بنك أسئلة التكامل

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة التكامل

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

م . مروان بجور حمص 0930170828

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

أ زياد داوود سلمية 0936834286

أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038 | زياد داوود — سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183 | مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 1 :

❶ أثبت أن التابع $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ تابع أصلي للتابع $f(x)=\sqrt{x}$ على $]0\,,+\infty[$

❷ أيكون $F(x)$ تابعا أصليا للتابع $f(x)=\sqrt{x}$ على $[0\,,+\infty[$ ؟

الحل :

❶ ان كل من x و $\sqrt{x}$ اشتقاقيان على $]0\,,+\infty[$ وبالتالي $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0\,,+\infty[$

$$F'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}=f(x)$$

❷ $$g(x)=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{3}\sqrt{x}\Longrightarrow \lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\sqrt{x}=0$$

فالتابع F اشتقاقي عند 0 و $F'(0)=0=f(0)$ وبالتالي F اشتقاقي على $[0\,,+\infty[$

ومشتقه على هذا المجال هو f فهو تابع أصلي للتابع f على $[0\,,+\infty[$

التمرين 2 :

تحقق أنَّ G,F تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I

$$G(x)=\frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}\quad,\quad F(x)=\frac{2x^2-3x+7}{4x-5}\quad,I=\left]\frac{5}{4},+\infty\right[$$

الحل :

كل من $F(x)$ و $G(x)$ اشتقاقي على المجال I

$$F'(x)=\frac{(4x-3)(4x-5)-8x^2+12x-28}{(4x-5)^2}$$

$$=\frac{16x^2-20x-12x+15-8x^2+12x-28}{(4x-5)^2}=\frac{8x^2-20x-13}{(4x-5)^2}$$

$$G'(x)=\frac{(-8x+2)(10-8x)-32x^2+16x-72}{(10-8x)^2}$$

$$=\frac{-80x+64x^2+20-16x-32x^2+16x-72}{\left(-2(4x-5)\right)^2}=\frac{32x^2-80x+52}{4(4x-5)^2}=\frac{8x^2-20x-13}{(4x-5)^2}$$

باشتقاق التابعين نحصل على التابع : $f(x)=\frac{8x^2-20x-13}{(4x-5)^2}$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 3 :

أثبت أن التابع F تابع أصلي للتابع على المجال I الموافق

1) $F(x) = x\ln x - x \quad , \quad f(x) = \ln x \; , \; I =]0\,,+\infty[$

2) $F(x) = \ln(\ln x) \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x\ln x} \; , I =]1\,,+\infty[$

3) $F(x) = x - \ln(1+e^x) \; , \; f(x) = \frac{1}{1+e^x} \; , I = \mathbb{R}$

الحل :

❶ **التابع** $F(x)$ **هو مجموع تابعين اشتقاقيين على** المجال I **فهو اشتقاقي على** المجال I

$$F(x) = x\ln x - x \Rightarrow F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$$

❷ $x \longmapsto \ln x$ **اشتقاقي وموجب تماما على** المجال I **وبالتالي التابع** $F(x)$ **اشتقاقي على** المجال I

$$F(x) = \ln(\ln x) \Rightarrow F'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} = f(x)$$

❸ $x \longmapsto 1 + e^x$ **اشتقاقي وموجب تماما على** المجال I **وبالتالي** $\ln(1+e^x)$ **اشتقاقي على** المجال I

فالتابع $F(x)$ **هو مجموع تابعين اشتقاقيين على** المجال I **فهو اشتقاقي على** المجال I

التمرين 4 :

في كل من الحالات التالية جد تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I الموافق

1) $f(x) = x^2 \cdot \sin 2x \quad , I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x\ln x \, dx \quad , I =]0, +\infty[$

3) $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \qquad I = \mathcal{R}_+^*$

4) $f(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \qquad I =]-1, +\infty[$

5) $f(x) = \cos 3x \, . \cos x \qquad I = \mathcal{R}$

6) $f(x) = \sin^3 x \, . \cos^2 x \qquad I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} \qquad I = \mathcal{R}_+^*$

8) $f(x) = \frac{1}{\sin 2x} \qquad I =]0, \frac{\pi}{2}[$

9) $I =]-\infty, -2[, \quad f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2}$

10) $f(x) = x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2} \qquad I = \mathcal{R}$

11) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \qquad I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

1) $f(x) = x^2 \cdot \sin 2x \quad , I = \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 \cdot \sin 2x \Longrightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^2 \cdot \sin 2t \ dt$$

$$u = t^2 \Longrightarrow u' = 2t \quad , \quad v' = \sin 2t \Longrightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2t$$

$$I = \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \ \Longrightarrow$$

$$\int_0^x t^2 \cdot \sin 2t \ dt = \left[-\frac{1}{2}t^2 \cos 2t\right]_0^x + \int_0^x t\cos 2t \, dt$$

لحساب $\int_0^x t\cos 2t \, dt$ نكامل بالتجزئة

$$u = t \Longrightarrow u' = 1 \quad , \quad v' = \cos 2t \Longrightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\int_0^x t\cos 2t \, dt = \left[\frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^x - \int_1^x \frac{1}{2}\sin 2t \, dt = \left[\frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^x + \left[\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x$$

$$\int_0^x t^2 \cdot \sin 2t \ dt = \left[-\frac{1}{2}t^2\cos 2t\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^x + \left[\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\cos(2x)$$

هو تابع أصلي للتابع $f(x) = x^2\sin(2x)$

2) $f(x) = x\ln x \Longrightarrow F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t\ln t \ dt$

$$u = \ln t \Longrightarrow u' = \frac{1}{t} \quad , \quad v' = t \Longrightarrow v = \frac{t^2}{2}$$

$$I = \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \ \Longrightarrow \int_1^x t\ln t \, dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}\right)\ln t(t)\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{1}{t}\times\frac{t^2}{2}\right)dt$$

$$= \left[\left(\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x t \, dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^x - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right] - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \Longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x(x) - \frac{x^2}{4}$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

3) $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ $\quad I = \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = x^{-2}(\sin x - x\cos x) = x^{-2}\sin x - x^{-1}\cos x \Longrightarrow$$

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x (t^{-2}\sin t - t^{-1}\cos t)dt$$

$$= \int_1^x t^{-2}\sin t\,dt - \int_1^x t^{-1}\cos t\,dt$$

$$u = \sin t \quad u' = \cos t \quad , \quad v' = t^{-2} \quad v = \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{t}$$

$$F(x) = \int_\pi^x f(t)dt = \left[-\frac{1}{t}\sin t\right]_\pi^x + \int_\pi^x \frac{\cos t}{t}dt - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t}dt = \frac{-1}{x}\sin x$$

4) $f(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad I =]-1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{3x}{2\sqrt{x+1}} + \frac{2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3}{2}x(x+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{3}{2}(x+1-1)(x+1)^{-\frac{1}{2}} + (x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} + (x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1}$$

5) $f(x) = \cos 3x \,.\, \cos x$ $\quad I = \mathcal{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) =$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

6) $f(x) = \sin^3 x \,.\, \cos^2 x$

$$f(x) = \sin x \sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cos^2 x(1 - \cos^2 x)$$

$$f(x) = \sin x\cos^2 x - \sin x \cos^4 x \Longrightarrow F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}$$

$7)\ f(x)=\frac{\ln x-1}{x^2} \qquad I=\mathbb{R}_+^*$

$$f(x)=x^{-2}(\ln x-1)=x^{-2}\ln x-x^{-2}$$

نكامل بالتجزئة

$$u=\ln x \qquad u'=\frac{1}{x}$$
$$v'=x^{-2} \qquad v=\frac{x^{-1}}{-1}=\frac{-1}{x}$$
$$F(x)=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^x+\int_1^x\frac{1}{x^2}dx-\int_1^x\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln x$$

$8)\ f(x)=\frac{1}{\sin 2x} \qquad I=]0,\frac{\pi}{2}[$

$$f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos x}+\frac{\cos x}{2\sin x}=-\frac{1}{2}\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$F(x)=-\frac{1}{2}\ln(\cos x)+\frac{1}{2}\ln(\sin x)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\ln\sqrt{\tan x}$$

$9)\ f(x)=\frac{2x-1}{(x+2)^2} \quad , \ I=]-\infty,-2[$

$$F(x)=\frac{5}{x+2}+2\ln(-x-2)$$
$$f(x)=\frac{2x-1}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-4-1}{(x+2)^2}=\frac{2(x+2)}{(x+2)^2}+\frac{-5}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{2}{(x+2)}-5(x+2)^2$$
$$F(x)=2\ln|x+2|-5\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+=F(x)=2\ln(-x-2)+\frac{5}{x+2}$$

لأن $x\in]-\infty,-2[\Longrightarrow |x+2|=-x-2$

$10)\qquad f(x)=x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2} \qquad I=\mathbb{R}$

$$f(x)=x.(x^2+1)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\left(2x.(x^2+1)^{\frac{2}{3}}\right)$$
$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}$$

$11)\qquad f(x)=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \qquad I=]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}=-\left(\frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}\right)\Longrightarrow F(x)=-\sqrt{3-x^2}$$

التمرين 5 :

في كل من الحالات التالية جد تابعاً أصلياً للتابع f والذي يحقق الشرط المعطى

1) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ **والذي يحقق** $F(0) = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x} lnx$ **على المجال** $I =]1, +\infty[$ **الذي خطه البياني يمر بالنقطة** $(e^2, 0)$

الحل :

1) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} \qquad , F(0) = 0$

$$f(x) = x(x^2-1)^{-2} = \frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{2(x^2-1)} + k$$

$$F(0) = 0 \Longrightarrow \frac{-1}{-2} + k = 0 \Longrightarrow k = \frac{-1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x} lnx \Longrightarrow F(x) = \frac{ln^2 x}{2} + c$

$$F(e^2) = 0 \Longrightarrow \frac{(lne^2)^2}{2} + c = 0 \Longrightarrow \frac{(2)^2}{2} + c = 0 \Longrightarrow c = -2 \Longrightarrow F(x) = \frac{ln^2 x}{2} - 2$$

التمرين 6 :

أحسب التكاملات المحددة التالية

1) $J = \int_0^{\pi} (x-1) \cos x dx$

$$= [(x-1)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -2$$

2) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2-1)e^x \, dx$

$$u = x^2 - 1 \qquad u' = 2x$$
$$v' = e^x \qquad v = e^x$$

$$I = [(x^2-1)e^x]_{ln2}^{ln3} - \int_{ln2}^{ln3} 2xe^x dx$$

$$u = 2x \qquad u' = 2$$
$$v' = e^x \qquad v = e^x$$

$$I = [(x^2-1)e^x]_{ln2}^{ln3} - \left[[2xe^x]_{ln2}^{ln3} - \int_{ln2}^{ln3} 2e^x dx \right]$$

$$I = [(x^2-1)e^x]_{ln2}^{ln3} - [2xe^x]_{ln2}^{ln3} + [2e^x]_{ln2}^{ln3}$$

$$I = [3(ln3^2 - 1)] - 2(ln2^2 - 1) - [6ln3 - 4ln2] + (6-4)$$

$$= 3ln3^2 - 3 - 2ln2^2 + 2 - 6ln3 + 4ln2 + 2$$

$$= 1 + 3ln3^2 - 2ln2^2 - 6ln3 + 4ln2$$

3) $I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx$

$2 - 2\cos 2x = 4\sin^2 x$

ولكن $\sin x < 0$ **عندما** $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ **إذن في هذه الحالة لدينا** $\sqrt{2 - 2\cos 2x} = -2\sin x$

$$I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-2\sin x)dx = [2\cos x]_{3\pi/2}^{2\pi} = 2$$

4) $I = \int_1^e x\ln x\, dx$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \quad , \quad v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \Rightarrow \int_1^e x\ln x\, dx = \left[\ln x\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{e^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{2e^2}{4} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

5) $I = \int_0^{\pi/3} x\sin 3x\, dx$

$$\begin{cases} u(x) = x & \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin x & \Rightarrow v(x) = -\cos x \end{cases} \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\, dx = \left[x\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x)dx$$

$$= \left[x\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}[\sin 3x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9}$$

$6)\ M = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$

$$N = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$M = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = [\cos x\, e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\sin x) e^x dx = -e^{\pi} - 1 + N$$

$$N = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = [\sin x\, e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\cos x) e^x dx = -M$$

إذن $M = -\frac{1+e^{\pi}}{2}$ و $N = \frac{1+e^{\pi}}{2}$.

