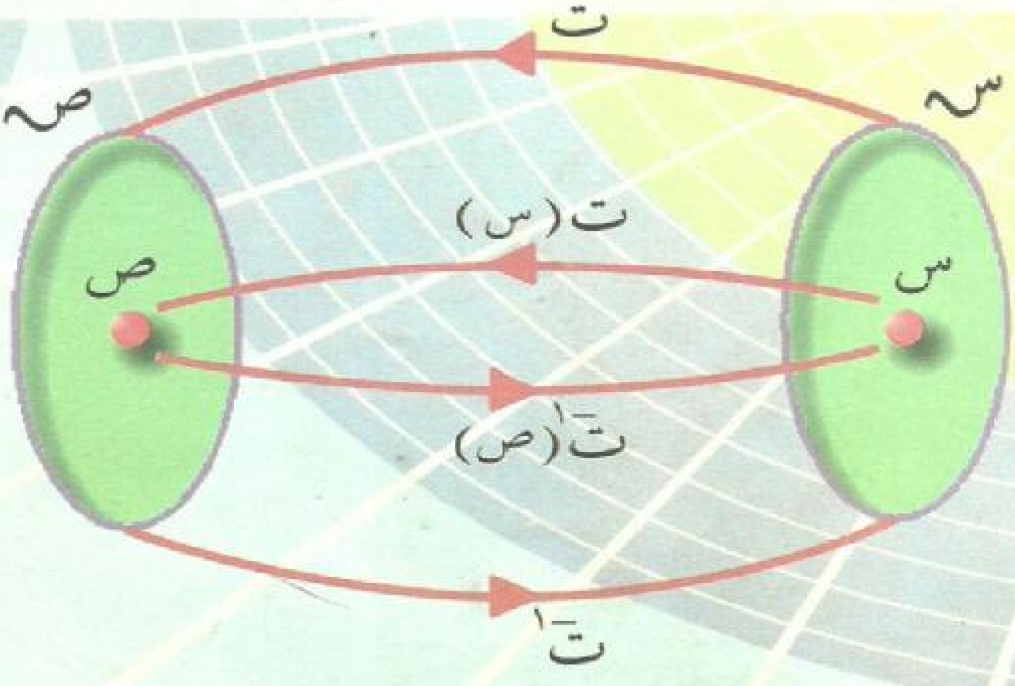
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الأول الثانوي



١٤٢٣هـ - ٢٠٠٣م

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الآله علي حمد الحوري
د. عوض حسين البكري
د. محمد رشاد الكوري
د. محمد حسن عبده المسوري
د. عبدالله سالم بن شحنة
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري
د. علي شاهر القرشي
أ. مريم عبدالجبار سلمان

أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً)
أ. محمد علي مرشد
أ. يحيى بكار مصعفر
أ. عبدالباري طه حيدر
أ. نعصر محمد بدر
أ. جميلة إبراهيم الرازحي
أ. عادل علي مقبل البنا
أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان

أ. يحيى محمد الكنز

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. فضل علي أبو غانم

أ. د. عبد العزيز صالح بن حبتور

أ. د. محمد عبدالله الصوفي

أ. عبد الكريم محمد الجنداري

د. إبراهيم محمد الحوثي

أ. محمد هاشم الشهاري

د. صالح ناصر الصوفي

أ. جميل علي الخالدي

أ.د. محمد عبدالباري القدسي

أ. حسن صالح باعوم

الإخراج الفني

الصف الطباعي والرسم والتصميم : علي عبد الله السلفي

أشرف على التصميم : هاني مقطش

قرّرَتْ اللجنة العليا للمناهج في اجتماعها رقم (٤١)، وتاريخ ١/٩/٢٠٠٢م طباعة هذا الدليل وتوزيعه للعام الدراسي ٢٠٠٢ / ٢٠٠٣م .

الطبعة الأولى التجريبية

للعام الدراسي ١٤٢٣هـ - ١٤٢٤هـ / ٢٠٠٢م - ٢٠٠٣م .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

لأن التطوير كلٌ لا يتجزأ .. كان لا بد من أن تخضع المناهج التعليمية الحديثة - في طرق تدريسها - إلى مرجعية واحدة موحدة ، بدلاً من بقائها خاضعة لمنطق تعددية الاجتهادات وتباينها ، ولما تستوجبه ضرورات تطوير سبل التواصل بين طرفي العملية التدريسية ، بحيث تعم الفائدة على المعلم والطالب في آن معاً .. كان لا بد من أن يكون هناك دليل مصاحب لكل كتاب مدرسي حتى يتحقق هدف اكتمال التطوير في هذا الجانب.

وفي مثل هذه الخطوة ما يشكل قدراً كبيراً من التوافق بين ما نستخدمه من أساليب وما نبتغيه من غايات، حتى ولو كان ذلك على مستوى واحدة من مفردات العملية التعليمية التي نسعى إلى الارتقاء بسويتها ككل، وفي مرحلتها الثانوية، باعتبارها تأسيساً لمراحل تعليمية تخصصية لاحقة.

وعلى كل معلم ومعلمة اعتبار «دليل المعلم» مفتاحاً لاستيعاب مادة تخصصهم التدريسي، وأداة لتمكين طلابهم من فهم محتواها.

والله ولي الهداية والتوفيق ،،،

أ.د. فضل علي أبو غانم
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

المحتويات

المحتويات

المحتويات

المحتويات

مقدمة الدليل

عزيزنا المدرس . . .

عزيزتنا المدرسة . . .

إذ يسرنا أن نضع بين يديك هذا الدليل لكتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي ،فإننا نرى ضرورة أن نوصيك ببذل الجهد الكبير للاستفادة منه بمصاحبة الكتاب المدرسي وكتاب التمارين .

ومن أجل أن تتحقق أهداف المادة في هذا الصف ، فإنه يجب السعي الحثيث لتقديم حصص ناجحة ، وهذه الحصص لن تتم إلا بتخطيط جيد وهو ما يهدف إليه هذا الدليل .

لقد جاء تطوير مناهج الرياضيات للمرحلة الثانوية، وفق استراتيجية تربوية شاملة وخطة واضحة المعالم ، ومن أهم معالمها إنها تعطى أهمية كبيرة لأنشطة الطلبة وتعلمهم الذاتي من خلال حل أكبر قدر من التارين والمسائل ، إضافة إلى إعطاء أهمية خاصة لأدلة المعلُمين ، وفق معايير متجددة حتى يتمكن المدرس من الاستفادة منها استفادة حقيقية في مجال تخطيط الدروس وتنفيذها .

وإذا كنا قد حرصنا على تقديم مادة علمية سليمة وسلسة وشيقة للطلبة في الكتاب المدرسي ، إضافة إلى التمارين والمسائل المتنوعة في كتاب التمارين ؛ فإننا حرصنا أشدالحرص على أن نقدم للمدرسين أفضل الطرق وأحسن الأساليب لتخطيط وتقديم حصص فاعلة ومثيرة ومحفزة للتعلم . .

وفي هذا الدليل نضع في البداية مقدمات توضيحية حول الكتاب المدرسي والدليل نفسه تساعدك على فهم المنهجية التي بُنيا عليها وكيفية استخدامهما .

نسأل الله أن نكون قد وفقنا لإصابة أهدافنا .

والله من وراء القصد .

المؤلفون

أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية

يهدف تدريس الرياضيات في نهاية المرحلة الثانوية إلى :

١ – تعرُّف المتعلم على الأعداد المركبة ، وإجراء العليات عليها

٢ – تعرُّف المتعلم على مبادئ المنطق الرياضي .

٣ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات (الدوال) ، وأنوعها .

٤ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات العكسية ، وإيجاد التطبيق العكسي لتطبيق معطى .

٥ – تعرُّف المتعلم على تركيب التطبيقات وإيجاده .

٦ – إجراء المتعلم للعمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .

٧ – تعرُّف المتعلم على اللوغاريتمات وخواصها ، واستخدامها ، وتمييز الدالة الأسية واللوغاريتمية ورسمها .

٨ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم المتتاليات الحسابية والهندسية ، واستنتاج بعض قوانينها (الحد العام، المجموع) ، واستخدامها .

٩ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصها وحل مسائل عليها .

١٠ – تعرُّف المتعلم على نهاية بعض الدوال ، وحسابها ، وإيجاد مشتقاتها .

١١ – تعرُّف المتعلم على مشتقات بعض الدوال ، وحسابها باستخدام القواعد .

١٢ – حل المتعلم لمعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى والثانية .

١٣ – تعرُّف المتعلم على النظم الرياضية الجبرية ذات العملية الواحدة ، وذات العمليتين .

١٤ – تعرُّف المتعلم على المحددات ، والمصفوفات ، والمتجهات ، وإجراء العمليات عليها .

١٥ – استخدام المتعلم بعض خواص المصفوفات ، والمحددات ، في حل مجموعات من المعادلات الخطية .

١٦ – استنتاج المتعلم لبعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .

١٧ – إيجاد المتعلم لميل ومعادلة المستقيم في المستوى ، واستنتاج معادلة المماس .

١٨ – تعرُّف المتعلم على المتجهات وخواصها ، وإجراء العمليات عليها .

١٩ – إكساب المتعلم مفاهيم الدوران ، والتكبير ، والانعكاس تحليلياً وتركيب الدوران والتحاكي .

٢٠ – استنتاج المتعلم بعض معادلات القطوع المخروطية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل.

٢١ – تعرُّف المتعلم على بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية والعلاقات بينها .

٢٢ – برهنة المتعلم لبعض مبرهنات الهندسة الفضائية ، وستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل.

٢٣ – حساب المتعلم لمقاييس التشتت ، وبعض معاملات الارتباط .

٢٤ – برهنة المتعلم بعض قوانين ومبرهنات الاحتمالات ، واستخدامها في حل بعض المسائل.

٢٥ – تعرُّف المتعلم على حساب التكامل واستنتاج بعض قوانينه .

٢٦ – إجراء المتعلم لبعض التكاملات ، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .

٢٧ – استخدام المتعلم الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .

٢٨ – إكساب المتعلم بعض القيم العملية السليمة مثل الأمانة العلمية والنظام والترتيب والاعتماد على النفس من خلال منهجية علم الرياضيات .

٢٩ – تنمية روح البحث والابتكار لدى المتعلم ومتابعة التطورات العملية المعاصرة .

٣٠ – تنمية الذوق الجمالي والفني لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال والبنى الرياضية المختلفة.

٣١ – تقدير المتعلم لدور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الأول الثانوي

يتوقع من المتعلم بعد الانتهاء من دراسة مقرر الصف الأول الثانوي أن يكون قادراً على :

١ – التعرُّف على مبادئ المنطق الرياضي .

٢ – التعرُّف على التطبيقات ، وأنواعها (الثابت ، المحايد ، المتباين ، الغامر)

٣ – إجراء العمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .

٤ – التعرُّف على الحدوديات ، وخواصها ، وإيجاد أصفار الجدوية .

٥ – التعرف على النظام ذي العملية الثنائية ، وخواصه (الزمرة) .

٦ – حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير أو متغيرين .

٧ – حل معادلات من الدرجة الثانية ذات المتغير الواحد بطريقة القانون، واستخدام المميز لمعرفة نوع جذري المعادلة .

٨ – حل جملة المتراجحات من الدرجة الأولى بيانياً .

٩ – حل متراجحة من الدرجة الثانية ذات متغير واحد .

١٠ – إيجاد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة ، وبعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

١١ – إيجاد ميل ومعادلة المستقيم في المستوى .

١٢ – اكتساب مفاهيم الانعكاس ، والانسحاب ، والدوران تحليلياً (باستخدام قواعد جبرية) .

١٣ – ذكر شروط التوازي والتعامد ، وإيجاد العلاقة بين مستقيمين في مستوى .

١٤ – التعرف على المتجهات ، وخواصها وإجراء العمليات عليها .

١٥ – استنتاج بعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .

١٦ – التعرُّف على المجموع والرمز (مجـ) وخواصه .

١٧ – إيجاد مقاييس النزعه المركزية ، (الوسط، الوسيط ، المنوال) .

١٨ – إيجاد مقاييس التشتت (المدى ، التباين ، الانحراف ، المعياري) .

١٩ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والمسائل التطبيقية .

٢٠ – إلتزام بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والموضوعية واحترام اراء الآخرين .

٢١ – إدراك دور الرياضيات في خدمة ودراسة فروع المعرفة الأخرى .

٢٢ – تذوق جمال وتناسق الرسوم والأشكال البيانية والبنى الرياضية المختلفة .

٢٣ – تكوين البصيرة الرياضية على فهم الرياضيات بأنها فكرة دائمة التطور .

٢٤ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

جدول توزيع الحصص على الوحدات

م	عنوان الوحدة	عدد الحصص
١	المنطق الرياضي	١٤
٢	التطبيقات	١٥
٣	القوى والجذور	١٥
٤	الحدوديات	١١
٥	البُنى الجبرية	١٦
٦	المعادلات والمتراجحات	٢٦
٧	حساب المثلثات	٢٠
٨	الهندسة الإحداثية والتحويلات	١٩
٩	المتجهات	١٦
١٠	الإحصاء	١٥

الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي

∈ عنصر في / ينتمي إلى	= يساوي .
∉ ليس عنصراً في / لا ينتمي إلى	≮ ليس أصغر من
⊂ مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊆)	≯ ليس أكبر من .
⊄ ليست مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊈)	≠ لا يساوي
{أ ، ب ، جـ ، ... } حاصرتا المجموعة	∥ يوازي
∩ تقاطع	∦ لا يوازي
∪ اتحاد	⊥ عمودي على
φ ، { } المجموعة الخالية (فاي)	⊥̸ ليس عمودياً على
سَ متممة المجموعة س	≈ يساوي تقريباً
س / ص = س − ص الفرق بن المجموعتين س ، ص .	≡ ، ≃ يكافئ
س × ص حاصل ضرب المجموعتين س ، ص .	∼ يشابه
ط مجموعة الأعداد الطبيعية .	≅ يطابق
ص مجموعة الأعداد الصحيحة (ومنها ص+ ، ص−)	∵ بما أن
ك مجموعة الأعداد الكسرية (ومنها ك+ ، ك−)	∴ إذن
ن مجموعة الأعداد النسبية (ومنها ن+ ، ن−)	$\overline{\text{أب}}$ القطعة أ ب
ح مجموعة الأعداد الحقيقية (ومنها ح+ ، ح−)	| أ ب | طول القطعة أ ب .
[أ ، ب] الفترة المغلقة أ ، ب .	$\overleftarrow{\text{أب}}$ الشعاع الذي بدايته النقطة أ .
] أ ، ب [الفترة المفتوحة أ ، ب .	$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ المستقيم أ ب (الذي يمر بالنقطتين أ ، ب) .
] أ ، ب] الفترة نصف المفتوحة من جهة أ .	∝ يتناسب
[أ ، ب [الفترة نصف المفتوحة من جهة ب .	مجـ المجموع
π النسبة التقريبية (باي) .	△ المثلث
> أكبر من	∢ أ ب جـ ، الزاوية أ ب جـ ، أو الزاوية التي رأسها ب .
< أصغر من	ق (∢ أ ب جـ) قياس الزاوية أ ب جـ .
≥ أكبر من أو يساوي	ظا ظل الزاوية
≤ أصغر من أو يساوي	ظتا ظل تمام الزاوية
e العدد الطبيعي (الأساس)	قا قاطع الزاوية
لط لوغريتم العدد الطبيعي	قتا قاطع تمام الزاوية
جا جيب الزاوية	[س] صحيح س
جتا جيب تمام الزاوية	∞± سالب وموجب ما لا نهاية
	| | القيمة المطلقة

منهجية إعداد الكتاب المدرسي وكيفية استخدامه

عند إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية، رأى المؤلفون تبني منهجية تواكب استراتيجية مناهج هذه المرحلة التي استندت إلى السياسة التربوية التعليمية للدولة وإلى الأسس العامة للتربية ، ومن جملة ما ارتكزت عليه منهجية التأليف مراعاة الطرق والأساليب كما ورد في وثيقة المناهج من ناحية ، وتراعي النمو العقلي والنفسي للطالب من ناحية أخرى ، وكل ذلك مبنيٌّ على التسلسل المنطقي والعلمي للمادة التعليمية ، ولهذا ظهرت هذه المعالم واضحة في كتب الرياضيات لهذه المرحلة ، من أهمها :

١ – الحرص على كتابة المادة التعليمية بلغة مبسطة وواضحة ودقة علمية صارمة ، مع الاعتناء بتوحيد المصطلحات والرموز فيها ، ودعم ذلك بالرسوم التوضيحية والتسلسل المترابط ، وهذا يخدم في الوقت نفسه توليد الحافز للتعلم الذاتي إلى جانب التدريبات والأنشطة والمداخل التعليمية المناسبة .

٢ – عرض المادة من خلال مداخل وأساليب تدريسية تتفق مع تسلسل المادة ومع النمو العقلي للطالب ، وقد قل العمل بالمحسوسات وشبه المحسوسات واقترب أكثر فأكثر إلى العمليات التجريدية ، إذ على الطالب أن يمارس عمليات عقلية أعلى مما سبق أو بمستوى أعلى ، منها : التصنيف والمقارنة وتكوين المفاهيم والعلاقات والتجريد والتعميم والتفسير والترجمة ، والطالب في هذه المرحلة يمتلك قدرات عقلية تساعده على استخدام أسلوبي التفكير الأستقرائي والاستنتاجي ، والطريقتين التحليلية والتركيبية مما يساعد على حل المشكلات بشكل أعمق وتنمية جوانب الإبداع والابتكار لدى الطلبة .

٣ – جرت ـ قدر الإمكان ـ محاولة لتوظيف المادة التعليمية ، في مواقف كثيرة ، وما التدريبات العملية والأنشطة والمسائل التطبيقية إلا نوع من تطبيق مبدأ توظيف المادة التعليمية ، كما إن ذلك يتضمن بشكل أو آخر تنمية الجانب الوجداني لدى الطلبة ، إذ ينمي ذلك كثيراً من الميول والاتجاهات والقيم إلى جانب العادات الإيجابية وتنمية الانتماء . والجانب الوجداني يتحقق أيضاً من خلال تقديم المواضيع بشكل منسق إلى جانب عرض بعض جماليات المادة هنا وهناك .

٤ – مراعاة الفروق الفردية حيث عرضت المادة بتسلسل عبر قدرٍ كافٍ من الأمثلة ، وتنويع في التمارين والمسائل ، وقد أخذ ذلك تدريجياً متصاعداً في الصعوبة ، وتخدم التمارين والمسائل في كل بند تثبيت المادة التعليمية وتهدف إلى معالجة الصعوبات والأخطاء الشائعة .

٥ – تقديم المفاهيم بشكل دقيق وربطها بالمصطلحات المناسبة ، مع مراعاة دقتها الرياضية دون مبالغة، الربط ومراعاة التطبيقات دون خلل في تعميماتها المجردة . وقد بنيت مراحل تقديم المفاهيم عموماً على ثلاث خطوات هي :

(أ) تحديد خصائصها المشتركة ، وهذه عملية تصنيف وتجريد .

(ب) توظيف وتطبيق هذه الخصائص على عناصر أخرى تمثل المفهوم ، وهذه عملية تجسيد وعملية تعميم.

(جـ) فصل عناصر المفهوم عن غيرها لمفهوم آخر ، وهذه عملية تصنيف وتمييز ، بل عملية تعميق، ومن ذلك تمت العناية بصياغة تعاريف المفاهيم . .

٦ – معالجة البرهنة من خلال عدد من المبرهنات والتمارين المبسطة ، تم ضمن ذلك تحديد المعطيات (المقدمات) والمطالب (النتائج) وقد اهتم في هذا المجال بتنمية أسلوب الحصول على المبرهنة وصياغتها وأسلوب الحصول على فكرة البرهان وعرضه . وعُني هنا بأساليب التفكير الاستقرائي والاستنتاجي إلى جانب الطريقتين التركيبية والتحليلية . والبرهنة ظهرت لأول مرة في الصفوف (٧ – ٩) من مرحلة التعليم الأساسي وقد سارت فكرة البرهنة في تلك المرحلة على النحو التالي :

(أ) إعطاء الأسباب والتعليلات لبعض الخطوات ، وقد مُهِّد لذلك في الصفوف الدنيا من مرحلة التعليم الأساسي واستمر في الصفوف العليا من تلك المرحلة .

(ب) فهم البرهان والخطوات المنطقية (كان يتركز هذا في الصف السابع) .

(جـ) إعادة البرهان بتسلسل خطواته وتفسيرها ، وهذا الأمر مشترك في الصفين السابع والثامن .

(د) إقامة البرهان بشكل ذاتي ، حيث يتمكن الطالب نفسه من إقامة برهان بعض النتائج والمسائل ، ويبدأ هذا من الصف الثامن . وفي المرحلة الثانوية يتم الإرتقاء بالبرهنة من حيث الأساليب والأفكار ،وفي هذا المجال لا بد من التأكيد على نموذج عرض البرهان ، وكيفية رسم الأشكال والأعمال المساعدة .

٧ – إعطاء أهمية للمهارات موازية لأهمية تقديم المفاهيم ومعالجة المبرهنات ، بحيث لا يطغى واحد على الآخر وقد اهتم بتوفير متطلبات تكوين المهارات على النحو التالي :

(أ) القدرة على تعليل وتفسير الخطوات لأي أداء ، ويمثل ذلك الفهم .

(ب) الحصول على نتائج صحيحة ودقيقة ، ويمثل ذلك القدرة (وهي مرحلة سابقة للمهارات) .

(جـ) إنجاز العمل المطلوب بشكل صحيح وفي الوقت المحدد بالدقة المطلوبة ، ويمثل هذا تمام المهارة .

وإذ تفسر المهارة غالباً بأداء المهام بالدقة المطلوبة في الوقت المحدد لها ؛ بمعنى آخر إن للمهارة جانبين هما الدقة والسرعة . العناية بالمهارات هو امتداد لما تقدم في الصفوف السابقة ، إلا أنه يمتد ويتوسع إلى مهارات أعلى ، وأداءات أكثر دقة ، وآليات أكثر تعقيداً أو أكثر خطوات .

