضعين (1) و (2) لغاز مثالي:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad \dots \dots \dots (11.1.9)$$

11.1.2 معادلات الحفظ

التغيرات في درجة الحرارة للسريان الانضغاطي ذات أهمية، بصفة عامة، للسريان الرتيب أحادي البعد بدون شغل من مصدر خارجي و بتجاهل التغيرات في الطاقة الوضعية - لضالتها بالنسبة للغازات - تأخذ معادلة الطاقة الصورة:

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{m} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}$$

حيث v السرعة المتوسطة في المقطع

\dot{Q} معدل اضافة الحرارة

m معدل السريان الكتلي للغاز

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{m} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad \dots \dots \dots (11.1.10)$$

معادلة كمية التحرك لهذه الحالة:

$$\Delta(pA) + \Delta(mv) + \tau_w A_w = 0 \quad \dots \dots \dots (11.1.11)$$

11.1.3 المقاييس الابعدية ذات الصلة

عدد ماخ 1

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث v و c سرعة الغاز و سرعة الصوت في موضع واحد.

نسبة الحرارة النوعية 2

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

عدد رينولز 3

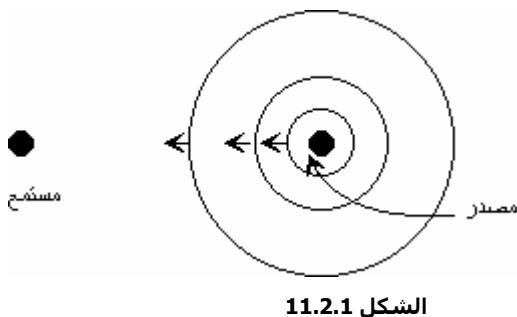
$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$$

حيث L
 إزاحة مرجعية في السريان
 μ لزوجة الحركية للمائع
 ν لزوجة الكينماتية للمائع.

11.2 حركة الموجات الصوتية

11.2.1 العلاقة بين الصوت ومصدره ووسط انتقاله

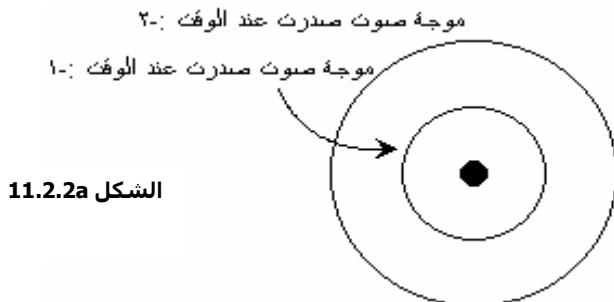
ينتقل الصوت بواسطة موجات ضغطية وبذلك فهو يحتاج لوسط ناقل وتعتمد سرعة الصوت على انضغاطية الوسط الناقل.



الشكل (11.2.1) يوضح مقاطع من هذه الكرة كما تشاهد الآن ($t=0$) .

$$\left\{ \frac{v}{c} = 0 \right\}$$

الحالة I : مصدر الصوت ساكن



$\left\{ \frac{v}{c} < 1 \right\}$ مصدر الصوت يتحرك بسرعة أقل من سرعة الصوت **الحالة II :**
 (الحالة دون الصوتية)



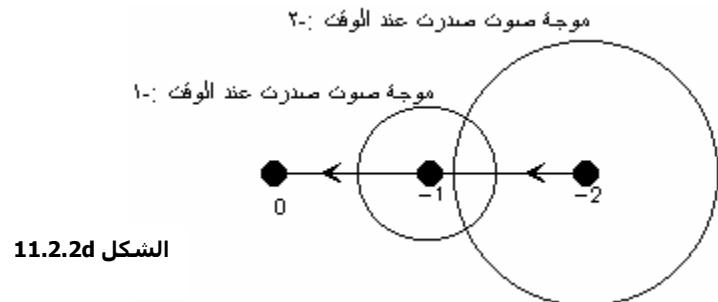
الشكل 11.2.2b

$\left\{ \frac{v}{c} = 1 \right\}$ مصدر الصوت يتحرك بسرعة تساوي سرعة الصوت **الحالة III :**
 (الحالة الصوتية)



الشكل 11.2.2c

$\left\{ \frac{v}{c} > 1 \right\}$ مصدر الصوت يتحرك بسرعة تفوق سرعة الصوت الحالـة IV :
 (الحالـة فوق الصـوـتـيـة)

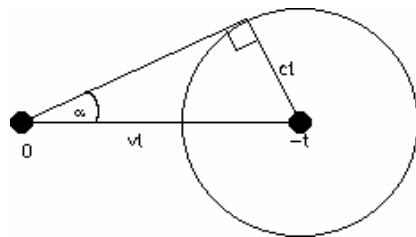


الشكل 11.2.2d

11.2.2 مخروط ماخ

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}$$

زاوية ماخ = α



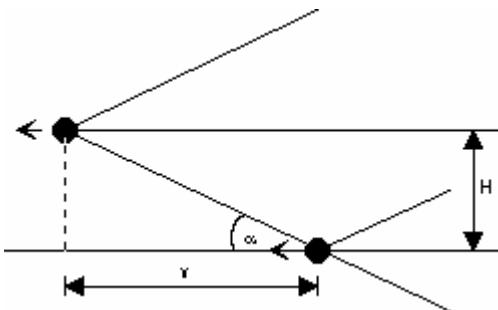
الشكل 11.2.3

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{c}{v} = \sin^{-1} \frac{1}{M} \quad \dots \dots \dots (11.2.1)$$

وهذا يعني انه إذا كان عدد ماخ ثابتاً فان زاوية مخروط ماخ تظل ثابتة.

مثال

طائرتان حربيتان تطيران في اتجاه واحد على مستوىً عمودي واحد و بنفس عدد ماخ. المطلوب حساب أقصى مسافة أفقية ممكنة بين الطائرتين بحيث لا تكون أي منهما في مجال صوت الأخرى. في أي مدى لعدد ماخ يكون ذلك ذا معنى؟



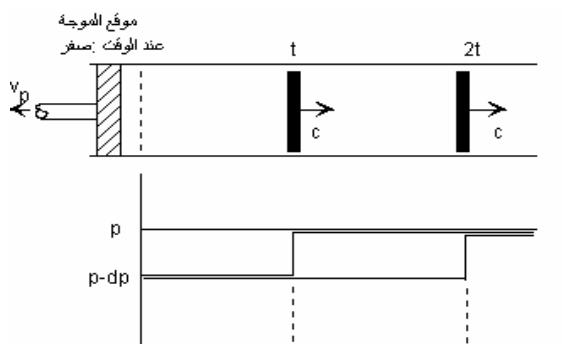
الشكل 11.2.4

$$\tan \alpha = \frac{H}{x}$$

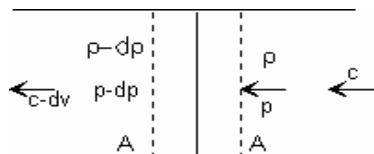
$$x = H \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\rightarrow M > 1$$

11.2.3 سرعة الصوت



الشكل 11.2.5



الشكل 11.2.6

الأنبوب الموضح في الشكل (11.2.5) يحوي غاز ساكن منتظم الضغط p . يحد الأنابيب عند جانبيه الأيسر مكبس . يحرك المكبس فجأة إلى اليسار (حركة تفريغية) ينتج عنها هبوط في الضغط بمقدار ضئيل dp . ينتشر هذا الهبوط بسرعة محددة c ليعم كل الأنابيب. مخطط الضغط- المسافة في الشكل (11.2.5) يبين توزيع الضغط في الأوقات 0 و t و $2t$.

لاستخلاص علاقة سرعة الصوت بانضغاطية السريان ندرس قوانين الحفظ مطبقة على حجم تحكمي يحوي موجة صوتية - الشكل (11.2.6).
باتخاذ الموجة مناطقاً يمكن اعتبار الغاز يتحرك بسرعة c في اتجاه x السالب.

حفظ الكتلة يعطي
 (الكتافة)(المساحة)(السرعة) = ثابت
 $(\rho \cdot d\rho)(c \cdot dv)A = \rho c A$

$$\rho \, dv + c \, d\rho = 0 \quad \dots \dots \dots (11.2.2)$$

حفظ كمية الحركة:

$$\Delta(pA) + \Delta(mv) + \tau_w A_w = 0 \quad \dots \dots \dots (11.1.11)$$

نسبة لضالة سmek الموجة

$$A_w \tau_w = 0$$

$$\Delta(pA) = -Adp$$

$$\Delta(mv) = m \, \Delta v = \rho c A (-dv) = -A \rho c dv$$

$$dp + \rho c dv = 0 \quad \dots \dots \dots (11.2.3)$$

و (11.2.3) تعطيان

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad \dots \dots \dots (11.2.4)$$

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2} \quad \dots \dots \dots (11.2.5)$$

المعادلة (11.2.6) تعبّر عن معدل تغيير الكثافة مع الضغط و بذلك تكون مؤشراً للانضغاطية.
 و نلاحظ اعتماد ذلك كلياً على سرعة الصوت c .

للسريران اللاتبديدى

$$\frac{p}{\rho^k} = const \quad \dots \dots \dots (11.1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} - \frac{d(\rho^k)}{\rho^k} &= 0 \\ \frac{dp}{p} - k \frac{\rho^{k-1}}{\rho^k} d\rho &= 0 \\ \frac{dp}{p} - k \frac{d\rho}{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

معادلة الغاز الكامل:

تعطیان (2) و (1)

$$\frac{dp}{d\rho} = kRT \dots \dots \dots (3)$$

و (3) تعطیان (11.2.5)

$$c^2 = kRT$$

$$c = \sqrt{kRT} \quad \dots \dots \dots \quad (11.2.6)$$

11.3 السريرات الالاتيديندي

11.3.1 مقدمة

ينبني التحليل في هذا الفصل على الافتراضات :

- (أ) سريان رتب
- (ب) أحادى البعد
- (ج) الآثار اللزجية وانتقال الحرارة وأثر الجاذبية ضئيلة التأثير ويمكن تجاهلها .
- (د) الغاز مثالي .

الافتراضات المذكورة تبسط التحليل كثيراً إلا انه يظل مناسباً للتطبيق على الكثير من العمليات الهندسية بدقة مناسبة. أمثلة لهذه العمليات : السريان في منافذ ومبطنات العنفة الغازية والعنفة البخارية والمنافذ الصاروخية .

ينبغي مراعاة الجوانب العملية الآتية لتصح الافتراضات أعلاه في مجاري الغاز:

- (أ) معدل تغير المساحة مع المسافة يؤثر في الطبقية الجدارية ويجب أن يكون صغيراً .
- (ب) إذا كان الخط المحوري للمجرى منحنياً يجب أن يكون نصف قطر الانحناء كبيراً مقارناً مع قطر المجرى .

11.3.2 المعادلات التفاضلية

إبتداءً من قوانين الحفظ (كتلة وطاقة) مطبقة على حجم تحكمي تفاضلي لمجرى متغير المساحة في اتجاه السريان، نحصل على العلاقات التفاضلية للسريرات الالاتيديندي و التي تعرف ايضاً بالعلاقات الوصفية للسريرات .

قانوني حفظ الكتلة والطاقة :

$$\rho v A = \text{const}$$

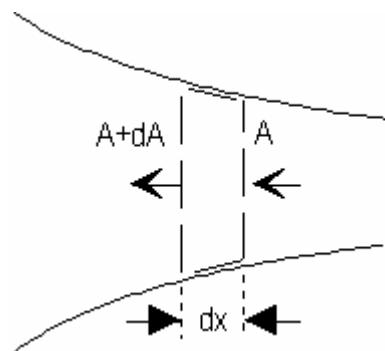
$$h + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

وفي صورتيهما التفاضلية:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$dh + vd v = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho} \dots\dots\dots(3)$$



الشكل 11.3.1

وَبِمَا أَنَّ السَّرْيَانَ لَا تَبْدِيدٌ

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

(2) وتصبح المعادلة

$$\frac{dp}{\rho} + vdv = 0$$

تعطیان (4) و (1)

$$\frac{dp}{\rho V^2} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{1}{v^2} - \frac{d\rho}{dp} - \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} = 0$$

(11.16) وباستخدام

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} - \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} = 0$$

$$\frac{1}{M^2} - 1 = \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} c^2 = \frac{dA}{dp} \frac{\rho kRT}{A} = \frac{dA}{dp} k \frac{p}{A}$$

(4) و (11.3.1) تعطیان

$$\frac{dv}{dA} = \frac{dv}{dp} \frac{dp}{dA}$$

- المعادلة (11.3.2) تدل على أن عدد ماتخ حرج عند $M = 1$ في حال $M < 1$ فإن السرعة تقل مع زيادة المساحة في اتجاه السريان وتزيد بنقصان المساحة ، تماماً كما هو الحال بالنسبة للسريان الانضغاطي حيث

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A}$$

- وفي حال $M > 1$ تتعكس العلاقة ، حيث تزيد السرعة وتنقص تبعاً لزيادة المساحة أو نقصانها .
- المعادلة (11.3.1) تدل على أن عدد ماتح حرج أيضاً عند $M = 1$ والعلاقة بين الضغط والمساحة دوماً على عكس العلاقة بين السرعة والمساحة .

11.3.3 المعادلات التكاملية

عند استخلاص المعادلات التكاملية للسريان اللاطبيدي في صورة لا بعدية تحتاج لتحديد نقاط مرجعية للمتغيرات وهي كما يلي :

- النقطة المرجعية الأولى هي الحالة الركودية ($v = 0$) وسيشمل ذلك المتغيرات: T, p, ρ تكون قيمها المرجعية: T_0, p_0, ρ_0 على التوالي.
- النقطة المرجعية الثانية هي الحالة الصوتية ($v = c$) . وسيقتصر استخدامها هنا على المساحة A . وتكون قيمتها المرجعية A^* .