$7)\ I = \int_0^2 |x^2 - 1| \, dx$

بدراسة اشارة المقدار $x^2 - 1$ نجد أن :

$x^2 - 1 \geq 0 \ : x \in [1,2]$, $x^2 - 1 \leq 0 \ : x \in [0,1]$ وبالتالي :

$$I = \int_0^2 |x^2-1| \, dx = \int_0^1 |x^2-1| \, dx + \int_1^2 |x^2-1| \, dx$$

$$= \int_0^1 -(x^2-1) \, dx + \int_1^2 (x^2-1) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

$8)\ I = \int_0^1 (x+2) e^x dx$

$$= [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1$$

$9)\quad I = \int_0^{ln2} e^x (1 - e^x) dx$

$$I = -\int_0^{ln2} -e^x(1-e^x) dx = -\left[\frac{(1-e^x)^2}{2}\right]_0^{ln2} = -\left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{1}{2}$$

$10)\ I = \int_0^1 \frac{x}{x^2-4} dx$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2}[ln(4-x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}(ln3 - ln4)$$

11) $I = \int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2-4)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(x^2-4)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$$

12) $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-6} dx$

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \Longrightarrow 1 = a(x+2) + b(x-3)$$

نعوض في العلاقة الأخيرة :
$$\begin{cases} x = 3 \Longrightarrow 1 = 5a \Longrightarrow a = \frac{1}{5} \\ x = -2 \Longrightarrow 1 = -5b \Longrightarrow b = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{5}\times\frac{1}{x-3} - \frac{1}{5}\times\frac{1}{x+2}$$

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{5}\int_0^1\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

على المجال $[0,1]$ يكون لدينا $x-3<0 \ \& \ x+2>0$ وبالتالي :

$$I = \frac{1}{5}[ln(3-x) - ln(x+2)]_0^1 = \frac{1}{5}\big((ln\,2 - ln\,3) - (ln\,3 - ln\,2)\big) \Longrightarrow$$

$$I = \frac{1}{5}(2\,ln\,2 - 2\,ln\,3) = \frac{2}{5}ln\frac{2}{3}$$

13) $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2-x-6} dx$

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \Longrightarrow x = a(x+2) + b(x-3)$$

نعوض في العلاقة الأخيرة :
$$\begin{cases} x = 3 \Longrightarrow 3 = 5a \Longrightarrow a = \frac{3}{5} \\ x = -2 \Longrightarrow -2 = -5b \Longrightarrow b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{5}\times\frac{1}{x-3} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{x+2}$$

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{x-3} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{x+2}\right)dx$$

على المجال $[0,1]$ يكون لدينا $x-3<0 \ \& \ x+2>0$ وبالتالي :

$$I = [\frac{3}{5}ln(3-x) + \frac{2}{5}ln(x+2)]_0^1 \Longrightarrow$$

$$I = \left[\frac{3}{5}ln\,2 + \frac{2}{5}ln\,3\right] - \left[\frac{3}{5}ln\,3 + \frac{2}{5}ln\,2\right] = \frac{1}{5}ln\,2 - \frac{1}{5}ln\,3 = \frac{1}{5}ln\frac{2}{3}$$

$$= [\frac{3}{5}ln|x-3| + \frac{2}{5}ln|x+2|]_0^1$$

14) $I = \int_0^1 \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2} dx$

$$I = \int_0^1 \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2} dx = \int_0^1 \left(2x+3+\frac{10x+6}{2x^2-3x-2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (2x+3)\, dx + \int_0^1 \frac{10x+6}{2x^2-3x-2} dx = [x^2+3x]_0^1 + \int_0^1 \frac{5x+3}{x^2-\frac{3}{2}x-1} dx = 4 + J$$

$$\frac{5x+3}{x^2-\frac{3}{2}x-1} = \frac{a}{\left(x+\frac{1}{2}\right)} + \frac{b}{(x-2)} \Longrightarrow 5x+3 = a(x-2) + b\left(x+\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$5x+3 = (a+b)x - 2a + \frac{b}{2} \Longrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ -2a+\frac{b}{2}=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a+b=5 \\ 4a-b=-6 \end{matrix} \Longrightarrow a = \frac{-1}{5}, b = \frac{26}{5}$$

$$J = \int_0^1 \frac{5x+3}{x^2-\frac{3}{2}x-1} dx = \int_0^1 \frac{-1}{5}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)} + \frac{26}{5}\frac{1}{(x-2)} dx$$

$$= \frac{-1}{5}\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)} dx + \frac{26}{5}\int_0^1 \frac{1}{(x-2)} dx = \frac{-1}{5}\left[ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 + \frac{26}{5}[ln(2-x)]_0^1$$

$$= \frac{-1}{5}\left(ln\left(\frac{3}{2}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{26}{5}(ln(1) - ln(2)) = \frac{-1}{5} ln\, 3 - \frac{26}{5} ln\, 2$$

$$I = 4 - \frac{1}{5} ln\, 3 - \frac{26}{5} ln\, 2$$

15) $N = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

$$N = [ln(cosx + sinx)]_0^{\pi/4} = (ln\left(cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}\right) - (ln(cos0 + sin0))$$

$$= ln\sqrt{2} + 0 = ln\sqrt{2}$$

16) $I = \int_1^e min(ln\, x\ , x-1)\, dx$

ندرس اطراد التابع $f(x) = lnx + 1 - x$ المعرّف والاشتقاقي عندما $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

إشارة f' من إشارة $1-x$ الذي ينعدم عند $x = 1$ ويكون $f(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	‖ $\nearrow$	0	$\searrow$

نلاحظ من جدول الاطّراد أنّ $f(x) \le 0$ أيّاً كان $x \in]0, +\infty[$ بالتالي $\ln x \le x - 1$

$$I = \int_1^e min(ln\, x\ , x-1)\, dx = \int_1^e ln\, x\, dx$$

$$u = ln\, x \quad \Longrightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = 1 \quad \Longrightarrow \quad v = x$$

$$K = [xlnx]_1^e - \int_1^e dx = [xlnx - x]_1^e = 0 + 1 = 1$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 7 : دورة 2018 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x - 1$

1- جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$.

2- أحسب $\int_0^{ln2} f(x)dx$

الحل :

$$f(x) = e^x - 1$$

❶ لدينا $e^x - 1 \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow e^x \leq e^0 \Rightarrow x \leq 0$

يعطي مجموعة حلول المتراجحة $x \in]-\infty, 0]$

❷ لدينا $\int_0^{ln2}(e^x - 1)dx = [e^x - x]_0^{ln2} = 2 - ln2 - 1 = 1 - ln2$

التمرين 8 : الاختبار 4

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x.e^{-x}$ والمطلوب:

❶ احسب: $\int_0^{ln3} f(x)\,dx$

❷ أثبت أنّ التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة: $y' + y = e^{-x}$.

الحل:

$$❶\ I = \int_0^{ln3} f(x)\,dx = \int_0^{ln3} x.e^{-x}\,dx$$

بفرض $u = x$ يكون $u' = 1$ و $v' = e^{-x}$ يكون $v = -e^{-x}$ وبالتالي:

$$I = \int_0^{ln3} x.e^{-x}\,dx = [-x.e^{-x}]_0^{ln3} + \int_0^{ln3} e^{-x}\,dx$$

$$= [-x.e^{-x}]_0^{ln3} - [e^{-x}]_0^{ln3} = [(-1-x).e^{-x}]_0^{ln3}$$

$$= \frac{-1 - ln3}{3} - (-1) = \frac{2 - ln3}{3}$$

❷ $y' = e^{-x} - x.e^{-x}$

$$y' + y = e^{-x} - x.e^{-x} - x.e^{-x} = e^{-x}$$

التمرين 9:

نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a,b تحقق أن الخط البياني C_f

للتابع f المعرف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x)=\min(x^2,2-x)$

احسب التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ وقُل ماذا يُمثل هذا العدد ؟

احسب بالمثل $\int_0^1 h(x)\,dx$, $\int_0^2 g(x)\,dx$ في حالة

$g(x)=1-|1-x|$, $h(x)=\min(x^2,(x-1)^2)$ بعد رسم خطيهما البيانيين على

مجال المُكاملة .