٨ – الاهتمام بحل المسائل ، فهو الأداة الأساسية لتنمية أساليب التفكير عامة ، وأساليب التفكير الرياضي خاصة . ويعتبر ما سبق تقديمه في مرحلة التعليم الأساسي من شرح وتوظيف لاستراتيجية حل المسألة هو الأساس للاستمرار في هذا المجال ، والذي قد امتد من حل المسائل اللفظية إلى برهنة في الجبر والهندسة ، بل وفي كافة الفروع والمجالات الرياضية ، ويتمثل ذلك في الخطوات التالية :

(أ) حصر المعطيات .

(ب) تحديد المطلوب .

(جـ) وضع الخطة ، ويتم فيها استعادة المفاهيم والتعميمات في المسألة ، وما يمكن من مفاهيم وتعميمات تساعد على الحل ومن ذلك تحديد العلاقات المتضمنة في المسألة والعمليات

اللازمة للحل ، ويشمل ذلك إعادة الصياغة والتوضيح بالأشكال التي تعكس المعطيات وتصور أي عمل مساعد ، وفي هذه الخطوة يتم تنمية الابداع والابتكار .

(د) تنفيذ الحل : ويتم فيه تنفيذ خطة الحل ، ووضع الخطوات في تسلسل منطقي مع تفسيرها وتعليلها ، وتدارك الأخطاء ، إذ يمكن اكتشاف خلل في الخطة أثناء تنفيذها ، أو يمكن اختصارها أو ظهور حلول أخرى أفضل أو أوضح ، وفي نهاية هذه الخطوة تتم صياغة جملة الجواب .

(هـ) التحقق من الحل : وهو مطلب تربوي ،أكثر منه علمي ، إذ يساعد على النقد الذاتي حتى يتمكن الطالب من تلافي أخطائه بنفسه .

وانطلاقاً مما سبق فإننا نرى أن يكون استخدام الكتاب المدرسي وفقاً لما يلي :

أولاً : أعد الكتاب المدرسي في الأساس لاستخدام الطالب ، إلا أن المدرس يجد فيه المادة التعليمية الضرورية التي تقدم للطالب ، كما يجد فيه أسلوباً لعرض هذه المادة وتسلسلها ، ونماذج لأساليب التقويم ، حيث ان المنهاج ينعكس انعكاساً تاماً في الكتاب ، وبذلك فالكتاب المدرسي خير معين للمدرس في تخطيط وتنفيذ درسه اليومي . وهذا لا يعني أن يهمل المدرس الاستعانة بالدليل ، فالدليل مكمل للكتاب المدرسي وكذلك كتاب التمارين . كما يوصي المدرس بالمراجع الأخرى العلمية والتربوية ، والتي يمكن أن تساعده في تطوير أساليبه التدريسية وتعمق لديه المادة العلمية ، وقد أوردنا عدداً منها في الدليل .

ثانياً : يعتبر الكتاب المصدر الرئيس للتعلم ، وقد شكل بحيث يساعد الطالب على التعلم والدراسة الذاتية ، ولذا على المدرس أن يراعي الاستعانة بالكتاب المدرسي في كل حصة دراسية ، فيعطي الطلبة تكليفاً ليس فقط لحل التمارين والمسائل ، بل لمراجعة المادة المكتوبة من حيث الشرح والتعاريف والتعليمات والأمثلة المحلولة ، كما يطلب منهم أداء التدريبات والأنشطة طالما أن وقت الحصص لايستوعب ذلك ، وكل هذا يساعد على تشكيل شخصية الطالب العملية . وبهذا نرى أن مفهوم الكتاب المدرسي كمجموعة تمارين تقدم للطالب مفهوم خاطئ يمارسه كثير من المدرسين دون ادراك .

ثالثاً : يقدّم الكتاب المدرسي للطالب نماذج مثالية للحل ، والتي على الطالب أن يتبعها ويقلدها ولذا ليس بالضرورة أن يعيد المدرس حل أمثلة الكتاب كما هي ثم يطلب نقلها إلى الكرسات ، بل عليه أن يشرح ما غمض في الكتاب وأن يقدم أمثلة أخرى مشابهة يختارها من تمارين الكتاب أو من كتاب التمارين أو يعدها بنفسه .

رابعاً : يقوم المدرس بتقسيم بنود كل وحدة حسب عدد الحصص المتاحة ، وبذلك يخطط كل حصة بحيث يمكن أن تغطى المادة التعليمية وأمثلتها وتمارينها ، ويحدد من ذلك الواجبات الصفية والمنزلية بما يخدم أهداف الحصة الدراسية . هذا كل ما يتعلق بالكتاب المدرسي منهجيةً واستخداماً وقد قدم بشكل مختصر وعلى المدرس التوسع في ذلك من المراجع المناسبة ، كما ذكرنا في أولاً .

منهجية إعداد كتاب التمارين وكيفية استخدامه

من ضمن استراتيجات إعداد المواد التعليمية للمرحلة الثانوية، إعداد كتب الأنشطة والتمارين لكل مادة ولهذا فقد جاء إعداد كتاب التمارين لمادة الرياضيات تلبية لهذه الاستراتيجية وتحقيقاً لأهداف تعليمية مكملة للكتب المدرسية . وقد روعي عند إعداد كتاب التمارين أن يحتوي على ما يلي :

١ – إضافة إلى تمارين ومسائل كل بند فقد تم إعداد بعض التمارين والمسائل التي وضعت تحت رقم البند المعني ، وإن كانت تمارين الكتاب المدرسي تغني عن هذه التمارين، إلا أن ما ورد في كتاب التمارين هو نوع من زيادة التمرن واحتياطي لمن يريد الاستزادة من التمارين بغرض التمكن من المادة .

٢ – وضعت في نهاية كل وحدة مجموعة من التمارين العامة والمسائل التي تربط محتوى الوحدة ككل وتساعد على تفهم العلاقة بين بنودها المختلفة بما يساعد على التعمق في محتوى كل وحدة ويجعلها أكثر ثباتاً في أذهان الطلبة .

٣ – اختبار الوحدة وهو متناغم مع اختبار الوحدة الذي في الدليل ، حيث أن اختبار الدليل قد وضع وفقاً لأهداف الوحدة . ووفقاً لذلك فقد خطط أن يستخدم الكتاب على النحو التالي :

أولاً : يمكن الإكتفاء بتمارين ومسائل الكتاب المدرسي بعد كل بند ، ويستعان بما في كتاب التمارين فقط وقت الضرورة ، أو لإعداد بعض الاختبارات أو خطوات التقويم نهاية كل بند .

ثانياً : نهاية كل وحدة يكلّف الطلبة بحل عدد كاف من التمارين العامة والمسائل ، يقوم المدرس باختيارها بدقة وممكن مراجعتها أو مناقشتها في وقت الحصص ، حسبما يراه المدرس مناسباً .

ثالثاً : يطلب المدرس من الطلبة حل اختبار الوحدة كعمل منزلي ، وقبل يومين أو ثلاث من الاختبار الذي سيتم إجراؤه . وبالتالي يتيح فرصة كافية للطلبة للمراجعة والاستفسار عن أي صعوبات تواجههم . ومن خلال هذا نرى أن الهدف الأساسي لكتاب التمارين هو تمكين الطلبة من المادة وتثبيتها وتعميقها لديهم .

منهجية إعداد دليل المعلم وكيفية استخدامه

لقد تبنى مؤلفو أدلة المعلمين لكتب الرياضيات للمرحلة الثانوية منهجية تنبع من منهجية تأليف الكتب نفسها وتتواكب مع استراتيجية مناهج هذه المرحلة ، ولهذا جاءت الأدلة مكملة للكتب وتشرحها وتساعد المدرس في تخطيط وتنفيذ الحصص الدراسية وتراعي خصوصية المواضيع ولا تلغي إبداعه في سلوكه التدريسي الذي يمكنه من إبراز شخصيته مع أخذه بعين الإعتبار ظروف طلبته ، ومن هنا ظهرت الملامح التالية في أدلة كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية والتي يؤخذ بها عند استخدام تلك الأدلة :

١ – الحرص على أن تخطط جميع الوحدات ، بل وجميع الدروس ، إلا أنه لم يرد تفصيل بخطوات الحصص ، وبهذا حمل تشكيل كل وحدة على ما يلي :

(أ) جدولاً بتوزيع حصص الوحدة إلى دروس حددت عدد حصصها كمقترح مناسب ، وعلى المدرس ألا يزيد كثيراً أو ينقص كثيراً عن هذا العدد من الحصص .

(ب) أهداف الوحدة عامة ، وهو ما يخضع للقياس في اختبار الوحدة نهاية تدريسها ، وهذه الأهداف مشتقة من أهداف تدريس الرياضيات لهذا الصف ، كما أنها منسجمة - إن لم تكن متطابقة - مع وثيقة المناهج لكل وحدة .

(جـ) مقدمة للوحدة وتحتوي على لمحة تاريخية ، ومفاهيم وتعميمات الوحدة وبعض الأخطاء الشائعة إن دعت الضرورة وسبل علاجها ، وبعض التوجيهات التدريسية العامة ، وكل ذلك يشكل خلفية علمية للمدرس فقط ، ولا يجوز التطرق له مع الطلبة في الحصص الدراسية .

(د) أهدافاً لكل درس ، مع ذكر عدد الحصص ، كما تم التعرض لتنفيذ الدرس بتحديد عنوان عام لكل حصة دراسية ثم جاء تقويم الدرس ، وبعد ذلك إرشادات وإجابات التمارين والمسائل .

(هـ) يعطي المدرس اختبار الوحدة المعد في الدليل ويمكنه أن يعد اختباراً آخراً وفق ذلك النموذج وبما يحقق الأهداف المرسومة ، ومن خلال تحليل إجابات الطلبة يمكن أن تتم معالجة الأخطاء والأهداف التي لم تتحقق بشكل أو آخر .

٢ – كل ما قدم للمدرس في الأدلة ما هو إلا مقترحات ، ولكنها مواكبة للمادة المعدة في الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ، ولهذا على المدرس أن يكيف هذه المقترحات ضمن الواقع التدريسي وفق ظروف الصف ، وبما يتيح له الإبداع دون الخروج عن أهداف المنهاج . ولهذا نوصي المدرس بأن يقرأ الدليل قراءة متمعنة ، ثم يخطط كل حصة على حدة بأهدافها وخطواتها التمهيدية والمادة التعليمية التي ربما يعد لها أمثلة جديدة من عنده، كما يقدم لها تقويماً مناسباً يعده بنفسه مستعيناً بالتقويم الذي في الدليل لكل بند .

٣ – على المدرس أن يعمل بشكل مستمر على تثبيت وتطوير المعارف والمهارات السابقة ، وأن يخطط عملاً صفياً كلما أمكن ؛ وخاصة في الحصص المحددة للتمارين ، كما يفضل التقويم في نهاية كل درس حتى يطمئن إلى أن أهدافه تتحقق أولاً بأول .

٤ – أن يستخدم الكتاب المدرسي استخداماً فاعلاً كما قد وضح ذلك في منهجية إعداد الكتب المدرسية وكيفية استخدامها ، وأن يوظفها بشكل يومي ؛ ولا يقتصر استخدامها ـ كما تعود كثير من المدرسين ـ على تحديد الواجبات والتمارين .

٥ – مراعاة الفروق الفردية أمر هام ، يجب أن يعطيه المدرس عناية خاصة ، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار بعض الجوانب ، منها تسلسل المادة ، وتقديم الأمثلة المتدرجة الأقرب فهماً ، واستخدام الوسائل إن تطلب الأمر وإن لم تذكر في الدليل ، ويتم إعطاء الواجبات الصفية والمنزلية بشكل متدرج في الصعوبة وبحيث يشعر الطلبة المتوسطون بشئ من تحقيق الذات ،وقد يتطلب هذا الأمر من المدرس أن يعد بنفسه أمثلة وتمارين وإلا فإننا نوجه نظره إلى كتاب التمارين كما عليه أن يضع ذلك من ضمن أهداف الدرس ، مثلاً إعداد التمارين العلاجية لضعفاء الطلبة والتمارين التدريبية للمتوسطين منهم والتمارين والمسائل الإثرائية للمتقدمين .

٦ – كل ما يشار إليه من طرق لتنمية القدرات العقلية ، على المدرس تنفيذها بشكل أو آخر ، ولذا ربما يكلف المدرس طلابه بالمزيد من العمل خارج الصف ، مثل إنجاز بعض التدريبات أو تنفيذ بعض الأنشطة ، وبما يتيح لهم ربطاً مستمراً بالمادة مع مراعاة تطبيقاتها الهامة في الحياة .

٧ – لم يظهر حل المسألة بشكل بارز في الكتب المدرسية المعينة، إلا في البرهنة ، ولهذا على المعلم ، وكلما أتيحت الفرصة ، أن يعيد ما تعلمه الطلبة في مرحلة التعليم الأساسي من استراتيجية حل المسألة ، وأن يربطها دائماً بالبراهين المعروضة والمطلوب القيام بها .

٨ – ينصح المدرس بأن يوجه طلبته إلى تنفيذ حلول التمارين والمسائل بقوالب وأشكال نموذجية يتبعونها دائماً مع العناية بنظافة الحل ونظاميته وجمال عرضه .

الوحدة الأولى

المنطق الرياضي

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
١ – ١	القضية المنطقية ونفيها	٢
١ – ٢	القضايا المركبة وادوات الربط	٤
١ – ٣	التكافؤ المنطقي	٢
١ – ٤	الأقتضاء المنطقي	٢
١ – ٥	المسوّرات	٣
١ – ٦	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١٤

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يتعرّف القضايا المنطقية ويميّزها عن الجمل .

٢ – يكتب نفي قضية منطقية .

٣ – يتعرف وينشئ جدول الصواب لقضية مركبة من ثلاث قضايا على الأكثر .

٤ – يستخدم جداول الصواب لتحديد قيم صواب قضية مركبة بإحدى أدوات الربط (و ، أو ، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$) .

٥ – يبين متى تكون قضيتان منطقيتان متكافئتين .

٦ – يثبت تكافؤ قضيتين باستخدام جداول الصواب .

٧ – يتعرف الأقتضاء المنطقي ويميزه عن القضية الشرطية .

٨ – يستخدم الاقتضاء المنطقي في برهنة بعض التعميمات الرياضية .

٩ – يتعرف المسوّرة الكلية والمسوّرة الجزئية ويميز بينهما .

١٠– ينفي قضية مسوّرة كلياً أو جزئياً .

المصطلحات والرموز

Biconditionals	ثنائية الشرط، أو (شرطية ثنائية)[ورمزها ⟷]
Conditionals	شرطية[ورمزها⟵]
Conjunction	العطف (و) [ورمزه ∧]
Contradiction	تناقض
Disjunction	الفصل (أو) [ورمزه ∨]
False	خاطئة
Logical aquivalence	التكافؤ المنطقي[ورمزه ≡]
Logical implication	الاقتضاء المنطقي [ورمزه ⟸]
Quarnifiers	المسوّرات
Tautology	تحصيل الحاصل (صائب منطقياً)
True	صائبة
Truth Table	جدول الصواب

المقدمة

لمحة تاريخية

نشأ المنطق الصوري ونضج واكتمل في القرنين الرابع والثالث قبل الميلاد على يد المعلم الأول أرسطو أعظم فلاسفة الأغريق . واللافت للنظر حقاً أن أرسطو لم يعرّف مصطلح «المنطق» Logic، حيث وضع بحوثه المنطقية تحت عنوان «التحليلات »، واسماه تلامذته «الأورجانون» أي الأداة وآلة التفكير .

وكان الأسكندر الأفروديسي في القرن الثاني الميلادي هو أول من أستخدم مصطلح «logic »المشتقة من اللفظة الاغريقية الشهيرة «Logy »ذات المعني المزدوج الكلمة / العقل . ونجد في هذا الازدواج البارع كل الدلالة المطلوبة ، والتي تجعل (1089) مقطعاً بُعدياً في بعض المصطلحات للدلالة على العلم بمدلوله ،

فمثلاً :Biology علم الحياة ،Psycholgyعلم النفس ، Geology علم الأرض . وهكذا فما عسى أن يكون العلم بموضوع ما سوى العقل والادراك لهذا الموضوع .

وطُرح المنطق الأرسطي بوضوح في رحاب الحضارة العربية والإسلامية ، حيث تم ترجمة الكتب الأربعة لأرسطو في المنطق إلى اللغة العربية ، لكنها كانت ترجمة حرفية ، حيث قام الجيل الثاني من المترجمين وعلى رأسهم حنين بن اسحاق وولده إسحاق بن حنين بمراجعتها على الأصل اليوناني وتنقيحها وتهذيبها ، وترجموا أيضاً شروحاً وتعليقات ، لتتوالى جهود العرب وإسهاماتهم المنطقية .

انتقل المد العقلي الإسلامي إلى أوربا ، وفي سياق انجازات العرب والمسلمين المنطقية وشروحهم الرائدة لأرسطو ومنطقه ، وبفضل هذا المد اعاد آباء الكنيسة الكاثولوكية اكتشاف المنطق أبان القرن الثاني عشر الميلادي. وبدأت مرحلة جديدة لازدهار المنطق الأرسطي في الحضارة الأوربية استمرت حتى منتصف القرن الرابع عشر . إنها المرحلة التي سادها المنطق الأرسطي أكثر مما ينبغي . حتى استغرقها التفكير النظري الخالص والدوران في قياسات أرسطية عقيمة خصوصاً مع تراجع الاهتمام بالرياضيات والفيزياء وانغماس العقل في خدمة اللاهوت وتفسير الكتاب (المقدس) .اقترنت حركة العلم الحديث بالثورة على المنطق الأرسطي ، وسلكت الطريق المضاد هو الاستقراء التجريبي ، مما جعل المنطق الأرسطي يدخل (حسب تعبيرفونت) مرحلة البيات الشتوي التي استمرت خمسمائة عام ، حتى كانت الانبثاقة الكبرى للمنطق الحديث في منتصف القرن التاسع عشر.

ولقد كان لجهود كل من بول (١٨١٥ – ١٨٦٤) . وفريج(١٨٤٨ – ١٩٢٥) ، وبيانو (١٨٥٨ – ١٩٣٢) دور بارز في تطور المنطق المترافق مع تطور الرياضيات؛ وأثمرت هذه الجهود ظهور مؤلف عظيم الشأن هو :

مبادىء الرياضيات (Principa Mathematica) ألفه اثنان من أعظم الفلاسفة البريطانيين المعاصرين برتدراندرسل و أ . ن وايتهد (عام ١٩١٠) ، تجاوز بصدده جميع الفلاسفة تقريباً ولم يقرأه إلا القليل منهم ، حسب تعبير كمني . ولعل أدق وصف للعلاقة بين المنطق والرياضيات هو ما أورده رسل في ذلك المؤلف حيث قال « لقد كانت الرياضيات مرتبطة بالعلم والمنطق مرتبطاً باللغة اليونانية ، إلا أن الاثنين تطورا خلال الأزمنة الحديثة ، فغدا المنطق يجنح أكثر فأكثر نحو الرياضيات ، كما اصبحت الرياضيات نفسها أكثر تعلقاً بالمنطق ، الأمر الذي أدى إلى استحالة إقامة حد فاصل بينهما ، فالاثنان في الواقع واحد لا يختلفان إلاّ بما يختلف به الصبي عن الرجل ، فالمنطق هو طور شباب الرياضيات والرياضيات هي طور رجولة المنطق .

ومن قبل ومن بعد فقد نهض على اكتاف المنطق الرياضي عملاق القرن العشرين والقرون التالية «انه الكمبيوتر» ، وهو خاتمة المطاف في هذه اللمحة .

خلفية علمية

نهدف من تقديم هذا البند إلى إثراء معلومات المدرس وتجديدها ، وكذا مساعدته في إدراك العلاقة بين محتويات هذه الوحدة وما يليها من وحدات ، وتحقيقاً لتلك الأهداف سوف نستعرض بشكل موجز ولكن أعمق وأشمل ، أهم موضوعات الوحدة على النحو التالي :

القضية المنطقية :

عرفنا القضية المنطقية بأنها « جملة خبرية مفيدة ، يحتمل معناها الصواب أو الخطأ وليس كليهما معاً » . وبناء على هذا التعريف فإن الجمل غير الخبرية (الانشائية) كجمل الاستفهام والتعجب والأمر والنداء ، . . . جميعها ليست قضايا . كما أن الجمل الخبرية المبهمة ، وهي التي تكون مسألة البت في صوابها أو خطئها مسألة نسبية أو تلك الجمل التي لا نستطيع الحكم على خطئها أو صوابها وهي بصورتها الراهنة كالجمل المفتوحة ، وما شابه هذه الجمل فهي ليست قضايا منطقية .

تنفى القضية البسيطة بإضافة « ليس » أو « ليس صحيحاً أن » قبل القضية الأصل ، والأمثلة الواردة في كتاب الطالب كافية ولكن ما نود أن نلفت إليه انتباه المدرس هو ما يلي:

١ - إذا كانت أ قضية صائبة فإن ~أ هي قضية خاطئة ، ٢ - ~ (~ أ) ≡ أ (نفي النفي إثبات)

٣ - عند نفي أية قضية من النوع التي يسهل علينا التحقق من صدقها (مطابقتها للواقع) من عدمه ، فيجب أن نفرق بين نفيها وتصحيحها كجملة ، فمثلاً القضية « الرياض عاصمة اليمن » هي قضية خاطئة لأن حقائق الجغرافيا تقول أن « صنعاء هي عاصمة اليمن » وأن « الرياض عاصمة السعودية » ؛ ومع ذلك فإن أي من القضيتين الأخيرتين ليست نفياً للقضية الأولى ، إذ أن نفيها هي القضية « الرياض ليست عاصمة اليمن » أو « ليس صحيحاً أن : « الرياض عاصمة اليمن » .

كذلك إن نفي القضية « ٢+٣=٤ » هي القضية (٢+٣ ≠ ٤) ولا تعتبر القضية « ٢+٣=٥ » نفياً للقضية الأصلية؛ وذلك لأن طريقة النفي التي بيّنا خطأها تتناقض مع المسلّمة ~ (~ أ) = أ نفي النفي إثبات .