بتطبيق معادلة الطاقة (11.1.10) بين نقطة عامة و النقطة المرجعية (الركودية) :

$$h + \frac{1}{2} v^2 = h_0$$

$$v^2 = 2(h_0 - h)$$

و بالاستفاده من المعادلات (11.1.6) و (11.1.4)

$$v^2 = 2C_p(T_0 - T) = \frac{2kR}{k - 1}(T_0 - T) = \frac{2kR}{k - 1}T\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$M^2 = \frac{2}{k - 1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$\frac{T}{T_0} = [1 + \frac{1}{2}(k - 1)M^2]^{-1}(11.3.3)$$

$$\mu = [1 + \frac{1}{2}(k - 1)M^2] \quad \text{و بتعريف } \mu$$

$$\frac{T}{T_0} = \mu^{-1}(11.3.3)$$

للسريان اللاطبيدي و من المعادلتين (11.1.1) و (11.1.7)

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

و بالتعويض في المعادلة (11.3.3)

و بالاستفادة من المعادلة (11.1.7)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}$$

و بالتعويض من (11.3.4)

و لاستخلاص العلاقة التكاملية للمساحة نبدأ من معادلة حفظ الكتلة:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho V}$$

حيث الموضع **1** موضع محدد في السريان

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 M_1 C_1}{\rho M C} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{kRT_1}}{\rho M \sqrt{kRT}} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{T_1}}{\rho M \sqrt{T}} = \frac{M_1}{M} \left(\frac{\rho_1 / \rho_0}{\rho / \rho_0} \right) \sqrt{\left(\frac{T_1 / T_0}{T / T_0} \right)}$$

و بالتعويض من المعادلات (11.3.3) و (11.3.5)

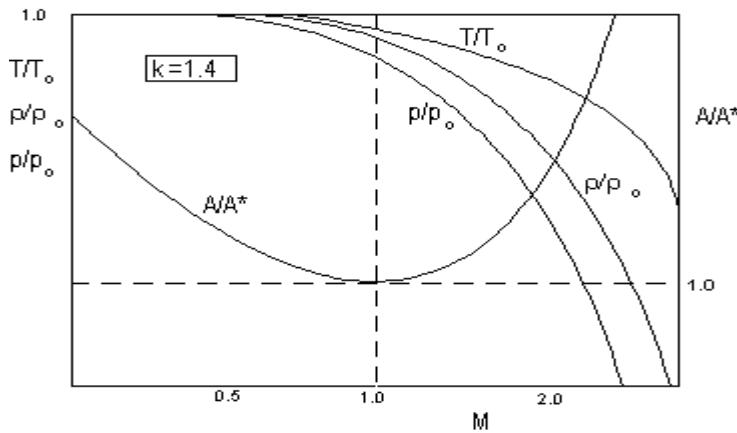
$$\frac{A}{A_1} = \frac{M_1}{M} \left(\frac{\mu}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

وإذا اعتبرنا المقطع (1) هو المقطع الصوتي حيث

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{2}(k-1)(1) = \frac{1}{2}(k+1)$$

و تصبح المعادلة

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots \quad (11.3.6)$$



الشكل 11.3.2

الشكل (11.3.2) يبين منحنيات التغير الممثلة للمعادلات التكاملية المستخلصة. ويجدر القاريء في الملحق (د) قوائم مستخلصة من المعادلات المذكورة للسريران الاتبدي عند $k = 1.4$.

مثال

يسري غاز في مجرى متغير المساحة. نسبة الحرارة النوعية للغاز 1.25 . درجة الحرارة عند موضع ما 30°C ودرجة الحرارة الركودية 180°C . لوحظ أن الضغط عند هذا الموضع يتنافض في اتجاه السريران.

- (أ) أحسب عدد ماخ
- (ب)وضح ما إذا كان المجرى لاماً أم ناشراً
- (ج)وضح ما إذا كانت السرعة تزيد أو تنقص عند هذا الموضع.

$$\begin{aligned} T &= 30 + 273 = 303\text{K} \\ T_0 &= 180 + 273 = 453\text{K} \end{aligned} \quad (I)$$

$$\rightarrow \mu = 1.50$$

المعادلة (11.3.3) تعطي

$$1.5 = 1 + 0.125 M^2$$

$$M = 2.0$$

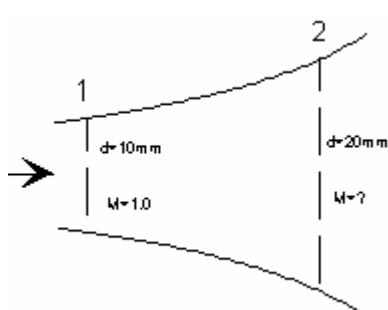
: (11.3.1) المعادلة (ب)

$$\frac{dp}{dA} = k \frac{p}{A} \frac{M^2}{1 - M^2}$$

$M > 1$ تعني أن الجانب الأيمن سالب. وبما أن dP سالبة فإن dA تكون موجبة ويعني ذلك أن المجرى ناشر. المعادلة (11.3.2) (ج)

$$\frac{dV}{dA} = -\frac{V}{A} \frac{1}{1 - M^2}$$

$M > 1$ تعني أن الجانب الأيمن موجب وبما أن dA موجبة فإن dV تكون موجبة يعني ذلك أن السرعة تزداد.



الشكل 11.3.3

مثال

قيمة النسبة k للسريان في المجرى الموضح في الشكل (11.3.3) تساوي 1.25 . المجرى ناشر و قيمة M عند المقطع (1) تساوي 1.0 و $dM/dx > 0$ عند المقطع (2). قطر المجرى يزيد من 10mm إلى 20mm عند المقطع (2). المطلوب قيمة عدد ماخ عند المقطع (2).

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 4$$

المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A_2}{A_*} = \frac{1}{M_2} \left(\frac{2\mu_2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$4 = \frac{1}{M_2} \{ 0.889 [1 + 0.125 M_2^2] \}^{4.5}$$

المعادلة أعلاه تتطلب طريقة تكريره للحل. باستخدام طريقة نيوتن رافسون – الملحق (ب):

$$F = 0.147 [1 + 0.125 M_2^2]^{4.5} - M$$

$$F' = 0.166 M_2 [1 + 0.125 M_2^2]^{3.5} - 1.0$$

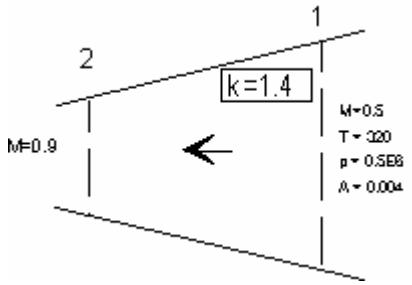
$$M_{i+1} = M_i - F/F'$$

نعرف وجود حلين لالمعادلة: فوق صوتي و دون صوتي:

الحل فوق الصوتي: **2.70**

الحل دون الصوتي: **0.15**

اعتماداً على طبيعة السريان عند المقطع 1 حيث $dM/dx > 0$ نستنتج أن **2.70**



الشكل 11.3.4

مثال لسريان الهواء الموضح في الشكل

(11.3.4) المطلوب إيجاد A_2 , p_2 , T_2

باستخدام:

(أ) معادلات السريان اللااتبدي

(ب) قوائم السريان الانضغاطي.

للهواء:

$$k = 1.4, R = 287 \text{ J/kg-K}$$

باستخدام المعادلات:

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} T_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-1} T_1$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{2} (k-1) M_1^2 = 1.050$$

$$\mu_2 = 1.162$$

$$T_2 = (1.162/1.05)^1 (320) = 289 \text{ K}$$

$$P_2 = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} p_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-\frac{k}{k-1}} p_1 = \left(\frac{1.162}{1.05} \right)^{-\frac{1.4}{0.4}} (0.5E6) = 0.35 \text{ MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} A_1 = \frac{0.5}{0.9} \left(\frac{1.162}{1.05} \right)^3 A_1 = 0.003 \text{ m}^2$$

باستخدام قوائم الغاز للسريان الانضغاطي اللااتبدي:

(ب)

M	T/T ₀	p/p ₀	A/A*	
0.5	0.9524	0.8430	1.3398	: 1 س ل أ
0.9	0.8606	0.5913	1.0089	: 2 س ل أ

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} T_1 = \left(\frac{0.8606}{0.9524} \right) (320) = 289 \text{ K}$$

$$P_2 = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} p_1 = \left(\frac{0.5913}{0.8430} \right) (0.5E6) = 0.35 \text{ MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{1.0089}{1.3398} (0.004) = 0.003 \text{ m}^2$$

11.3.3 أثر عدد ماح على الكثافة

المعادلة (11.3.5) للسريان الانضغاطي:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = [1 + \frac{1}{2}(k - 1)M^2]^{-\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots(1)$$

وللسريان الانضغاطي: ثابت $\rho = \rho_0$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 \dots\dots\dots(2)$$

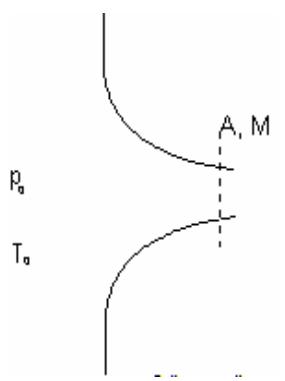
وباعتبار $k = 1.4$ القائمة أدناه تبين الخطأ الناتج عن افتراض الانضغاطية عند أعداد ماح مختلفة.

M	0.2	0.4	0.5	1.0
ρ_0/ρ	1.02	1.08	1.13	1.58
$\epsilon \%$	2	7	12	37

11.3.4 معدل السريان الكتلي عبر منفذ

الشكل (11.3.6) يوضح منفذ موصل إلى مستودع غاز مضغوط بالمواصفات الآتية:

p_0 الضغط في مستودع الإمداد
 T_0 درجة الحرارة في المستودع
 A مساحة مقطع المنفذ عند موضع الرصد
 M عدد ماح عند موضع الرصد



معادلة حفظ الكتلة:

$$m = \rho v A = \left(\frac{p}{RT} \right) \left(M \sqrt{kRT} \right) A = \sqrt{\frac{k}{RT}} A M p \dots\dots\dots(11.3.7)$$

الشكل 11.3.6

باستخدام المعادلات (11.3.3) و (11.3.4) للمتغيرات T و p

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A M p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{\mu^{-\frac{k}{k-1}}}{\mu^{-\frac{1}{2}}} \\ \dot{m} &= \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{M}{\mu^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \end{aligned} \quad (11.3.8)$$

يمكن استخلاص المعدل الأعلى للسريان بإجراء التفاضل على المعادلة (11.3.7) و مساوته بالصفر، النتيجة أن أعلى معدل سريان يحدث عند $M = 1$ ، وأعلى معدل ممكن للسريان هو

$$\dot{m}_M = \sqrt{\frac{k}{R}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{A^* p_0}{\sqrt{T_0}} \quad (11.3.9)$$

حيث A^* المساحة الحرجة، أي عند $M = 1$. وفي نفس الموضع

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p^*}{p_0}$$

= النسبة الحرجة للضغط.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T^*}{T_0}$$

= النسبة الحرجة لدرجة الحرارة. وبتعويض $M = 1$ في المعادلات (11.3.4) و (11.3.3) :

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (= 0.528 \text{ للهواء})$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (= 0.833 \text{ للهواء})$$

و تعطى المعادلة (11.3.8) الصيغة أدناه عند $k = 1.4$:

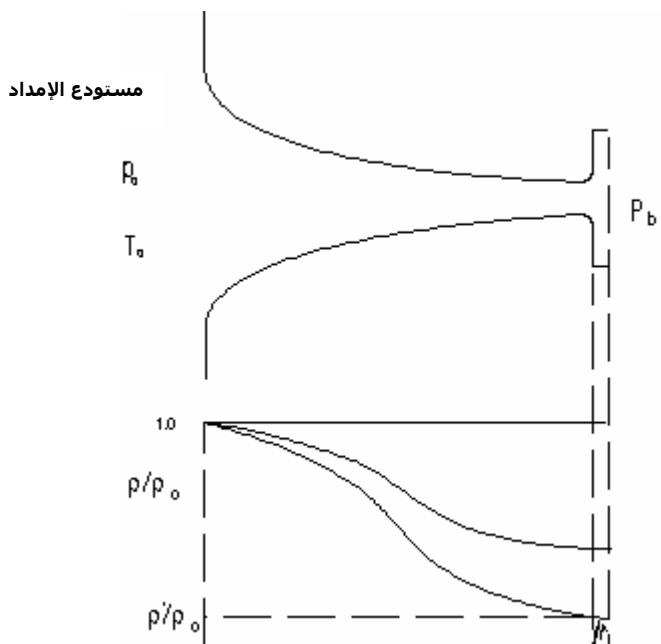
$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \quad (11.3.10)$$

المعادلات أعلاه استخلصت للسريان الاتبدي. نسبةً لوجود قدر من الاحتكاك في الواقع فإن معدل السريان الحقيقي يقل عن المقدار المعتبر عنه أعلاه. وبذلك يمكن تعريف معامل السريان C_m لربط السريان الفعلي بالسريان الاتبدي:

معدل السريان الكتلي الفعلى | معدل السريان الكتلي الاتبدي $= C_m$

وللمنافث المستقيمة جيدة التصنيع فإن قيمة C_m تكون في المدى $0.94 - 0.99$.

11.3.5 توزيع الضغط في المنفث اللام



الشكل 11.3.7

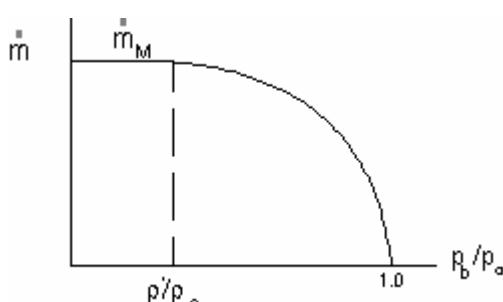
ندرس هنا توزيع الضغط في المنفث اللام من خلال تجربة يتم فيها تثبيت الضغط و درجة الحرارة في مستودع الإمداد و يعدل الضغط في المستودع المستقبل و يتبع ما يحدث للضغط في محور المنفث

(أ) الضغط النهائي p_b يساوي الضغط الركودي p_0
 $p_b/p_0 = 1.0$

ممال الضغط في المنفث
= صفر و بذلك لا يوجد سريان.

(ب) الضغط النهائي p_b يقل عن الضغط الركودي p_0 . يحدث هذا ممال ضغط في المنفث و يؤدي إلى سريان في اتجاه الموجب.