الحل :

$$f(x)=min(x^2,2-x)$$

ندرس إشارة الفرق $x^2-(2-x)$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$

وبالتالي

$$\begin{cases} x\in[0,1] \Longrightarrow x^2\le 2-x \\ x\in[1,2] \Longrightarrow x^2\ge 2-x \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 (2-x)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left((4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{5}{6}$$

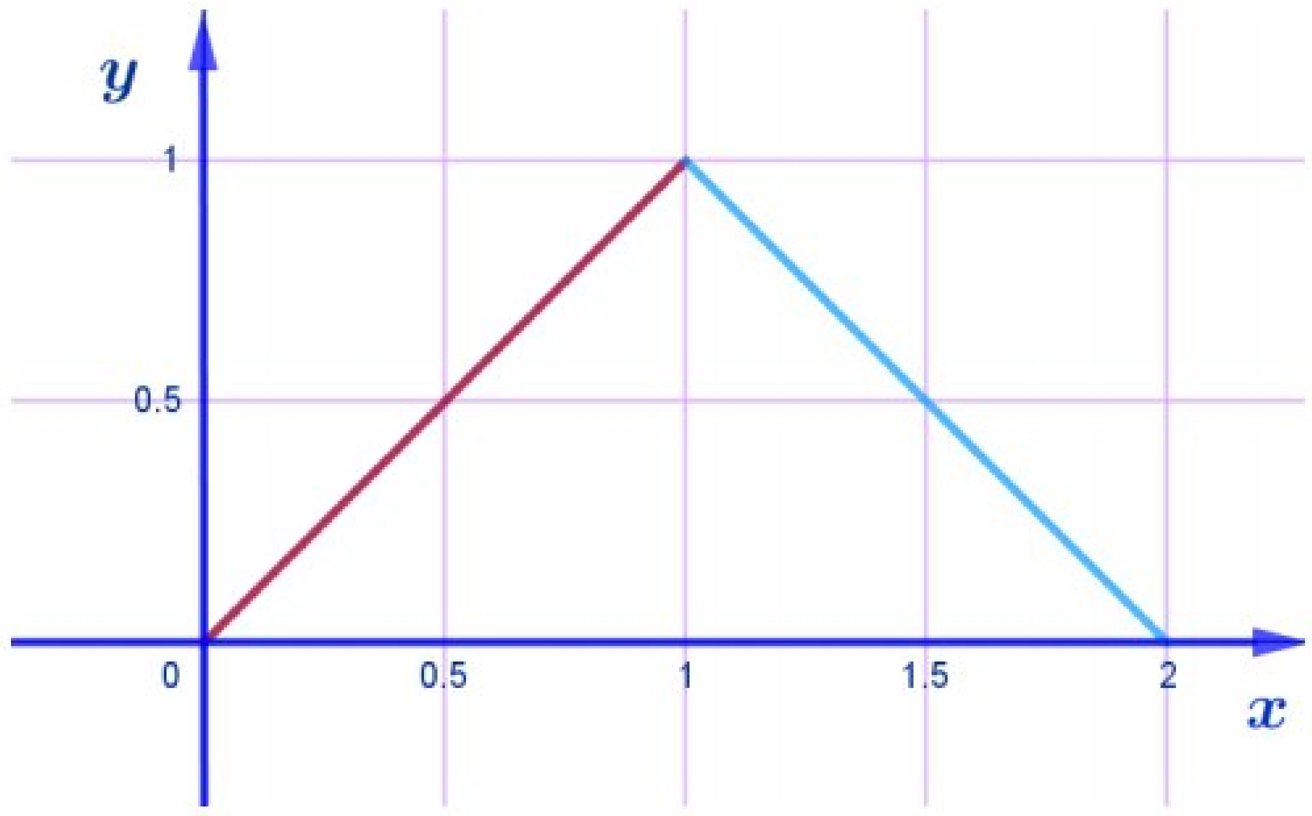
وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

وهذا العدد يمثل مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع ومحور الفواصل.

$$g(x) = 1 - |1 - x|$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - (1 - x) & 0 \le x \le 1 \\ 1 - (x - 1) & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

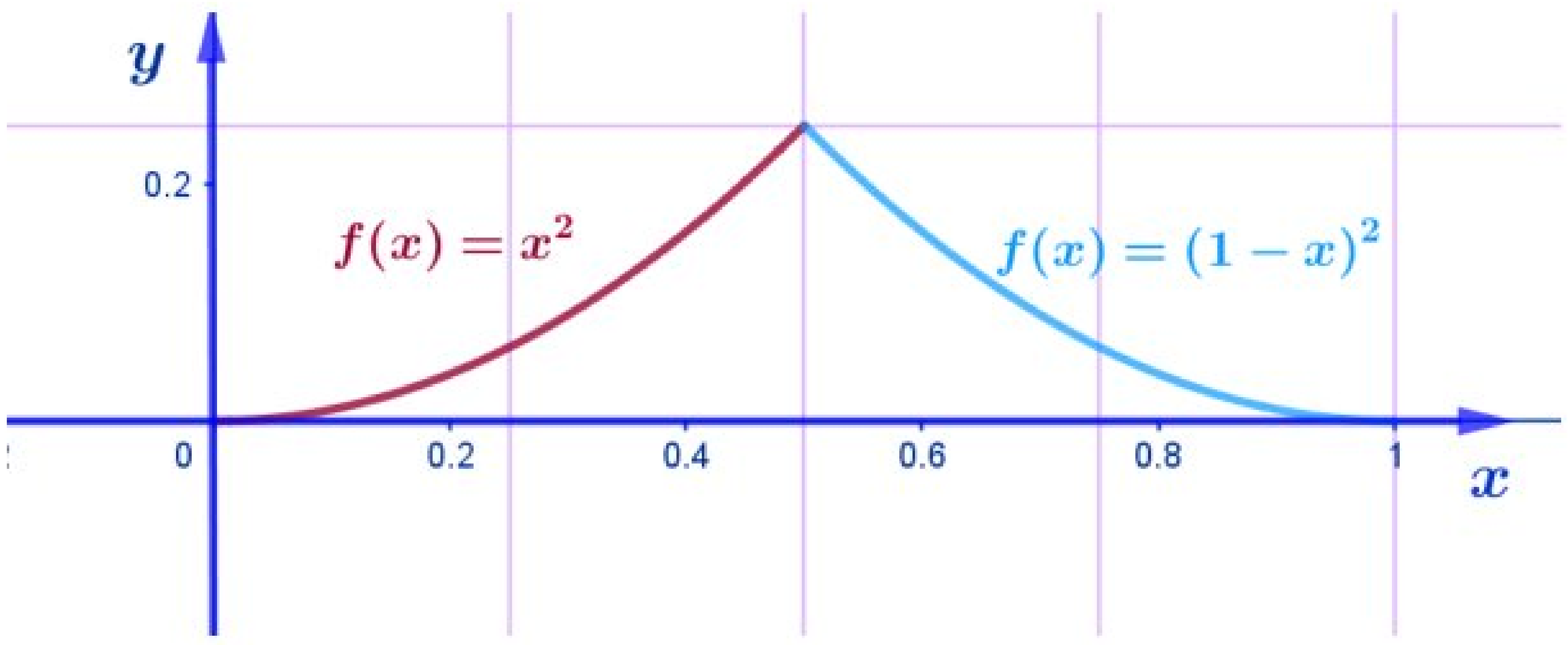


$$\Rightarrow \int_0^2 g(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2 - x)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left[\left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] = 1$$

في الحالة الثانية: $h(x) = min\{x^2, (x - 1)^2\}$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (1 - x)^2 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$



$$\int_0^2 h(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x)^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{24} - 0\right) + \left(0 - \frac{1}{24}\right) = \frac{2}{24}$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 10 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (2-x)e^x$

❶ ادرس تغيرات التابع f وارسم C .

❷ ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0\,, x = 2$ وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل . احسب مساحة S

❸ عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه $\mathcal{V}$.
عيّن الأعداد a, b, c حتى يكون التابع $G: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$
تابعاً أصلياً للتابع $x \mapsto \left(f(x)\right)^2$. استنتج قيمة $\mathcal{V}$

الحل :

التابع $f(x) = (2-x)e^x$ معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -e^x + e^x(2-x) = (1-x)e^x \quad , \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = e$$

نقاط مساعدة : $(0,2) \qquad y = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad (2,0) \qquad x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

$$S = \int_0^2 (2-x)e^x dx = \int_0^2 (2e^x - xe^x)\, dx$$

$$u = x \qquad u' = 1 \quad , \quad v' = e^x \qquad v = e^x$$

$$S = \int_0^2 2e^x - \left([xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx\right) = [2e^x]_0^2 - [xe^x]_0^2 + [e^x]_0^2$$

$$= 2e^2 - 2 - 2e^2 + 0 + e^2 - 1 = e^2 - 3$$

لدينا : $G'(x) = \left(f(x)\right)^2$

$$G'(x) = (2ax + b)e^{2x} + e^{2x}(ax^2 + bx + c) = e^{2x}(2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c)$$

$$G'(x) = (2ax^2 + (2a+2b)x + 2c + b)e^{2x} \quad , \qquad \left(f(x)\right)^2 = (4 - 4x + x^2)e^{2x}$$

بالمطابقة نجد : $(2ax^2 + (2a+2b)x + 2c + b) = x^2 = 4x + 4$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad , \quad 2a + 2b = -4 \Rightarrow b = \frac{-5}{2} \quad , \quad 2c + b = 4 \Rightarrow c = \frac{13}{4}$$

إذاً : $G(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$

مساحة مقطع المجسم الدوراني المدروس بالمستوي العمودي على محور الدوران المار بالنقطة التي فاصلتها x وبالتالي $A(x) = \pi\left(f(x)\right)^2$

$$V(x) = \int_0^2 \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^2 \pi\, G'(x)\, dx = [\pi\, G(x)]_0^2$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{2}\right)e^{2x}\right]_0^2 = \pi\left[\left(2 - 5 + \frac{13}{2}\right)e^4 - \frac{13}{2}\right] = \pi\left(\frac{7e^4 - 13}{2}\right)$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 11 :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $\boldsymbol{f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x}$

والمطلوب :احسب $\boldsymbol{I = \int_2^e f(x)dx}$

الحل :

نفترض وجود كثير حدود P بحيث يكون $F(x) = P(x)e^x$ تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$ عندئذ

$$F' = f \Rightarrow \big(P'(x) + P(x)\big)e^x = (x^2 - 2x + 1)e^x \Rightarrow$$

$$P'(x) + P(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad ❶$$

لكن درجة P' أصغر تماماً من درجة P ومنه درجة الطرف الأيسر تساوي درجة P

في حين درجة الطرف الأيمن تساوي (2) . إذا لابد أن تكون درجة $P(x)$ هي (2)

وعليه نفترض أن :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$$

بالتعويض في ❶ : $(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = \boldsymbol{x^2 - 2x + 1}$

$$ax^2 + (2a + b)x + (b + c) = \boldsymbol{x^2 - 2x + 1}$$

بمقارنة الامثال في الطرفين نجد :

$$a = 1 \quad , \quad 2a + b = -2 \Rightarrow b = -4 \quad , \; b + c = 1 \Rightarrow c = 5$$

ومنه $P(x) = x^2 - 4x + 5$ ومنه $F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$

$$\boldsymbol{I} = \int_2^e \boldsymbol{f(x)dx} = [(x^2 - 4x + 5)e^x]_2^e = (e^2 - 4e + 5)e^e - (4 - 8 + 5)e^2$$

$$\boldsymbol{I} = \int_2^e \boldsymbol{f(x)dx} = [(x^2 - 4x + 5)e^x]_2^e = (e^2 - 4e + 5)e^e - e^2$$

التمرين 12 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{-x}$

أيوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F: x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$

الحل :

نفترض وجود كثير حدود P بحيث يكون $F(x) = P(x)e^{-x}$ تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$ عندئذ

$$F' = f \Rightarrow \left(P'(x) - P(x)\right)e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x} \Rightarrow$$

$$P'(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \qquad ❶$$

لكن درجة P' أصغر تماماً من درجة P ومنه درجة الطرف الأيسر تساوي درجة P

في حين درجة الطرف الأيمن تساوي (3) . إذا لابد أن تكون درجة $P(x)$ هي (3) وعليه نفترض أن :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

بالتعويض في ❶ : $(3ax^2 + 2bx + c) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 1 + x + x^2 + x^3$

$$-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + (c - d) = x^3 + x^2 + x + 1$$

بمقارنة الامثال في الطرفين نجد :

$$-a = 1 \Rightarrow a = -1 \quad , \quad 3a - b = 1 \Rightarrow b - 4$$

$$2b - c = 1 \Rightarrow c = -9 \quad , \quad c - d = 1 \Rightarrow d = -10$$

ومنه $P(x) = -x^3 - 4x^2 - 9x - 10$

وبالعكس يمكن أن نلاحظ مباشرة : $[(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)e^{-x}]' = f(x)$

إذا يوجد تابع كثير حدود P بحيث يكون $F(x) = P(x)e^{x}$ تابعا أصليا للتابع f على $\mathbb{R}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 13 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3e^{2x}$,

جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x) = P(x)e^{2x}$ حيث P كثير حدود .