جداول الصواب :

لمعرفة قيم صواب قضية مركبة نكوّن جدولاً لقيم الصواب يتكون من ٢^{ن} صفاً ، حيث ن عدد مركبات القضية، أما عدد الأعمدة فيعتمد على تركيب القضية ، وفيما يلي نشير إلى بعض الملاحظات المتعلقة بعملية إنشاء جداول الصواب وأهميتها :

١ - إن جداول الصواب للقضايا المركبة بأدوات الربط الأساسية (و ، أو ، إذا كان . . فإن) ورموزها على الترتيب (∧ ، ∨ ، ←) ، تلك الجداول تعتبر بمثابة تعريفات متفق عليها بين كل المشتغلين بالمنطق الرياضي . وجداول الصواب الأخرى تعتمد في إنشائها على قيم صواب القضايا البسيطة الداخلة في تركيب القضية وعلى أدوات الربط سابقة الذكر .

٢ - إن جدول صواب أي قضية يحتوي على قيم الصواب الممكنة لتلك القضية ، وعند التحقق من واقع الحال الذي تعبر عنه تلك القضية فإن قيمة صوابها تكون أحدى تلك القيم الممكنة .

٣ - ترتب قيم الصواب للقضايا البسيطة الداخلة في التركيب بطريقة تضمن أن يحوي الجدول كل الحالات الممكنة .

القضايا المركبة وأدوات الربط :

إذا كانت أ ، ب قضيتين مختلفتين بسيطتين فإن كلاً من القضايا (أ ∧ ب) ، (أ ∨ ب) ، أ ← ب ، (أ ↔ ب) هي قضية مركبة .

إن القضية المركبة من قضيتين أو أكثر هي أيضاً قضية ، وقيم صوابها تستمد من قيم صواب القضايا البسيطة الداخلة في تركيبها ومن أدوات الربط الداخلة في تركيبها .

الوصل والفصل :

القضية المركبة (أ ∧ ب) تسمى أيضاً قضية وصل (Conjunction) ، وكذلك القضية المركبة (أ ∨ ب) تسمى أيضاً قضية فصل (Disjunction) .

إن قيم صواب قضيتي الوصل والفصل مبينة في الجدولين (١ – ٥) ، (١ – ٦) في كتاب الطالب، وفيما يلي نعطي بعض الملاحظات الهامة حولهما :

١ – يتكون كلٌّ منهما من أربعة أسطر وثلاثة أعمدة . عدد الأسطر الأربعة نتج من أن عدد القضايا البسيطة الداخلة في التركيب اثنتان، وامكانات قيم الصواب لكل منها اثنتان (٢ =٤) ، أما عدد الأعمدة فيعبر عن القضايا المختلفة (أ ، ب ، أ ∧ ب) أو (أ ، ب ، أ ∨ ب) .

٢ – العمود الثالث في الجدول يبين قيم الصواب التي يمكن أن تأخذها القضية المركبة (أ ∧ ب) أو (أ ∨ ب) . وفي الجدول (١ –٥) العمود الثالث يبين أن القضية (أ ∧ ب) تكون صائبة فقط عندما تكون كل من أ ، ب صائبة ، وتكون خاطئة إذا كانت إحدى مركبتيها (أو كلتاهما) خاطئة .

أما الجدول (١ – ٦) فيبين العمود الثالث فيه أن القضية (أ ∨ ب) تكون خاطئة فقط عندما تكون كل من مركبتيها أ ، ب خاطئة ، وتكون صائبة إذا كانت احدى مركبتيها صائبة .

٣ – ان مضمون كل من الجدولين (١ – ٥) ، (١ – ٦) يعتبر تعريفاً متفقاً عليه .

القضايا الشرطية :

إن القضية الشرطية (أ ← ب) هي قضية مركبة من القضيتين أ ، ب والرابط ← ، وهي تعني أنه إذا كانت أ صائبة فيجب أن تكون ب صائبة ، وعليه فعندما تكون أ صائبة و ب خاطئة فإن (أ ← ب) تكون خاطئة . أما القضية الشرطية (أ ↔ ب) فتعني أن القضيتين أ ، ب يجب أن تكونا صائبتين معاً أو خاطئتين معاً ، وفي الحالة التي تكون فيها إحداهما صائبة والأخرى خاطئة فإن (أ ↔ ب) تكون خاطئة .

إن القضية الشرطية (أ ← ب) تتضمن معنى مختلفاً عن الاستخدام العادي للجملة الشرطية (إذا كان ... فإن ...)، لذلك يواجه الطلبة بعض الصعوبات في استيعاب جدول صوابها وللمساهمة في تذليل تلك الصعوبات أوردنا المدخل التمهيدي في كتاب الطالب قبل الجدول (١–٧) .

التكافؤ المنطقي :

إن تكافؤ قضيتين منطقياً يعني أن يكون لهما قيم الصواب نفسها . ويعطى هذا المفهوم عادة إما بالاعتماد على جداول الصواب (كما هو الحال في كتاب الطالب) أو بالاعتماد على مفهوم الاقتضاء المنطقي، وهذا أسلوب أكثر تجريداً .

وفيما يلي بعض الملاحظات المتعلقة بمفهوم التكافؤ المنطقي :

١- التكافؤ المنطقي ليس قضية وإنما هو علاقة بين قضيتين منطقيتين . فأي قضيتين أ ، ب إما تكونا متكافئتين (حيثما تكون أ صائبة تكون ب صائبة وحيثما تكون أ خاطئة تكون ب خاطئة) أو غير متكافئتين (إذا وجدنا حالة واحدة على الأقل تكون فيها أ صائبة و ب خاطئة أو العكس) .

٢ - يلعب مفهوم التكافؤ المنطقي دوراً هاماً في المنطق الرياضي؛ إذ يكشف عن كثير من القضايا المتكافئة التي قد تبدو ظاهرياً مختلفة ؛ ولتوضيح ذلك لنأخذ الفرع (١) من المبرهنة (١-٢) في كتاب الطالب :

أ ← ب ≡ ~أ ∨ ب ≡ ~ ب ← ~ أ

ومن مبرهنة (١-١) يمكن استنتاج أن ~ (أ ∧ ~ ب) ≡ ~أ ∨ ب ؛ وعليه يكون :

أ ← ب ≡ ~ أ ∨ ب ≡ ~ (أ ∧ ~ ب) ≡ ~ ب ← - أ (*)

فإذا أخذنا أ : الرياضيات مهمة .

ب : المنطق مهم

فيمكن التعبير عن العلاقة بين أ ، ب بإحدى الصيغ الأربع المتكافئة التالية (حسب العلاقة *) :

- إذا كانت الرياضيات مهمة فإن المنطق مهم .
- الرياضيات غير مهمة أو المنطق مهم
- ليس صحيحاً أن (الرياضيات مهمة والمنطق غير مهم)
- إذا كان المنطق غير مهم فإن الرياضيات غير مهمة .

وهكذا إذا علمنا قيمة صواب إحدى القضايا المتكافئة فإنها تصلح كقيمة صواب لأي قضية من القضايا الأخرى المكافئة لها .

الاقتضاء المنطقي :

نقول أن أ تقتضي القضية ب إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية :

١) حيثما تكون أ صائبة تكون ب صائبة .

٢) حيثما تكون ب خاطئة تكون أ خاطئة .

٣) القضية أ ← ب صائبة منطقياً .

لاحظ إن الاقتضاء ليس قضية ، وإنما علاقة بين قضيتين (كما هو الحال في مفهوم التكافؤ) .

المسورات :

كثيراً ما نستخدم في الحياة عامة تعابير تحمل طابع العموم بغض النظرعما قد يترتب عليها من نتائج .

والمنطق الرياضي يمدنا بقواعد رصينة لضبط تعبيراتنا بحيث لا تعبر إلا عن الشئ المراد التعبير عنه وبدقة متناهية .

فإذا كانت م (س) جملة مفتوحة ، حيث س متغير وكانت سم مجموعة التعويض؛ فإن التعبير :

«∀س ∈ سم : م (س) » يعني أن م (س) قضية صائبة لكل قيم المتغير س من مجموعة التعويض سم .

يسمى هذا تسويراً كلياً حيث الرمز ∀ رمز التسوير الكلي .

أما التعبير : «∃ س ∈ سم : م (س) » فهو قضية مسورة جزئياً ، وتعني أن م (س) تتحقق لبعض قيم المتغير س من مجموعة التعويض سم .

وتكون القضية المسوّرة كلياً صائبة إذا كان ∀ س ∈ سم تجعل م (س) قضية صائبة . وتكون خاطئة إذا وجد على الأقل عنصر واحد س ∈ سم يجعل م (س) قضية خاطئة .

أما القضية المسورة جزئياً ، فتكون صائبة إذا وجد على الأقل عنصر واحد س ∈ سم يجعل م(س) قضية صائبة، وتكون خاطئة إذا كان ∀ س ∈ سم يجعل م (س) قضية خاطئة .

وأخيراً نقول: إنّ هناك علاقة بين القضيتين المسورة كلياً المسورة جزئياً نوجزها بما يلي :

~[∀س ∈ سم : م (س)] ≡ ∃ س ∈ سم : ~م (س) ،

~[∃ س ∈ سم : م (س)] ≡ ∀س ∈ سم : ~م (س) .

توجيهات طرائقية عامة

١) إن ما يحتويه الدليل من خلفية علمية جاء بهدف إثراء معلومات المعلم وتجديدها . وهو خاص بالمعلم فقط لا ينبغي تقديمه للطالب .

٢) كل بند من بنود الوحدة لا يعني درساً مستقلاً ، والتوزيع الوارد في الدليل للحصص هو مجرد اقتراح يمكن للمعلم الأخذ به قدر الإمكان أو تعديله حسب ما يقتضيه الموقف التعليمي وبما يحقق أهداف البند، شرط ألاّ يتجاوز عدد الحصص الإجمالي للوحدة.

٣) تشكل وحدة المنطق أساساً لما يليها من الوحدات ، كما أن مضامين الأمثلة الواردة فيها هي معلومات سبق للطالب دراستها ، ولذلك على المدرس أن يراعي مدى توفر المتطلبات الأساسية لموضوعات الوحدة ، وأن يتم تدريس الوحدة بما يحقق أهدافها، وتشكل قاعدة ومتطلبات لما يليها .

٤) من الموضوعات التي قد يواجه الطالب فيها صعوبة هو موضوع القضية الشرطية (أ ⟵ ب) ، ولأجل مساعدة الطالب في تجاوز تلك الصعوبة نقترح على المعلم الاستعانة بالأساليب العلاجية الآتية :

أ – تكرار أمثلة على نمط المثال التمهيدي الوارد في كتاب الطالب .

ب – عند تقديم موضوع القضية الشرطية المزدوجة (أ ⟷ ب) يتم المقارنة بين الموضوعين بالتعويض عن أ ، ب ببعض القضايا البسيطة من واقع الحياة .

جـ - عند تقديم موضوع التكافؤ المنطقي ، نأخذ التكافؤ : أ ← ب ≡ ~ أ ∨ ب
وتعوض عن أ ، ب ببعض القضايا البسيطة من واقع حياة الطالب .

٥) على المدرس أن يستفيد من كتاب التمارين وخاصة التمارين العامة على الوحدة ، والتي لم يخصص لها حصص ضمن بنود الوحدة ، لذلك يوجه المدرس الطلاب للاستفادة منها حسب الموقف التعليمي الذي هو متغير بين مدرسة وأخرى وربما بين مجموعة وأخرى داخل المدرسة الواحدة .

١ : ١ القضية المنطقية ونفيها

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ - يميز القضية المنطقية

٢ - يعين قيمة صواب القضية المنطقية .

٣ - ينفي قضية معطاة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : القضية المنطقية ونفيها .

الحصة الثانية : تمارين .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة وإشراك الطلاب في استخلاص التعميمات . ويعطى التمرين التقويمي التالي في نهاية الحصة الثانية :

ميز القضايا المنطقية فيما يلي ، وحدد قيم صوابها :

١ - متى قامت دولة الوحدة في اليمن ؟

٢ - الربيع أحد فصول السنة .

٣ - الجو صحو .

٤ - $(-٢)^٣ = -٨$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١]

١ - قضية صائبة .

٢ - قضية خاطئة .

٣ - ليست قضية ، لأنها جملة استفهامية .

٤ - ليست قضية ، لأنها جملة طلبية .

٥ - ليست قضية لأنها جملة تعجبية .

٦ - قضية خاطئة .

٧ - قضية صائبة .

٨ - قضية صائبة .

٩ - قضية صائبة .

١٠ - قضية صائبة .

[٢]

١) القاهرة ليست عاصمة العراق ،	**القضية خاطئة ونفيها قضية صائبة .**
٢) عدد سكان اليمن ليس أقل من عشرة مليون ،	**القضية خاطئة ونفيها قضية صائبة .**
٣) أضلاع المعين ليست متساوية في الطول ،	**القضية صائبة ونفيها قضية خاطئة .**
٤) يقبل العدد ٥ القسمة على ٢ ،	**القضية صائبة ونفيها قضية خاطئة .**
٥) قطرا متوازي الأضلاع غير متناصفين ،	**القضية صائبة ونفيها قضية خاطئة .**
٦) −٢ ∋ ط ،	**القضية صائبة ونفيها قضية خاطئة .**
٧) ٣ ≯ ٧ أو ٣ ≤ ٧ ،	**القضية صائبة ونفيها قضية خاطئة .**
٨) ٢٥ ≠ ٥^٢ ،	**القضية صائبة ونفيها قضية خاطئة .**
٩) ليس صحيحاً أن « المثلث المتساوي الأضلاع قائم الزاوية »	**القضية خاطئة ونفيها قضية صائبة .**

١ : ٢ القضية المركبة وأدوات الربط

عدد الحصص : أربع حصص

الأهداف

١ – يميز القضايا المركبة عن القضايا البسيطة .

٢– ينشئ جدول صواب قضية مركبة من ثلاث قضايا على الأكثر .

٣– يستخدم جداول الصواب لتحديد قيم صواب قضية مركبة **بإحدى أدوات الربط (و ، أو) .**

٤ – يستخدم جداول الصواب لتحديد قيم صواب قضية مركبة **بإحدى الأدوات الشرطية .**

٥ – يعبر رمزياً عن قضايا مركبة باستخدام الرموز (∧ ، ∨ ، ← ، ↔) .

٦ – يعبر لفظياً عن قضايا رمزية مركبة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس بأربع حصص موزعة بحسب **أدوات الربط المستخدمة الأربع « و، أو ، ← ، ↔ »**

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة وحلول **التدريبات الصفية والواجبات المنزلية التي ترافق كل حصة .**

ويمكن إعطاء تمرين (٥) من التمارين (١ – ٢) أو تمرين مكافىء **له، قبل نهاية الحصة الرابعة كتمرين تقويمي.**

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[٩] ١) الجو ليس حاراً	و	الرطوبة عالية .
٢) السودان دولة إفريقية	أو	**سوريا دولة غير أسيوية .**
٣) الدب حيوان آكل للحوم	أو	**الدب حيوان آكل للنّبات .**

٤) في الصباح تشرق الشمس و تتفتح الزهور وتغرد الطيور .

٥) كان الخيام شاعراً و كان الخوارزمي طبيباً .

٦) تقع مدينة الخرطوم على نهر النيل أو ٦ < ٨ .

٧) أضلاع المثلث متساوية في الطول (إذا كانت) زوايا المثلث متساوية في القياس .

٨) تتقدم الأمم إذا أخذت بالعلم

[٢] ١) أ ∧ ب ٢) أ ∨ ب ٣) أ ∨ ب ٤) أ ∧ ب ∧ جـ

٥) أ ∧ ب ٦) أ ∨ ب ٧) أ ← ب ٨) أ ↔ ب

[٣] ١) نزل المطر واخضرّت الأرض . ٢) نزل المطر أو اخضرّت الأرض .

٣) نزل المطر أو لم تخضر الأرض . ٤) لم ينزل المطر ولم تخضر الأرض .

٥) إذا نزل المطر اخضرّت الأرض . ٦) ينزل المطر إذا وفقط إذا اخضرّت الأرض .

(لاحظ أن الفقرة ٥ سقطت سهواً من كتاب الطالب) .

[٤] ١) خاطئة ٢) صائبة ٣) صائبة ٤) خاطئة ٥) خاطئة ٦) صائبة

[٥] ١) ٩ أو ٦ أو ٣ أو ٢٧ ٢) ١٤ ٣) ١٠ أو أي عدداً كبر من ٩ ٤) ٤

[٦] ١)

أ	ب	~ ب	أ ∧ ~ ب
ص	ص	خ	خ
ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	خ
خ	خ	ص	خ

٢)

أ	ب	أ ∨ ب	~(أ ∨ ب)
ص	ص	ص	خ
ص	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ
خ	خ	خ	ص

٣)

أ	~ أ	ب	~ أ ← ب
ص	خ	ص	ص
ص	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص
خ	ص	خ	خ

٤)

أ	ب	~ ب	أ ← ~ ب
ص	ص	خ	خ
ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص
خ	خ	ص	ص

٧)

أ	ب	جـ	ب ∧ جـ	أ ∧ (ب ∧ جـ)	أ ∧ ب	(أ ∧ ب) ∧ جـ
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	خ	خ	ص	خ
ص	خ	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص	خ	خ	خ
خ	ص	خ	خ	خ	خ	خ
خ	خ	ص	خ	خ	خ	خ
خ	خ	خ	خ	خ	خ	خ

≡

نستنتج من الجداول أن أ ∧ (ب ∧ جـ) ≡ (أ ∧ ب) ∧ جـ

١ : ٣ التكافؤ المنطقي للقضايا

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١) يذكر متى تكون قضيتان متكافئتين .

٢) يستخدم جداول الصواب لإثبات تكافؤ قضيتين أو عدم تكافؤهما .

٣) يستخدم جداول الصواب لتحديد ما إذا كانت قضية مركبة ما صائبة منطقياً أو خاطئة منطقياً .

٤) يستخدم مفهوم التكافؤ المنطقي لبرهنة صحة أو نقض بعض التعميمات المتعلقة بجبر القضايا .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس في حصتين وعلى النحو التالي :

الحصة الأولى : التكافؤ المنطقي للقضايا .

الحصة الثانية : القضايا الصائبة منطقياً ، و تمارين .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال مشاركة الطلاب في مناقشة الأمثلة وحل التدريبات الصفية وحل الواجبات المنزلية ، ويقدم التمرين التقييمي التالي في نهاية الحصة الثانية :

صل بين كل قضية من العمود الأول والقضية المكافئة لها من العمود الآخر :

العمود الأول
أ ∨ ~ ب
~ (~أ ∧ ب)
~ ب ← أ
أ ∧ (ب ∧ جـ)
أ ∧ (ب ∨ جـ)

العمود الآخر
~أ ← ب
أ ∧ (~ ب)
أ ∨ ~ ب
ب ∨ أ
(أ ∧ ب) ∧ جـ
(أ ∧ ب) ∨ (أ ∧ جـ)

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ١)

أ	ب	أ ∨ ب	أ ← ب	(أ ← ب) ← ب
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	خ	ص
خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	خ	ص	خ

≡

٢) باستخدام مبرهنة (١ – ١) نجد أن :

~ (~أ ∧ ~ ب) ≡ ~ (~أ) ∨ ~ (~ ب) ≡ أ ∨ ب

ويمكن للطالب أن يبرهن صحة التكافؤ السابق باستخدام جداول الصواب :

٣)

أ	ب	أ ← ب	ب ← أ
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص
خ	ص	ص	خ
خ	خ	ص	ص

يتضح من الجدول السابق أن قيم صواب (أ ← ب) لا تتطابق مع قيم صواب ب ← أ

وعليه فإن أ ← ب ≢ ب ← أ

٤)

أ	ب	~أ	~ب	أ ← ب	~أ ← ~ب	~(أ ← ب)
ص	ص	خ	خ	ص	ص	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص	ص	خ

واضح من الجدول السابق أن قيم صواب القضية ~ (أ ← ب) تختلف عن قيم صواب القضية ~أ ← ~ب ، وعليه فهما غير متكافئتين .

[٢] ١) ليس صحيحاً أن « السعودية دولة نفطية والخرطوم عاصمة سوريا »

أو : السعودية ليست دولة نفطية أو الخرطوم ليست عاصمة سوريا .

والقضية الأصلية خاطئة، ونفيها قضية صائبة .

٢) ليس صحيحاً أن « القمر يدور حول الأرض أو يدور حول نفسه » أو : لا يدور القمر حول الأرض ولا يدور حول نفسه .

القضية الأصلية صائبة ونفيها قضية خاطئة .

٣) ليس صحيحاً أنه « إذا زاد علم الإنسان زاد تواضعه » أو : إذا لم يزد علم الإنسان لم يزد تواضعه .

القضية الأصلية صائبة ونفيها قضية خاطئة .

[٣] ١)

أ	ب	أ ∧ ب	(أ ∧ ب) ← أ
ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص
خ	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص

يتضح من الجدول السابق « العمود الأخير » أن قيم صواب القضية (أ ∧ ب) ← أ هي صائبة دائماً وعليه فإنها صائبة منطقياً .

٢)

أ	ب	أ ∨ ب	أ ← (أ ∨ ب)
ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	ص
خ	خ	خ	ص

يتضح من الجدول السابق (العمود الأخير) أن قيم صواب القضية ا ← (ا ∨ ب)هي صائبة دوماً وعليه فهي قضية صائبة منطقياً .

٣)

ا	ب	ا ∧ ب	~(ا ∧ ب)	ا ∨ ~(ا ∧ ب)
ص	ص	ص	خ	ص
ص	خ	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص
خ	خ	خ	ص	ص

واضح أن القضية ا ∨ ~ (ا ∧ ب) صائبة منطقياً (انظر العمود الأخير من الجدول) .

٤)

ا	ب	ا ∧ ب	ا ∨ ب	(ا ∧ ب) ← (ا ∨ ب)
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص
خ	خ	خ	خ	ص

يبين العمود الأخير من الجدول أن القضية (ا ∧ ب) ← (ا ∨ ب) صائبة منطقياً .