الضغط الخروجي =
الضغط النهائي،
 $p_e = p_b$
و كلما خفض الضغط p_b ينخفض الضغط الخروجي p_e لنفس المستوى و تزيد السرعة M_e .



الشكل 11.3.8

الحالات الحدودية: ج)

بالاستمرار في خفض p_b تبلغ p_e^* وتصبح $M_e = 1.0$ و يصبح عدد ماح m_M .
يأخذ معدل السريان الكتلي أعلى قيمة له،

حالة الشرق: د)

بحلقة p_b أدنى من p_e^* لا تستجيب p_e وتظل عند المستوى p_e^* وتظل M_e عند m_M و m عند 1.0
وبذلك يوصف السريان بأنه شرق.
ينخفض الضغط سافل المنفذ بصورة شبه فجائية إلى p_b عبر موجات تمددية.

مثال

منفذ لام موصى بمستودع إمداد به هواء عند ضغط ركودي ثابت و درجة حرارة ركودية 25°C . الضغط النهائي ثابت عند 0.1 MPa و مساحة المنفذ الحرارية 0.0005 m^2 .
المطلوب حساب معدل السريان الكتلي للحالتين:

- (أ) الضغط في مستودع الإمداد 0.15 MPa
- (ب) الضغط في مستودع الإمداد 0.35 MPa .

$$m = \rho_e v_e A_e = \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e M_e p_e$$

$$p_0 = 0.15\text{ MPa}$$

نبدأ بتحديد ما إذا كان السريان شرقاً

$$p_b = 0.1E6$$

$$p_b/p_0 = 0.667 > p^*/p_0 (0.528)$$

اذن السريان غير شرق

$$\Rightarrow p_e = p_b = 0.1E6$$

$$p_e/p_0 = 0.667$$

$$\frac{P_e}{P_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}} = \mu^{-3.5} = 0.667$$

$$\rightarrow \mu_e = 1.123 = 1 = \frac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.78$$

$$T_e = T_0 (T_e/T_0) = T_0 (\mu_e^{-1}) = (25+273)(1/1.123) = 265K$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(265)}} (5E - 4) (0.78) (0.1E6) = \mathbf{0.17 \text{ kg/s}}$$

$p_0 = 0.35 \text{ MPa}$ (ج)
 $p_b / p_0 = 0.286 < p^* / p_0$
 اذن السريان شرق
 $\Rightarrow p_e / p_0 = p^* / p_0 = 0.528$

$$p_e = (0.528)(0.35E6) = 0.185E6$$

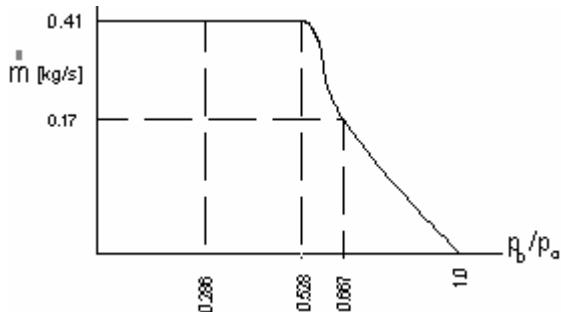
$$T_e / T_0 = T^* / T_0 = 0.833$$

$$\rightarrow T_e = (0.833)298 = \mathbf{248K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(248)}} (5E - 4) (1.0) (0.185E6) = \mathbf{0.41 \text{ kg/s}}$$

وبطريقة أخرى يمكن استخدام المعادلة (11.3.9)

$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{(5E - 4)(0.35E6)}{\sqrt{298}} = \mathbf{0.41 \text{ kg/s}}$$



الشكل 11.3.9

مثال

منفذ لام موصل بمروحة ساحبة. مدخل المنفذ مفتوح إلى الجو بضغط 0.1MPa و درجة حرارة ركودية 303K . المساحة الخروجية للمنفذ 0.0001m^2 . الضغط النهائي في مخرج المنفذ يساوي:

- (أ) 0.08MPa
- (ب) 0.05MPa

المطلوب تقدير معدل السريان الكتلي و الحجمي.

$$p_b = 0.08\text{MPa} \quad (1)$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{AM_p}{\sqrt{T}}$$

$$p_b / p_0 = 0.08 / 0.1 = 0.8 > 0.528$$

اذن السريان غير شرق

$$p_e = p_b$$

$$p_e / p_0 = 0.8$$

$$\frac{P_e}{P_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$0.8 = \mu^{-3.5}$$

$$\rightarrow \mu_e = 1.066$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.57$$

$$\begin{aligned} T_e / T_0 &= \mu_e^{-1} = 0.938 \\ \rightarrow T_e &= (0.938)(303) = 284K \end{aligned}$$

$$= \mathbf{0.0189 \text{ kg/sm}}$$

$$q_e = \dot{m} / \rho_e = \dot{m} R T_e / p_e = (0.0189)(287)(284) / 0.08E6 = \mathbf{19 \text{ l/s}}$$

$$p_b = 0.05 \text{ MPa} \quad (c) \\ p_b / p_0 = 0.5 < 0.528$$

$$\text{اذن السريان شرق} \\ p_e / p_0 = 0.528$$

$$p_e = 0.528(0.1E6) = 0.0528E6$$

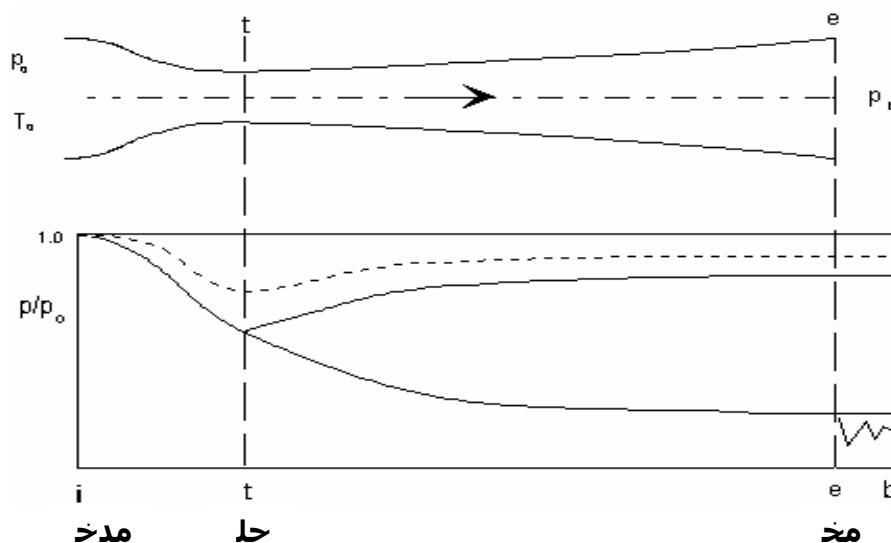
$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{\text{A}^* P_0}{\sqrt{T_0}} = \mathbf{0.023 \text{ kg/s}}$$

$$q_e = \dot{m} R T_e / p_e$$

$$T_e = \left(\frac{T^*}{T_0}\right) T_0 = (0.8333)(303) = 252K \\ q_e = \mathbf{31.5 \text{ l/s}}$$

توزيع الضغط في المنفذ اللام-الناشر

11.3.6



الشكل 11.3.10

التجربة هنا شبيهة بتلك التي سردت عن المنفذ اللام في القسم (11.3.5):
 أ) الضغط النهائي مساوٍ لضغط الإمداد $p_e/p_0 = 1$

ممال الضغط = صفر . لا سريان.

ب)

السريان في كل المنفذ دون صوتي. وبالرجوع إلى المعادلات التفاضلية للسريان دون الصوتي - القسم (11.3.2) - يمكن إدراك أن الضغط يتناقص في الجانب اللام ليصل أدنى مستوىً له في حلق المنفذ ثم يتزايد في الجانب الناشر. عدد ماخ، وبالتالي، يتزايد في الجانب اللام ليصل أعلى مستوىً له في حلق المنفذ ثم يتناقص في الجانب الناشر.

الضغط الخروجي في هذه الحالة يساوي الضغط النهائي. $p_e = p_b$.

ج)

بخفض الضغط النهائي أكثر ينبلج الحالة الحدودية للسلوك (ب). يميز هذه الحالة الحدودية أن عدد ماخ في الحلق يكون صوتياً ($M=1$) وبذلك يكون الضغط هناك حرجاً ($p/p_0 = p^*/p_0$) ويكون السريان في كل مواضع المنفذ الأخرى دون صوتي.

بدراسة المعادلة (11.3.6) يتضح أن السلوك (ج) هو أحد حلّي المعادلة. السلوك (د) يطابق الحل الثاني للمعادلة (11.3.6) ، وهو الحل فوق الصوتي. نحصل على هذا السلوك تجريباً بخفض الضغط النهائي إلى مقدار الضغط المحصل من حل المعادلتين (11.3.6) و (11.3.4) على التوالي. و السلوك (د) هنا مشابه للسلوك (ج) في الجانب اللام من المنفذ. ينخفض الضغط باطراد ليبلغ أدنى في المخرج. كما أن عدد ماخ يزداد عن القيمة الصوتية في الحلق ليبلغ أعلى عند المخرج.

يعرف السلوك (د) بـ **السلوك التصميمي** للمنفذ اللام-الناشر.

د)

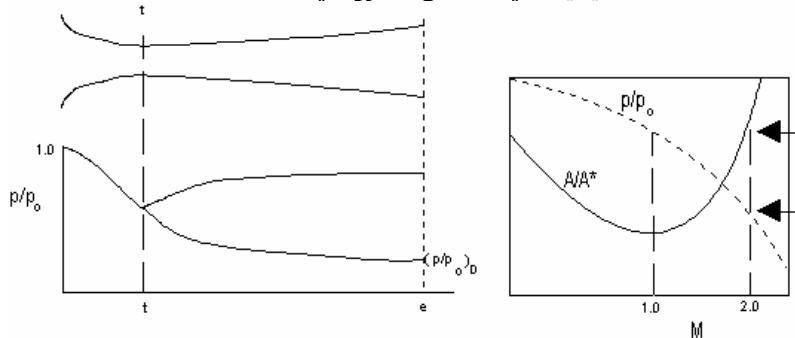
هـ) ينشأ السلوك (هـ) إذا خُفض الضغط النهائي إلى مستوىً أدنى من الضغط التصميمي الخروجي المشار إليه في (دـ). لا يستجيب توزيع الضغط داخل المنفث لهذا الخفض، إلا أن النفث يتعرض لخوض مفاجئ في الضغط عبر موجات تمددية ليواتم الضغط النهائي السائد، و يصبح السريان شرقاً.

مثال

منفذ لام-ناشر موصل بمستودع إمداد به هواء ضغطه و درجة حرارته 3MPa و 400K على التوالي. المساحة الخروجية للمنفث 0.1m^2 . المطلوب أن يخرج الهواء من المنفث بعدد ماخ 2.0 أحسب:

- مساحة حلق المنفث و الضغط النهائي و معدل السريان عند الحالة التصميمية.
- أعلى ضغط خروجي ممكن و عدد ماخ المناظر لنفس معدل السريان.

(أ) عند الحالة التصميمية في المقطع الخروجي



الشكل 11.3.12

$$M_e = 2.0$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2}(k-1) M_e^2 = 1.8$$

$$\frac{P_e}{P_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}} = 0.128$$

$$P_e = 0.128(3E6) = 0.383E6$$

$$P_b = P_e = \mathbf{0.383\text{MPa}}$$

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 1.688$$

$$A^* = A_t = (A^*/A_e)A_e = \mathbf{0.059m^2}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A_e M_e P_e}{\sqrt{T_e}}$$

$$T_e = T_0 (Te/T_0) = T_0 \mu_e^{-1} = (1.8)^{-1} (400) = \mathbf{222K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(222)}} (0.1) (2.0) (0.383E6) = \mathbf{359 kg/s}$$

(ب) بالاطلاع على الرسمين يمكن استنتاج أن الضغط الأعلى الذي يعطي نفس

قيمة m هو الحل الثاني (دون الصوتي). معدل السريان في الحالتين هو الأعلى - نسبةً لأن عدد ماخ يساوي 1.0 عند مرور السريان بالحلق.

$$A/A^* = 1.688$$

باستخدام قوائم السريان اللاتبديي عند المخرج:

M	p/p ₀	A/A*
2.0	0.128	1.688
0.37	0.91	1.688

$$\rightarrow p_e = 0.383E6, 2.7E6$$

$$\mathbf{2.7 MPa}$$

الضغط الأعلى هو:

$$M_e = \mathbf{0.37}$$

و يناظر ذلك

11.3.7 الدفع الصاروخي

الدفع على الصاروخ ينشأ كرد فعل لاندفاع الغاز من منفذ في مؤخرة الصاروخ - القسم (7.2). ويفصل التحليل أدناه المتغيرات المؤثرة في مقدار هذا الدفع.



الشكل 11.3.13

يرسم حجم تحكمي داخل غرفة الاحتراق و المنفث تصبح معادلة كمية التحرك للحالة:

$$\oint_A \rho_{\underline{V}}(\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \oint_A \underline{\sigma} dA$$

الضغط الجوي يعمل على كل أسطح الصاروخ فيصبح صافي الضغط على السطح الخروجي $P_a - P_0$

$$\rho_e V_e^2 A_e i = (p_e - p_a) A_e (-i) + R_x$$

$$F_x = -R_x = [\rho_e v_e^2 A_e + (p_e - p_a) A_e] (-j)$$

و بذلك فإن الدفع في اتجاه \times السالب:

في حالة التصميمية:

$$p_e = p_a$$

$$F_T = \rho_e v_e^2 A_e = \frac{P_e}{R T_e} (k R T_e) M_e^2 A_e$$

مثال

صمم محرك صاروخي ليعطي دفعاً يساوي 4.5kN عند الارتفاع 1.2km حيث الضغط الجوي 0.02MPa . درجة الحرارة والضغط في غرفة الاحتراق 2000K و 2MPa ، على التوالي. قيمة k لغازات النفث 1.3 و الكتلة النسبية 20 .

أحسب: عدد ماح الخروجي و المساحة الخروجية المطلوبة و مساحة حلق المنفث و معدل سريان الغازات.