الحل

$$F' = f \Longrightarrow \big(P'(x) + 2P(x)\big)e^{2x} = x^3e^{2x} \Longrightarrow \quad P'(x) + 2P(x) = x^3 \quad ❶$$

نفرض $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ وبالتالي : $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ نعوض في ❶

$$3ax^2 + 2bx + +c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3$$

$$2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + (c + 2d) = x^3$$

بمقارنة الامثال في الطرفين نجد :

$$2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \;\; , \;\; 3a + 2b = 0 \Longrightarrow b = -\frac{3}{4}$$

$$2b + 2c = 0 \Longrightarrow c = \frac{3}{4} \quad , \quad c + 2d = 0 \Longrightarrow d = -\frac{3}{8}$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^{2x}$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 14 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{2}{e^{2x}+1}+x+1$

احسب $I=\int_0^1 f(x)dx$

الحل :

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{2}{e^{2x}+1}+x+1\,dx$$
$$=\int_0^1 \frac{-2e^{2x}+2e^{2x}+2}{e^{2x}+1}+x+1\,dx$$
$$=\int_0^1\left(-\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)+2\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+1}\right)+x+1\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(-\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)+x+3\right)dx$$
$$=\left[-ln(e^{2x}+1)+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1$$
$$=\left(-ln(e^2+1)+\frac{1}{2}+3\right)-\left(-ln(1+1)+0+0\right)$$
$$=-ln(e^2+1)+\frac{7}{2}+ln(2)=\frac{7}{2}+ln\frac{2}{e^2+1}$$

طريقة ثانية :

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{2}{e^{2x}+1}+x+1\,dx=\int_0^1\left(-\left(\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)+x+1\right)dx$$
$$=\left[-ln(1+e^{-2x})+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1$$
$$=\left(-ln(e^{-2}+1)+\frac{1}{2}+1\right)-\left(-ln(1+1)+0+0\right)$$
$$=-ln(e^{-2}+1)+\frac{3}{2}+ln(2)=\frac{3}{2}+ln\frac{2}{e^{-2}+1}=\frac{3}{2}+ln\frac{2e^2}{1+e^2}$$
$$=\frac{3}{2}+2+ln\frac{2}{1+e^2}=\frac{7}{2}+ln\frac{2}{e^2+1}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 15 :

ليكن التابع f المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$

❶ جد الأعداد a,b,c التي تحقق $f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ أياً يكن x من D .

❷ احسب $J=\int_{-3}^{0}f(x)\,dx$

الحل :

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

نفرض: $x-1=t$

$$f(x)=\frac{(t+1)^2}{t^2}=\frac{t^2+2t+1}{t^2}=1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$a=1,\quad b=2,\quad c=1$$

$$J=\int_{-3}^{0}f(x)dx=\int_{-3}^{0}1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$=\left[x+2ln(1-x)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0}=(0+2(0)+1)-\left(-3+2ln4+\frac{1}{4}\right)$$

$$=1+3+2ln4+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}-2ln4$$

التمرين 16 : النموذج الوزاري الثاني

ليكن f التابع المعرّف على $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2-5x+1}{x+1}$

❶ جد الأعداد a و b و c التي تحقّق: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ ، أيّاً كان x من D

❷ احسب: $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

الحل :

❶ بالقسمة الاقليديّة نجد $f(x)=x-6+\frac{7}{x+1}$

أي $a=1$ و $b=-6$ و $c=7$

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+1 & x+1 \\ \hline x^2+x & x-6 \\ \hline -6x+1 & \\ -6x-6 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

❷

$$I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left[x-6+\frac{7}{x+1}\right]dx=\left[\frac{1}{2}x^2-6x+7\,ln(x+1)\right]_0^2$$

$$=(2-12+7ln3)-(0)=7ln3-10$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 17 : دورة 2017 الثانية , النموذج الوزاري الرابع

ليكن C لخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$

❶ اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$

❷ عيّن قيمة كلاً من a و b ثمّ أثبت أنّ المستقيم $y=ax+b$ مقارب في جوار $+\infty$.

❸ احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

الحل :

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

بالقسمة الأقليدية نجد: $f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$

لدينا المستقيم $y=x-1$ وبالتالي $f(x)-y=\frac{1}{x+3}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0$$

فالمستقيم $y=x-1$ مقارب مائل ل C بجوار $+\infty$

التكامل: $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+3}\right)dx$

وباعتبار $x\in[0,2]$ كانت $x+3>0$

يعطي $I=\left[\frac{1}{2}x^2-x+ln(x+3)\right]_0^2=[2-2+ln5]-[ln3]=ln\frac{5}{3}$

التمرين 18 :

أثبت أن $\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$ واستنتج قيمة $J=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$.

الحل :

بتوحيد المقامات :

$$1-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x+1-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}\Rightarrow J=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$=[x-ln(e^x+1)]_0^1=\big(1-ln(e+1)\big)+(ln2)=1+ln2-ln(e+1)$$

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

التمرين 19 : دورة 2018 الأولى

ليكن $J=\int_0^{ln2}\frac{e^x}{e^x+2}dx$, $I=\int_0^{ln2}\frac{2}{e^x+2}dx$ والمطلوب :

❶ احسب J

❷ احسب $I+J$ ثم استنتج I

الحل :

❶ $J=\int_0^{ln2}\frac{e^x}{e^x+2}dx=[ln(e^x+2)]_0^{ln2}=ln4-ln3=ln\frac{4}{3}$

❷ $I+J=\int_0^{ln2}\frac{2+e^x}{e^x+2}dx=\int_0^{ln2}dx=[x]_0^{ln2}=ln2$

ونستنتج أن $I=ln2-J=ln2-ln\frac{4}{3}=ln\frac{3}{2}$

التمرين 20 :

نريد حساب $I=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$. احسب $J=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$ ثم $I+J$, واستنتج I .

الحل :

$$J=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}=\left[\frac{1}{2}ln1+x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}ln2-\frac{1}{2}ln1=\frac{1}{2}ln2$$

$$I+J=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^3+x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$I+J=\frac{1}{2}\Rightarrow I=\frac{1}{2}-J\Rightarrow I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ln2=\frac{1}{2}(1-ln2)$$

التمرين 21 :

نريد حساب $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$. احسب $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ثم $I+J$ واستنتج I .

الحل :

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{1+2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}ln3-\frac{1}{2}ln1=\frac{1}{2}ln3$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin 2x}{1+2\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+2\sin x\cos x}{1+2\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,(1+2\sin x)}{1+2\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$$

$$I+J=1\Rightarrow I=1-J\Rightarrow I=1-\frac{1}{2}ln3$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 22 : النموذج الوزاري الأول

أثبت صحّة المساواة $cos^2x.\,sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x$ ثمّ احسب
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x\, sin^2 x\, dx$

الحل:

$$cos^2x.\,sin^2 x = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2}{4} \times \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2}{-4}$$

$$= \frac{\left[\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^2}{-16} = \frac{\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2}{-16} = \frac{-2+e^{i4x}+e^{-i4x}}{-16} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x\, sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x\right) dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0)\right] = \frac{\pi}{16}$$

التمرين 23 :

باستعمال صيغتي $\sin^2 a$, $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$ أو بأي طريقة تراها مناسبة

❶ اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$, $\cos 4x$

❷ احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x\, dx$ ..

الحل :

$$sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,2x \Rightarrow sin^4x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}cos\,2x + \frac{1}{4}cos^2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}cos\,2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,4x\right) =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos\,2x + \frac{1}{8}cos\,4x$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$= \left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\sin 0 + \frac{1}{32}\sin 0\right)$$

$$\frac{3\pi}{64} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{32} = \frac{3\pi + 2}{64} - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

التمرين 24 :

G, F **تابعان أصليان للتابعين** $f: x \longmapsto \cos(\ln x)$, $g: x \longmapsto \sin(\ln x)$

على $]0, +\infty[$ **ينعدمان عند** $x = 1$. **انطلاقاً من الصيغتين**

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\, dt \qquad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\, dt$$

❶ **أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أنَّ :**

$$F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \quad , \quad G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$$

❷ **استنتج عبارتي** $F(x), G(x)$.

الحل :

$$F(x) = \int_1^x \cos(lnt)\, dt$$

$$u = \cos(lnt) \qquad u' = -\frac{1}{t}\sin(lnt)$$

$$v' = 1 \qquad v = t$$

$$F(x) = [t\cos(lnt)]_1^x - \int_1^x t\left(\frac{-1}{t}\right)\sin lnt\, dt$$

$$= [t\cos(lnt)]_1^x + \int_1^x \sin(lnt)\, dt$$

$$F(x) = x\cos(lnx) - 1 + G(x) \text{ ❶}$$

بالمثل نجد : $G(x) = \int_1^x \sin(lnt)\, dt$

$$u = \sin(lnt) \qquad u' = \frac{1}{t}\cos(lnt)$$

$$v' = 1 \qquad v = t$$

$$G(x) = [t\sin(lnt)]_1^x - \int_1^x t.\frac{1}{t}\cos lntdt = x\sin(lnx) - 0 - \int_1^x \cos(lnt)\, dt$$

$$G(x) = x\sin(lnx) - F(x) \text{ ❷}$$

من ❶ نجد : $F(x) = x\cos(lnx) - 1 + G(x)$

من ❷ نجد : $F(x) = x\sin(lnx) - G(x)$

$$2F(x) = x\cos(lnx) + x\sin(lnx) - 1$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}x\cos(lnx) + \frac{1}{2}x\sin(lnx) - \frac{1}{2}$$

نعوض في ❶ فنحصل $G(x) = x\sin(lnx) - F(x)$

$$G(x) = x\sin(lnx) - \frac{1}{2}x\sin(lnx) - \frac{1}{2}x\cos(lnx) + \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}x\sin(lnx) - \frac{1}{2}x\cos(lnx) + \frac{1}{2}$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 25 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{2x} \cos x$

❶ **احسب** $f'(x), f''(x)$.