[٤] ١)

ا	ب	جـ	ب ∨ جـ	ا ∨ ب	ا ∨ (ب ∨ جـ)	(ا ∨ ب) ∨ جـ
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	خ	خ	خ	خ	خ	خ

يبين العمودان الأخيران من الجدول أن للقضيتين قيم الصواب نفسها؛ فهما متكافئتان .

٢)

أ	ب	جـ	ب ∧ جـ	أ ∨ (ب ∧ جـ)	أ ∨ ب	أ ∨ جـ	(أ ∨ ب) ∧ (أ ∨ جـ)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	خ	ص	ص	ص	ص
ص	خ	ص	خ	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص
خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
خ	ص	خ	خ	خ	ص	خ	خ
خ	خ	ص	خ	خ	خ	ص	خ
خ	خ	خ	خ	خ	خ	خ	خ

≡

يتضح من العمودين الخامس والأخير أن للقضيتين قيم الصواب نفسها ، وعليه فهما متكافئتان .

٣) يتم حلها بطريقة مشابهة تماماً لـ (٢) .

١ : ٤ الاقتضاء المنطقي

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يتعرف على الاقتضاء المنطقي .

٢ – يميز الاقتضاء المنطقي عن القضية الشرطية .

٣ – يستخدم الاقتضاء المنطقي في برهنة بعض التعميمات الرياضية .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : الاقتضاء المنطقي .

الحصة الثانية : بعض أساليب البرهنة .

التقويم

يتم بنائياً من خلال المناقشة وحل الواجبات المنزلية ، وفي نهاية الحصة الثانية يقدم التمرين التالي أو تمرين مكافئ له :

استعمل أحد الرمزين التاليين ⟸ ، ⟺ للربط بين القضيتين أ،ب في كل من الحالات الآتية :

١ – أ : س عدد أولي ، ب : س {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

٢ – أ : س > ٩ ، ب : س > ١٠

٣ – أ : س يقبل القسمة على ٢ ، ب : س عدد زوجي

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ١) $\Leftarrow$ ٢) $\Leftarrow$ ٣) $\Leftarrow$ ٤) $\not\Leftarrow$ ٥) $\not\Leftarrow$

[٢] ١) إذا كان س = ٢ قضية صائبة، فإن س^{٣} = ٨ قضية صائبة .

وبأسلوب آخر :

إذا كانت س^{٣} $\neq$ ٨ قضية صائبة، فإن س = ٢ قضية خاطئة . ، وعليه تكون س $\neq$ ٢ قضية صائبة ؛

أي أن س^{٣} $\neq$ ٨ $\Leftarrow$ س $\neq$ ٢ ، وهذه تكافئ س = ٢ $\Leftarrow$ س^{٣} = ٨ .

٢) نعلم أن لكل عدد حقيقي جذراً تكعيبياً واحداً، وعليه ، س^{٣} = ٨ $\Leftarrow$ س = ٢ .

$\because$ س = ٢ $\Leftarrow$ س^{٣} = ٨ من (١) ، $\therefore$ س = ٢ $\Leftrightarrow$ س^{٣} = ٨ .

٣) س > ٠ و س^{٢} $\ngtr$ ٠ غير ممكن ، إذن س > ٠ $\Leftarrow$ س^{٢} > ٠ .

٤) ملاحظة : تصحح صياغة الفقرة (٤) في كتاب الطالب بحيث تكون : س > ٠ $\not\Leftrightarrow$ س^{٢} > ٠

س^{٢} > ٠ و س $\ngtr$ ٠ ممكن ، فعلى سبيل المثال

عند س = −١ $\ngtr$ ٠ نجد أن س^{٢} = (−١)^{٢} = ١ > ٠ ، إذن س^{٢} > ٠ $\not\Leftarrow$ س > ٠ .

وعليه س > ٠ $\not\Leftrightarrow$ س^{٢} > ٠ .

[٣] ١) في التمرين [٣] من التمارين (١−٣) برهنّا أن القضية :

(ا ∧ ب) ← ا صائبة منطقياً، وقياساً عليها يكون (ا ∧ ب) ← ب صائبة منطقياً، ومن ثم نجد أن

(ا ∧ ب) $\Leftarrow$ ب

٢)

ا	ب	~ ب	ا ∨ ب	(ا ∨ ب) ∧ ~ ب	[(ا ∨ ب) ∧ ~ب] ←
ص	ص	خ	ص	خ	ص
ص	خ	ص	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ	خ	ص

يتضح من العمود الأخير في الجدول أن القضية [(ا ∨ ب) ∧ ~ب] ← ا صائبة منطقياً،

وعليه فإن [(ا ∨ ب) ∧ ~ب] $\Leftarrow$ ا

٣) بالأسلوب نفسه المتبع في ٢) نبرهن صحة الاقتضاء .

٤)

أ	ب	أ ← ب	(أ ← ب) ∧ أ	[(أ ← ب) ∧ أ] ← ب
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ	ص

واضح من الجدول أن القضية [(أ ← ب) ∧ أ] ← ب صائبة منطقياً، وعليه فإن الاقتضاء متحقق .

٥) باستخدام جدول الصواب نبين أن [(أ ↔ ب) ← (أ ← ب)] صائبة منطقياً، فنكون بذلك أثبتنا المطلوب .

١ : ٥ المسوَّرات

عدد الحصص : ثلاث حصص .

الأهداف

١) يميّز القضية المسوّرة عن الجملة المفتوحة .

٢) يميّز القضية المسوّرة كلياً عن القضية المسوّرة جزئياً .

٣) يعبّر عن قضية مسوّرة باستخدام الرموز .

٤) ينفي قضية مسوّرة كلياً أو جزئياً .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى :القضايا المسوّرة كلياً والقضايا المسوّرة جزئياً

الحصة الثانية : نفي القضايا المسوّرة كلياً أو جزئياً

الحصة الثالثة : تمارين .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال مناقشة الأمثلة، وحل الواجبات الصفية والمنزلية؛ وفي نهاية الحصة الثالثة يقدم التمرين التالي كخطوة تقويم:

لتكن م (س) : $س^2 + ٥ س - ٦ = ٠$ ، س ∈ ص

بيّن قيم صواب القضايا التالية :

١) ∀ س ∈ ص : م (س) ، ٢) ∃ س ∈ ص : م (س)

٣) ∀ س ∈ ص : ~م (س)

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ١) جملة مفتوحة لاحتوائها على متغير .
٢) جملة مفتوحة .
٣) قضية خاطئة .
٤) قضية صائبة .

[٢] ١) خاطئة .
٢) صائبة .
٣) صائبة .
٤) خاطئة .

[٣] ١) $\exists\ \text{س} \in \text{س}: \text{س} + ٣ \neq ١٠$ صائبة .
٢) $\exists\ \text{س} \in \text{س}: \text{س} + ٣ \ngtr ١٠$ خاطئة .
٣) $\forall\ \text{س} \in \text{س}: \text{س} + ٣ \ngtr ٥$ خاطئة .
٤) $\exists\ \text{س} \in \text{س}: \text{س} + ٣ > ٧$ صائبة .

[٤] ١) $\forall\ \text{س} \in \text{ص}: ١ \times \text{س} = \text{س} \times ١ = \text{س}$.
٢) $\forall\ \text{س}، \text{ص} \in \text{ط}: \text{س} + \text{ص} = \text{ص} + \text{س}$.
٣) $\forall\ \text{س} \in \text{ح}: \text{س}^٢ \geq$.
٤) $\exists\ \text{س}، \text{ص} \in \text{ط}: (\text{س} - \text{ص}) \notin \text{ط}$.

[٥] ١) $\exists\ \text{س} \in \text{ص}: ١ \times \text{س} \neq \text{س} \times ١ \neq \text{س}$.
٢) $\exists\ \text{س}، \text{ص} \in \text{ط}: \text{س} + \text{ص} \neq \text{ص} + \text{س}$.
٣) $\exists\ \text{س} \in \text{ح}: \text{س}^٢ < ٠$.
٤) $\forall\ \text{س}، \text{ص} \in \text{ط}: (\text{س} - \text{ص}) \in \text{ط}$.

وجميع القضايا في [٥] أعلاه قضايا خاطئة ، لأن كلاً منها نفي لقضية صائبة .

١ : ٦ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الهدف معرفة مدى تحقق أهداف الوحدة .

وقد بني الاختبار بحيث يغطي أهداف الوحدة وفقاً للجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
[١] ١	١
٢	٢
٣	٥
[٢] ١، ٢، ٣	٤
[٣] ١	٨
٢، ٣	٩، ١٠
[٤]	٣، ٥، ٦، ٧
[٥]	٨

الاختبار

[١] لكل سؤال من الأسئلة الفرعية أربعة خيارات للإجابة . حوِّط الرمز الذي يدل على الإجابة الصحيحة :

١– أي من الجمل الآتية ليست قضية :

أ – الربيع أحد فصول السنة ، ب – ما أجمل الصباح ،

جـ – كل عدد صحيح هو عدد حقيقي ، د – بعض الطلاب ليسو أذكياء .

٢– أي من القضايا الآتية هي نفي للقضية «الأرض كروية وتدور» :

أ – الأرض ليست كروية وتدور ، ب – الأرض ليست كروية ولا تدور ،

جـ – الأرض ليست كروية أو لا تدور ، د – ليست الأرض كروية أو تدور .

٣– أي من القضايا الآتية تكافئ منطقياً القضية (م ∨ ~ ه) :

أ – ~ م ∨ ه ، ب – ه ← م ،

جـ – ~ م ∧ ه ، د – ~ (~ م ∧ ه) .

[٢] أكمل كلاً من القضايا الآتية ، بحيث تكون صائبة :

١- العدد ٣ يقسم العدد ٦ والعدد ٦ = ١ + ...

٢ - ٥ > ٣ ⟵ ٣ + ٢ < ٥ + ...

٣ - بيروت عاصمة سوريا أو ٦ < . . . .

[٣] أكمل كلاً من القضايا الآتية ، بحيث تكون خاطئة :

١- س² > ٠ ⟷ س . . . .

٢- . . . س ∈ ص : س + ٣ = ٣ + س = صفر ، استخدم أحد الرمزين ∀ أو ∃

٣ - ~[∀س ∈ ح : م (س)] ≡ . . . .

[٤] أكمل الجدول التالي ثم استخدمه في الإجابة عن الأسئلة التالية له :

أ	ب	أ ∧ ب	أ ∨ ب	أ ⟵ أ ∨ ب	أ ∧ ب ⟵ ب
ص	ص				
ص	خ				
خ	ص				
خ	ص				

١) استنتج من الجدول قضية مركبة صائبة منطقياً .

٢) هل (أ ∧ ب) ⟸ ب ؟

٣) هل (أ ∨ ب) ≡ (أ ∧ ب) ؟

[٥] برهن باستخدام الأسلوب غير المباشر أن س² > ٠ حيث س > ٠

الوحدة الثانية

التطبيقات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٢ : ١	مراجعة	٢
٢ : ٢	الصورةالعكسية للتطبيق (معكوس التطبيق)	٢
٢ : ٣	أنواع التطبيقات	٤
٢ : ٤	التطبيق العكسي	٣
٢ : ٥	تركيب تطبيقين	٣
٢ : ٦	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١٥

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعبّر عن التطبيق بأساليب مختلفة .

٢ – يوجد الصورة العكسية لعنصر أو لمجموعة جزئية من المجال المقابل .

٣ – يبيّن متى يكون معكوس التطبيق تطبيقاً .

٤ – يعرّف ويميّز التطبيق الثابت والتطبيق المحايد .

٥ – يعرّف ويميّز التطبيق المتباين .

٦ – يعرّف ويميّز التطبيق الغامر .

٧ – يعرّف ويميّز التقابل .

٨ – يعرّف التطبيق العكسي ويوجد قاعدته .

٩ – يتعرّف على تركيب تطبيقين .

١٠ – يوجد تركيب تطبيقين .

المقدمة

لمحة تاريخية

يعتبر التطبيق أشمل من الدالة حيث أُعتبر المجال والمجال المقابل مجموعات ليست بالضرورة مجموعات عددية وهو من المفاهيم الأساسية ويعد ليبنز Leibiniz أول من قدم مصطلح «دالة» في القرن السابع عشر واستخدمها سنة ١٦٩٤م، وقدم فاليرو Valeru سنة ١٦٠٤ الدوال المتصلة على فترات مغلقة .

وأول من استخدم رمز القاعدة ص = ت (س)، والذي يرتبط فيه **ص** بالمتغير **س**، هو العالم السويسري لونارد أويلر (١٧٠٧ – ١٧٨٣م)، وخلال هذا القرن تعامل الرياضيون مع الدالة في أكثر من متغير في مفكوك الدوال المثلثية وهي التي تقع تحت ما يطلق عليها الدوال الخاصة Eigen functions

وفي القرن التاسع عشر بدأ ظهور المفهوم الأشمل للتطبيق وهو الذي نسميه الآن بالدالة أو الراسم . وظهرت دلالته في توحيد الرياضيات وتوسعها الكبير، ويمكن أن نأخذه كمثال يبين الطريقة الحديثة في وضع المفاهيم الرياضية على أساس أدق وأشمل .

ومفهوم التطبيق مفهوم موحد للرياضيات وله أنواع متعددة يعطيه إمكانية تطبيق في حالات كثيرة مثل الجبر والهندسة وخصوصاً التحليلية وهندسة التحويلات وحساب المثلثات وغيرها بالاضافة إلى أنه مفهوم اساسي في معظم الرياضيات الحديثة .

خلفية علمية

أهم المفاهيم الواردة في هذه الوحدة هي :

أساليب التعبير عن التطبيق

يمكن أن نعبر عن التطبيق بعدة طرق أو أساليب منها :

١ – قاعدة التطبيق وهي في صورة علاقة رياضية . ٢ – الأزواج المرتبة . ٣ – المخطط السهمي .

٤ – المخطط الجدولي . ٥ – الرسم البياني .

فمثلاً لتكن س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥} والتطبيق ت : س ← ص ومعرف بالقاعدة ت (س) = س^{٣} ، يمكن التعبير عن التطبيق ت بأحد الأشكال التالية :

ت : س ← ص ، س ↤ س^{٣} ؛ أو س $\xleftarrow{ت}$ ص ، ت (س) = س^{٣} ؛

ويمكن التعبير عن التطبيقات بالأزواج المرتبة حيث أ ∈ س يظهر كمسقط أول مرة واحدة وتظهر صورته ب ∈ ص كمسقط ثان .

أي أن ت = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب = ت (أ)}

وبذلك يكون التعبير عن التطبيق السابق ت كأزواج مرتبة كالتالي :

ت = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ٢٧) ، (٤ ، ٦٤)}

كما يمكن التعبير عن التطبيق السابق ت بالمخطط السهمي المرسوم جانباً

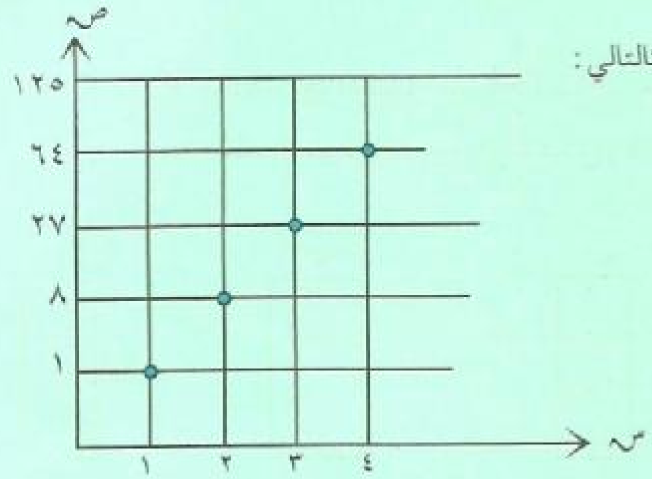
شكل (٢-١)

ويمكن التعبير عنه بالمخطط الجدولي كالتالي :

س	١	٢	٣	٤
ص	١	٨	٢٧	٦٤

شكل (٢-٢)

ويمكن أيضاً التعبير عنه بيانياً كالتالي :



شكل (٢-٣)

هذا الأسلوب ممكن إذا كان المجال والمجال المقابل للتطبيق مجموعات منتهية ، أما إذا كان مجاله ومجاله المقابل مجموعات غير منتهية مثل مجموعات الاعداد (ط ، ص ، ن ، ح) فإننا لا نستطيع التعبير عنه بالشكل السابق ، ولكن يمكن التعبير عنه بيانياً .وأن نختار بعض الأعداد من المجال ونوجد صورها ثم نمثلها على المحاور الإحداثية فيكون تمثيلها مجموعة من النقاط في حالة مجموعات الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية ويكون خطاً في حالة مجموعة الأعداد الحقيقية .

الصورة العكسية للتطبيق (معكوس التطبيق)

إذا كان لدينا علاقة ع من س إلى ص ، فالصورة العكسية لهذه العلاقة هي علاقة من ص إلى س ومعرّفة بجميع الأزواج المرتبة (ص،س) حيث (س،ص) ∈ ع . ونرمز للعلاقة العكسية بالرمز $ع^{-1}$ ؛ أي أن :

$ع^{-1}$ = {(ص ، س) : (س ، ص) ∈ ع} .

ونحصل على التمثيل كازواج مرتبة للعلاقة $ع^{-1}$ وذلك بتبديل مساقط الأزواج المرتبة، مثلاً :

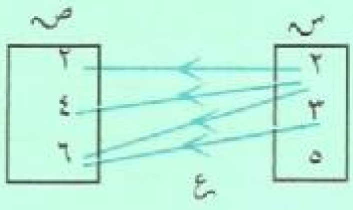
إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٢ ، ٤ . ٦} وع علاقة معرّفة بالعبارة: «س يقسم ص»

س ∈ س ، ص ∈ ص ؛ فإن التعبير عن هذه العلاقة كازواج مرتبة هو ع = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ،

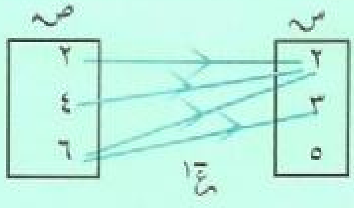
(٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦)} ، إذن $ع^{-1}$ = {(٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣)} ؛

ونحصل على التمثيل السهمي للعلاقة $ع^{-1}$ بعكس اتجاه الأسهم المرسومة في التمثيل السهمي للعلاقة ع

وتقرأ « ص تنقسم على س»

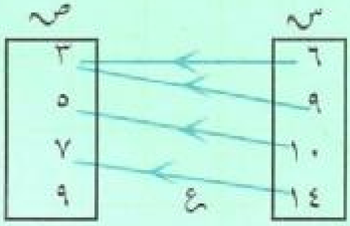


شكل (٢ – ٤)

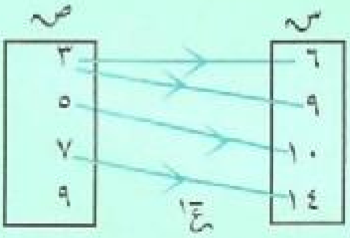


شكل (٢ – ٥)

وبما أن التطبيق هو علاقة بشروط خاصة ؛ فإن للتطبيق صورة عكسية أو معكوس التطبيق ، فمثلاً لتكن ع علاقة معرَّفة من س إلى ص حسب المخطط السهمي المرسوم في الشكل (٢ – ٦)



شكل (٢ – ٦)



شكل (٢ – ٧)

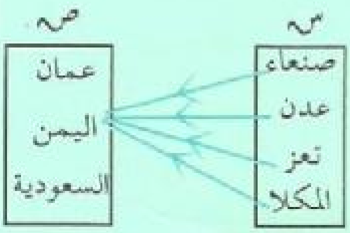
تلاحظ أن هذه العلاقة تمثل تطبيقاً من س إلى ص ، ولكن الصورة العكسية لهذه العلاقة (التطبيق) أي معكوس التطبيق ليس تطبيقاً كما في الشكل (٢ – ٧)؛ أي أن الصورة لأي علاقة هي علاقة بينما الصورة العكسية أو معكوس التطبيق ليس بالضرورة أن تكون تطبيقاً ، حيث نلاحظ أن الصورة العكسية للعنصر ٣ هي ٦ ، ٩، بالإضافة إلى أن العنصر ٩ليس له صورة عكسية .

أنواع التطبيقات

نتناول في هذا الصف بعض أنواع التطبيقات وهي :

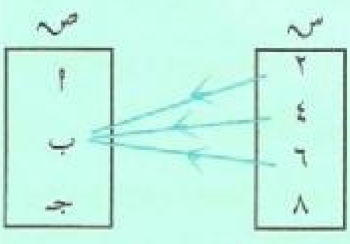
أ) التطبيق الثابت :

يسمى التطبيق ت ثابتاً إذا كانت المجموعة ت (س) مكوّنة من عنصر واحد فقط أي أن ت (س) = أ حيث أ عنصر محدد في المجال المقابل ، أي أن التطبيق ت يكونُ ثابتاً إذا كان مداه مجموعة أحادية ، كما هو موضح في الشكلين (٢ – ٨) ، (٢ – ٩)



شكل (٢ – ٨)

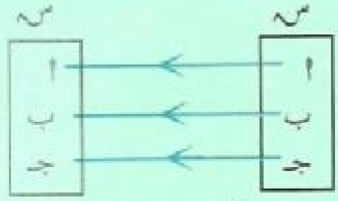
مثلاً: إذا كان التطبيق ت : ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) = ٥ لكل س ∈ ح ؛ فإن هذا التطبيق ثابت ، لأن مداه = { ٥ } وهي مجموعة مكونة من عنصر واحد هو ٥ .



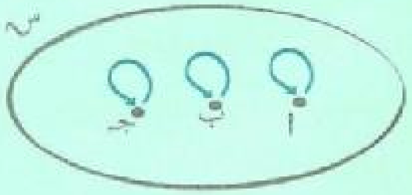
شكل (٢ – ٩)

ب) التطبيق المحايد

يكون التطبيق ت تطبيقاً محايداً إذا كانت المجموعة ت (أ) = أ ، أي أن كل عنصر في المجال يرتبط بنفسه في المجال المقابل كما هو موضح في الشكلين (٢ – ١٠أ ، ب).