يمكن افتراض أن السربان لا تبديدى في المنفث و غير شرق.

للسربان غير الشرق

$$p_e = p_b = p_a = 0.02E6$$

$$p_e / p_0 = 0.01$$

المعادلة (11.3.4)

$$\mu_e = \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{-\frac{k-1}{k}} = (0.01)^{0.231} = 2.89$$

$$M_e = [(\mu_e - 1) \frac{2}{k - 1}]^{1/2} = 3.55$$

معادلة الدفع:

$$F_T = k A_e M_e^2 p_e$$

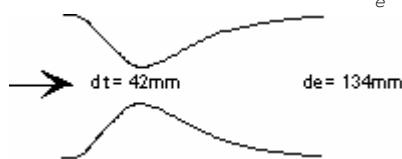
$$4.5E3 = (1.3)A_e(3.55)^2(0.02E6)$$

$$A_e = 0.014 \text{m}^2$$

بما أن السربان فوق صوتي في الجزء الناشر فهو إذن صوتي عند الحلق
 $A^* = A_t$

المعادلة (11.3.6) تعطي

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k + 1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 9.63$$



$$A^* = A_t = 0.014 / 9.63 =$$

$$0.00145 \text{m}^2$$

الشكل 11.3.14

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A_e M_e p_e}{\sqrt{T_e}}$$

$$T_e = (T_e/T_0) T_0 = (\mu_e^{-1}) T_0 = 692\text{K}$$

$$R = \frac{\overline{R}}{MW} = \frac{8310}{20} = 415.5$$
$$\dot{m} = \sqrt{\frac{1.3}{(415.5) (692)}} (0.014) (3.55) (0.02E6) = \mathbf{2.11 \text{ kg/s}}$$

مسائل

11.3.1

- (أ) أحسب سرعة الصوت في الهواء عند درجات الحرارة: 0°C , 40°C .
- (ب) أحسب سرعة الصوت في غاز الهليوم عند درجات الحرارة: 40°C , 0°C . ($k = 1.66$, $MW = 4$)
- (ج) أحسب عدد ماخ لطائرة تتحرك بالسرعة 1000km/h في هواء ساكن في درجة الحرارة 0°C .
[$355\text{m/s}, 331\text{m/s}, 1039\text{m/s}, 970\text{m/s}, 0.84$]

- 11.3.2** طائرة فوق صوتية تطير بسرعة 3000 km/h عند الارتفاع 400m . درجة حرارة الجو 15°C . ما هي المسافة الأفقية التي تقطعها الطائرة فوق مراقب أرضي قبيل سمامع هذا المراقب لصوت الطائرة?
[895m]

- 11.3.3** استخلص العلاقات الآتية من الأسس الأولية:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2\mu}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{k+1}{2\mu} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

حيث T^* و p^* قيم درجة الحرارة و الضغط عند الحالة الصوتية.
 μ تساوى $[1 + \frac{1}{2}(k-1)(M^2)]$.

- 11.3.4** يسرى الهليوم من مستودع كبير درجة الحرارة فيه 10°C عبر منفذ لام. المساحة الخروجية للمنفذ 0.0003m^2 و تؤدى إلى غرفة الضغط فيها 0.1MPa . أحسب معدل السريان الكتلى عبر المنفذ إذا كان الضغط المطلق في المستودع:
(أ) 0.15 MPa ,
(ب) 0.35 MPa .

[0.04kg/s , 0.10kg/s]

- 11.3.5** الضغط و درجة الحرارة و السرعة تساوى 0.35 MPa و 350 K و 300 m/s على التوالي ، عند مدخل أنبوب ناشر يحوى سريان لاتبدي. إذا كانت نسبة المساحة الخروجية للمساحة الدخولية 2.5 أحسب الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند المخرج.
[0.51 MPa , 391 K , 91 m/s]

- 11.3.6** الضغط و درجة الحرارة في مستودع هواء 15°C at 0.7 MPa . المستودع متصل إلى مستودع مستقبل عبر منفذ لام-ناشر. مساحة مقطعي الحلق و الخروج تساوى $E-3\text{m}^2$ و 5.2E-3 ، على التوالي. احسب:
(أ) أعلى معدل للسريان
(ب) قيمة عدد ماخ الخروجية إلى تعطى أعلى معدل للسريان مع بقاء السريان داخل المنفذ لاتبدي
(ج) قيمة ضغط الاستقبال المناظرة للحالة (ب).
[2.2kg/s ; $2.94, 0.15; 0.02\text{MPa}, 0.69\text{MPa}$]

11.3.7 يراد نفث هواء من مستودع كبير الضغط فيه 0.3 MPa و درجة الحرارة $K = 300$ إلى الجو حيث الضغط 0.1 MPa بمعدل 1.0 kg/s . باعتبار السريان داخل المنفذ لاتبديدي حدد المساحة الخروجية المناسبة و عدد ماخ مستخدماً:

- (أ) منفذ لام
(ب) منفذ لام-ناشر
أرسم منحنى الضغط لكل حالة.

11.4 الصدمة المتعامدة

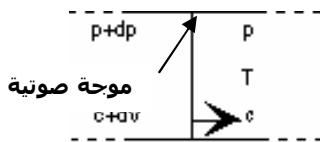
طبيعة الموجة الصدمية 11.4.1

الصدمة في حركة الغاز هي الزيادة المفاجئة في ضغط الغاز، وصاحب ذلك تغيرات كبيرة في متغيرات السريان الأخرى. يحدث ذلك في مسافة متناهية الصغر في اتجاه السريان. توصف الصدمة بالمعادنة إذا تعامت على اتجاه سريان الغاز، وان لم تكن كذلك فهي صدمة مائلة.

ويميز الموجة الصدمية عن الموجة الصوتية أن الزيادة في الضغط المصاحبة للأولى كبيرة بينما الزيادة في الضغط تفاضلية في حالة الموجة الصوتية. تتحرك الموجة الصوتية بسرعة الصوت بطبيعة الحال بينما تفوق سرعة الموجة الصدمية سرعة الصوت.

تنشأ الموجة الصدمية أصلاً من التتابع السريع ل WAVES صوتية ويمكن استنتاج ذلك مما يلي:

قانون الغاز المثالى:



$$p = R\rho T$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(1)$$

الشكل 11.4.1

السريان الاتبدي:

$$p = \text{const.} p^k$$

تعطیان (1) و (2)

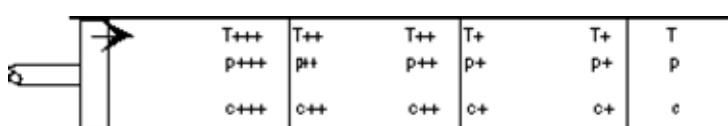
المعادلة (11.2.6)

$$c = \sqrt{kRt}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{k-1}{2k} \frac{dp}{p} \dots \quad (4)$$

بما أن k المعادلة (3) تدل إلى أن الزيادة في الضغط بسبب الموجة الضغطية تصاحبها زيادة في درجة الحرارة. المعادلة (4) تدل إلى زيادة تفاضلية في سرعة الصوت بسبب الموجة الضغطية.

في حال تفرق الموجات الصوتية لا يكون هناك مجال لتأثيرها بعضها البعض. وبالتالي لا ينشأ أثر تراكمي عن الزيادات الطفيفة في الضغط ودرجة الحرارة وسرعة الصوت.



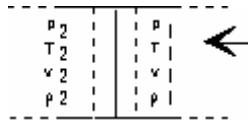
الشكل 11.4.2

أما في حال التتابع المطرد للموحمات الصوتية فإن الأثر التراكمي يكون كما هو مبين في الشكل (11.4.2).

الموجة الصوتية الأولى ترفع درجة الحرارة من T إلى T^+ وسرعة الصوت من c إلى c^+ .
وإذا تابعت الموجات فإنها تزيد هذه المقادير زيادات تراكمية متتابعة. وينشأ عن ذلك أن كل موجة تتحرك بسرعة أكبر من سبقتها مما يؤدي إلى أن تدرك الموجات بعضها البعض حتى تتحد في موجة واحدة. يترتب على ذلك أن فرق الضغط بين جانبي الموجة الناشئة يساوي فرق الضغط بين أول وآخر الموجات الصوتية الأساسية. وإذا كان عدد الموجات الأساسية كبيراً فإن هذا الفرق في الضغط لا يكون تفاضلياً. كما أن سرعة الموجة الناشئة أعلى من سرعة الصوت منسوبة إلى الغاز الساكن. وبذلك تنشأ الموجة الصدمية.

11.4.2 معادلات السريان ذو الصدمة

بتطبيق معادلات الحفظ على حجم تحكمي حول صدمة متعامدة و بلاحظة أن عرض الصدمة ضئيل بما يجعل الحجم التحكمي كظيم الحرارة ولا احتكاكى يمكننا استخلاص العلاقات التكاملية بين جانبي الصدمة.



الشكل 11.4.3

1) درجة الحرارة الركودية

معادلة الطاقة

$$h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

$$h_{o1} = h_{o2}$$

$$c_p T_{o1} = c_p T_{o2}$$

$$T_{o2} = T_{o1} = T_o(11.4.1)$$

و يعني ذلك أن درجة الحرارة الركودية لا تتغير نتيجة للصدمة.

2) درجة الحرارة

من معادلة الطاقة

$$C_p T_1 + \frac{1}{2} c_1^2 M_1^2 = C_p T_2 + \frac{1}{2} c_2^2 M_2^2$$

$$\frac{kR}{k-1} T_1 + \frac{1}{2} kRT_1 \cdot M_1^2 = \frac{kR}{k-1} T_2 + \frac{1}{2} kRT_2 \cdot M_2^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}(11.4.2)$$

3) الضغط

معادلة كمية التحرك لهذه الحالة

$$\Delta(pA) + \Delta(m\ v) = 0$$

$$p_2 A_2 - p_1 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 - \rho_1 v_1^2 A_1 = 0$$

$$p_1 \left(1 + \frac{\rho_{1V_1}^2}{P_1}\right) = p_2 \left(1 + \frac{\rho_{2V_2}^2}{P_2}\right)$$

معادلة الغاز الكامل

$$p = R\rho T$$

$$p_1 \left(1 + \frac{k v_1^2}{k R T_1}\right) = p_2 \left(1 + \frac{k v_2^2}{k R T_2}\right)$$

عدد ماح (4)

قانون حفظ الكتبة

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\rho = p/RT, \quad v = cM, \quad c = \sqrt{kRT}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

(11.4.3) و (11.4.2) من المعادلات و بالتعويض ل T_2/T_1 و p_2/p_1

$$\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k - 1)M_1^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k - 1)M_2^2}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{M_2 \sqrt{1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_2^2}}{1 + k M_2^2} = \frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_1^2}}{1 + k M_1^2}$$

بتربيع الجانبين:

$$\frac{M_2^2 \left[1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_2^2 \right]}{\left[1 + k M_2^2 \right]^2} = \frac{M_1^2 \left[1 + \frac{1}{2} (k - 1) M_1^2 \right]}{\left[1 + k M_1^2 \right]^2}$$

و يجعل π تساوي جانب المعايدة الأيمن و إعادة ترتيب الحدود

$$[\frac{1}{2}(k-1) - k^2 N] M_2^4 + [1 - 2kN] M_2^2 - N = 0$$

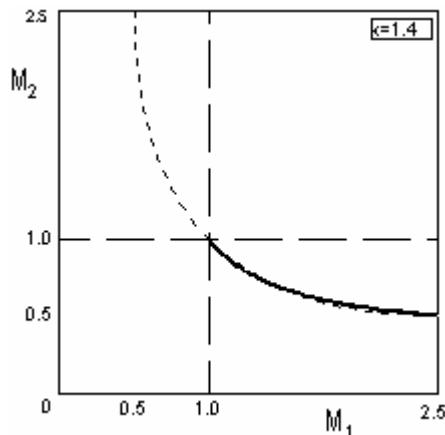
و باستخدام قاعدة المعادلات من الدرجة الثانية للمجهول M_2^2

$$M_2^2 = \frac{\sqrt{(2kN - 1) \pm (1 - 2kN)^2 - 4\left(\frac{k-1}{2} - k^2 N\right)(-N)}}{2\left(\frac{k-1}{2} - k^2 N\right)}$$

حل المعادلة:

$$M_2^2 = M_1^2$$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1}$$



بما أن الحل الأول غير ذي أهمية
فإن العلاقة بين M_1 و M_2 تصبح:

$$\frac{M_1^2}{\frac{2k}{k-1}} + \frac{\frac{2}{k-1}}{M_1^2} - 1 = \dots \quad (11.4.4)$$

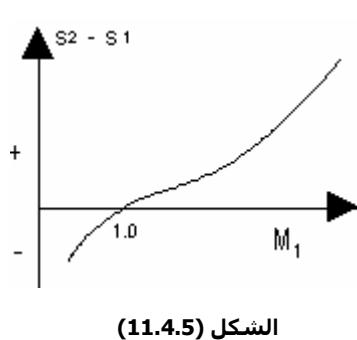
الشكل (11.4.4) يوضح العلاقة . (11.4.4)

الشكل 11.4.4

و يمكن التدليل منهما على الإمكانيات النظرية لحدوث الصدمة سواء كان السريان فوق صوتي أم دون صوتي. إلا أن التجربة تدل على اقتصر حدوث الصدمة على السريان فوق الصوتي. و يمكن تفسير ذلك بالرجوع إلى القانون الثاني للحركية الحرارية.

المعادلة (11.1.9) :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$



بالتعويض في (11.1.9) من المعادلتين (11.4.2) و (11.4.3) لـ T_2/T_1 و p_2/p_1 ثم التعويض من (11.4.4) لـ M_2 نحصل على علاقة معقدة بعض الشيء تربط $s_2 - s_1$ بـ M_1 و k . يوضح الشكل (11.4.5) منحناً لهذا الحل.

بالنظر إلى أن القانون الثاني لحركة الحرارة ينص على أن الشرط اللازم لحدوث أي عملية **1-2** هو أن يكون فرق التبديد $s_2 - s_1$ موجباً. و يدل المنحنى في الشكل (11.4.5) أن ذلك يحدث فقط عندما تكون $M_1 > 1$.