❷ **عيّن عددين** b, a **يحققان المساواة** $f(x) = af'(x) + b\,f''(x)$ **أياً كان** x

❸ **استنتج تابعاً أصلياً** F **للتابع** f **على** $\mathbb{R}$.

الحل :

$$f'(x) = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = 2e^{2x}(2 \cos x - \sin x) + e^{2x}(-2 \sin x - \cos x)$$

$$= e^{2x}(4 \cos x - 2 \sin x - 2 \sin x - \cos x) = e^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x)$$

لتعيين a, b

$$f(x) = af'(x) + bf''(x)$$

$$e^{2x} \cos x = ae^{2x}(2 \cos x - \sin x) + be^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x)$$

$$e^{2x} \cos x = e^{2x}[(2a + 3b \cos x) + (-a - 4b) \sin x]$$

بالمطابقة :

$$2a + 3b = 1 \quad ❶$$

$$-a - 4b = 0 \quad ❷$$

من ❷ نجد $1 = -8b + 3b \Rightarrow b = -\frac{1}{5} \Rightarrow a = \frac{4}{5}$ **لإيجاد التابع الأصلي للتابع** f

$$f(x) = \frac{4}{5}f'(x) - \frac{1}{5}f''(x) \Rightarrow F(x) = \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x)$$

$$= \frac{4}{5}e^{2x} \cos x - \frac{1}{5}e^{2x}(2 \cos x - \sin x) = e^{2x}\left(\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right)$$

التمرين 26 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sin^4 x$

❶ احسب $f'(x), f''(x)$ واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 4x$.

❷ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل:

$$f'(x) = 4\cos x \sin^3 x$$

$$f''(x) = 4(-\sin x \sin^3 x + 3\sin^2 x \cos x \cos x) \quad = 4(-\sin^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x)$$

$$= -4\sin^4 x + 3(2\sin x \cos x)^2 = -4\sin^4 x + 3\sin^2 2x$$

$$= -4\sin^4 x + 3(1-\cos^2 2x) = -4\sin^4 x + 3 - 3\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$f''(x) = -4\sin^4 x + 3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x = -4\sin^4 x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x$$

$$-f''(x) = +4\sin^4 x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 4x$$

$$f(x) = \sin^4 x = \frac{1}{4}\left(-f''(x) + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4x\right)$$

استنتاج التابع الأصلي

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(-f'^{(x)} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x\sin 4x\right) \quad = \frac{1}{4}\left(-4\cos x\sin^3 x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}\sin 4x\right)$$

$$F(x) = -\cos x \sin^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x$$

التمرين 27 :

إثبات متراجحة

❶ تيقن أنه بحالة $0 < x < a$ يكون $\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{1+x} \le 1$.

❷ استنتج أن $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$ في حالة $a > 0$.

الحل :

من الفرض $0 \le x \le a$

$$1 \le x+1 \le a+1$$

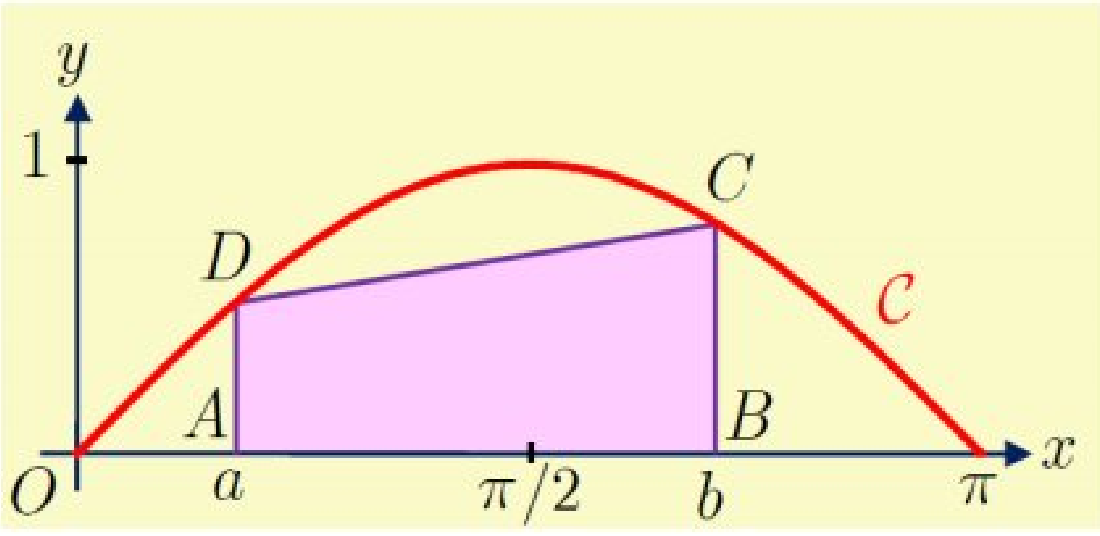
$$1 \ge \frac{1}{x+1} \ge \frac{1}{a+1} \quad ❶$$

❷ نكامل الطرفين في العلاقة

$$\int_0^a \frac{1}{1+a}dx \le \int_0^a \frac{1}{x+1}dx \le \int_0^a 1dx$$

$$\left[\frac{x}{1+a}\right]_0^a \le [\ln(1+x)]_0^a \le [x]_0^a \Rightarrow \frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$$

التمرين 28 :



نفترض أن b, a عددان حقيقيان و أنَّ $0 \le a < b \le \pi$

أثبت صحة المتراجحة $\cos a - \cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$

$$S = \int_a^b \sin t \, dt = [-\cos t]_a^b = -\cos b + \cos a$$

$$= \cos a - \cos b$$

وهي مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع $f(t) = \sin t$ مع xx' والمستقيمين

$x = a, x = b$ وأن هذه المساحة أكبر من مساحة شبه المنحرف $ABCD$

نحسب مساحتها

$$S_1 = \frac{AD + BC}{2} \times AB = \frac{\sin a + \sin b}{2}(b-a)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\sin a + \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

$$\ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

$\sin a \ge 0$ لأن $0 < a < \pi$ ، $b - a > 0,$ لأن $b > a$

أي $S \ge 0$ إذاً

$$\cos a - \cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

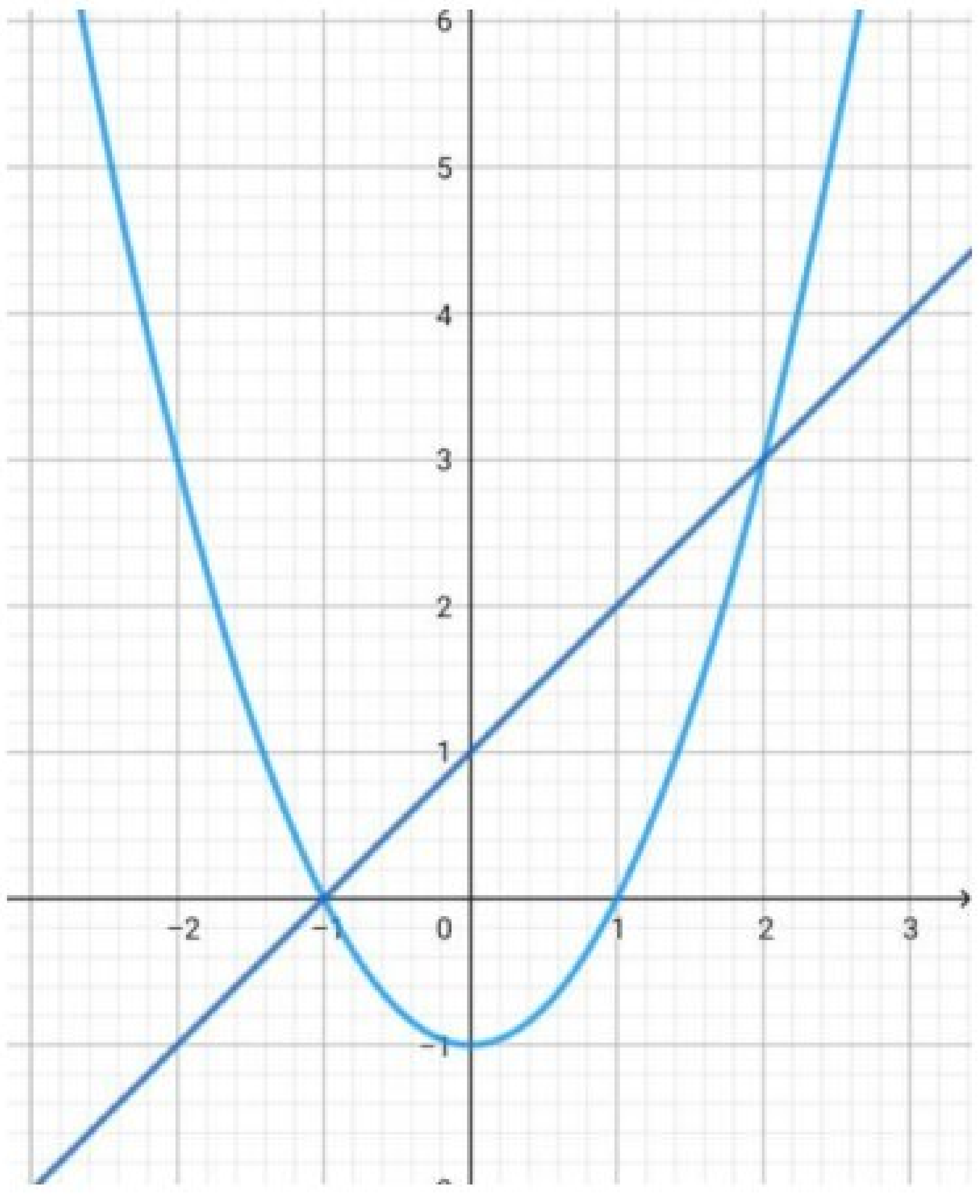
وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 29 :

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^2 - 1$

والمستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$

والمطلوب :



❶ جد مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$

❷ جد مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

❸ جد مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$

❹ جد مساحة السطح المحصور بين C و والمستقيم Δ

الحل :

❶ $S = \int_1^2 f(x)\ dx = \int_1^2 (x^2 - 1)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{7}{3} - 1$

❷ $S = \int_0^1 -f(x)\ dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\ dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x\right]_0^1 = \left(\frac{-1}{3} + 1\right) - (0) = \frac{2}{3}$

❸ $S = \int_0^2 f(x)\ dx = \int_0^1 -f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\ dx$

$$S = \left[\frac{-x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{7}{3} - 1 + \frac{2}{3} = 2$$