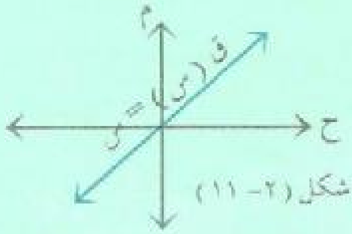


شكل (٢– ١٠أ)



شكل (٢– ١٠ ب)

مثلاً : التطبيق ق : ح ← ح معرّف بالقاعدة ق (س) = س تطبيق محايد ويمثله بيانياً المنصف الأول للمستوى الديكارتي ، وهو خط مستقيم كما هو موضح في الشكل (٢–١١)



شكل (٢– ١١)

جـ) التطبيق المتباين

يسمى التطبيق د : س ← ص متبايناً إذا كانت العناصر المختلفة في ص تمثل صوراً لعناصر مختلفة من س ، أي أنه لا يوجد عنصران مختلفان في س لهما نفس الصورة في ص .

ونعبر عن ذلك رمزياً كالآتي :

$\text{س}_1 \neq \text{س}_2 \Leftarrow \text{د}(\text{س}_1) \neq \text{د}(\text{س}_2)$ $\forall$ $\text{س}_1 ، \text{س}_2 \in \text{س}$ وهذا يكافئ الشرط :

$\text{د}(\text{س}_1) = \text{د}(\text{س}_2) \Leftarrow \text{س}_1 = \text{س}_2$ $\forall$ $\text{س}_1 ، \text{س}_2 \in \text{س}$.

فمثلاً التطبيق ت : ح ← ح المعرّف بالقاعدة ت (س) = س^3 تطبيق متباين .

يمكن أن نبرهن على ذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : $\text{س}_1 ، \text{س}_2 \in$ ح (المجال) $\text{س}_1 \neq \text{س}_2 \Leftarrow \text{س}_1^3 \neq \text{س}_2^3 \Leftarrow \text{ت}(\text{س}_1) \neq \text{ت}(\text{س}_2)$

لأن مكعبى عددين مختلفين مختلفان .

الطريقة الثانية : $\text{ت}(\text{س}_1) = \text{ت}(\text{س}_2) \Leftarrow \text{س}_1^3 = \text{س}_2^3 \Leftarrow \text{س}_1 = \text{س}_2$

الجذران التكعيبيان لعددين متساويين متساويان .

التطبيق ق : ح ← ح والمعرّف بالقاعدة

ق (س) = س^2 ، فإنه ليس متبايناً ، وذلك لأن $\text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}(\text{س}_2) \Leftarrow \text{س}_1^2 = \text{س}_2^2$ ، ولكن $\text{س}_1 = \pm \text{س}_2$ أي أن $\text{س}_1 \neq \text{س}_2$. ولكن عندما يكون التطبيق ت : ط ← ط معرفاً بالقاعدة ت (س) = س^2 فإنه متباينٌ ، وذلك لأن $\text{س}_1 = \pm \text{س}_2$ ولكن – س $\notin$ ط ؛ وبالتالي $\text{س}_1 = + \text{س}_2$

د) التطبيق الغامر :

يسمى التطبيق م : سـ ← صـ غامراً (شاملاً) إذا كان كل عنصر في المجال المقابل (صـ) صورة لعنصر واحد على الأقل من المجال (سـ) ، أي أن المدى هو كل المجال المقابل؛ فمثلاً التطبيق د : ح ← ح والمعرف بالقاعدة د (س) = س٢ ليس غامراً ، وذلك لأن الأعداد السالبة لا تظهر في مدى التطبيق د، أي أن المدى لا يساوي المجال المقابل .

أما التطبيق ق : ح ← ح والمعرف بالقاعدة ق (س) = ٢ س فإنه غامر، وذلك لأن المعادلة ص = ٢س لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية حيث ص ∈ ح (المجال المقابل) ، أي أن س = ص/٢ ، واضح أنه مهما كانت القيمة التي تعطيها للعنصر ص ∈ ح فإن س لها قيمة في ح .

ولكن التطبيق د : ط ← ط والمعرف بالقاعدة د (س) = ٢س ليس غامراً ، وذلك في حالة ص = ٣ فالمعادلة ٢ س = ٣ ليس لها حل في ط ، أي أن ٣/٢ ∉ ط .

هـ) التقابل :

نقول ان التطبيق ت : سـ ← صـ والمعرّف بالقاعدة ت (س) = ص تقابلاً إذا كان لهذه المعادلة حلٌ وحيدٌ لكل ص ∈ صـ .

أي من أجل كل عنصر ص ∈ صـ يوجد عنصر وحيد س ∈ سـ بحيث أن ص = ت (س)

فمثلاً التطبيق هـ : ح ← ح والمعرف بالقاعدة هـ (س) = ٣ س – ١ تقابلاً وذلك لأنه :

أولاً : غامراً : حيث نفرض أن ص ∈ ح (المجال المقابل) فتكون

٣ س – ١ = ص ⟸ ٣س = ص+١ ⟸ س = (ص+١)/٣ لكل ص ∈ ح (المجال المقابل) يوجد حل للمعادلة .

ثانيا : متبايناً : وذلك لأن لكل س١ ، س٢ ∈ ح (المجال) نجد أن :

ت (س١) = ت(س٢) ⟸ ٣س١ – ١ = ٣ س٢ –١ ، ⟸ س١ = س٢

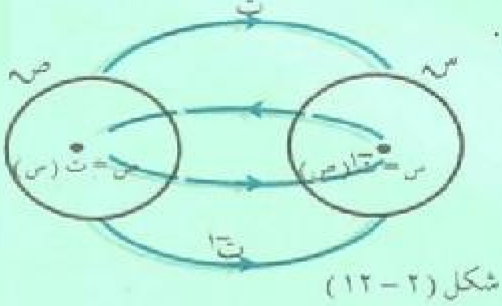
بالإضافة إلى هذه الأنواع هناك أنواعاً أخرى سيتم دراستها في الصف الثاني مثل التطبيق الفردي والتطبيق الزوجي .

التطبيق العكسي :

يكون للتطبيق ت : سـ ← صـ تطبيق عكسيّ إذا كان تقابلاً ، أي أن لكل عنصر ص ∈ صـ يمكن أن نجد عنصراً وحيداً س ∈ سـ بحيث أن ص = ت (س) ، ويرمز للصورة العكسية للعنصر س بالرمز ت⁻¹ (ص) .

ويرمز للتطبيق العكسي بالرمز ت⁻¹ ، وقاعدته ت⁻¹ (ص) = س .

والشكل (٢–١٢) يوضح مفهوم التطبيق العكسي .



شكل (٢ – ١٢)

إذا كان التطبيق ت : سـ $\leftarrow$ صـ تقابلاً فإن :

للتطبيق ت تطبيقاً عكسياً صـ $\leftarrow$ سـ ، رمزه ت$^{-1}$ وقاعدته ت$^{-1}$ (ص) = س .

ونحصل على التطبيق العكسي للمخطط السهمي أو للأزواج المرتبة للتطبيق بعكس اتجاه الأسهم وتبديل المساقط للأزواج المرتبة .

ولكي نوجد قاعدة التطبيق العكسي نحل المعادلة ت (س) = ص ونوجد س بدلالة ص لنحصل على قاعدة التطبيق العكسي ثم نضع س بدلاً عن ص والعكس .

تساوي تطبيقين :

إذا كانت سـ، صـ أي مجموعتين وكان ت$_1$: سـ $\leftarrow$ صـ ، ت$_2$ = سـ $\leftarrow$ صـ

فإن ت$_1$ = ت$_2$ اذا وفقط إذا كان لكل س $\in$ سـ فان ت$_1$ (س) = ت$_2$ (س)

ملحوظة :

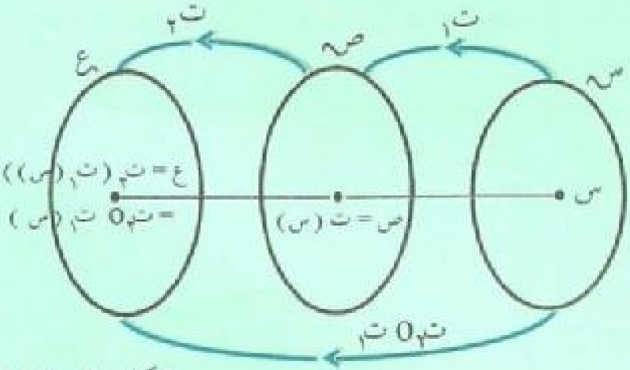
ت$_1$ = ت$_2$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ س $\in$ سـ بحيث ت$_1$(س) = ت$_2$(س) .

ت$_1$ $\neq$ ت$_2$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ س $\in$ سـ بحيث ت$_1$(س) $\neq$ ت$_2$(س) .

تركيب تطبيقين :

ليكن ت$_1$: سـ $\leftarrow$ صـ ، ت$_2$: صـ $\leftarrow$ ع تطبيقين ، نعرف تركيب تطبيقين، ت$_2$ o ت$_1$: سـ $\leftarrow$ ع بالعلاقة (ت$_2$ o ت$_1$) (س) = ت$_2$ (ت$_1$ (س)) لكل س $\in$ سـ . أي أن العنصر س $\in$ سـ نُقل بواسطة التطبيق ت$_1$ إلى ت$_1$ (س) $\in$ صـ ثم ينقل بواسطة ت$_2$ الى العنصر ت$_2$ (ت$_1$ (س)) $\in$ ع

والشكل (٢ – ١٣) يوضح تركيب تطبيقين ت$_1$ ، ت$_2$



شكل (٢ – ١٢)

ملحوظة : يقال أن التركيب ت$_2$o ت$_1$ مُعَرف إذا كان مدى (ت$_1$) $\subset$ مجال ت$_2$

مثال : ليكن ق (س) = س + ١ ، س $\in$ ح

م (س) = س^2 ، س $\in$ ح

فإن (م o ق) (س) = م (ق (س)) = م (س + ١) = (س + ١)^2 .

وبالتالي فإن (م o ق) (٣) = (٣ + ١)^2 = ١٦ ، أما (ق o م) (س) = ق (م (س)) = ق (س^2) = س^2 + ١ .

أي أن (ق o م) (٣) = ٣ × ٣ + ١ = ١٠ ، تلاحظ أن : (م o ق) $\neq$ (ق o م) .

المصطلحات والرموز الواردة في هذه الوحدة

Function	التطبيق
Range	المدى
Domain	المجال
Co-domain	المجال المقابل
Representation of Functin	التعبير عن التطبيق
Ordered Pairs	الأزواج المرتبة
Graph of function	تمثيل التطبيق بيانياً
Inverse of function	معكوس التطبيق
Constant function	التطبق الثابت
Identity function	التطبيق المحايد
One -to -one function	التاطبيق المتباين
Onto function	التطبيق الغامر
Bijection, (one-to- one and onto function)	التقابل
Inverse image of an element	الصور العكسية لعنصر
Inverse image of subset	الصور العكسية لمجموعة جزئية
Inverse relation	العلاقة العكسية
Composition of two functions	تركيب تطبيقين
Inverse function (f^{-1})	التطبيق العكسي($ت^{-1}$)

المراجع

١ – نظلة حسن أحمد الخضر : أصول تدريس الرياضيات ، الطبعة الثانية ، الناشر : عالم التب ، القاهرة ، ١٩٧٤ .

٢ – سمير بيشتز : نظرية الفئة ، الطبعة الاولى : الناشر : الدار الدولية للنشر والتوزيع ، القاهرة ، ١٩٩٤

٣ – منير وسى عبد الحميد ابراهيم : التفاضل والتكامل ، الطبعة ، الناشر :

٤ – محمد أبو صالح – عبد الرحيم القواسمه : التفاضل والتكامل ، الطبعة الثانية ماضل شطنارو الناشر : مؤسسة مصري للتوزيع ، لبنان ، ١٩٨٤

٥ – الرياضيات كتاب مدرسي للصف الثالث (معاهد معلمين) – اليمن

٦ – Self study in Mo th Kom ufjct K .K bubayematics 2001

توجيهات طرائقية عامة

(١) يؤكد المدرس عند المراجعة على ما يلي :

- تثبيت تعريف التطبيق كحالة خاصة لمفهوم العلاقات، كما وأن كل علاقة ليست تطبيقاً ولكن كل تطبيق علاقة.
- يجب أن يؤكد المدرس على أن العلاقة التي تؤخذ من حاصل ضرب المجموعتين سـ، صـ ، أي من (سـ × صـ) لكي تكون تطبيق يجب أن يظهر كل س ∈ سـ مرة واحدة كمسقط أول في الأزواج المرتبة.
- تعطى أمثلة مختلفة لمخططات سهمية لتوضح مفهوم التطبيق، وأن كل عنصر من عناصر المجال يخرج منه سهم واحد إلى أي عنصر من عناصر المجال المقابل .
- ضرورة إبراز كل الأساليب التي نعبر بها عن التطبيق: من مخططات سهمية، أوبيانية، أو جداول، أو أزواج مرتبة ، أو علاقات جبرية .
- الاهتمام بالمصطلحات المستخدمة في هذا الموضوع وهي المجال - المجال المقابل - المدى - قاعدة التطبيق وكذلك الرمز للتطبيق مثل : د : سـ ⟵ صـ ، وقراءته .
- ينبه المدرس طلابه إلى ضرورة الانتباه إلى المجال والمجال المقابل عند تمثيل التطبيق بيانياً للاختلاف الذي سيكون عليه التمثيل بناءً على المجال والمجال المقابل عندما تكون مجموعات منتهية أو مجموعات عددية غير منتهية مثل ط ، صـ، ح

(٢) يؤكد المدرس على أن كل تطبيق له صورة عكسية، ولكن ليس بالضرورة أن يكون تطبيقاً، بل قد يكون علاقة .

(٣) يؤكد على أننا نرمز لمعكوس التطبيق ت بالرمز $ت^{-1}$ لمعكوس التطبيق ق ، بالرمز $ق^{-1}$ . . . وهكذا .

(٤) لإثبات أن معكوس التطبيق تطبيق يتبع مايلي :

١- إيجاد الصور العكسية لجميع عناصر المجال المقابل عندما يكون التطبيق ومجاله المقابل مجموعات منتهية والتأكد أن كل عنصر له صورة عكسية واحدة .

٢- إذا كان التطبيق ازواجاً مرتبة فإن معكوس التطبيق ازواج مرتبة بعد تبديل مساقطها دون أن يظهر المسقط الأول بعد التبديل أكثر من مرة .

(٥) يكتفى لاثبات أن معكوس التطبيق ليس تطبيقاً اما أن نوجد أن هناك صورتين عكسيتين في المجال لعنصر من مجاله المقابل، أو ان نوجد عنصراً في المجال المقابل ليس له صورة عكسية في المجال .

(٦) يمكن الأخذ بأمثلة من غير ما وردت في الكتاب لتوضيح مفهوم التطبيق الثابت مثل : اختيار ثلاثة طلاب في الصف تبدأ أسماؤهم بحرف معيّن على أن تكون العلاقة بين أسماء الطلبة والحرف الأول لكل منهم أو اختيار علاقة تربط ثلاث مدن يمنية مع مجموعة دول منها اليمن وتكوين العلاقة بين مدينة تابعة إلى أي دولة . أو أي أمثلة أخرى شبيهة بذلك .

(٧) يتم التركيز عند تدريس التطبيق المطابق أن يتكوّن التطبيق من مجموعة إلى نفسها .

(٨) يعوّد المدرس طلابه عند إثبات أن التطبيق متباين أن يستخدم أحد الشرطين الخاصين بالتباين :

(أ) أما $\forall$ $س_1$ ، $س_2 \in س$ ، $س_1 \neq س_2 \Leftarrow د(س_1) \neq د(س_2)$ أو (ب) $د(س_1) = د(س_2) \Leftarrow س_1 = س_2$

وليس بالضرورة استخدام الشرطين معاً .

(٩) لإثبات أن التطبيق ليس متبايناً يكتفى بنقض أحد الشرطين ، أي أن الصورة العكسية لأحد عناصر المدى هما عنصران من المجال .

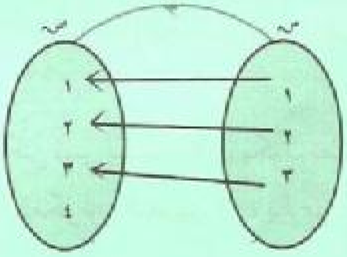
(١٠) لمعرفة أن يكون التطبيق غامراً يؤكد المدرس على ما يلي :

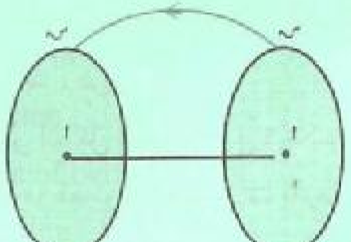
– البحث في تساوي المدى والمجال المقابل ، وهذا يعني أن كل عنصر في المجال المقابل عبارة عن صورة على الأقل لعنصر واحد من المجال .

– لإثبات أن التطبيق ليس غامراً علينا أن نبيّن أن : المدى $\neq$ المجال المقابل ، أي أن نوجد عنصراً في المجال المقابل ليس له صورة عكسية في المجال .

(١١) من أجل إثبات أن التطبيق ليس تقابلاً يعوّد المدرس الطلبه على أن يبينّوا أنه غير غامر أو غير متباين . ويكتفي بإحداهما وليس كليهما .

(١٢) بعد تدريس أنواع التطبيقات يفضل أن يوجه المدرس طلابه إلى التعرف على أوجه الاختلاف بين الأنواع من خلال رسم عدة أشكال لمخططات سهمية لتطبيقات مختلفة مثل:





على أن يبيّن نوع كل منها من خلال خصائص الشكل مثلاً شكل (٢ – ١٤) متباين ليس غامراً وشكل (٢–١٥) متباين غامر أحادي ثابت .

(١٣) التركيز على أن يكون للتطبيق تطبيق عكسي يجب أن نثبت أن التطبيق المعطى تطبيق تقابل (متباين وغامر) .

(١٤) الاهتمام بخطوات إيجاد قاعدة التطبيق العكسي كما وردت في كتاب الطالب

(١٥) إعطاء أمثلة متنوعة للتأكيد على أن تركيب تطبيقين لا يتم إلا إذا كان مدى الأول مجموعة جزئية من المجال الثاني .

(١٦) على المدرس أن يبّين لطلابه أن تركيب تطبيقين غير تبديلي و إن وجدت حالات خاصة يكون فيها تركيب تطبيقين تبديلياً .

(١٧) من الممكن أن يعطى المدرس فكرة أو تمارين تؤكد أنه :

١– إذا كان التطبيقان متباينين ، فإن تركيبهما متباين . ٢– إذا كان التطبيقانغامرين ، فإن تركيبهما غامر .

٣– إذا كان التطبيقان تقابلين، تقابل فإن تركيبهما تقابل .

(١٨) الاهتمام بإعطاء تمارين ومسائل كافية نهاية كل حصة لتثبيت مفاهيم البند واكتساب المهارات الضرورية موضوع البند .

٢ : ١ مراجعة

عدد الحصص : حصتان .

الأهداف ١ – يثبّت مفهوم التطبيق .

٢ – يعبّر عن التطبيق بأساليب مختلفة.

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : مراجعة التطبيق

الحصة الثانية : أساليب التعبير عن التطبيق

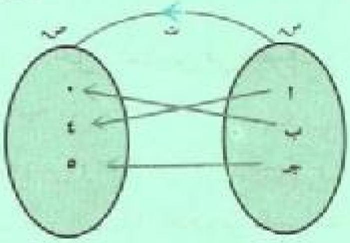
إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ع١ ، ع٣ تمثلان تطبيقين .

[٢] المجال = {−٢ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، المدى = {٠ ، ١ ، ٣ ، −١}

[٣] أ) ت = {(أ ، ٤) ، (ب ، ٠) ، (جـ ، ٥)} كأزواج مرتبة ،

(ب)



جـ) المجال = س

المدى = {٠ ، ٤ ، ٥}

[٤] أ) من تعريف التطبيق ، ب) قاعدة التطبيق ت (س) = ٥س

جـ) المدى = {١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠} = المجال المقابل

[٥] أ) ت (٢) = ٧ ، ت (٤) = ١١ ، ت (٦) = ١٥ ، ت (٨) = ١٩

ب) المدى = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ...}

[٦] أ) ، (جـ) ، (د) تطبيقات ؛ ب) ليس تطبيقاً ، لأن ت (−٥) = −٤ ∉ ط

[٧]

[٨] نختار أي ثلاثة أعداد من المجال (ح) ونوجد صورها ثم نحدد النقاط في مستوى الإحداثيات ، نصل هذه النقاط فيتكون لدينا مستقيم .

[٩]

س	٥	٦	٤	٧
ت (س)	٣	٤	٢	٥

[١٠] المدى = {٣ ، ٠ ، −١} ، ويمثل م (س) = $س^2$ − ١ جدولياً كالتالي :

س	−٢	−١	٠	١	٢
م (س)	٣	٠	−١	٠	٣

٢ : ٢ الصورة العكسية للتطبيق (معكوس التطبيق)

عدد الحصص : حصتان .

الأهداف

- يتعرف على مفهوم الصورة العكسية لعنصر .
- يوجد الصورة العكسية لعنصر .
- يوجد الصورة العكسية لمجموعة جزئية من المجال المقابل.
- يوجد معكوس تطبيق .
- يُبين متى يكون معكوس التطبيق تطبيقاً .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : الصورة العكسية لعنصر . ولمجموعة جزئية من المجال المقابل

الحصة الثانية : معكوس التطبيق

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال مشاركة الطلبة ومتابعة حل التمارين في الصف والواجب المنزلي ويعطى السؤال التالي كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثانية :

أوجد معكوس التطبيق ت والمعرّف بالقاعدة ت (س) = ٢ س + ٣ حيث

ت { ٠ ، ٢ ، ٣ } ← {٣ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ } ،ثم بيّن إن هذا المعكوس ليس تطبيقاً.