5) الضغط الركودي

المعادلتان (11.4.3) و (11.3.4) تعطيان

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \right] = \frac{P_{02}}{P_{01}}$$

و بالتعويض في القوس المربع من المعادلة (1)

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \dots \dots \dots \quad (11.4.5)$$

6) المساحة الحرجة A^*

باعتبار A هي المساحة عند مقطع الصدمة

$$\frac{\frac{A}{A^*}_2}{\frac{A}{A^*}_1} = \frac{A^*_1}{A^*_2}$$

و بالتعويض من المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A^*_1}{A^*_2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \dots \dots \dots \quad (11.4.6)$$

عند مقارنة المعادلتين (11.4.5) و (11.4.6) نستنتج

$$\frac{A^*_1}{A^*_2} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \quad \dots \dots \dots \quad (11.4.7)$$

V_2	$V=600$
T_2	$T=303$
p_2	$p=0.1E6$

الشكل 11.4.6

مثال

موجة صدمية متعمدة تتحرك في أنبوب بسرعة $600m/s$. درجة الحرارة والضغط في الهواء الساكن قبل مرور الموجة $30^\circ C$ و $0.1MPa$ ، على التوالي.

أحسب عدد ماخ على جانبي الموجة بالنسبة إلى مناطق ثابت على الموجة. أحسب أيضاً الزيادة في درجة الحرارة والضغط بسبب مرور الموجة الصدمية.

$$M_1 = \frac{V_1}{C_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}$$

$$T_1 = 30 + 273 = 303K$$

$$\rightarrow M_1 = \frac{600}{\sqrt{1.4(287)(303)}} = \mathbf{1.72}$$

المعادلة (11.4.4) تعطي **M₂ = 0.64**
و المعادلة (11.4.3) تعطي

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

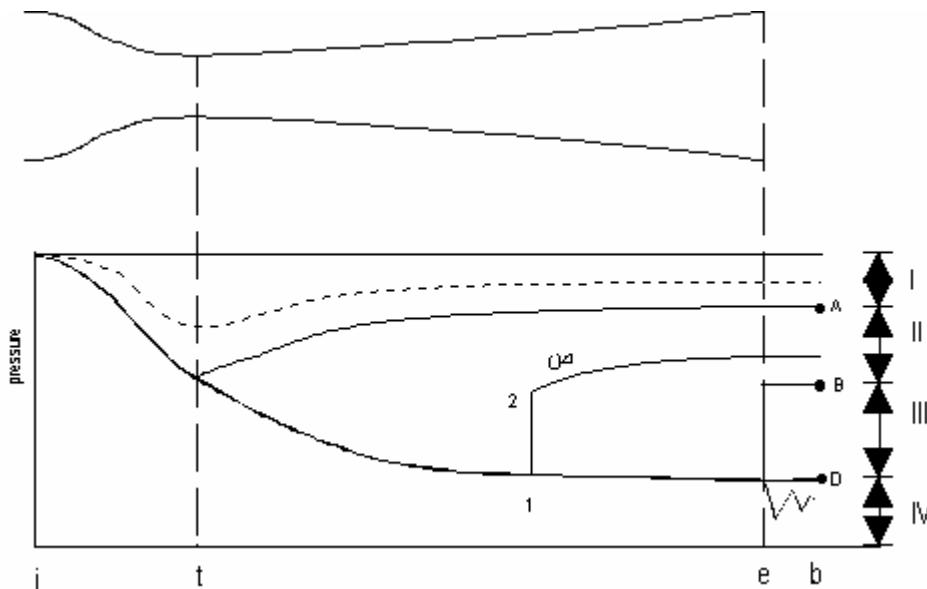
$$\mu_1 = 1.59, \mu_2 = 1.08 \rightarrow T_2 = 445 = \mathbf{172^{\circ}C}$$

$$\Delta t = 172 - 30 = \mathbf{142^{\circ}C}$$

$$p_2 = p_1 \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \mathbf{0.33 \text{ MPa}}$$

$$\Delta p = (0.33 - 0.1)E6 = \mathbf{0.23 \text{ MPa}}$$

الموجة الصدمية في المنفث اللام-الناشر



الشكل 11.4.7

عند دراسة السريان اللاتبدي في المنفث اللام-الناشر في القسم (11.3) ألغفلنا ما يحدث عندما يكون الضغط النهائي في المدى $D - A$ - **II** و **III** في الشكل (11.4.7) []. السريان في هذا المدى **تبديدي** في بعض أجزائه وتخالله صدمة، كما هو مبين في **السلوك ص** في الشكل (11.4.7) [].

في هذه الحالة وبسبب وقوع الضغط النهائي في المدى **II** فإن الصدمة تحدث عند الموضع (1) حيث السريان فوق صوتي فيرتفع الضغط إلى المستوى (2) وتنخفض قيمة عدد ماخ إلى قيمة دون صوتية. فيما يلي الموضع (2) يكون السريان لاتبديدي ولكن بثوابت تختلف عن تلك التي تسود في الجزء الذي يسبق الموضع (1) [].

تكون الصدمة متعمدة وداخل المنفث في الحالة المذكورة ولمدى الضغط النهائي **II**. وبخض الضغط النهائي يقترب مقطع الصدمة من المقطع الخروجي حتى يبلغه عند انخفاض الضغط النهائي إلى المستوى **B** [].

عندما يكون الضغط النهائي في المدى III تصبح الصدمة مائلة و تكون خارج المنفث.
يستمر هذا السلوك حتى ينخفض الضغط النهائي إلى القيمة التصميمية p_D .
تعرف المستويات A و Bg و Dg بأنها **الحدود التشغيلية** للمنفث.

عدد ماح الخروجي : M_e

يحتاج تحديد قيمة M_e في العادة لمعالجة خاصة.

يتذكر أن $A_1^* \neq A_2^*$ في حالة الصدمة فان كل المتغيرات الابعدية التي تسبق الصدمة (قبل الموضع (1)) تحمل قيمها المرجعية اللاحقة 1 ، مثلاً A/A_1^* و p/p_{01} . بينما المتغيرات الابعدية التي تلي الصدمة (بعد الموضع (2)) تحمل قيمها المرجعية الرمز 2 ، مثلاً A_e/A_2^* و p_e/p_{02} . وبذلك فان M_e تحسب من المقاييس الابعدية ذات اللاحقة 2.

يعتمد التحليل التالي على حاصل الضرب $\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)$$

المقدار داخل القوس = 1 - المعادلة (11.4.7).

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \quad \dots \dots \dots \quad (11.4.8)$$

و من المعادلتين (11.3.4) و (11.3.6)

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{M_e \sqrt{\mu_e}} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

المعادلتان (1) و (11.4.8) تعطيان

$$M_e \sqrt{\mu_e} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{\frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}}}$$

$$M_e^2 \mu_e = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e}{A_1 * p_{01}} \frac{p_e}{p_e} \right)^2}$$

و بتسمية الجانب الأيمن B

$$M_e^2 \mu_e = B$$

$$M_e^2 [1 + \frac{1}{2} (k-1) M_e^2] = B$$

و باتخاذ N = M_e^2

$$N [1 + \frac{1}{2} (k-1) N] = B$$

$$\frac{1}{2} (k-1) N^2 + N - B = 0 \dots \dots \dots (2)$$

حل المعادلة (2) يعطي

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(k-1)B}}{k-1}$$

و بإبعاد الحل السالب لأنه يعطي قيمة خيالية

$$M_e^2 = \frac{\sqrt{1 + 2(k-1)B} - 1}{k-1} \dots \dots \dots (11.4.9)$$

حيث

$$B = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e}{A_1 * p_{01}} \frac{p_e}{p_e} \right)^2}$$

و يمكن استخدام قوائم الغاز أيضاً من العمود $\frac{p}{p_0}$ لمعرفة M_e و القيم اللاotropic و الأخرى - الملحق د.

مثال

الضغط في مستوى هواء يساوي 2.0 MPa . يُصرف المستوى الهواء عبر منفذ لام-ناشر قطر حلقة 10 mm و قطر مقطعه الخروجي 27 mm

(أ) حدد الحدود التشغيلية للمنفذ.

(ب) حدد سلوك السريان في المنفذ للحالتين:

ب(1) الضغط النهائي 0.5 MPa

ب(2) الضغط النهائي 0.1 MPa



الشكل 11.4.8

$$\frac{A_e}{A^*} = \left(\frac{0.027}{0.010} \right)^2 = 7.45$$

باستخدام قوائم السريان الاتباعي

p/p_0	M	A/A^*	
0.01138	3.6	7.45	عند D
0.995	0.08	7.45	عند A

$$p_D = (0.01138)2.0E6 = \mathbf{0.02276E6 Pa}$$

$$p_A = (0.995)2.0E6 = \mathbf{1.99E6 Pa}$$

: p_B و لحساب

تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة عند المقطع الخروجي:

p_2/p_1	M ₂	M ₁
14.95	0.447	3.6

$$p_1 = p_D = 0.02276E6 \text{ Pa}$$

$$p_2 = p_B = (14.95)0.02276E6 = \mathbf{0.34E6 Pa}$$

$$0.5E6 = p_b \quad \text{الضغط النهائي} \quad (1)$$

$$p_B < p_b < p_A$$

و يعني ذلك حدوث موجة صدمية في الجانب الناشر من المنفث.

لحساب قيم M_1 و M_2 و

$$\frac{A_e}{A_1 *} \frac{p_e}{p_{01}} = 7.45 \frac{0.5E6}{2.0E6} = 1.863$$

قيمة B في المعادلة (11.4.9)

$$B = 0.0965$$

و بالتعويض في (11.4.9)

$$M_e = \mathbf{0.31}$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2} (k-1) M_e^2 = 1.019$$

$$\frac{p_e}{p_{02}} = \mu_e^{\frac{-k}{k-1}} = 0.936$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_e} \frac{p_e}{p_{01}} = \frac{1}{0.936} \frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

يمكن استخدام قوائم السريان اللاتبدي

$$\frac{A_e}{A_2 *} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1 *} \frac{p_e}{p_{01}} = 1.863$$

و تعطى القائمة

P/p_0	$\frac{A}{A *} \frac{p}{p_0}$
0.936	1.863

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_e} \frac{P_e}{P_{01}} = \frac{1}{0.936} \frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

لحساب M_1 و M_2 تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة

P_{02}/P_{01}	M_1	M_2
0.267	3.24	0.46

$$0.1E6 = p_b \quad \text{الضغط النهائي} \quad (b)$$

$$p_D < p_b < p_B$$

و يعني ذلك أن السريان لاتبديدي في المنفث مصحوب بصدمة مائلة سافل المنفث.

مسائل

11.4.1 يؤدي اختبار لقنبلة ذرية إلى بعث موجة صدمية بسرعة 60km/s في هواء ساكن الضغط الجوي فيه 0.1MPa و درجة حرارته الابتدائية 30°C . قدر التغيرات الناشئة في الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند نقطة ثابتة.

11.4.2 ينفذ هواء مضغوط من مستودع الضغط فيه 0.7MPa و درجة الحرارة 340K عبر منفذ لام-ناشر. لوحظت موجة صدمية ساكنة عند مقطع الضغط فيه 0.2MPa . أحسب الضغط الخروجي و قطر مقطع الخروج إذا كان معدل السريان 0.5kg/s و عدد ماخ الخروجي 0.5 .
[0.554MPa , 24mm]

11.4.3 صمم منفذ لام-ناشر لنقل غاز ($k=1.3$, $R=300 \text{ J/kg-K}$) ضغطه و درجة حرارته الركوديتين 1.0MPa و 400K على التوالي ليتفتح في مستودع مستقبل الضغط فيه 0.2MPa بمعدل 0.4kg/s .

(أ) أحسب قطرى المنفذ.

(ب) إذا ارتفع ضغط الاستقبال إلى 0.8MPa أحسب:

ب(1) عدد ماخ الخروجي

ب(2) عددي ماخ قبل و بعد الصدمة الناشئة

ب(3) قطر المعجل في موقع الصدمة.

[16mm , 19mm , 0.51 , 1.345 , 0.76 , 17mm]

11.4.4 صمم منفذ لمحرك صاروخي ليعمل بكفاءاته الفضلية على ارتفاع 30km فوق سطح الأرض. نسبة مساحة المخرج لمساحة الحلقة 5.0 . باعتبار أن الضغط الجوي على سطح الأرض 0.1MPa و الضغط داخل حجرة الاحتراق 2.0MPa و أن قيمة k لغازات الاحتراق 1.2 أحسب نسبة قوة الدفع عند سطح الأرض إلى نظيرتها عند الارتفاع 30km
[0.94]

11.5 السريان الانضغاطي الاحتكاك

11.5.1 مقدمة

دراسة السريان الانضغاطي الاحتكاك في صورته العامة معقدة. إلا أنه يمكن تبسيط الدراسة كثيراً إذا حصرت في الافتراضات الآتية:

- (1) السريان أحادى البعد
- (2) كظيم الحرارة
- (3) مساحة مقطع السريان ثابتة
- (4) السريان رتيب.
- (5) غاز كامل.

و يسمى السريان الذي يوفى الافتراضات أعلاه سريان فانو .

تعاريف:

$$f = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho v^2} \quad (1)$$

العلاقة أعلاه تعرف **معامل الاحتكاك** f بدلالة الإجهاد القصي و السرعة المتوسطة عند مقطع التحليل ومتوسط الكثافة عند نفس المقطع. سبق استخدام f بنفس التعريف في علاقة دارسي للسريان الإنضغاطي - المعادلة (4.3). و يعتمد المعامل f على كل من عدد رينولز Re و الخشونة الابعدية k/d .

(2) **يعرف القطر السرياني** D بالعلاقة:

$$D = [\text{محيط المقطع} / \text{مساحة مقطع السريان}]^{1/4}$$

لاحظ أن قيمة D للمقطع الدائري تساوي d (قطر المقطع).

(3) المقدار الابعدى $\frac{x}{D}$ يبرز مراراً في معادلات السريان الاحتكاكى. و يمكن،

$$d\varphi = \frac{f}{D} dx \quad \varphi = \frac{fx}{D} \quad \text{و بالتالي:}$$

11.5.2 المعادلات التفاضلية للسريان الاحتكاك

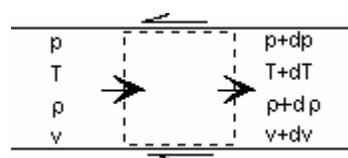
نسعي هنا لتكوين علاقات تفاضلية تربط المتغيرات: $p, T, \rho, p_0, v, \varphi, M$ و نبدأ من علاقات الحفظ وبعض العلاقات الثانوية.