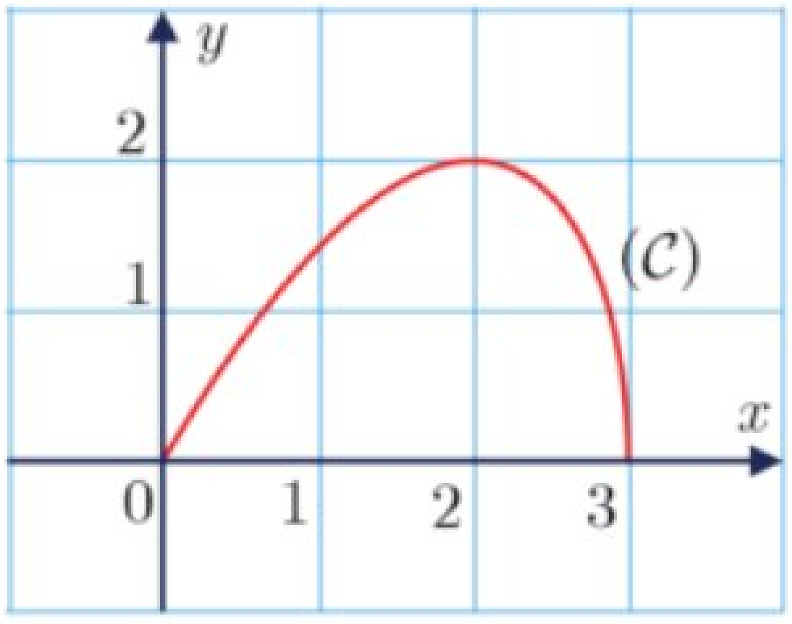
❹ يتقاطع الخطين C و Δ في النقطتين اللتين فاصلتيهما $x = -1\,,\ x = 2$

$$S = \int_{-1}^{2} (y_\Delta - f(x))\ dx = \int_{-1}^{2} (x + 1 - x^2 + 1)\ dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\ dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{-8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{-16 + 48 - 2 - 3}{6} = \frac{27}{6}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 30 : الاختبار 3



في الشكل المجاور (C) هو الخط البياني للتابع f

المعرّف على المجال $[0,3]$ بالصيغة: $f(x) = x\sqrt{3-x}$

عندما يدور (C) دورة كاملة حول محور الفواصل

يولّد مجسّماً دورانيّاً $\mathcal{S}$

❶ ما طبيعة مقطع هذا المجسّم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل

ويمر بالنقطة $I(x,0)$ في حالة $x \in]0,3[$ ؟

❷ عيّن $\mathcal{A}(x)$ ، مساحة هذا المقطع بدلالة x ثمّ استنتج $\mathcal{V}$ حجم المجسّم $\mathcal{S}$

الحل :

❶ إنّ مقطع هذا المجسّم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$

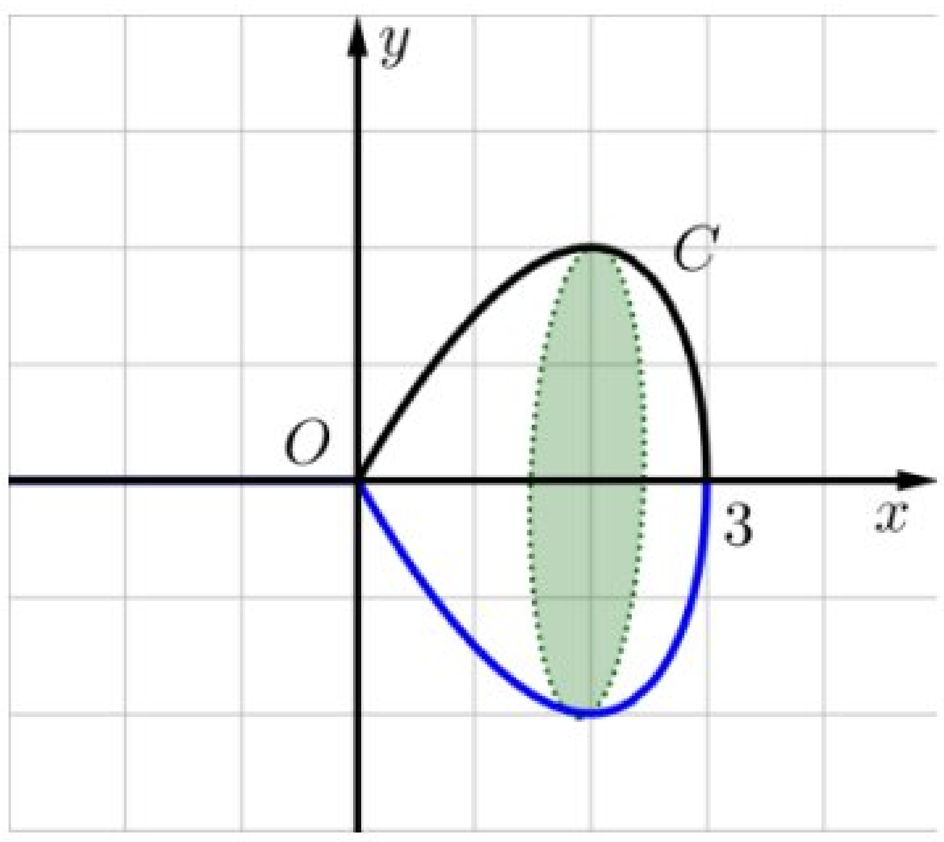
هو دائرة مركزها النقطة I ونصف قطرها $f(x)$.

❷ حساب المساحة:

$$A = \pi f^2(x) = (3x^2 - x^3)$$

$$V = \int_0^3 \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx = \pi \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3$$

$$= \pi\left(27 - \frac{81}{4} - 0\right) = \frac{27}{4}\pi$$



وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 31 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

❶ أوجد عددين حقيقيّن a و b يُحقّقان : $f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$

❷ بالاستفادة ممّا سبق ، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n\geq 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.
ثم أوجد المشتق من المرتبة السادسة

❸ ادرس تغيّرات f على $\mathbb{R}$ ونظم جدولا بها

❹ ارسم الخط البياني C ومقارباته واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومقاربه الأفقي والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

الحل:

❶
$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\quad ,\quad f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}=\frac{ax+a+bx-b}{(x-1)(x+1)}\Longrightarrow (a+b)x+a-b=2x$$

$$a+b=2\quad ,\qquad a-b=0$$

بحل جملة المعادلتين نجد : $a=1\ ,\ b=1$ ***وبالتالي :*** $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

❷

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x+1)^2}\ ,f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x+1)^3}\ ,$$
$$f'''(x)=\frac{-6}{(x-1)^4}+\frac{-6}{(x+1)^4}$$

نستنتج أنّ :

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{(n+1)}}+\frac{(-1)^n.n!}{(x+1)^{(n+1)}}$$

نبرهن بالتدريج أنّ :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x-1)^{(n+2)}}+\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x+1)^{(n+2)}}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'$$
$$=\frac{(-1)(n+1)(x-1)^n(-1)^n.n!}{(x-1)^{(2n+2)}}+\frac{(-1)(n+1)(x+1)^n(-1)^n.n!}{(x+1)^{(2n+2)}}$$
$$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'=\frac{(-1)(-1)^n(n+1)n!}{(x-1)^{(n+2)}}+\frac{(-1)(-1)^n(n+1)n!}{(x+1)^{(n+2)}}\Longrightarrow$$
$$f^{(n+1)}(x)\ =\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x-1)^{(n+2)}}+\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x+1)^{(n+2)}}$$

محقّقة من أجل فهي صحيحة أيّاً كان العدد الطبيعي n.

$$f^{(6)}(x)=\frac{(-1)^6.6!}{(x-1)^7}+\frac{(-1)^6.6!}{(x+1)^7}=\frac{720}{(x-1)^7}+\frac{720}{(x+1)^7}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

❸

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$$

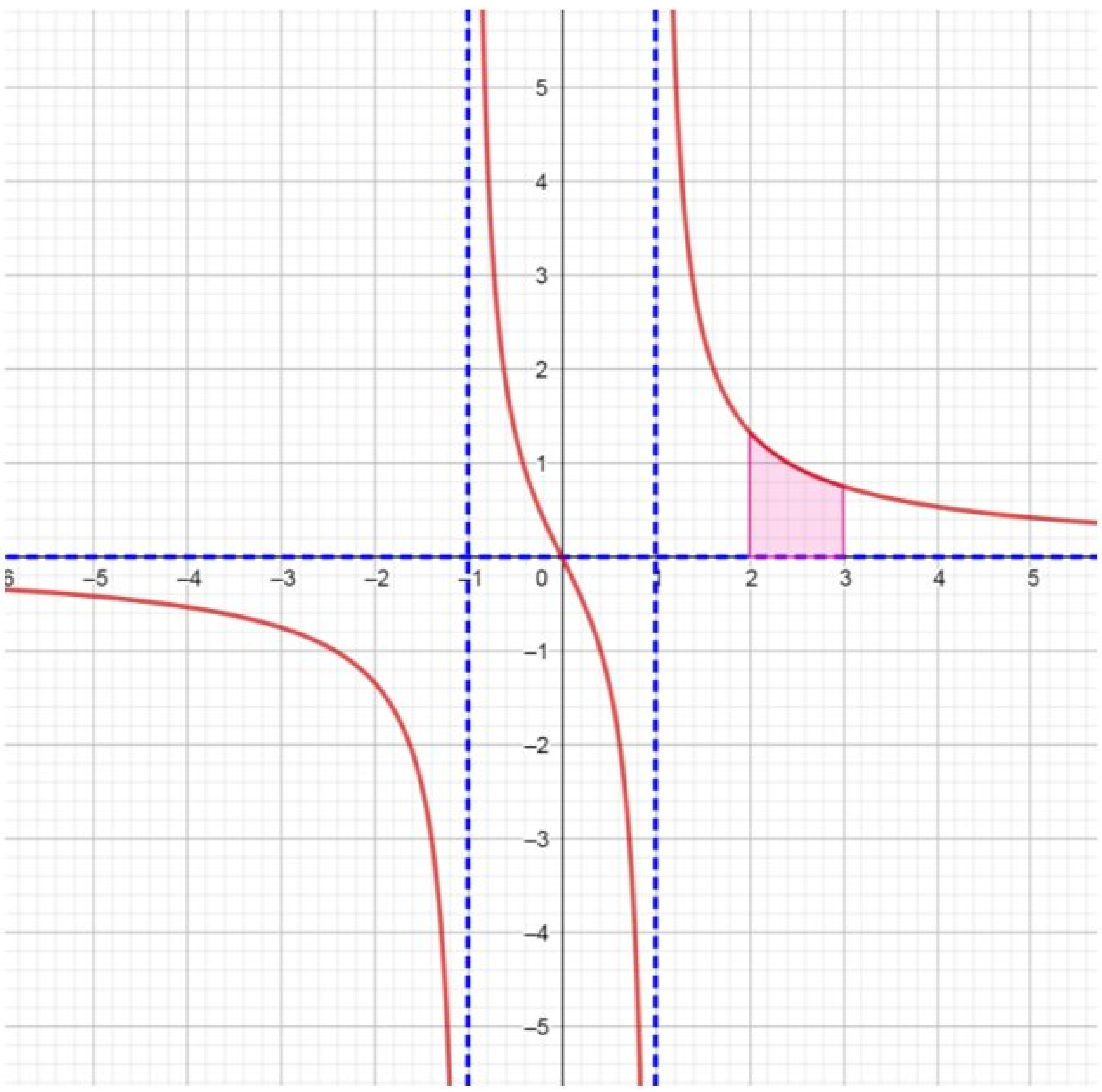
$$f'(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2}{(x^2-1)^2} < 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	