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] (أ) ا ليس له صورة عكسية ، ت$^{-1}$ (ب) = ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ؛ ت$^{-1}$ (جـ) = ٧ .

(ب) ت$^{-1}$ ({ب ، جـ}) = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧} (جـ) معكوس التطبيق ت$^{-1}$ ليس تطبيقاً .

[٢] (أ) ق$^{-1}$ (ب) = ا ، جـ ، ء ، ق$^{-1}$ (جـ) لا يوجد .

(ب) ق = {(ا ، ب) ، (ب ، ا) ، (جـ ، ب) ، (ء ، ب) } .

(جـ) ق$^{-1}$ = {(ب ، ا) ، (ا ، ب) ، (ب ، جـ) ، (ب ، ء)} ق$^{-1}$ ليس تطبيقاً .

[٣] هـ$^{-1}$ (٥) = ٤ ، هـ$^{-1}$ (٣) = ٢ ، هـ$^{-1}$ (١٠) = ٩ ،

وبما أن صورة كل عنصر في المجال المقابل هي عنصر واحد في المجال ∴ معكوس التطبيق هـ تطبيقاً .

[٤] أ) ت$^{-1}$ (١) = $\frac{٢}{٣}$ ، ت$^{-1}$ (٥) = ٢ ، ت$^{-1}$ (٨) = ٣ .

ب) ت ليس تطبيقاً لأن العنصر (١) ليس له صورة عكسية في المجال (ط)

[٥] أ) ت$^{-1}$ (٧) = ٤ ، ت$^{-1}$ (٣) = ٠ ، ت$^{-1}$ (-٢) = -٥ ، ب) = {س : س ∈ ح ، -٨ ≤ س ≤ ٩}

ب) ت$^{-1}$ ({س : س ∈ ح ، -٥ ≤ س ≤ ١٢}) = {س : س ∈ ح ، -٨ ≤ س ≤ ١٢}

[٦] د (٢٨) = -٧ ، ٣

[٧] أ) هـ$^{-1}$(٣) = ٧ ، هـ$^{-1}$(٦) = ١٣ ، هـ$^{-1}$(٠) = ١ ،

ب) هـ$^{-1}$({ص : ص ∈ ط ، ≤ ٥}) = ({ص : ص ∈ ط ، ص ≤ ٢})

جـ) هـ$^{-1}$({س : س ∈ ط ، ٣ ≤ س ≤ ٩}) = ({س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٤}

ء) س = $\frac{\text{ص}-١}{٢}$ وعندما ص = ٢ يكون س = $\frac{١}{٢}$

∴ العنصر ٢ ليس له صورة عكسية في المجال (ط) .

∴ معكوس التطبيق هـ ليس تطبيقاً .

٢ : ٣ أنواع التطبيقات

عدد الحصص : ٤ حصص .

الأهداف

- يعرّف التطبيق الثابت ويميزه .
- يعرّف التطبيق المطابق ويميزه .
- يعرّف التطبيق المتباين ويميزه .
- يعرّف التطبيق الغامر ويميزه .
- يعرّف التطبيق التقابل ويميزه .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : التطبيق الثابت والتطبيق المطابق

الحصة الثانية : التطبيق المتباين

الحصة الثالثة : التطبيق الغامر

الحصة الرابعة : التطبيق التقابل .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ويعطى السؤال التالي كخطوة تقويم في نهاية الحصة الرابعة :

ليكن م : ح ← ح تطبيقاً حيث م(س) = س + ٨ ، هل هذا التطبيق تقابل ؟ ولماذا ؟

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] م$_{١}$: ثابت وغير تقابل

م$_{٢}$: متباين ، غامر ، تقابل .

م$_{٣}$: متباين ، غامر ، تقابل .

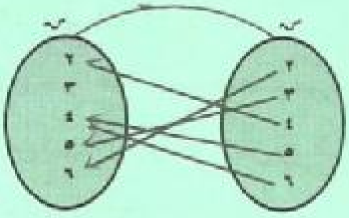
م$_{٤}$: غير متباين وغير غامر وغير تقابل

م$_{٥}$: متباين فقط .

م$_{٦}$: متباين ، غامر ، تقابل .

[٢] المدى = {٤٥٦} ، ق تطبيق ثابت

[٣]



[٤] ت = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ١٢)} متباين فقط

[٥] د١ : متباين وغير غامر . ، د٢ : غير غامر وغير متباين .

[٦] التطبيق تقابل وبيانه = {(ب ، ب) ، (جـ ، ء) ، (ء ، جـ)}

[٧] أي تطبيق يحقق تعريف المتباين والغامر في (أ) ، (ب)

اما (جـ) لا يمكن رسم تطبيقٌ تقابل من ل ← م لعدم تساوي عدد عناصر المجموعتين ل ، م

[٨] المدى = {٣ ، ٨ ، ٢٤ ، ٣٥} ، د : متباين وغير غامر

[٩] ق١ متباين وغير غامر . ، ق٢ : متباين وغير غامر .

[١٠] سـ = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} تعدل صـ إلى {ص : ص ∈ ط، ٦ ≥ ص ≥ ٩}

صـ = {ص : ص ∈ ط ، ٦ ≥ ص ≥ ٩} = {٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

د : سـ ← صـ غامر ومتباين فهو تقابل .

[١١] ق : ط ← ط متباين وغير غامر ، فهو غير تقابل .

ق : صـ ← صـ غير متباين وغير غامر ، فهوغير تقابل .

٢ : ٤ التطبيق العكسي

عدد الحصص : ٣ حصص .

الأهداف

- يعّرف التطبيق العكسي .
- يوجد قاعدة تطبيق عكسي .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : مفهوم التطبيق العكسي .

الحصة الثانية :قاعدة التطبيق العكسي.

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، ويعطى السؤال التالي كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثالثة :

ليكن ت : ح ← ح معرّفاً بالقاعدة ت (س) = ٢ س + ٣

أثبت أن للتطبيق ت تطبيقاً عكسياً ثم أوجد قاعدته .

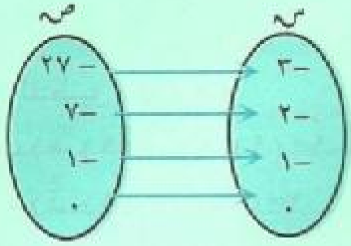
إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] شكل (٢ –٢٣ جـ) فقط تطبيق عكسي .

[٢] أ) $\text{ت}^{-1}(٠) = ٠$ ، $\text{ت}^{-1}(-١) = -١$ ، $\text{ت}^{-1}(-٨) = -٢$

ب) لإثبات أن د تقابل نبين أنه متباين وغامر ،

جـ)



[٣] ر (س) تطبيق تقابل له تطبيق عكسي قاعدته :

$\text{ر}^{-1}(\text{س}) = \text{س} + ١$

[٤] أ) $\text{ت}^{-1}(٥) = \frac{٩}{٢}$ ، $\text{ت}^{-1}(\frac{١}{٢}) = ٠$ ، $\text{ت}^{-1}(-٣) = (\frac{-٧}{٢})$ ب) $\text{ص} = \frac{٢\text{س}-١}{٢}$

[٥] ت تقابل لانه متباين وغامر وقاعدته ت^{-1} هي $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س} + ٨}$

[٦] أ) $\text{ت}^{-1}(\text{س}) = ٢\text{س} - ١٦$

ب) $\text{ت}^{-1}(\text{س}) = \frac{٦-\text{س}}{٥}$

٢ : ٥ تركيب تطبيقي

عدد الحصص : ٣ حصص .

الأهداف

- يعرّف تركيب تطبيقين .
- يوجد تركيب تطبيقين .
- يذكر متى يكون تركيب تطبيقين تبديلياً وتجميعياً .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : تركيب تطبيقين .

الحصة الثانية : خاصيتا التبديل والتجميع لتركيب تطبيقين

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ويعطى السؤال التالي كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثالثة :

إذا كانت $\text{ت}_١ : \text{ط} \leftarrow \text{ط}$ ، حيث $\text{ت}_١(\text{س}) = \text{س} + ١$ ، $\text{ت}_٢ : \text{ص} \leftarrow \text{ص}$ حيث $\text{ت}_٢(\text{س}) = ٢\text{س}$

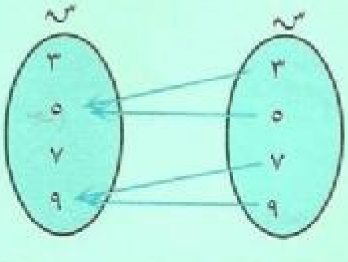
أ) أوجد $\text{ت}_١ \circ \text{ت}_٢(٣)$ ب) بيّن أن $\text{ت}_١ \circ \text{ت}_٢$ غير تبديلي .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) (ق$_2$ ∘ ق$_1$) ممكن ، ب) مجال (ق$_1$ ∘ ق$_2$) = س ، جـ) مدى (ق$_1$ ∘ ق$_2$) = {١٣ ، ١١}

[٢] أ) (ق$_1$ ∘ هـ$_2$) (٣) = ٥ ، (هـ$_2$ ∘ ق$_1$) (٧) = ٩

ب)



المخطط السهمي للتطبيق (ق ∘ هـ)

جـ) : (ق ∘ هـ) (٩) = ق (هـ (٩)) = ق (٩) = ٩ ،

(هـ ∘ ق) (٩) = هـ (ق (٩)) = هـ (٩) = ٩

نعم (ق ∘ هـ) (٩) = (هـ ∘ ق) (٩)

[٣] أ) (س ∘ هـ) (٥) = ١٨ ، ب) (ق ∘ س) (−٣) = −٨ ،

جـ) (س ∘ س) (٦) = ٥٤ ، د) (ت ∘ ق) (٢س) = ٦ س + ٤ ،

هـ) (س ∘ ت) (م+١) = ٩م + ١٢ ، و) [س ∘ ق ∘ ت] (٢) = ٢٤

[٤] أ) (ت$_1$ ∘ ت$_2$) (٢) = ٨ ، (ت$_2$ ∘ ت$_1$) (٥) = ٥٠ ،

(ت$_1$ ∘ ت$_2$) (س+٣) = ٢ (س+٣)^2 ، وبالمثل يمكن إيجاد (ت$_2$ ∘ ت$_1$)

ب) (ت$_1$ ∘ ت$_2$) (س) = ت$_1$ (ت$_2$ (س)) = ت$_1$ (س^2) = ٢س^2

(ت$_2$ ∘ ت$_1$) (س) = ت$_2$ (ت$_1$ (س)) ، = ت$_2$ (٢س) = ٤س^2 ، تركيب ت$_1$ ، ت$_2$ غير تبديلي

[٥] (ق ∘ هـ) (س) = ٥ س^2 + ١ ، (هـ ∘ ق) (س) = (٥ س + ١)^2

[٦] أ) $\frac{\text{س} - ١٥}{١٠}$ ب) $\frac{\text{س} - ١٢}{١٠}$

٢ : ٦ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الهدف

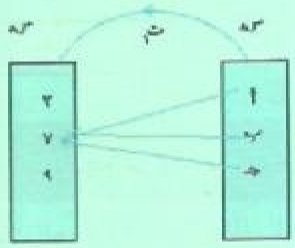
يهدف هذا الدرس إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة

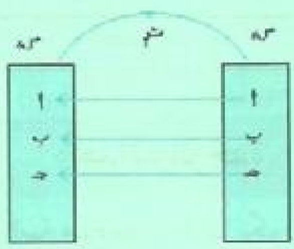
يعطى هذا الاختبار ليقيس أهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

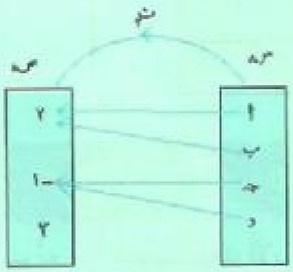
رقم السؤال	١	٢	٣	٤
رقم الهدف	٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧	٢ ، ٣ ، ٨	٩ ، ١٠	١ ، ٢

الاختبار

١) بيّن نوع التطبيقات المعرفة بالمخططات السهمية الآتية :







٢) ليكن ق : ط ← ط تطبيقاً معرّفاً بالقاعدة ق (س) = ٤ س + ٣

أ) أوجد ق$^{-1}$ (٣) ، ق$^{-1}$ (٧) ، ق$^{-1}$ (٥٠)

ب) هل يوجد تطبيق عكسي لهذا التطبيق ؟بين السبب ، ثم أوجد قاعدته إن وجد .

٣) ليكن التطبيق ق : ح ← ح والمعرّف بالقاعدة ق (س) = س^{2} + ٥ ،

والتطبيق د : ح ← ح والمعرّف بالقاعدة د (س) = س

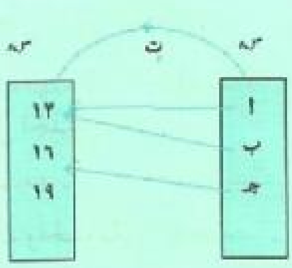
أ) هل (ق ∘ د) = (د ∘ ق) وضح ذلك .   ب) أوجد (ق∘ د) (٧) .

٤) يمثل المخطط السهمي التالي التطبيق ت : س ← ص

أ) أوجد مدى هذا التطبيق

ب) اكتب بيان التطبيق ت كأزواج مرتبة

جـ) أوجد ت$^{-1}$ (١٣) ، ت$^{-1}$ (١٩) .



الوحدة الثالثة

القوى والجذور

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٣ – ١	القوى	٣
٣ – ٢	الجذور والأسس النسبية	٣
٣ – ٣	تبسيط الجذور	١
٣ – ٤	جمع وطرح الجذور	١
٣ – ٥	ضرب وقسمة الجذور	٢
٣ – ٦	حل المعادلات الأسية والجذرية	٤
٣ – ٧	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١٥

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرّف القوى (الأساس والأس) .

٢ – يذكر قوانين القوى الصحيحة الموجبة .

٣ – يوجد نواتج العمليات على مقادير عددية بصورة مختصرة باستخدام قوانين القوى الصحيحة الموجبة .

٤ – يعرّف القوة الصفرية .

٥ – يعرّف الأس الصحيح السالب .

٦ – يذكر قوانين القوى الصحيحة .

٧ – يتعرّف على مدلول الجذر النوني ($\sqrt[3]{27}$) .

٨ – يوجد ناتج جذر مقادير عددية أوجبرية .

٩ – يعرّف الأسس النسبية

١٠ – يبسّط الجذور .

١١ – يجرى العمليات على الجذور

١٢ – يعرّف المرافق ويستخدمه .

١٣ – يحل المعادلات الأسية والجذرية .

المقدمة

لمحة تاريخية

تفوق علماء العرب والمسلمين في الرياضيات في العصور الوسطى، وذلك بمقدرتهم الفائقة على جمع أفضل النتائج الرياضية التي وصل إليها اليونان والهنود، وإخراجها إلى الوجود بعد تفسيرها وإدخال بعض التعديلات الضرورية عليها . ولقد قادت هذه الطريقة العلمية البحتة علماء العرب والمسلمين إلى ابتكار كثير من النظريات التي بقيت الأساس للرياضيات المعاصرة التي تستخدم في مدارسنا وجامعاتنا .

والمسلمون والعرب لهم دور كبير في إرساء علم الجبر، وقد قاموا بإسهامات ذات قيمة كبيرة في تطور علم الجبر. ومن هؤلاء العلماء نذكر الخوارزمي والكرخي ، اللذين نفصّل بعض أعمالهم فيما يلي :

١ – **محمد بن موسى الخوارزمي** (١٦٤ – ٢٣٥ هـ) (٧٨٠ – ٨٥٠ م) . حيث ألف العديد من الكتب الأ أن أشهرها كتابه "الجبروالمقابلة" الذي يعتبر مصدراً أساسياً للعرب والغرب في الجبر . وقد قسّم الخوارزمي الكميات الجبرية إلى ثلاثة أنواع :

جذر يقصد به (س) ويدل على المجهول (أو ما نسمية الآن المتغير)

مال يقصد به ($س^2$) ويدل على مربع المجهول (أي مربع المتغير)

كعب يقصد به مضروب المال × الجذر (أي × $س^3$)

ومال المال ($س^4$) . ومال الكعب ($س^5$) ، وكعب الكعب ($س^6$).

والمفرد هو الكمية الخالية من س (الحد المطلق)

ولقد استخدم جزءاً من الجذر ليدل على $\frac{1}{س}$ وجزء المال ليدل على $\frac{1}{س^2}$ وهكذا . . .

وقد عالج الخوارزمي كيفية استخراج الجذر التربيعي بطريقة الهنود، ومن ثم وضع طريقة أخرى باستخدام الأصفار فمثلاً :

$$\sqrt{أ} = \frac{1}{10^{م}}\sqrt{أ \times 10^{2م}}$$

وبقدر ما يزداد عدد الأصفار بقدر ما تكون قيمة الجذر أقرب إلى الصحة، وعلى سبيل المثال

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2 \times 10^{2 \times 3}}}{10^{3}} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000} = \frac{1414}{1000} = 1.414$$

كما كان الخوارزمي على دراية بقواعد إجراء عمليتي ضرب وقسمة الجذر، ومنها ضرب الجذور على الصورة:

$$\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ ب}$$

اما قسمة الجذور فهي على الصورة : $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$

يقول الخوارزمي في القسمة :

إن أردت أن تقسم جذرتسعة على جذر أربعة فإنك تقسم تسعة على أربعة فيكون أثنين وربعاً . فجذر ها هو ما يصيب الواحد وهو واحد ونصف : $\frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٤}} = \sqrt{\frac{٩}{٤}} = ١\frac{١}{٢}$.

كما ذكر في بعض كتبه ان $\frac{١}{٢}\sqrt{٩} = \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \frac{٣}{٢}$

٢) **ابو بكر محمد بن الحاسب الكرخي** : (٠٠٠ – ٤٢١هـ) (٠٠٠ – ١٠٢٠م) ألف الكرخي عدة كتب في الحساب . ومن أهم الأفكار الرياضية التي ابتكرها أو استخدمها في مؤلفاته نذكر ما يلي :

– عمل دراسة منظمة للمقادير الجبرية المرفوعة لاسس مختلفة ، ودرس المتتاليات مثل :

$س ، س^{٢} ، س^{٣} ، س^{٤} ، \ldots$ و $\frac{١}{س} ، \frac{١}{س^{٢}} ، \frac{١}{س^{٣}} ، \frac{١}{س^{٤}} ، \ldots$. واستنتج أن :

$\frac{١}{س} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{س^{٢}}$ ، $\frac{١}{س^{م}} \times \frac{١}{س^{ه}} = \frac{١}{س^{م+ه}}$ ، $\frac{١}{س^{م}} \times س^{ه} = \frac{س^{ه}}{س^{م}} = س^{ه-م}$ ، ... الخ.

– حسّن الكرخي القانون المعروف لإيجاد الجذر التقريبي للأعداد التي لا يمكن إيجاد جذورها مثل :

$م = ب^{٢} + ج$ ، وحيث قال إن : $\sqrt{م} = ب + \frac{١}{٢ب + ١}$ فمثلاً :

$٧ = ٤ + ٣ \Leftarrow م = ب^{٢} + ج \Leftarrow م = ٧ ، ب = ٢$ ج $= ٣$ ينتج أن

$\sqrt{٧} = ٢ + \frac{٣}{٤ + ١} = ٢\frac{٣}{٥} = ٢,٦$

أما إذا كان ب = ج أو ب > ج فإن $\sqrt{م} = ب + \frac{ج}{٢ب}$ فمثلاً :

$١٠ = ٣^{٢} + ١ \Leftarrow م = ١٠ ، ب = ٣ ، ج = ١$

$\therefore \sqrt{١٠} = ٣ + \frac{١}{٦} = ٣\frac{١}{٦} = ٣,١٦$ ، والقيمة المتفق عليها هي ٣,١٦٢ .

– استنبط قانوناً جديداً لايجاد الجذر التربيعي وذلك من خلال العلاقة :

$\sqrt{ا} = ب + \frac{ا - ب^{٢}}{ا - ٢ب}$ فمثلاً : $\sqrt{١٧} = ٤ + \frac{١٧ - ١٦}{٩} = ٤,١١١١١١٠٠$

والقيمة في الجدول الرياضي ٤,١٢٣٠٦

– ابتكر طريقة لجمع وطرح الجذور الصماء :

$\sqrt{ا} + \sqrt{ب} = \sqrt{ا + ب \pm ٢\sqrt{اب}}$ فمثلاً :

$\sqrt{٣} + \sqrt{١٢} = \sqrt{٣ + ١٢ + ٢\sqrt{٣٦}} = \sqrt{١٥ + ١٢} = \sqrt{٢٧} = ٣\sqrt{٣}$.

وبعد أن ذكرنا بشئ من التفصيل عن الخوارزمي والكرخي ، نقوم بجولة سريعة حول بعض العلماء الآخرين ، يعتبر ابو الحسن بن احمد النسوي أول من أوجد طريقة لاستخراج الجذر التكعيبي، ثم شرح أبو الوفاء البوزجاني كيفية استخراج الجذور التكعيبية والرباعية والسباعية، ويعتبر الكاشي أول من أشار إلى أسلوب

استخراج الجذور التكعيبية، وأعطى قيمة الجذر على الأساس الآتي :

$$\sqrt[\text{د}]{\text{ا}^{\text{د}}+\text{ب}} \approx \text{ا} + \frac{\text{ب}}{(\text{ا}+1)^{\text{د}} - \text{ا}^{\text{د}}}$$

وعندما $\text{د} = 2$: $\sqrt{\text{ا}+\text{ب}} \approx \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}+2\text{ب}}$ وهو ما أشار إليه الكرخي .