بالتطبيق على حجم التحكم

التفاضلي:

معادلة الاستمرارية:

$$\rho V = \text{const.}$$



الشكل 11.5.1

قانون الغاز الكامل:

$$p = \rho R T$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{V}{C}, M^2 = \frac{V^2}{C^2} = \frac{V^2}{kRT}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}(3)$$

معادلة الطاقة:

$$h + \frac{1}{2}v^2 = const$$

$$dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

$$C_p \, dT + v \, dv = 0$$

$$\frac{kRT}{k - 1} \frac{dT}{T} + vdv = 0$$

$$\frac{c^2}{k-1} \frac{dT}{T} + vdv = 0$$

$$\frac{C^2}{V^2} \frac{1}{k - 1} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = 0$$

معادلة حفظ كمية التحرك:

$$d(pA) + d(\rho v^2 A) + d(\tau_w A_w) = 0$$

$$A \, dp + d(\rho v^2 A) + \tau_w \, dA_w = 0$$

$$d(\rho v^2 A) = \rho v A \, dv$$

$$A \, dp + \rho v A \, dv + \tau_w \, dA_w = 0$$

$$dp + \tau_w \frac{dA_w}{A} + \rho V^2 \frac{dv}{v} = 0 \dots \dots \dots (4b)$$

$$\frac{dA_w}{A} = 4 \frac{dx}{D}$$

و من تعريف المعامل f

$$\rho V^2 = \frac{p}{RT} C^2 M^2 = \frac{p k R T M^2}{RT} = k p M^2$$

$$\tau_w = \frac{1}{2} k p M^2 \cdot f / 4$$

$$\tau_w \frac{dA_w}{A} = \frac{1}{2} kpM^2 \frac{f}{4} (4 \frac{dx}{D}) = \frac{1}{2} kpM^2 f \frac{dx}{D} = \frac{1}{2} kpM^2 d\varphi$$

و بالتعويض في (4b)

$$\frac{dp}{p} + \frac{1}{2} kM^2 d\varphi + kM^2 \frac{dv}{v} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

الضغط الركودي:

$$p_0 = p[1 + \frac{1}{2}(k - 1)M^2]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{[1 + \frac{1}{2}(k - 1)M^2]} \frac{dM}{M}(6)$$

تلك ست معادلات تضم سبعة مجاهيل هي:

$$\frac{dM}{M}, \frac{dp}{p}, \frac{dT}{T}, \frac{d\rho}{\rho}, \frac{dv}{v}, \frac{dp_0}{p_0}, d\varphi$$

وبذلك يمكن صياغة المعادلات الستة الأولى بدالة المتغير السابع φ .

نبدأ بوضع النسبة $\frac{dM}{M}$ كمتغير مستقل: (3) و (4) تعطيان

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} + \frac{1}{2}(k - 1)M^2 \frac{dv}{v} = [1 + \frac{k-1}{2}M^2] \frac{dv}{v}$$

تعطیان (7) و (1)

تعطیان (7) و (4)

٢) و (٩) و (٨) تعطى

و (6) (10) تعطیان

و بتعويض (10) و (7) في (5)

$$\frac{1}{2} k M^2 d\varphi = \frac{[1 + (k - 1)M^2 - kM^2]}{\mu} \frac{dM}{M} = \frac{(1 - M^2)}{\mu} \frac{dM}{M}$$

و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kM^2[1-(k-1)M^2]}{2(1-M^2)} d\varphi \quad (11.5.2)$$

و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)kM^4}{2(1-M^2)} d\varphi \quad (11.5.3)$$

و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{kM^2}{2(1-M^2)} d\varphi \quad (11.5.4)$$

و (11.5.4) تعطيان

$$\frac{dv}{v} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} d\varphi \quad (11.5.5)$$

و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{1}{2} kM^2 d\varphi \quad (11.5.6)$$

لاحظ أن تزايد و تناقص المتغيرات M, p, T, ρ, v يعتمد على ما إذا كانت قيمة M أعلى أم أقل من 1.0 بسبب احتواء التعبير على الحد $1-M^2$. إلا أن p_0 ، الضغط الركودي، يتناقص مطلقاً في اتجاه السريان.

دراسة المعادلة (11.5.1) توضح سمة هامة للسريان الانضغاطي الاحتكاكى في الأنابيب: تزداد قيمة عدد ماخ في السريان دون الصوتى و تتناقص في السريان فوق الصوتى. ويعنى ذلك أن عدد ماخ يتوجه نحو القيمة الصوتية في كل الأحوال.

دراسة المعادلة (11.5.2) توضح أن تغير الضغط في المدى فوق الصوتى

$$M = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

يعتمد أيضاً على عدد حرج اضافي هو .

11.5.3 المعادلات التكاملية للسريان الاحتكاكى



بدراسة السريان الموضع
في الشكل (11.5.2)
داخل أنبوب قطره
السرياني D نسعى
لإيجاد المسافة x^* اللازمة
لرفع قيمة M إلى 1.0 .
بدءً من المعادلة (11.5.1)
نعرض ل $d\varphi$ بالمقدار
 x ونتكامل من 0 إلى x^*
 $\frac{dx}{D}$
إلى x^* المترافقين ل
 $M = 1.0$ على
التوالي

$$d\varphi = \frac{f}{D} dx = \frac{2(1 - M^2)}{kM^3 \mu} dM$$

$$\frac{1}{D} \int_0^{x^*} f dx = \frac{2}{k} \int_M^1 \frac{1 - M^2}{M^3 \mu} dM$$

$$\varphi^* = \bar{f} \frac{x^*}{D}$$

ويمكن مكاملة الجانب الأيمن بطريقة الكسور الجزئية
الجانب الأيمن =

$$\frac{2}{k} \int_M^1 \frac{1 - M^2}{M^3 \mu} dM = \frac{2}{k} I$$

$$\frac{1 - M^2}{M^3 [1 + \frac{k-1}{2} M^2]} = \frac{A}{M} + \frac{B}{M^2} + \frac{C}{M^3} + \frac{DM + E}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$1 - M^2 = A[M^2 + \frac{1}{2}(k-1)M^4] + B[M + \frac{1}{2}(k-1)M^3] + C[1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2] + DM^4 + EM^3$$

$$0 = A \cdot \frac{1}{2}(k-1) + D$$

$$0 = B \cdot \frac{1}{2}(k-1) + E$$

$$-1 = A + C \cdot \frac{1}{2}(k-1)$$

$$0 = B$$

$$1 = C$$

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ -\frac{1}{2}(k+1) & 0 & 1 & (k+1)(k-1)/4 & 0 \end{array}$$

$$\frac{1 - M^2}{M^3 \mu} = -\frac{k + 1}{2M} + \frac{1}{M^3} + \frac{(k + 1)(k - 1)M}{4\mu}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(k+1) \ln M$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{1 - M^2}{M^2}$$

$$I_3 = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{MdM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \int_{M^2}^{1.0} \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \mu$$

$$d\mu = \frac{k-1}{2} dM^2$$

$$I_3 = \frac{(k+1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{(k+1)}{4} [\ln \mu]^{1.0}_{M^2} = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2} M^2]}$$

$$I = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{(k+1)M^2}{2\mu} + \frac{1-M^2}{2M^2}$$

$$\varphi^* = + \frac{1 - M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)M^2}{2\mu} \dots \quad (11.5.7)$$

ويمكن على هذا النسق استخلاص معادلات لـ p_0, p, T, v عند أي مقطع في المجرى متخذين القيم الصوتية كمرجع.

بدءً من المعادلة (11.5.1) و بالتعويض من المعادلة (11.5.2) لـ

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1+(k-1)M^2}{M\mu} dM$$

نـاـكـمـلـ فـيـ المـدـىـ pـ إـلـىـ *ـ mـاـنـاظـرـ لـلـمـدـىـ Mـ إـلـىـ 1.0ـ

$$\int_p^{p^*} \frac{dp}{p} = - \int_M^1 \frac{1 + (k-1)M^2}{M\mu} dM$$

الجانب الأيسر

و باستخدام الكسور الجزئية في الجانب الأيمن

$$\frac{1 + (k-1)M^2}{M[1 + \frac{k-1}{2}M^2]} = -\frac{1}{M} - \frac{(k-1)M}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$I = - \int_M^1 \frac{dM}{M} - \frac{k-1}{2} \int_M^1 \frac{MdM}{2[1 + \frac{k-1}{2} M^2]}$$

$$= \ln M - \frac{k-1}{4} \int_M^1 \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right] \Big|_M^{1.0}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}$$

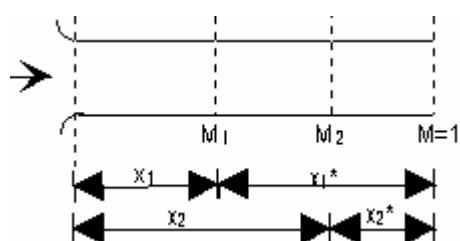
$$= \ln M - \ln \sqrt{\frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}}$$

$$\ln \frac{p^*}{p} = \ln \frac{M}{\sqrt{\frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2}M^2]}}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{k+1}{2\mu}} \quad \dots \dots \dots \quad (11.5.8)$$

و بنفس الأسلوب يمكن استخلاص المعادلات الآتية:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots \quad (11.5.12)$$



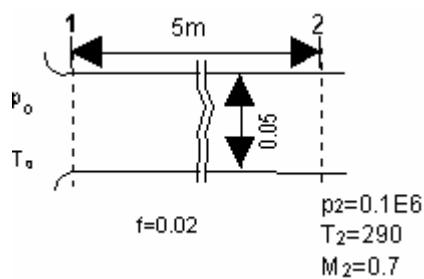
الشكل 11.5.3

مستعينين بالشكل (11.5.3) يمكن ربط عاملات الاختناك الموضعية φ_1 و φ_2 والمعامل الكلي φ_{12} كما يلى

$$x_2 - x_1 = x_1^* - x_2^*$$

$$\frac{\bar{f}}{D}(x_2 - x_1) = \frac{\bar{f}}{D}(x^*_1 - x^*_2)$$

$$= \bar{f} \frac{x^*_1}{D} - \bar{f} \frac{x^*_2}{D}$$



الشكل 11.5.4

مثا

أنبوب قطره 50mm موصل بمستودع هواء.
الضغط و درجة الحرارة و عدد ماح يعادلوا
0.1MPa و 290K و 0.7 ، على التوالى، عند
قطع على مسافة 5m سافل مدخل
الأنبوب. متوسط قيمة معامل الاحتكاك
0.02 . يمكن افتراض أن السريان كظيم
الحرارة في الأنابيب و لا تبدي في المنفذ.
قدر قيم الضغط و درجة الحرارة في
المستودع.

السريان لاتبديدي: $p_0 = p_{01}$

$$\frac{p_{01}}{p_2} = \frac{p_{01}}{p_0} * \frac{p_0^*}{p_{02}} * \frac{p_{02}}{p_2}$$

$$\varphi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.02 \frac{5}{0.05} = 2$$

س ف (2)

M	Φ_2^*	p_0/p_0^*
0.7	0.208	1.094

$$\varphi_1^* = \varphi_{12} + \varphi_2^* = 2 + 0.208$$

س ف (1)

Φ^*	p_0/p_0^*
2.208	1.54

س ل ت (2)

M	p/p_0
0.7	0.721

$$P_{01} = 0.1E6 (1.54)(1/1.094)(1/0.721) = 0.20E6 = \mathbf{0.20 \text{ MPa}}$$

$$T_0 = T_{01} = T_{02} = (T_{02}/T_{01})T_2$$

س ل ت (2)

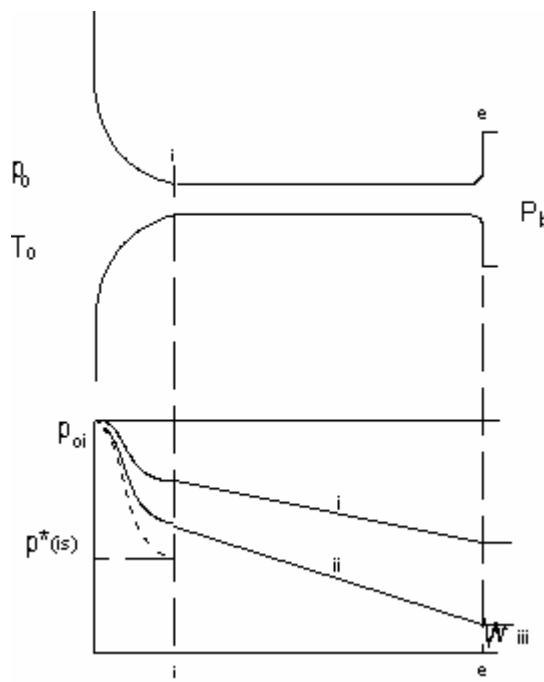
M	T/T_0
0.7	0.911

$$T_0 = \mathbf{318K}$$

توزيع الضغط في أنبوب موصل بمنفذ لام

11.5.4

11.5.4.1 تأثير الضغط النهائي



الشكل 11.5.5

الشكل (11.5.5) يوضح منظومة مكونة من أنبوب رفيع موصل بمستودع هواء مضغوطة عبر منفذ ناعم و موصل من الجانب السافلي بمستودع مستقبل يمكن التحكم في ضغطه الذي يشكل الضغط النهائي p_b للأنبوب. المراحل المفصلة أدناه توضح ما يحدث للسريان عند تغيير الضغط النهائي p_b :

(1) p_b أقل قيمة من p_{0I}

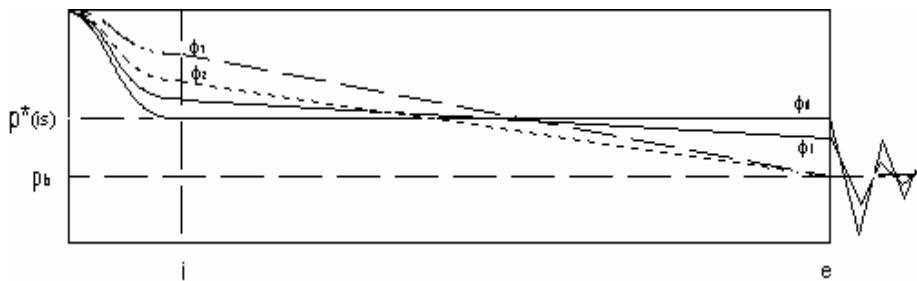
ينقص الضغط في المنفذ في اتجاه السريان بسبب تناقص المساحة. و ينقص الضغط في الأنابيب بسبب الاحتكاك. السلوك الحدودي.