❹

$$S = \int_2^3 f(x)\ dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = [ln(x-1) + ln(x+1)]_2^3$$

$$= \big(ln(2) + ln(4)\big) - \big(ln(1) + ln(3)\big) = 3ln2 - ln3$$



التمرين 32 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{x}{2}+2\sin x$ والمطلوب :

❶ **ادرس سلوك التابع f عند $+\infty$**

❷ **أوجد قيمة تقريبية للعدد $f(1000)$**

❸ **بيّن أنّ التابع f فردي، وأذكر الصفة التناظرية لخطه البياني C**

❹ **جد تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$**

الحل :

❶ **مهما كانت $x\in\mathbb{R}$ كان :**

$$-1\le sin\,x\le 1\Rightarrow -2\le 2\,sin\,x\le 2\Rightarrow \frac{x}{2}-2\le\frac{x}{2}+2\,sin\,x\le\frac{x}{2}+2$$

$$\frac{x}{2}-2\le f(x)\le\frac{x}{2}+2$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}-2\right)=+\infty$ **حسب المبرهنة** 3 **نستنتج أن** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

والخط البياني محدد بالمستقيمين $y=\frac{x}{2}-2$ **و** $y=\frac{x}{2}+2$

❷ **إن $\frac{x}{2}$ هي قيمة تقريبية للعدد بخطأ يساوي 2 زيادة أو نقصان**

$$\frac{1000}{2}-2\le f(1000)\le\frac{1000}{2}+2\Rightarrow 498\le f(1000)\le 502$$

❸ **مهما تكن $x\in R$ فإن $-x\in R$ فالشرط الأول محقق**

$$f(-x)=\frac{-x}{2}+2\sin -x=-\left(\frac{x}{2}+2\sin x\right)=-f(x).$$

فالشرط الثاني محقق والتابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

❹ $$f(x)=\frac{x}{2}+2\sin x\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{4}-2\cos x$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 33 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = e^{-2x} + e^{-x} - 2$

❶ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف وعين معادلة المقارب الأفقي

❷ أدرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه

❸ ادرس تغيّرات f على $\mathbb{R}$ ونظم جدولا بها

❹ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ وأوجد هذا الحل جبريا

❺ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومقاربه الأفقي والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

الحل :

❶
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{-2x} + e^{-x} - 2) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{-2x} + e^{-x} - 2) = 0 + 0 - 2 = -2$$

$y = -2$ مقارب افقي للخط C في جوار $+\infty$

❷ $f(x) - (-2) = e^{-2x} + e^{-x} - 2 + 2 = e^{-2x} + e^{-x} > 0$

والخط C يقع فوق المقارب الافقي على $\mathbb{R}$

❸ $f'(x) = -2e^{-2x} - e^{-x} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2

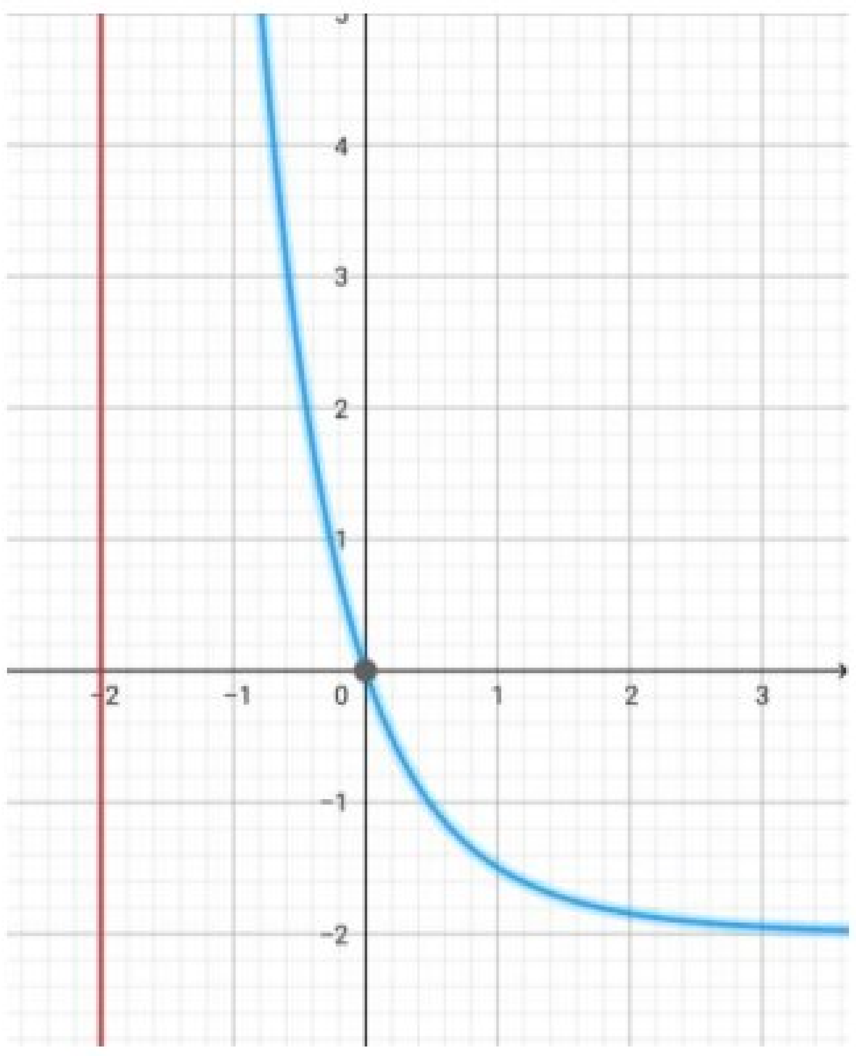
❹ التابع f مستمر ومتناقص تماما على $]-\infty, +\infty[$ و $0 \in]-2, +\infty[= f(]-\infty, +\infty[)$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $a \in]-\infty, +\infty[$

$$e^{-2x} + e^{-x} - 2 = 0 \Rightarrow (e^{-x} + 2)(e^{-x} - 1) = 0 \Rightarrow$$

$e^{-x} + 2 = 0 \Rightarrow e^{-x} = -2 < 0$ مستحيلة

$$e^{-x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-x} = +1 \Rightarrow x = 0$$



$$S = \int_0^1 (f(x) - (-2))\, dx$$
$$= \int_0^1 (e^{-2x} + e^{-x})\, dx = \left[\frac{-1}{2} e^{-2x} - e^{-x}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{-1}{2} e^{-2} - e^{-1}\right) - \left(\frac{-1}{2} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{-1}{2e^2} - \frac{1}{e}\right) + \frac{3}{2} = \frac{-1 - 2e + 6e^2}{2e^2}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 34 :

ليكن C لخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = lnx$

❶ أوجد معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة فاصلتها $x = e^2$

❷ أثبت أن C يقع تحت جميع مماساته

❸ ليكن التابع g المعرّف على $]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = \frac{x}{e^2} + 1 - lnx$

ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها

❹ أثبت أن $G(x) = \frac{x^2}{2e^2} + 2x - xlnx$ هو تابع أصلي للتابع g

❺ احسب مساحة السطح المحصور بين C و T والمستقيمين $x = e$ و $x = e^2$

الحل :

❶ $f(x) = lnx \implies f'(x) = \frac{1}{x}$

$$x = e^2 \implies f(e^2) = lne^2 = 2 \implies f'(e^2) = \frac{1}{e^2} \implies$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2) \implies y = \frac{1}{e^2}x + 1$$

❷ معادلة T المماس للخط البياني للتابع الاشتقاقي في أي نقطة a هي :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \implies y = lna + \frac{1}{a}(x - a) \implies y = \frac{1}{a}x - 1 + lna$$

لدراسة الوضع النسبي بين و مماسه في النقطة a ندرس اشارة المقدار

$$h(x) = f(x) - y_T = lnx - \frac{1}{a}x + 1 - lna$$

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{ax}$ اشارة $h'(x)$ من اشارة $a - x$

$$h'(x) = 0 \implies a - x = 0 \implies x = a \implies h(a) = lna - 1 + 1 - lna = 0$$

x	0		a		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	↗	0	↘	

نستنتج من جدول الاطراد أن :

$h(x) < 0$ على المجال $]0 , +\infty[$ و لا ينعدم الا عند $x = a$

بالتالي الخط C يقع تحت المماس له في النقطة التي فاصلتها $x = a$

بالتالي نستنتج ان الخط C يقع تحت جميع مماساته

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038 | زياد داوود — سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183 | مروان بجور — حمص 0930170828

❸ $$g(x) = \frac{x}{e^2} + 1 - lnx$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{e^2} + 1 - lnx\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{e^2} + 1 - lnx\right) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}\right) = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{x} = \frac{x - e^2}{e^2 x}$$

اشارة $g'(x)$ **من اشارة** $x - e^2$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x - e^2 = 0 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow g(e^2) = 0$$

$$x = \frac{e}{\sqrt{2}} \Rightarrow g\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{e^2}{2}}{e^2} + 1 - ln\frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + 1 - 1 + \frac{1}{2}ln2 \Rightarrow g\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+ln2}{2}$$

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

❹ $x \mapsto \frac{x^2}{2e^2} + 2x$ **اشتقاقي على** $]0, +\infty[$ **و** $x \mapsto xlnx$ **اشتقاقي على** $]0, +\infty[$

بالتالي مجموعهما أي $G(x) = \frac{x^2}{2e^2} + 2x - xlnx$ **اشتقاقي على** $]0, +\infty[$

$$G'(x) = \frac{2x^2}{2e^2} + 2 - (lnx + 1) = \frac{x^2}{e^2} + 1 - lnx = g(x)$$

بالتالي G **هو تابع أصلي للتابع** g

❺ $$S = \int_e^{e^2}(y_T - f(x))\,dx = \int_e^{e^2}\left(\frac{x}{e^2} + 1 - lnx\right)dx = \int_e^{e^2} g(x)\,dx = [G(x)]_e^{e^2}$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2e^2} + 2x - xlnx\right]_e^{e^2} = \left(\frac{e^2}{2} + 2e^2 - 2e^2\right) - \left(\frac{1}{2} + 2e - e\right) = \frac{e^2 - 2e - 1}{2}$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038 | زياد داوود — سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183 | مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 35 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

أولا :

❶ بيّن أنّ التابع f فردي، وأذكر الصفة التناظرية لخطه البياني C

❷ ادرس تغيّرات f على $\mathbb{R}$

❸ اكتب معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي بين C و d

❹ ارسم C و d في معلم واحد

❺ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ مهما كانت $m \in \mathbb{R}$