ولا ننسى دور الاغريق في علم الجبر ففي الكتاب العاشر عرض إقليدس وبرهن العلاقات الآتية هندسياً :

1) $\sqrt{\text{ا}} \pm \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{ا}+\text{ب} \pm 2\sqrt{\text{ا}\text{ب}}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{\text{ا}} \pm \sqrt{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{ا}} \pm \sqrt{\text{ب}}}{\text{ا} - \text{ب}}$

3) $\sqrt{\text{ا}+\sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\frac{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\text{ا}-\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}}}{2}}$

اما العلماء العرب، فقد قالوا بأن هذه التحويلات تقابلها عمليات حسابية وأوضحوا ذلك بأمثلة نذكر منها

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 \pm \sqrt{320}} \text{ ، } \sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1$$

$$\sqrt{\sqrt{8} \pm \sqrt{6}} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\,4 \pm \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{12} \pm \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{27} \pm \sqrt{24}} = \sqrt{51 \pm \sqrt{2592}}$$

نحصل على التحويل الأخير بسهولة لوكتبنا الأول على الشكل الآتي :

$$\sqrt[4]{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{\sqrt{9} \pm \sqrt{8}}$$

وهناك عند الكرخي تحويلات اخرى منها : $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$ $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$.

ولقد اعتقد الفيثاغوريون الأوائل أن لكل رقم ميزة خاصة به، وأنه ليس هناك شيء في الكون الأ يمكن التعبير عنه برقم مضبوط به (منته) بلا تقريب . غير أنهم وجدوا ان قطر المربع الذي ضلعه الوحدة الواحدة لا يمكن قياسه بالضبط وهذا يعني أن $\sqrt{2}$ لا يمكن ان يكتب بشكل نسبة بين عددين صحيحين وهذه كانت البداية لاكتشاف الأعداد غير النسبية .

خلفية علمية

– تستخدم الأسس (القوى) للتعبير عن تكرار ضرب العوامل نفسها وباستخدام الأسس يمكننا كتابة مقادير جبرية أو عددية بصورة مختصرة إذ تسهل الأسس كتابة العمليات الحسابية والأعداد فبدلاً أن نكتب ١٠٠٠٠٠ يمكن التعبير عنها بصورة $١٠^{٥}$.

– يمكن التعبير عن أي عدد بطريقة الأسس وذلك باختيار أساس ثم إيجاد الأس المرفوع إليه ليساوي العدد :

مثال على ذلك :

الأس	الأساس	العدد المعبر عنه كقوة	العدد
٢	٢	$٢^{٢}$	٤
٥	٣	$٣^{٥}$	٢٤٣
٦	١٠	$١٠^{٦}$	١٠٠٠,٠٠٠

– إذا كان $د \in ص_{+}$ فإن $أ^{د}$ يعني حاصل ضرب العدد أ في نفسه د مرة أي :

$$أ^{د} = أ \times أ \times أ \times \cdots \text{ (د مرة)}$$

أمثلة

$(+٣)^{٢} = ٣ \times ٣ = ٩$ ، $(+٦)^{٤} = ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٢٩٦$

$(-٣)^{٢} = -٣ \times -٣ = ٩$ ، $(-٤)^{٣} = -٤ \times -٤ \times -٤ = -٦٤$.

نتائج :

١ – إذا رفعنا العدد الجبري الموجب إلى أس ما كان الناتج عدداً موجباً

٢ – إذا رفعنا العدد الجبري السالب إلى أس ما ، فإن الناتج يكون موجباً إذا كان الاس عدداً زوجياً، ويكون الناتج سالباً إذا كان الأس عدداً فردياً.

٣ – إن مربع العدد الجبري ب هو $ب^{٢}$ وهو مقدار موجب ($ب^{٢} > ٠$) إذا كانت $ب \neq ٠$

$(+٧)^{٢} = ٧ \times ٧ = ٤٩$ ، $(-٥)^{٢} = (-٥ \times -٥) = ٢٥$

٤ – إن القوة الثالثة للعدد الجبري وتدعى بمكعب ذلك العدد لها إشارة العدد نفسه

$(+٣)^{٣} = ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$ ، $(-٣)^{٣} = -٣ \times -٣ \times -٣ = -٢٧$.

٥ – إذا رفعنا العدد (+١) إلى أس ما فالناتج ١ : $(+١)^{ن} = ١ \times ١ \times ١ \times ١ \times ١ = ١$.

– المقاديرالآتية تؤدي المعنى والنتائج نفسها : (ب) أو ($١ \times ب$) أو ($١ \times ب^{١}$)

– الخواص الأساسية للقوى الصحيحة

١) $ب^{د} \times ب^{هـ} \times ب^{ل} \times \cdots = ب^{د+هـ+ل+\cdots}$ ، $\forall$ د، هـ، ل $\in$ ص، ب $\in ح^{*}$

٢) $\frac{ب^{د}}{ب^{هـ}} = ب^{د-هـ}$ (د > هـ) ، $= \frac{١}{ب^{هـ-د}}$ (د < هـ)

$\forall$ د، هـ $\in$ ص، ب $\in ح^{*}$.

٣) $(ب^{ن})^{م} = ب^{ن \times م}$

$\forall$ ن ، م $\in$ ص ، ب $\in$ ح*

٤) $(أ \times ب \times جـ \times \cdots)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن} \times جـ^{ن} \times \cdots$ ،

$\forall$ ن $\in$ ص ، أ ، ب ، جـ ، ... $\in$ ح*

٥) $\left(\frac{ب}{جـ}\right)^{ن} = \left(\frac{ب^{ن}}{جـ^{ن}}\right)$ ، $\forall$ ن $\in$ ص ، ب ، جـ $\in$ ح*

٦) $\frac{ب^{ن}}{ب^{ن}} = ب^{ن-ن} = ب^{٠} = ١$ ، وبذلك نحصل على فكرة الأس المعدوم .

(٧) $\frac{١}{ب^{ن}} = ب^{-ن}$ ، ب $\neq$ ٠ . ويعطى مفهوم القوة السالبة الأس .

- جميع القوانين السابقة صحيحة في حالة تكون الأسس أعداداً نسبية .

- الجذر النوني لعدد جبري هو عدد جبري إذا رفع إلى الأس ن نتج العدد المجذور .

- الجذر التربيعي على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)

- إذا اردنا إيجاد الجذر التربيعي للعدد ٨١ فإننا سنبحث عن عدد حقيقي مربعه ٨١ وسنجد أن +٩ هو جذر تربيعي للعدد ٨١ لأن $(+٩)^{٢} = ٨١$ ، وأن -٩ هو جذر تربيعي للعدد ٨١ لأن $(-٩)^{٢} = ٨١$.

- وإذا اردنا إيجاد جذر تربيعي للعدد ٧ في مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) فإننا لن نجد في هذه المجموعة عدداً مربعه ٧ فنقول ليس للعدد ٧ جذر تربيعي في ط، أما إذا حاولنا إيجاد جذره التربيعي في ح فسنجد أن :

$+\sqrt{٧}$ جذر تربيعي للعدد ٧ لأن $(+\sqrt{٧})^{٢} = ٧$ ، $-\sqrt{٧}$ جذر تربيعي آخر للعدد ٧ لأن $(-\sqrt{٧})^{٢} = ٧$.

مما سبق نجد أن للعدد الحقيقي الموجب جذرين تربيعيين .

- الجذر التكعيبي للعدد ٢٧ هو ٣ لأن $(٣)^{٣} = ٢٧$ والجذر التكعيبي للعدد -٢٧ هو -٣ لأن $(-٣)^{٣} = -٢٧$.

- الجذر الرابع للعدد ١٦هو $+٢$ ، -٢ لأن $(+٢)^{٤} = ١٦$ و $(-٢)^{٤} = ١٦$ أي له جذران .

ومما سبق نجد أنه أثناء البحث في جذور الأعداد الجبرية تعترضنا الحالات الثلاثة الآتية :

١ - لكل عدد حقيقي موجب ب جذران ($\sqrt[ن]{ب}$ ، $-\sqrt[ن]{ب}$) إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً

٢ - لكل عدد حقيقي جبري جذر وحيد له الأشارة نفسها إذا كان دليل الجذر عدداً فردياً .

٣ - ليس للعدد الحقيقي السالب جذر حقيقي إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً لأن رفع أي عدد جبري إلى أس زوجي يعطي عدداً موجباً أو صفراً.

- إذا كان ن عدداً زوجياً ، ب موجباً ، $\sqrt[ن]{ب}$ يعني الجذر النوني الموجب للعدد ب و $-\sqrt[ن]{ب}$

يعني الجذر النوني السالب للعدد ب فمثلاً :

$\sqrt[4]{81} = +3$ ، $-\sqrt[4]{81} = -3$.

يجب الانتباه إلى أن : $\sqrt[4]{81} \neq \pm 3$ ولكن لحل $س^4 = 81$ نجد أن ، $س = \pm 3$ في ح .

خواص الجذور :

١) $\sqrt[ن]{أ \times ب \times جـ \times \dots} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{جـ} \times \dots$

$\forall$ أ ، ب ، جـ . . . $\in$ ح ، ن $\in$ ص$^+$ ، ن > 1

٢) $\sqrt[ن]{\frac{ب}{جـ}} = \frac{\sqrt[ن]{ب}}{\sqrt[ن]{جـ}}$ ، ب ، جـ $\in$ ح ، جـ $\neq 0$ ، ن $\in$ ص$^+$ / $\{0 ، 1\}$

٣) $\forall$ ب $\in$ ح* ، د ، ن $\in$ ص$^+$ / $\{0 ، 1\}$ فإن : $ب^{\frac{د}{ن}} = \sqrt[ن]{ب^{د}}$

$(\sqrt[ن]{ب})^{د} = \sqrt[ن]{ب^{د}} = \left((ب)^{\frac{1}{ن}}\right)^{د} = \left((ب)^{د}\right)^{\frac{1}{ن}}$

$\sqrt[ن]{\sqrt[د]{ب}} = \sqrt[ن \times د]{ب}$ ، $\sqrt[د]{ب} = \sqrt[د \times ن]{ب^{ن}}$

٤) لتوحيد دليلي الجذرين $\sqrt[6]{17}$ ، $\sqrt[4]{8}$ نضع التساؤلات الآتية :

ما الدليل المشترك لهذين الجذرين ؟

نجد أن ١٢ هو الدليل المشترك لهذين الجذرين أي أن : هذين الجذرين هما $\sqrt[12]{17^2}$ ، $\sqrt[12]{8^3}$.

٥) لمقارنة $\sqrt[6]{17}$ ، $\sqrt[4]{8}$ ، نوحّد دليلهما أولاً : أي أن $\sqrt[12]{17^2}$ ، $\sqrt[12]{8^3}$ ومنه نجد أن :

$\sqrt[12]{289} < \sqrt[12]{512}$.

٦) $\sqrt[م]{ب^{د} \times جـ^{هـ} \times \dots \times ء^{ي}} = \sqrt[م]{ب^{د}} \times \sqrt[م]{جـ^{هـ}} \times \dots \times \sqrt[م]{ء^{ي}} = ب^{\frac{د}{م}} \times جـ^{\frac{هـ}{م}} \times \dots \times ء^{\frac{ي}{م}}$

وهذه الملاحظة تبرر طريقة ايجاد الجذر الميمي لبعض الأعداد بتحليل العدد إلى عوامله الأولية (وهي تجدي حين تكون أسس العوامل مضاعفات للعدد م) . فمثلاً

لإيجاد $\sqrt[3]{13824}$ نحلل المجذور إلى عوامله الأولية فيكون : $\sqrt[3]{13824} = \sqrt[3]{2^9 \times 3^3}$

$= 2^{\frac{9}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}} = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$.

– إذا كان لدينا أعداد كبيرة جداً أو صغيرة جداً فإننا يمكن كتابتها بالصورة :

$أ \times 10^{ن}$ حيث أ ≥ 1 ، ن $\in$ ص ، فمثلاً :

١) ٣٣ بليون بليون = ($3,3 \times 10^{19}$) (البليون = ١٠٠٠ المليون = ١,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠) (أحياناً نسمي البليون مليار .

٢) $١٨٢١,١ = ١,٨٢١١ \times ١٠^{٣}$

٣) $٠,٠٠٠٥٨١ = ٥,٨١ \times ١٠^{-٤}$

– ملاحظة مهمة :

بما أن $\sqrt{جـ} \in ح^{+}$ مثلاً :

$\sqrt{(+٦)^{٢}} = \sqrt{٣٦} = +٦ \Leftarrow \sqrt{(+٦)^{٢}} = |+٦|$ ، $\sqrt{(-٥)^{٢}} = \sqrt{٢٥} = +٥ \Leftarrow \sqrt{(-٥)^{٢}} = |-٥|$

فإذا اعتبرنا هذين المثالين معياراً استطعنا أن نقول : إذا كان جـ $\in$ ح فإن : $\sqrt{(جـ)^{٢}} = |جـ|$

$(-٤)^{\frac{٢}{٤}} = \sqrt[٤]{(-٤)^{٢}} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$ ومن الخطأ أن نكتب $(-٤)^{\frac{٢}{٤}} = (-٤)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٤}$

(فالاختصار غير ممكن) ولذلك فإننا نكتب $(-٤)^{\frac{٢}{٤}} = |-٤|^{\frac{٢}{٤}} = ٤^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$.

– نحصل على الأعداد النسبية بقسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر بشرط أن القاسم لا يساوي صفراً وثمة أعداد لا يمكن تمثيلها كنسبة عددين صحيحين يطلق على هذه الأعداد اسم الأعداد غير النسبية.

مثلاً الجذور: $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٦}$ لا نستطيع الحصول على قيمة منتهية لها (أي لا نستطيع كتابتها على شكل نسبة) فهي تعتبر أعداداً غير نسبية ، وتسمى جذوراً صمّاء .

بينما $\sqrt{٢٥} = ٥$ ، $\sqrt{٨١} = ٩$ لا تعتبر جذوراً صمّاء لأن لها قيمة منتهية .

– إذا كان ب ، جـ $\in ح^{+}$ ، د $\in ص^{+} / \{٠\}$ فإن :

(١) $ب = جـ \Leftrightarrow ب^{د} = جـ^{د}$

(٢) $ب \neq جـ \Leftrightarrow ب^{د} \neq جـ^{د}$

(٣) $ب > جـ \Leftrightarrow ب^{د} > جـ^{د}$

(٤) $ب > ٠ \Leftrightarrow ب^{د} > ٠$.

(٥) $ب > ١ \Leftrightarrow ب^{د} > ١$

(٦) $٠ < ب < ١ \Leftrightarrow ٠ < ب^{د} < ١$.

المصطلحات والرموز الواردة في هذه الوحدة

Powers	القوى
Roots, radicals	الجذور
Rational exponents	الأسس النسبية
Radicand	المجذور
Index of radical	دليل الجذر
Integer powers	القوى الصحيحة
Exponential eguation	معادلة أسية
Radical equation	معادلة جذرية
Solution set	مجموعة الحل
Radical expressions	مقادير جذرية
Squane root	الجذر التربيعي
Cubic - root	الجذر التكعيبي

المراجع

١) المدخل إلى تاريخ الرياضيات عند العرب والمسلمين ، د. علي عبد الولي فارع ، مؤسسة الرسالة بيروت ، الطبعة الأولى ١٩٨١م .

٢) الرياضيات في الحضارة الأسلامية . موريس شريل جروس برس – طرابلس ، لبنان الطبعة الأولى ١٩٨٨م .

٣) الرياضيات للعلوم الأقتصادية والادارية ، د. سليمان أبو صبحا دار ومكتبة بغدادي للنشر والتوزيع الطبعة الأولى ١٩٩٤م .

٤) الرياضيات /الجبر والمنطق للصف الأول الثانوي ، الجمهورية العربية السورية ، وزارة التربية والتعليم ١٩٨٦م .

٥) الرياضيات للصف الثاني ثانوي العلمي – الجزء الأول دولة الإمارات العربية وزارة التربية والتعليم والشباب الطبعة الثانية ٢٠٠١م .

٦) مبادئ في الرياضيات العامة الاحصاء للصف الأول الثانوي التجاري – الجمهورية العربية السورية وزارة التربية والتعليم ١٩٨٤م .

7) AIgebre Essentiala and Applications by Joseph C. Power and Marie P. Power.

8) Harcourt class room Education Corpany New York 2001.

توجيهات طرائقية عامة

لطريقة التدريس أثر كبير في تحقيق أهداف الدرس، وينبغي أن تتذكر أن المعلّم لا يعلم بمادته فحسب، وإنما يعلم بطريقته وأسلوبه في التدريس وعلاقته مع الطلبة. وفيما يلي نسرد بعض التوجيهات التي قد تساعد على تنفيذ هذه الوحدة :

١ – المفاهيم الواردة في هذه الوحدة بعضها ليس جديداً على الطالب فقد سبق أن درس الأسس الصحيحة الموجبة والجذور التربيعية والجذور التكعيبية في مرحلة التعليم الأساسي، ونرغب هنا في تعميم الأسس إلى الأسس الصحيحة والنسبية ودراسة الجذور النونية لأعداد حقيقية لذا ينبغي عدم الإطالة في تدريس المفاهيم التي سبق أن درسها .

٢ – عند عرض الأسس السالبة والنسبية يجدر أن نشير إلى ضرورة عرضها بتركيز لأن الطالب لم يسبق أن تعرف عليها .

٣ – يراعي المعلّم عند بداية عرض أي درس مراجعة أي مفاهيم سبق للطالب دراستها في مراحل سابقة، وهي متعلقة بموضوع الدرس الجديد (مثل التحليل ، تبسيط المقادير ، . . .) .

٤ – تشجيع المعلم طلابه على حل التمارين والمناقشة الجماعية وإجراء بعض المسابقات لحل بعض التمارين السريعة في حلها داخل الفصل .

٥ – يكلّف المعلم تلاميذه تحضير الدروس مسبقاً ووضعها في صورة نقاط رئيسية منظمة .

٦ – يوضح للطلبة أنه لتبسيط مقدار جبري نطبق قوانين القوى ، لتكون :

– جميع القوى صحيحة موجبة . – جميع الكسور في أبسط صورة . – ظهور الأساس مرة واحدة فقط .

فمثلاً: إذا طلب تبسيط المقدار : $٣^{٢د} \times ٩^{د} \times ٢٧^{٢د}$ قد يبدو للطالب من ظاهر المسالة أن الأساس مختلف ولذلك يصعب عليه استخدام القانون : $أ^{م} \times أ^{د} = أ^{م+د}$ ولكن يؤكد على ضرورة فحص المسالة حيث نجد أن $٩ = ٣^{٢}$ ، $٢٧ = ٣^{٣}$ وبالتالي تزول مشكلة اللبس في اختلاف الأساس وتؤول المسالة إلى :

$$٣^{٢د} \times ٣^{٢د} \times ٣^{٣ ٢د} = ٣^{٤د + ٣ ٢د}$$

٧ – يجب معالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلبة نذكر منها ما يأتي :

١) $-س^{٢}$ لا تعني $(-س)^{٢}$ وإنما تعني $-(س)^{٢}$ ، مثلاً : $-٤^{٢} = -١٦$

٢) $٣^{٤^{٢}} \neq (٣^{٤})^{٢}$ حيث ، $٣^{٤^{٢}} = ٣^{١٦} = ٤٣٠٤٦٧٢١$ ، بينما $(٣^{٤})^{٢} = ٣^{٨} = ٦٥٦١$

٣) $(+٢)^{-٣} \neq \frac{١}{(٢)^{٣}} = \frac{١}{٨}$ بينما $(-٢)^{-٣} = \frac{١}{(-٢)^{٣}} = \frac{١}{-٨}$

٤) $(٢+٣)^{٢} \neq ٢^{٢} + ٣^{٢}$ لأن $(٢+٣)^{٢} = ٥^{٢}$

٥) $٣^{٢} \times ٣^{٤} \neq ٣^{٨}$ وإنما $٣^{٢} \times ٣^{٤}$ تساوي $٣^{٦}$ ، ٦) $٣^{٢} \times ٣^{٤} \neq ٩$

٧) $\sqrt{٤} \neq \pm ٢$ ولكن $\sqrt{٤} = ٢$ وبينما $\pm \sqrt{٤} = \pm ٢$.

٨) $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦} \neq \sqrt{٢٥}$ حيث $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦} = ٣ + ٤ = ٧$

و $\sqrt{٢٥} = ٥$ ، $٧ \neq ٥$.

٩) $\sqrt{٧}$ لا يعني أن دليل الجذر = ١ وانما $\sqrt{٧} = \sqrt[٢]{٧}$ (أي أن الدليل = ٢)

١٠) $\sqrt{س^٢ + ٤} \neq س + ٢$ أي أن $\sqrt{أ^٢ + ب^٢} \neq \sqrt{أ^٢} + \sqrt{ب^٢} = أ + ب$

ولكن $\sqrt{أب} = \sqrt{أ}\,\sqrt{ب}$

١١) يوضح للطالب أنه عند حساب مقادير مثل $٢٧^{-\frac{٢}{٣}}$ نجري الآتي :

$٢٧^{-\frac{٢}{٣}}$

(١) ناخذ الجذر التكعيبي لـ ٢٧

(٢) ربعه

(٣) ضع ذلك في المقام

ليكون الناتج $\frac{١}{٩}$.

١٢) $\sqrt{س^٢} \neq س \; \forall س \in ح$ ، وانما $\sqrt{س^٢} = |س|$ ، السبب : إذا استخدمنا : $\sqrt{س^٢} = س$ يقودنا إلى:

$\sqrt{(-٦)^٢} = -٦$ وهذا خطأ . فقط إذا كانت $س \in ح^+$ فإن : $\sqrt{س^٢} = س$.

١٣) يوضح للطلبة أن $\sqrt{س^٣}$ ليس في أبسط صورة لإن اس المجذور أكبر من دليل الجذر «٢» ، وأن

$\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ ليس في أبسط صورة، لان $\sqrt{٥}$ في المقام. ولوضعه في أبسط صورة نضرب البسط والمقام في $\sqrt{٥}$

و $\sqrt[٣]{أ^٦}$ ليس في أبسط صورة، لانه بين أس المجذور ودليل الجذر عاملاً مشتركاً هو(٣) وليس واحد

و $\sqrt{\frac{أ}{ب}}$ ليس في أبسط صورة، لأن المجذور بصورة كسر .

١٤) يوضح للطالب أن جمع الجذور المتشابهة وطرحها يتم بالطريقة المتبعة في جمع الحدود الجبرية المتشابهة.

١٥) يوضح للطالب أن ضرب الجذور وقسمتها تتم من خلال تطبيق القانونين:

$$\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أب} \quad ، \quad \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} \quad ، \; ب \neq ٠ .$$

إذا كانت أدلتها موحدة أو يجب توحيد أدلتها قبل تطبيق القانونين السابقين .