(2)

الضغط الخروجي = الضغط الحرج $p_e = p^*$

لاحظ أن الضغط الخروجي للمنفذ أعلى من القيمة الحرجية للمنفذ.

(3) p_b أقل قيمة من القيمة الحدودية. لا يتغير السريان داخل المنظومة بانخفاض p_b و يصير السريان شرقاً. تحدث موجة تمددية سافل المنظومة.



(11.5.6)

ندرس في هذه الحالة تأثير φ على توزيع الضغط في المنظومة مع ثبات الضغط الامدادي والضغط النهائي.

$$\varphi = \varphi_0 = 0 \quad (0)$$

أنبوب ضئيل الاحتاك. ميل الضغط في اتجاه السريان = صفر.
موجة تمدديّة سافل المنظومة.

$$M_e = 1.0, p_e = p_{is}^*$$

$$\varphi = \varphi_1 > 0 \quad (1)$$

فقد في الضغط بسبب الاحتاك.

$$M_e = 1.0 \text{ موجة تمدديّة أصغر حجماً.}$$

$$\varphi = \varphi_2 > \varphi_1 \quad (2)$$

$$M_e = 1.0, p_e = p_b \text{ سلوك حدودي.}$$

$$M_e < 1.0, p_e = p_b \quad \varphi = \varphi_3 > \varphi_2 \quad (3)$$

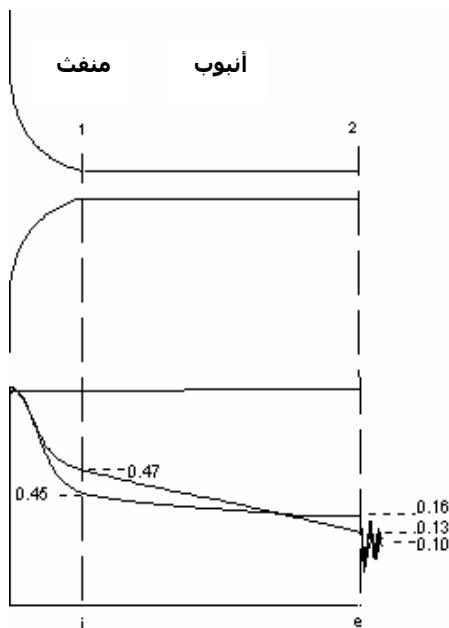
يصبح ميل الضغط أعلى بسبب الاحتاك. وهذا يجعل الضغط الدخولي للأنبوب أعلى قيمة.

مثال

أنبوب معزول حراريًّا قطره 80mm و طوله 26.5mm موصى إلى مستودع هواء بواسطة منفذ لام. الضغط في المستودع 0.5MPa و درجة الحرارة 300K . الجانب السفلي للأنبوب مفتوح للجو حيث الضغط 0.1MPa .

(أ) إذا كان متوسط معامل الاحتكاك للأنبوب يعادل 0.016 أحسب الضغط و درجة الحرارة عند المخرج و معدل السريان الكتلي.

(ب) إذا نعم سطح الأنابيب الداخلي لتقصص قيمة φ إلى 0.008 أحسب الضغط و درجة الحرارة عند المخرج و أحسب الزيادة في المائة لمعدل السريان.



الشكل 11.5.7

$$f = \mathbf{0.016} \quad (1)$$

تحديد p^*

$$\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p^*}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}}$$

$$\varphi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.016 \frac{26.5}{0.08} = 5.3$$

بما أن افتراض حرج السريان عند مخرج الأنابيب يستوجب $\varphi^* = 0$
 $\varphi^*_{12} = \varphi_{12} = 5.3$

س ف (1)

Φ^*	M	p/p^*
5.3	0.3	3.619

س ل ت (1)

M	p/p_0
0.3	0.940

$$p^* = 0.5E6(1/3.619)(0.940) = 0.13E6 Pa$$

$$p_b < p^*$$

الأنبوب شرق.

$$M_e = 1.0$$

$$P_2 = p^* = \mathbf{0.13MPa}$$

$$P_1 = (0.94)(0.5)E6 = 0.471E6$$

و عن درجة الحرارة T_2 :

$$T_{02} = T_{01} = T_0 = 300$$

$$T_2 = (T/T_0)T_0$$

س ل ت (2)

M	T/T ₀
1.0	0.833

$$T_2 = (0.833)300 = \mathbf{250K}$$

و عن m :

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{RT_2}} A_2 M_2 p_2 = 3.0 \text{ kg/s}$$

$$f = \mathbf{0.008} \quad (\omega)$$

$$\varphi_{12} = 2.65$$

: p^* تحديد

$$\varphi_1^* = \varphi_{12} = 2.65$$

س ف (1)

Φ^*	M	p/p^*
2.65	0.383	2.819

س ل ت (1)

M	p/p_0
0.383	0.904

$$p^* = 0.5E6(1/2.819)(0.904) = 0.172E6 Pa$$

$$p_b < p^*$$

الأنبوب شرق

$$M_e = 1.0$$

$$P_2 = p^* = \mathbf{0.172 MPa}$$

$$P_1 = (0.904)(0.5)E6 = 0.455E6$$

$$T_2 = (T/T_0)_2 T_0 = \mathbf{250K}$$

$$m = \sqrt{\frac{k}{RT_2}} A_2 M_2 p_2 = 3.825 \text{ kg/s}$$

الزيادة في المائة في معدل السريان الكتلي =
 $(3.825 - 3.01)100/3.01 = 27\%$

وتسبيب في ذلك انخفاض قيمة f بنسبة 50%

مسائل

11.5.1 الضغط و عدد ماح عند المقطع (1) لأنبوب يحوي سريان كظيم للهواء يعادل أن 0.3 MPa و 0.3 ، على التوالي. طول الأنابيب 15m و قطره 30mm . متوسط معامل الاحتكاك 0.01 . احسب عدد ماح عند المقطع (2) و الانخفاض في الضغط بين المقطعين.

[$0.66, 0.168\text{MPa}$]

11.5.2 أنبوب معزول حراريًّا قطره 100mm و متوسط معامل الاحتكاك 0.025 . يراد استخدامه لنقل هواء بمعدل 3.0kg/s . درجة الحرارة و الضغط عند المدخل 60°C و 0.2MPa ، على التوالي. ما هو الطول المطلوب ليعطي حالة خروج صوتية؟

[4.3m]

11.5.3 أثبتت أن معدل السريان لغاز كامل كظيم الحرارة في أنبوب شرق

$$m = Ap * \sqrt{\frac{k(k+1)}{2RT_o}}$$

أنبوب معزول حراريًّا قطره 50mm و طوله 0.5m و متوسط معامل الاحتكاك 0.02 أوصل بمستودع هواء مضغوط عبر منفذ لام ناعم. الضغط في المستودع 0.7MPa و درجة الحرارة الركودية 330K . مستوى الضغط النهائي من الانخفاض بحيث يعطي سريان شرق.

(أ) قدر معدل سريان الكتلة

(ب) قارن النتيجة في (أ) بمعدل السريان الذي ينشأ إذا نزع الأنبوب و عرض مخرج المنفذ إلى نفس الضغط النهائي المنخفض.

[$2.80 \text{ kg/s}, 3.03\text{kg/s}$]

11.5.4 ينفث هواء من مستودع إمداد عبر منفذ ناعم قصير و أنبوب طوله 10m . الضغط في المستودع 0.4MPa و درجة الحرارة الركودية 35°C . الضغط النهائي 0.1MPa . الخيارات المتوفّرة لأقطار الأنابيب هما: 40mm و 80mm . بافتراض أن متوسط معامل الاحتكاك لكل من الأنابيب 0.025 أحسب معدل سريان الكتلة لكل حالة.

[$2.65\text{kg/s}, 0.53\text{kg/s}$]

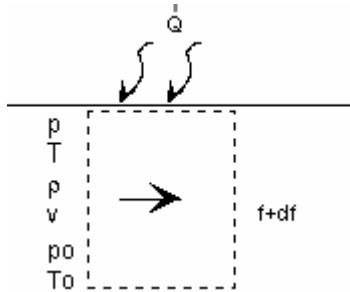
11.6 السريان الانضغاطي اللاكتومي

11.6.1 مقدمة

دراسة السريان الانضغاطي مع انتقال الحرارة في هذا الفصل مقيد بالافتراضات الآتية:

- السريان أحادي البعد
- ضئيل الاحتكاك
- مساحة مقطع السريان ثابتة
- السريان رتبة
- غاز كامل.

و يسمى السريان الذي يوفّي الافتراضات أعلاه سريان ريلي .



الشكل 11.6.1

11.6.2 المعادلات التفاضلية

محتوى الطاقة في الصورة التفاضلية:

$$d(h + \frac{v^2}{2}) = dh_0$$

$$dh + vdv = dh_0$$

$$c_p dT + vdv = c_p dT_0$$

$$\begin{aligned} \frac{kR}{k-1} T \frac{dT}{T} + v^2 \frac{dv}{v} &= \frac{kR}{k-1} T \frac{T_0}{T} \frac{dT_0}{T_0} \\ \frac{c^2}{k-1} \frac{dT}{T} + c^2 M^2 \frac{dv}{v} &= \frac{c^2}{k-1} \mu \frac{dT_0}{T_0} \\ \frac{1}{(k-1)M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} &= \frac{1}{(k-1)M^2} \mu \frac{dT_0}{T_0} \end{aligned} \quad (1)$$

معادلة حفظ كمية التحرك:

$$d(Ap) + d(\rho v^2 A) = 0$$

$$dp + \rho v dv = 0$$

$$dv = -\frac{kv}{kRT} + \frac{dp}{p}$$

الاستمرارية:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{v}{c}$$

$$M^2 = \frac{v^2}{kRT}$$

قانون الغاز الكامل:

المعادلة (11.3.4)

$$p_0 = p \mu^{\frac{k}{k-1}}$$

المعادلات (2) و (3) و (4) و (5) تعطى

تعطیان (3) و (11.6.1)

تعطیان (2) و (11.6.1)

$$\frac{dp}{p} = - \frac{2kM^2}{1+kM^2} \frac{dM}{M} \dots \dots \dots (11.6.3)$$

١١.٦.١) تعطیان و (٤)

$$\frac{dT}{T} = 2 \left[\frac{1 - kM^2}{1 + kM^2} \right] \frac{dM}{M} \quad \dots \dots \dots \quad (11.6.4)$$

(1) و (11.6.1) و (11.6.4) تعطى

$$\frac{dT_0}{T_0} = \left[\frac{2(k+1)(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu} \right] \frac{dM}{M} \quad \dots \dots \dots (11.6.5)$$

11.6.3) تعطیان و (6)

$$\frac{dp_0}{p_0} = - \left[\frac{kM^2(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu} \right] \frac{dM}{M} \quad \dots \dots \dots \quad (11.6.6)$$

أثر عدد ماح على سلوك المتغيرات الأخرى:

(1) المعادلة الرئيسية في هذه الحالة هي (11.6.5)

إضافة حرارة تعني أن ΔT موجبة. و يتبع ذلك أن عدد ماخ يزيد إذا كان السريان

دون صوتي، وينقص إذا كان السريان فوق صوتي.

ادرس التأثير المترتب من ذلك على dp و dp_0 و T . (2)

لاحظ أن $M = 1$ ليس قيمة حرجة للمتغير p_0 وأن $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$ قيمة حرجة (3)

للمتغير T .

11.6.3 المعادلات التكاملية

نعتبر الوضع المرجعي عند $M = 1.0$ و نكامل المعادلات (11.6.1) إلى (11.6.6). لتوضيح طريقة المتكاملة خذ المعادلة (11.6.1):

$$\int_v^* \frac{dv}{v} = \int_M^{1.0} \frac{2}{M(1+kM^2)} dM$$

و باستخدام الكسور الجزئية للجانب الأيمن

$$\frac{2}{M(1+kM^2)} = \frac{A}{M} + \frac{BM+c}{1+kM^2}$$

$$2 = (Ak+B)M^2 + CM + A$$

$$\square A = 2, C = 0, B = -2k$$

$$\frac{2}{M(1+kM^2)} = \frac{2}{M} + \frac{2kM}{1+kM^2}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2 \int_M^{1.0} \frac{dM}{M} = \ln M^2 \Big|_M^1 = -\ln M^2$$

$$I_2 = -2k \int_M^{1.0} \frac{MdM}{1+kM^2} = -k \int_M^{1.0} \frac{2MdM}{1+kM^2} = -k \int_M^{1.0} \frac{dM^2}{1+kM^2}$$

$$\begin{aligned} 1 + kM^2 &= u \\ du &= k dM^2 \end{aligned}$$

$$I_2 = - \int \frac{du}{u} = -\ln u = -\ln (1+kM^2) \Big|_M^1 = \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

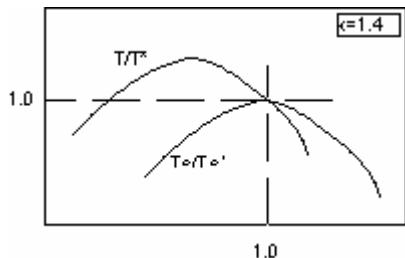
$$I = -\ln M^2 + \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

$$\ln \frac{v^*}{v} = \ln \frac{1+kM^2}{1+k} - \ln M^2$$

$$\frac{v^*}{v} = \frac{1 + kM^2}{(1 + k)M^2}$$

$$\frac{v}{v^*} = \frac{(1+k)M^2}{1+kM^2} \quad \dots \dots \dots \quad (11.6.7)$$

ويمكن على هذا النسق مكاملة المعادلات التفاضلية (11.6.2) إلى (11.6.6) لتعطى:



$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(1+k)M^2\mu}{(1+kM^2)^2} \dots\dots\dots (11.6.11)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \dots \quad (11.6.12)$$

الشكل 11.6.2

يبين الشكل (11.6.2) صورة بيانية للمعادلتين (11.6.10) و (11.6.11). ويجد القارئ جداول سريان ريلي ضمن الملحق (د) لنسبة الحرارة النوعية 1.4.