ثم أثبت أنّ $\alpha = ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right)$

ثانيا :

ليكن C_1 الجزء من الخط البياني للتابع f المرسوم في المجال $[0 \,, \ln 2]$

❶ أحسب مساحة السطح المحدد بـ C_1 و xx' والمستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$

❷ يدور C_1 حول xx' دورة كاملة مولدا مجسما دورانيا حجمه $\mathcal{V}$

① ما طبيعة مقطع المجسم بمستو عمودي على محور الفواصل في النقطة $I(x,0)$ حيث $0 \le x \le \ln 2$

② جد مساحة هذا المقطع $\mathcal{A}(x)$ و استنتج حجم المجسم $\mathcal{V}$

الحل :

أولا :

❶ $\forall x \in \mathbb{R} \iff -x \in \mathbb{R} \,,\; f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$

والتابع فردي، وخطّه البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الاحداثيات

❷ $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad D =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty \;,\; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = +\infty \,, f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \;,\; f'(0) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \;\Longrightarrow T: y = x$

$$g(x) = f(x) - y_T = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \frac{1}{2}(e^x - 2 + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 \ge 0$$

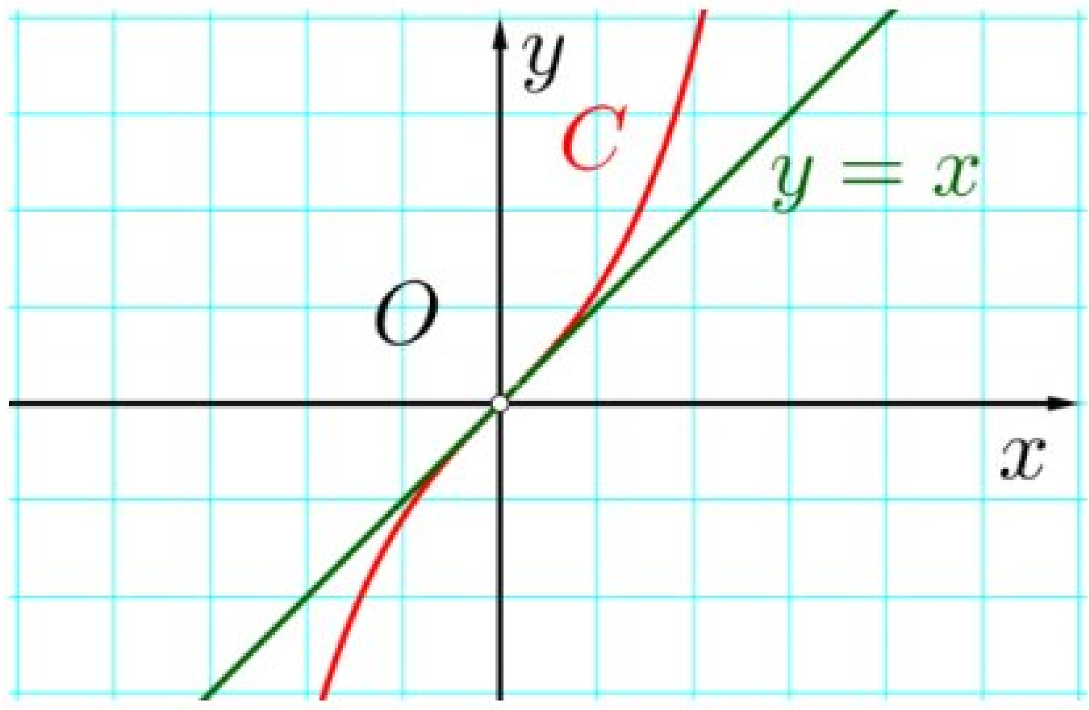
$$g'(x) = 0 \Longrightarrow e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \qquad \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

عندما $x < 0$ فإنّ $g(x) < 0$ والمنحني C تحت المماس

و عندما $x > 0$ فإنّ $g(x) > 0$ والمنحني C فوق المماس

❹ الرسم



❺ التابع مستمر و متزايد تماماً على $]-\infty,+\infty[$ و $m \in]-\infty,+\infty[= f(]-\infty,+\infty[)$

بالتالي للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيداً α في $\mathbb{R}$ مهما كانت $m \in \mathbb{R}$

$$b.\quad f(x) = m \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$$

$$e^x - e^{-x} = 2m \quad \Longrightarrow \quad e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 + 4 = 4(m^2+1) > 0$$

$$e^x = \frac{2m + 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m + \sqrt{m^2+1} \Longrightarrow x = ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$$

$$e^x = \frac{2m - 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m - \sqrt{m^2+1} < 0$$ مستحيلة

ثانيا :

❶ $$S = \int_0^{ln2} f(x)\ dx = \int_0^{ln2} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\ dx = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}]_0^{ln2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(2 + \frac{1}{2}\right) - (1+1)\right) = 1$$

❷ ① مقطع المجسم بمستو عمودي على محور الفواصل في النقطة $I(x,0)$:

هو دائرة مركزها النقطة I ونصف قطرها $f(x)$

② مساحة هذا المقطع هي :

$$A(x) = \pi\big(f(x)\big)^2 = \frac{\pi}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{\pi}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

$$V(x) = \int_0^{ln2} \pi\big(f(x)\big)^2\, dx = \int_0^{ln2} \frac{\pi}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})\, dx \Longrightarrow$$

$$V(x) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{ln2} = \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{1}{2}(4) - 2ln2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right) - \left(\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{32}(16 - 16ln2 - 1) = \frac{\pi}{32}(15 - 16ln2)$$

التمرين 36 : (إضافي)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1 + lnx}{x}$$

❶ احسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط C ؟

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها.

❸ اكتب معادلة المماس T المار بالمبدأ للخط البياني C ، ثم ارسم الخط C . والمماس T

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$

الحل

❶ *حساب النهايات:*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + lnx}{x} = -\infty$$

$x = 0$ *مستقيم مقارب منطبق على* yy' .

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + lnx}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right] = 0 + 0 = 0$$

$y = 0$ *مستقيم مقارب منطبق على* xx' *في جوار* $+\infty$.

❷ *دراسة التغيّرات*

$$f'(x) = \frac{1 - 1 - lnx}{x^2} = \frac{-lnx}{x^2}$$

إشارة f *من إشارة* $-lnx$ *الذي ينعدم عندما* $x = 1$ *ويكون* $f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

❸ *بفرض* $A(a, b)$ *وبالتالي* $A\left(a, \frac{1+lna}{a}\right)$ *تكون معادلة المماس:*

$$y = \frac{-lna}{a^2}(x - a) + \frac{1 + lna}{a}$$

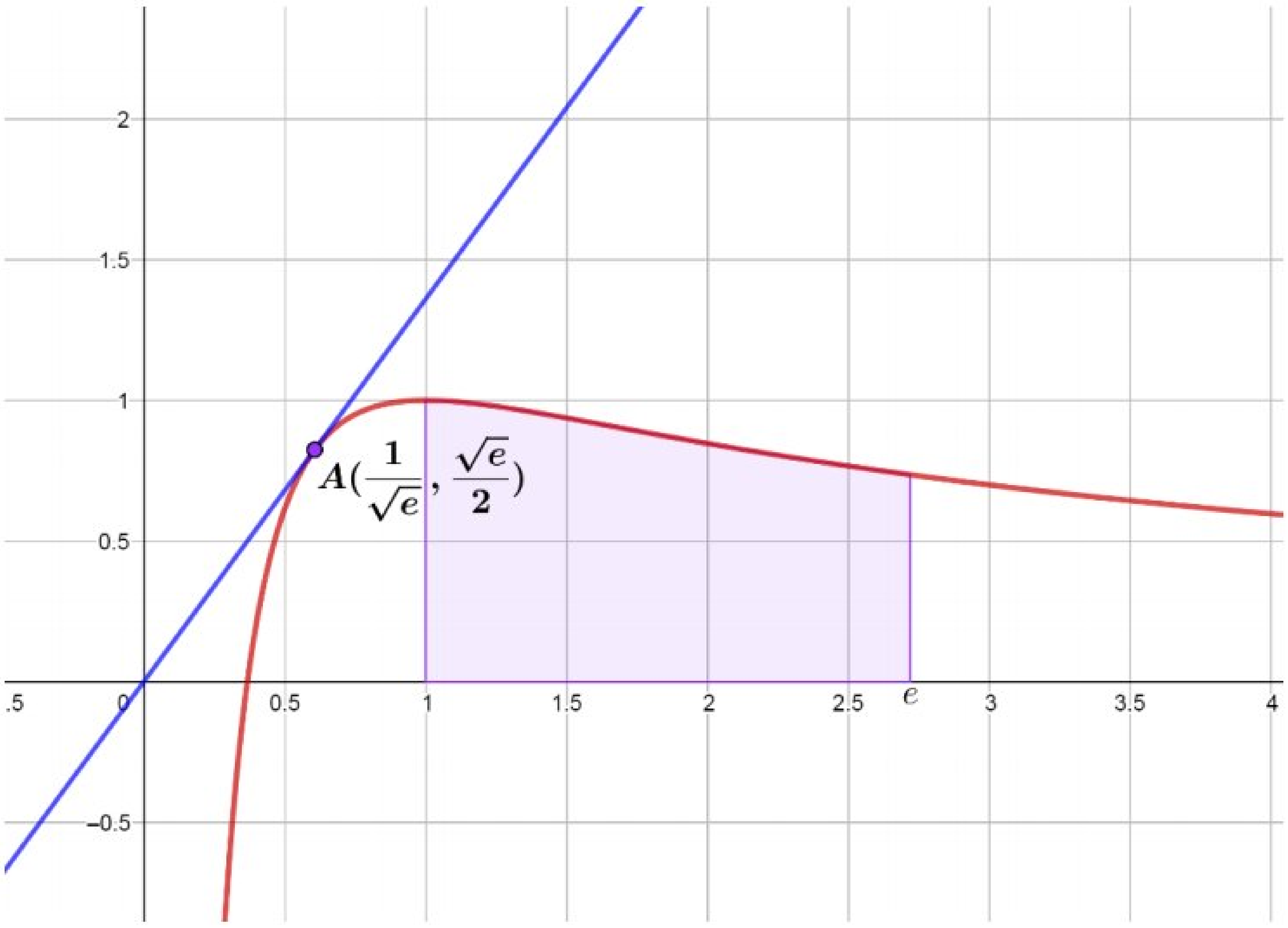
وبما أنّ المماس يمر من المبدأ فإنّ:

$$0 = \frac{lna}{a} + \frac{1 + lna}{a} = \frac{1 + 2lna}{a}$$

$$1 + 2lna = 0 \quad \Rightarrow \quad lna = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ a = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

وتكون معادلة المماس المطلوب

$$y = \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}x$$



$$S = \int_{1}^{e} f(x)\ dx = \int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} lnx\right)\ dx = \left[lnx + \frac{1}{2} ln^2(x)\right]_1^e$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{3}{2}$$