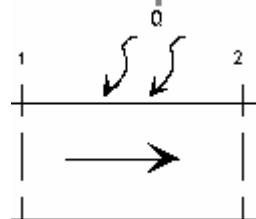
معادلة معدل انتقال الحرارة

11.6.4

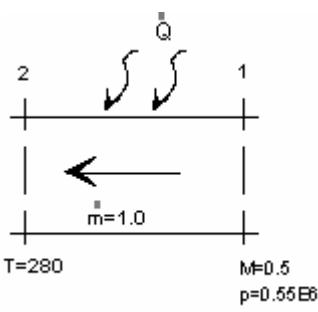
معادلة الطاقة للمقطع 2-1 :

$$h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{Q}{m} = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

$$\frac{Q}{m} = h_{02} - h_{01}$$



الشكل 11.6.3



الشكل 11.6.4

$$Q = c_p m (T_{02} - T_{01}) \dots \dots \dots (11.6.13)$$

مثال 11.6.1
يسري هواء في أنبوب ضئيل الاختلاف. الضغط و درجة الحرارة و عدد ماخ عند المدخل 0.55MPa ، 0.5 و 230K ، على التوالي. يخرج الهواء من الأنابيب بدرجة الحرارة 280K . أحسب
 أ) عدد ماخ الخروجي
 ب) التغير في الضغط الركودي
 ج) إذا كان معدل السريان 1.0kg/s احسب معدل انتقال الحرارة.

(أ)

$$\frac{T_2}{T^*} = \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1}{T^*}$$

س ر (1)

M	T/T*
0.5	0.790

$$T_2/T^* = 0.962$$

س ر (2)

T/T*	M
0.962	0.65

$$M_2 = 0.65$$

(ب)

س ل ت (1)

M	p/p ₀
0.5	0.843

$$P_{01} = 0.652E6 Pa$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_0} * \frac{p_0}{p_{01}}$$

س ر (2)

M	P ₀ /p ₀ *
0.65	1.058

س ر (1)

M	P ₀ /p ₀ *
0.5	1.114

$$p_{02} = 0.619E6 Pa$$

$$\Delta p_0 = p_{02} - p_{01} = -32.8E3$$

الانخفاض في الضغط = 32.8kPa

(ج)

$$Q = c_p m (T_{02} - T_{01})$$

$$c_p = kR/(k-1) = 1004.5 J/kg-K$$

س ل أ (1)

M	T/T ₀
0.5	0.9524

س ل أ (2)

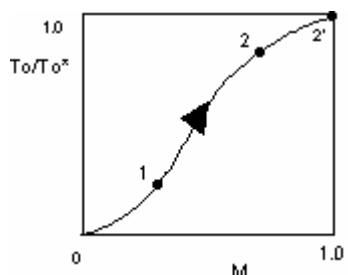
M	T/T ₀
0.65	0.9221

$$T_{02} = 303.7$$

$$T_{01} = 241.5$$

$$Q = 1.0 (1004.5)(303.7 - 241.5) = 62.5kW$$

الشَّرْق 11.6.5



الشكل (11.6.5)

إضافة كمية حرارة للسريان تميزه زيادة في درجة الحرارة الركودية T_0 - المعادلة (11.6.13). وبالتالي، لاستنباط أثر انتقال الحرارة على السريان يمكن دراسة تأثير السريان بتغيير قيمة T_0 .

الشكل (11.6.5) يوضح تغير درجة الحرارة الركودية الابعدية بعدد ماح في المدى دون الصوتي حسب المعادلة (11.6.11). ويدل المنحني إلى أن تسخين السريان من الوضع

الابتدائي ذو الإحداثيات، إلى

الوضع النهائي $\left(M_2, \frac{T_{02}}{T_0} \right)$ يعني زيادة في

درجة الحرارة الركودية بالمقدار $T_{01} - T_{02}$. ويرتفع الموضع 2 بزيادة التسخين حتى يصل إلى الموضع *2 . إذا وولى التسخين بعد ذلك بغرض دفع الموضع 2 إلى أعلى من ذلك

حيث $T_0^* > T_{02}$ فان الأمر يصبح غير ممكн في الطبيعة لأن $\frac{T_0}{T_0^*}$ لا تتجاوز الواحد

الصحيح، الذي يحدث في الواقع هو أن يتعدل كل السربان ليستوعب كمية الحرارة المضافة، وبالنظر إلى الشكل (11.6.5) نرى أن ذلك يحدث فقط بانخفاض M_1 لتنزيل T_{02} - T_{01} و يصبح السربان الخروجي صوتياً، ويسمى السربان في هذه الحالة شرقاً.

مثال 11.6.2

أنبوب ذو مقطع ثابت وضئيل الاحتياك. في إلبيه دفع الهواء إلى داخل الأنابيب بعدد ماح 0.5 ودرجة حرارة روكودية 300K . ثم سخن المجرى حتى ارتفعت درجة الحرارة الركودية إلى 1000K .

$$= 1000/300 = 3.333$$

إذا بقيت M_1 عند 0.5 بعد التسخين
س ر (1):

M	T_0/T_{0^*}
0.5	0.691

المعادلة (1) تعطي

$$\left. \frac{T_0}{T_0^*} \right|_2 = \left. \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{T_0}{T_0^*} \right|_1 = (3.333)(0.691) = 2.303$$

و هذا غير ممكن حيث $\frac{T_0}{T_0^*} \leq 1.0$.

وهذا يعني أن السريان شرق.

$$M_2 = 1.0$$

المعادلة (1) تعطي

$$\left. \frac{T_0}{T_0^*} \right|_1 = \left. \frac{T_{01}}{T_{02}} \frac{T_0}{T_0^*} \right|_2 = 300/1000 = 0.3$$

: (1) ر س

T₀/T₀*	M
0.3	0.274

$$M_I = \mathbf{0.274}$$

مسائل

11.6.1 يعرف الآتي عند مدخل أنبوب يحوي سريان لا احتكاكى:

M ₁	T ₁	P ₁	A ₁
0.4	300K	0.1MPa	0.001m ²

- (أ) بالرجوع إلى جداول السريان اللاتبديي أحسب درجة الحرارة الركودية T₀₁ و الضغط الركودي p₀₁.
- (ب) سخن الأنابيب حتى بلغت درجة الحرارة T₂ 400K . أحسب قيم المتغيرات الأخرى مستعيناً بقوانين السريان الحراري.
- (ج) و بوسيلة أخرى، استخلص التعبير الرياضي الذي يربط المتغيرات T₁ و T₂ و M₁ و M₂ و من ثم أحسب M₂ . فارن بالإجابة في (ب).
- (د) أحسب معدل انتقال الحرارة بالكيلووات.

[310K, 0.112MPa, 0.52, 18kW]

11.6.2 يسري الهواء في أنبوب لا احتكاكى مساحة مقطعه 0.01m² . عند مدخل الأنابيب:

M	T ₀	P ₀
0.3	350K	0.2MPa

سخن الأنابيب و ارتفعت درجة الحرارة الركودية عند المخرج إلى 450K . أحسب معدل سريان الحرارة و عدد ماخ الخروجي و الضغط الخروجي.
[0.21MW, 0.35, 0.18MPa]

11.6.3 قُرن مخرج منفذ لام بأنبوب ثابت المقطع. مساحة مدخل المنفذ 0.25m² . مساحة مخرج المنفذ و مقطع الأنابيب 0.2m² . استخدمت المنظومة لتسريع هواء من الحالة الدخولية الآتية:

M	T	P
0.3	300K	0.1MPa

يمكن اعتبار السريان في المنفذ لاتبديي و يمكن تجاهل الاحتكاك في الأنابيب.
قدر عدد ماخ الخروجي و درجة الحرارة الخروجية إذا سخن الأنابيب بمعدل 1MW .

[0.42, 327K]

11.7 قياس السرعة في السريان الانضغاطي

السريان دون الصوتى 11.7.1

عند استخدام منظومة أنبوب الضغط الحركي و المانومتر لقياس السرعة للسرير الانضغاطي - القسم (6.3.1.1) - استخدمت علاقة الطاقة المبسطة لربط السرعة بفرق الضغط لتعطي المعادلة

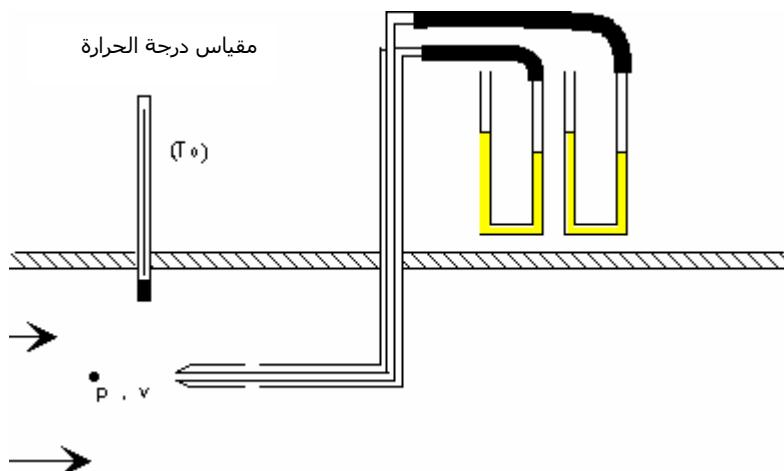
$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

اعتبرت الكثافة في المعادلة (1) ثابت، وهذا تبسيط مخل إذا كان السريان انضغاطياً.

عند اعتبار السريان انضغاطي مع الابقاء على افتراض اللاتبديل بين الموضع العام، حيث الضغط p و السرعة v و المحتوى الحراري h ، و موضع الركود ، حيث الضغط p_0 و السرعة صفر و المحتوى الحراري h_0 .
حفظ الطاقة بين الموضعين يعطي

$$h + \frac{v^2}{2} = h_0$$

$$v = \sqrt{2(h_0 - h)} = \left[2c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$



الشكل 11.7.1

و للسريان الاتبدي

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T}{T_0}$$

فتصبح السرعة

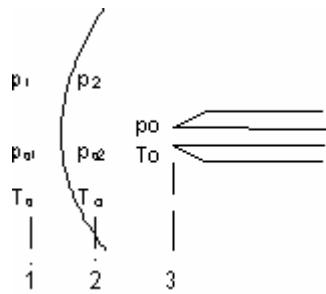
$$v = \left\{ \frac{2kRT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots \dots \dots (11.7.1)$$

يلاحظ أن:

- أنبوب الضغط والضغط الركودي موصلين بمانومترين منفصلين. بمعرفة الضغط الجوي يمكن استخلاص قيم p و p_0 .
- مقاييس الحرارة يقرأ قيمة T_0 مباشرةً.

11.7.2 السريان فوق الصوتي

تدل التجربة على انه ليس بالإمكان إبطاء السريان فوق الصوتي إلى الحالة دون الصوتية دون عبور صدمة. وبذلك عند وضع أنبوب الضغط الحركي في سريان فوق صوتي فأن السرعة تكون صفرًا عند حافة الأنابيب وفوق صوتية على مسافة منه في الجانب الصعيدي. بين الموضعين يعبر السريان صدمة منحنية. بالنظر إلى السريان في خط الانسياب المحوري يمكن اعتبار الصدمة مستقيمة ومتعمدة والاستفادة من معادلات الصدمة المتعمدة في القسم (11.4).



الشكل 11.7.2

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right) \quad \dots \dots \dots (11.4.3)$$

وعند الموضع (2) تعطي معادلة السريان الاتبدي (11.3.4)

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M_2^2 \right]^{1/(k-1)}$$

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2]^{k/(k-1)} \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2}$$

و يمكن التعويض عن M_2 بـ M_1 من المعادلة (11.4.4) لتعطى

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left[\frac{(k+1)^{k+1}}{2kM_1^2 + 1 - k} \left(\frac{1}{2} M_1^2 \right)^k \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (11.7.2)$$

يستخدم أنبوب الضغط الركودي لقياس p_a - p_{02} و أنبوب الضغط لقياس p_a - p_1 عند موضع صعيد المقطع (1). و يقاس الضغط الجوي p_a بالبارومتر. ثم تحل المعادلة (11.7.2) بطريقة تكررية لتعطى قيمة M_1 .

لحساب السرعة v نحسب أولاً درجة الحرارة T_1 من المعادلة

$$\frac{T_1}{T_0} = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2]^{-1} \quad (11.3.3)$$

ثم تستخدم المعادلة

$$v_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} \quad (11.7.3)$$

مثال

تطير طائرة في جو ضغطه 0.1 MPa . الطائرة مجهزة بأنبوب ضغط ركودي و مقياس للحرارة. يدل أنبوب الضغط الركودي على القراءة 0.14 MPa فوق الضغط الجوي و يعطي مقياس الحرارة القراءة 440 K . قدر سرعة الطائرة.

$$p = 0.1E6 \text{ Pa}, \quad p_0 = (0.14 + 0.1)E6 \text{ Pa} = 0.24E6 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 440\text{ K}$$

نفترض في البدء أن السريان دون صوتي

$$p/p_0 = 0.1 / 0.24 = 0.417$$

قوائم السريان اللاتبدي تعطي

$$\mathbf{M = 1.19}$$

مما يدل على أن السريان فوق صوتي

$$p_{02} = 0.24E6, \quad p_1 = 0.1E6$$

المعادلة (11.7.2)

$$M_1^{2.8} - 1.284M_1^2 + 0.183 = 0$$

$$M_1 = 1.2$$

قائمة السريان الالاتبدي عند الموضع (1):

M	T/T ₀
1.2	0.7764

$$T_1 = 440 (0.7764) = 342K$$
$$v = M\sqrt{kRT} = \mathbf{445m/s = 1600km/h}$$