ويتم توحيد الأدلة باستخدام العلاقة $\sqrt[ن]{أ^م} = \sqrt[نه]{أ^{مه}}$ ، ن ، ه $\in ص^+$

١٦) عند تبسيط المقادير الجذرية الكسرية لابد من ضرب المقام و البسط في مرافق المقام

١٧) يوضح للطلبة أنه عند حل المعادلات الجذرية لابد من تحديد شروط الحل، ثم اتباع الخطوات الآتية

الخطوة الأولى : اعزل الجذر في طرف من المعادلة إذا كان ذلك ممكناً .

الخطوة الثانية : ارفع طرفي المعادلة إلى القوة المناسبة .

الخطوة الثالثة : حل المعادلة وأوجدقيمة المتغير .

الخطوة الرابعة : تأكد من الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية .

٣ : ١ القـــــوى

عدد الحصص : ٣ حصص

الأهداف

- يتعرف على القوة (الأساس والأس)
- يذكر قوانين القوى الصحيحة .
- يوجد نواتج مقادير عددية أو جبرية باستخدام قوانين القوى الصحيحة .
- يكتب مقادير بصورة مختصرة باستخدام قوانين القوى الصحيحة .
- يعرّف القوى الصفرية .
- يعرّف الأس الصحيح السالب .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند كالتالي :

الحصة الأولى : القوى الصحيحة الموجبة

الحصة الثانية : القوى الصحيحة .

الحصة الثالثة : تدريبات ومسائل .

التقويم

- يتم التقويم بصورة بنائية وذلك بطرح أسئلة شفوية فورية وملاحظة حلول الطلبة للواجبات الصفية والمنزلية.
- في نهاية الحصة الثالثة يعطى السؤال الآتي كخطوة تقويم :

اختر الإجابة الصحيحة :

١) $أ^{٥}$ تعنى

أ) أ + أ + أ + أ + أ ب) ٥ × أ جـ) أ + ٥ د) أ × أ × أ × أ × أ

٢) $أ^{صفر}$ تعني (أ ≠ ٠)

أ) أ ب) ١ جـ) صفر د) ليس لها معنى

٣) $(أب)^{٢} (أب)^{٣}$ تساوي

أ) $أ^{٥} ب^{٥}$ ب) $أ^{٦} ب^{٦}$ جـ) $(أب)^{٦}$ د) $أب^{٥}$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) س^{٦} ب) ص^{١٠} جـ) ب^{٤}

د) س$^{-٤}$ = $\frac{١}{س^{٤}}$ هـ) ٢^{٤}س^{٤} و) $\frac{٤^{٤}}{٤^{٣}}$

[٢] أ) − $\frac{١}{١٨٢}$ ب) ص^{٨د} جـ) − $\frac{س^{٣}}{ص^{٣}}$

د) س^{١٩} هـ) −٣٢س^{١٠} و) $\frac{١}{س^{٢}}$

ز) ٣٠س^{٨} ح) ($\frac{٣}{٤}$)د س^{٢} د ص^{٢} د ط) (٢أ+١)^{١٠}

ي) ٢س^{٢}ص

[٣] أ) − $\frac{٨ص^{١٢}}{س^{٩}}$ ب) $\frac{١٤أ^{١٠}جـ^{٤}}{ب^{٤}}$ جـ) $\frac{٨١}{٤}$ل^{٢}

د) س^{٩}ص^{٧} هـ) جـ^{٥}ب و) ب^{٦}جـ^{٦}

ز) ٢ ح) ١٤أب ط) $\frac{١٤أ^{١٠}جـ^{٦}}{ب^{٨}}$

[٤] أ) −١٥ ب) ١٠٨ جـ) $\frac{١}{٣}$

د) + $\frac{١}{٢}$ هـ) $\frac{ص^{٦}}{س^{٨}ع^{٨}}$ و) س^{٣}ص$^{د+٥}$

[٥] أ) − $\frac{٥}{٤}$ ب) ٢ × ٣$^{٨م-٥}$ جـ) $\frac{١١}{٣٩}$ د) ١

[٦] ٣^{٥} [٧] ١

[٩] أ) (٤) ب) (٣) جـ) (٤)

٣ : ٢ الجذور والأسس النسبية

عدد الحصص : ٣ حصص

الأهداف

- يتعرف على الجذر النوني .
- يوجد ناتج جذر مقادير عددية أو رمزية .
- يعرّف الأسس النسبية .
- يذكر قوانين الأسس النسبية .
- يحوّل الصورة الجذرية إلى صورة أسية والعكس .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا الدرس كالتالي :

الحصة الأولى : الجذور النونية .

الحصة الثانية :الأسس النسبية .

الحصة الثالثة: تدريبات ومسائل.

التقويم

– يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة المستمرة ، وأداء الطلبة لحل التدريبات الصفية والواجب المنزلي ويمكن إعطاء السؤال التالي أو سؤال شبيه في نهاية الحصة الثالثة كخطوة تقويم :

اختر الإجابة الصحيحة :

$(س^{\frac{٤}{٣}})^{\frac{١}{٤}} =$

أ) $س^{\frac{٥}{١٢}}$ ب) $س^{\frac{١}{٣}}$ جـ) $-\sqrt{س}$ د) $س^{\frac{١٩}{١٢}}$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) ٦ ب) ٤ جـ) ٠,١٣

د) −٦ هـ) ليس عدداً حقيقياً و) ليس عدداً حقيقياً

[٢] (٢٠ ، −٢٠) ، $(\sqrt{١٣} ، -\sqrt{١٣})$ ، (١٢ ، −١٢) ، $(\sqrt{٥} ، -\sqrt{٥})$

[٣] ١٠ ، ١٢ ، ٧ ، ٨

[٤] (٤ ، −٤) ، (١٠ ، −١٠) ، (٨ ، −٨) ، (٦ ، −٦)

[٥] أ) $\sqrt{٦}$ ب) $\sqrt{٣}$ جـ) $\sqrt{س}$

د) $\sqrt[٤]{١٦^{٣}}$ هـ) $\frac{١}{\sqrt{٤٩}} = \frac{١}{٧}$ و) $\sqrt[٣]{\frac{١}{-٢٧}} = -\frac{١}{٣}$

ز) $\sqrt[٥]{(-٣٢)^{-٣}} = \sqrt[٥]{\frac{١}{(-٣٢)^{٣}}}$ ح) $\sqrt[٤]{٨١^{٣}}$ ط) $\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

[٦] أ) ١٦ ب) $\frac{١}{١٦}$ جـ) ٠,٠٠٨١

د) $\sqrt{٣}$ هـ) ٢ و) $\frac{١}{٨}$

[٧] أ) $س^{\frac{٢}{٣}}$ ب) $ص^{\frac{١}{٦}}$ جـ) $٢أ^{٥}ب^{٧}$

د) $\frac{ص^{٦}}{س^{٥}}$ هـ) $|س^{٣}|$ أو $س^{٢}|س|$ و) $|أ+ب|$

ز) $٨ ب^{٣}$ ح) $\frac{١}{أ^{\frac{١}{٣}} ب^{\frac{١}{٤}}}$ ط) $س^{\frac{١}{٦}} ص^{\frac{١}{٢}}$ ي) $أ^{\frac{٧}{٦}}$

[٨] أ) $\frac{٣^{\frac{٢٥}{٢}}}{١٦٢}$ ب) $٣^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{٣}$ جـ) $\frac{١}{١٢}$ د) $\frac{١}{٢}$ هـ) ٢

٣ : ٣ تبسيط الجذور

عدد الحصص : حصة واحدة .

الأهداف

– يتعرّف على القوانين الأساسية للجذور

– يتعرّف على شروط وضع الجذر في ابسط صورة ويطبقها .

تنفيذ حصص البند

وينفذهذا الدرس على النحو التالي :

تبسيط الجذور وتدريبات عليها في حصة واحدة .

التقويم من خلال المناقشة والمتابعة لحلول الطلبة يهتم المعلم بالتقويم البنائي فيطرح أسئلة من حين لآخر ومن خلال متابعة حلول الواجبات المنزلية .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) $\frac{أ^{٣}}{٣}$ جـ) $٥ س ص \sqrt[٤]{س ص}$

د) $١٥ أ^{٣} جـ^{٤} \sqrt{٢ ب جـ}$ هـ) $٢ أ^{٢} جـ^{٢} \sqrt[٥]{ب^{٤} جـ^{٢}}$ و) $|س + ٣|$

ز) $\sqrt[٣]{\frac{س^{٢}}{ص^{٥}}}$ ح) $\frac{٢ \sqrt[٥]{أ^{٣}}}{ب^{٤}}$ ط) $\frac{أ^{٣}}{ب جـ^{٢}}$ ي) $\frac{٢^{س}}{ص^{٣}}$

[٢] أ) ١٢ ب) $٢ \sqrt[٣]{٩}$ جـ) $٢ س \sqrt[٥]{س^{٣}}$

د) $١٥ أ ب \sqrt{٣ أ}$ هـ) $ص \sqrt[٤]{ص^{٣}}$ و) $\sqrt{س}$

ز) $٢ \sqrt[٣]{٥}$ ح) $\sqrt{٢ أ}$ ط) ٥ أ ي) $\sqrt[٣]{س ص^{٢}}$

[٣] أ) $\frac{\sqrt[٥]{س^{٣}}}{س}$ ب) $\sqrt[٤]{س^{٣}}$ جـ) $\frac{\sqrt[٥]{أ^{٣} ب^{٤}}}{أ ب}$

د) $\sqrt[٣]{س ص^{٢}}$ هـ) $\frac{\sqrt[٥]{١٨ ص^{٤}}}{٢ أ ب}$ و) $\frac{\sqrt{٢ أ ب جـ}}{ب جـ}$

٣ : ٤ جمع وطرح الجذور

عدد الحصص : حصة واحدة

الأهداف

- يتعرّف على الحدود الجذرية المتشابهة .
- يوجد مجموع وفرق حدود جذرية .

وتنفذ جمع وطرح الجذور وتدريباتها في حصة واحدة .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) $٧\sqrt{٣}$ ب) $٨\sqrt{٥}$ جـ) $-\sqrt{١٠}$

د) $٧\sqrt[٣]{٤}$ هـ) $٦\sqrt[٤]{٣}$ و) $٥\sqrt[٥]{١٢} - \sqrt[٥]{١٦}$

ز) $٤\sqrt{٣س} - ٤\sqrt{٢س}$ ح) $٣\sqrt[٣]{٣} + ١٠\sqrt[٣]{٢}$ ط) $\sqrt{٢س}$

ي) $٣٧أ\sqrt{ب}$

[٢] أ) $٧أ\sqrt{ب} - ١١\sqrt{٢ب}$ ب) $-٢٣\sqrt[٣]{٢أ}$ جـ) $٢أ\sqrt{أب}$

د) $٢أ^{٢}ب^{٢}\sqrt{أب}$ هـ) $\frac{١ + ٢\sqrt{٥}}{٥}$ و) $\frac{٤ - ٦\sqrt{٣}}{٩}$

ز) $\frac{٤\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٦}}{١٠}$ ح) $\frac{٦\sqrt{٥} + \sqrt{١٠}}{٥}$

[٣] أ) $\frac{٧\sqrt{٣}}{١٢}$ ب) $\frac{\sqrt{س}}{س^{٢}}$ جـ) $\frac{٥\sqrt{س ص} - ٤ ص\sqrt{س}}{س ص}$

د) $\frac{٢ب\sqrt{٢} + ٣\sqrt{أب}}{أب}$ هـ) $\frac{\sqrt{٣}\,(٥ + \sqrt{٢})}{٣}$ و) $-\frac{\sqrt{٢}}{١٥س}$

٣ : ٥ ضرب وقسمة الجذور

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

- يوجد حاصل ضرب أوخارج قسمة مقادير جذرية .
- يعرّف مفهوم المقدارين المترافقين
- يبسّط مقادير جذرية باستخدام ضرب الجذور وقسمتها .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : ضرب وقسمة الجذور

الحصة الثانية : تدريبات ومسائل .

التقويم يقوّم المدرس الطلبة تقويماً بنائياً من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والمنزلية، وفي نهاية الحصة الثانية يقدم التمرين التالي أو تمريناً مشابه كخطوة تقويم .

اختر الإجابة الصحيحة:

$(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$

(أ) $\sqrt{٥} - ٣$ (ب) $٥ - \sqrt{٣}$

(جـ) ٢ (د) ٨

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) $٥\sqrt{٢} + ٢$ ب) $٣\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٧}$ جـ) $س + \sqrt{س ص}$

ء) $٣٥\sqrt{١٠} - ٢٠\sqrt{١٥}$ هـ) $١٣ - ٢\sqrt{٢}$ و) $٢٣ + ٩\sqrt{٣}$

ز) $٦ - ٧\sqrt{٢} - ١٥$ ح) ٥ ط) $٩س - ١٦ص$

ي) $١١ - ٤\sqrt{٧}$

[٢] أ) $٥٢ + ١٦\sqrt{٣}$ ب) $أ - ب^{٢}$ جـ) $٢٠س - \sqrt{س ص} - ص$

د) $٤٢ - ١٢\sqrt{٦}$ هـ) $١٣ - ١١\sqrt{أب} - ٦ب$ و) $أ - \sqrt{أ} + أ\sqrt{ب} - \sqrt{أب}$

ز) $\sqrt[٣]{٥ب} + \sqrt[٣]{٧ب}$ ح) $\sqrt[٤]{١٤^{٢}} + ٢\sqrt{٣}$ ط) $\sqrt[٤]{١٤^{٣}} + \sqrt[٤]{١٢٥^{٣}}$

ي) $\sqrt[٥]{أ^{٥}} + \sqrt[٥]{أ^{٣}ب^{٢}} + \sqrt[٥]{أ^{٢}ب^{٣}} + \sqrt[٥]{ب^{٥}}$

[٣] أ) $\sqrt{٥} + ٢$ ب) $-\frac{٣}{٥}(\sqrt{٦} - ٤)$ جـ) $٢(٣ + \sqrt{٦})$

د) $\sqrt{٣٠} + \sqrt{٦}$ هـ) $-\frac{١}{٥}(\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢})$ و) $\frac{٥\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٥}}{-٣}$

ز) $\frac{\text{أ} - \sqrt{\text{أ}}}{\text{أ} - ١}$ ح) $\frac{\text{أ} + ٢\text{ب}\sqrt{\text{أ}} + \text{ب}^٢}{\text{أ} - \text{ب}^٢}$ ط) $\frac{\text{أ}^٢ + ٢\text{أ}\sqrt{\text{ب}} + \text{ب}}{\text{أ}^٢ - \text{ب}}$

ي) $\frac{٣\sqrt{\text{س}} + ٣\sqrt{\text{س}}}{١ - \text{ص}}$

[٤] أ) $\frac{\text{س}^٢\text{ص}\sqrt{\text{س}} + \text{س ص}\sqrt{\text{ص س}}}{\text{س}^٢ - \text{ص}}$ ب) $\frac{٤\sqrt{\text{س}}\,\text{ص} + ٦\text{س}}{٩\text{س} - ٤\text{ص}}$

جـ) $\frac{\text{أ}^٢\text{ب}\,(\text{أ}^٢\sqrt{\text{أ}} + \text{ب}\sqrt{\text{أب}})}{\text{أ}^٤ - \text{ب}^٣}$ د) $\frac{\text{س} + ٢\sqrt{٣\,\text{س ص}} + ٣\text{ص}}{\text{س} - ٣\text{ص}}$

هـ) $(٤\text{س} + \text{ص})(٢\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}})$ ز) $(٩\text{أ} + ٤\text{ب})(٣\sqrt{\text{أ}} + ٢\sqrt{\text{ب}})$

[٥] أ) $\sqrt{٥}$ ب) $\text{أ} + \text{ب} - ٢$

جـ) $\sqrt{\text{ب} + \text{جـ}}$ د) $\frac{٩\sqrt{\text{س}} + ١٠\sqrt{\text{س}} + ١}{١ - ٨١\text{س}}$

٣ : ٦ حل المعادلات الأسية والجذرية

عدد الحصص : أربع حصص

الأهداف

- يحل معادلات أسية
- يحل معادلات جذرية

تنفيذ حصص البند ينفذ الدرس على النحو التالي :

الحصة الأولى :حل المعادلات الأسية

الحصة الثانية : تدريبات صفية .

الحصة الثالثة : حل المعادلات الجذرية

الحصة الرابع : تدريبات ومسائل .

التقويم يتم التقويم بنائياً من خلال مشاركة الطلبة في المناقشات ومتابعة أدائهم عند حل التدريبات الصفية والواجب المنزلي كما يعطى المعلم التمرين الآتي أو تمريناً شبيهاً به في نهاية الحصة الرابعة كخطوة تقويم .

حل ما يأتي :

(١) $٤^{\text{س}} = ٣٢$ ، (٢) $\sqrt{\text{ص}} - ٢ = ١$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) س = $\frac{١}{٢}$	ب) س = ٥	جـ) ص = $-$ ٤
د) م = $-$ ٢	هـ) ص = ٤	و) هـ = $\frac{٨}{٥}$
ز) س = ٢	ح) س = $-$ ٣	ط) س = ٤ ، ٥
ي) ر = ٣		
[٢] أ) س = ٥	ب) س = ٣ ، س = ١	جـ) س = ٣ ، = س = ٢
د) س = ٢	هـ) س = $\sqrt[٣]{٧}$	و) ص = ١
[٣] أ) س = ١ ، ٠	ب) س = ١٥	جـ) س = ٠ ، ١
د) س = $-$ ١	هـ) س = ٠ ، ١	
[٤] أ) س = ٢	ب) س = ١٦	جـ) س = ١٢
د) س = ٣	هـ) ص = ٥٣	و) أ = $-$ ٥ $\pm$ $\sqrt{٣٤}$
ز) ب = ١	ح) لا يوجد حل	
[٥] أ) {١}	ب) {١}	جـ) {٩}
د) {٨}	هـ) {٣ ، ١١}	و) {$-$٣}
ز) {٣٤}	ح) {٢}	ط) لا يوجد حل
ي) {$\frac{٣}{٤}$}	ك) {$-$ $\frac{٢٠}{٩}$ ، $-$ ٤}	

٣ : ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الهدف

- قياس مدى تحقق اهداف الوحدة
- يعطى المعلم الاختبار الذي في الدليل (أو اختباراً مشابهاً يقيس أهداف الوحدة) . الجدول التالي يبين الأهداف التي يقيسها كل سؤال :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦
٢	٧ ، ٨ ، ٩
٣	١٠، ١١ ، ١٢
٤	١٣

الاختبار

[١] ضع ما يأتي في أبسط صورة علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية والمقام لا يساوي صفراً .

أ) $\dfrac{\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{-٥}\,(\text{س ص})^{٥}}{(٣\text{س ص})^{-٤}}$ ب) $\dfrac{(٢٥^{\text{س}})^{٢} \times (١٢٥)^{٨}}{(٢٥)^{\text{س}+٢} \times (٥)^{٢\text{س}}}$

[٢] ضع ما يأتي في أبسط صورة علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية غير سالبه والمقام لا يساوي صفراً .

أ) $\dfrac{\sqrt[٣]{٦٤\,\text{أ}^{٥}\,\text{ب}^{٧}}}{\sqrt[٣]{\text{أ}^{٢}\,\text{ب}}}$ ب) $\sqrt[٤]{(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)} \div \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}+١}}$

[٣] بسط ما يأتي : علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية غير سالبة :

أ) $-٢\sqrt{٧٥} + ٣\sqrt{٩٨} + ٩\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{١٢٨}$

ب) $(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}})\,(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}})$

جـ) $\dfrac{٣}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} - \dfrac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$

[٤] حل المعادلات الآتية :

أ) $٦^{\text{س}+٢} - ٦^{٢\text{س}+١} = ٠$ ب) $٢^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٤} = ٣^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٤}$

جـ) $(١+٢\text{س})^{\frac{١}{٢}} = ٣$ د) $(٢+\text{س})^{\frac{١}{٣}} = ٣$

الوحدة الرابعة

الحدوديات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٤ – ١	الصورة العامة للحدودية في متغير واحد	١
٤ – ٢	العمليات الأربع على الحدوديات	٤
٤ – ٣	مبرهنتا الباقي والعامل	٢
٤ – ٤	أصفار الحدودية	٣
٤ – ٥	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١١

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يتعرف على الحدودية ويحدّد درجتها ومعاملاتها .

٢ – يكتب حدودية إذا علمت معاملاتها .

٣ – يجرى عمليات على الحدوديات .

٤ – يحدّد درجة الحدودية الناتجة من عملية جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة حدوديتين .

٥ – يستخدم مبرهنتي الباقي والعامل في إيجاد باقي قسمة حدودية .

٦ – يوجد أصفار حدودية معطاة .

٧ – يكتب حدودية على صورة حاصل ضرب عواملها .

المقدمة

لمحة تاريخية

يعتبر العالم محمد بن موسى الخوارزمي (٧٨٠ – ٨٥٠م) واضع أسس علم الجبر وأول من أطلق كلمة « الجبر » في كتابه المعروف « الجبر والمقابلة » . وهذا الكتاب الذي كان منهلاً نهل منه علماء العرب والغرب على حدسواء .

وممن اهتم اهتماماً كبيراً بعلمي الحساب والجبر ، أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي المتوفي (٤٢١هـ)؛ فكان انتاجه عظيماً في هذين الحقلين وبقيت أوربا تستخدم انتاجه العلمي مدة طويلة من الزمن .

يقول الاستاذ جورج سارتون في كتابه « تاريخ العلوم الإنسانية) أن أوربا مدينة للكرخي الذي قدم للرياضيات أهم وأكمل نظرية في علم الجبر . وبقيت أوربا حتى القرن التاسع عشر الميلادي تستعمل مؤلفاته في علمي الحساب والجبر ، حيث ترجم كتابه « الكافي في الحساب » من العربية إلى الألمانية ١٨٧٨م؛ فكان لهذا الكتاب أثره على العلماء آنذاك وبقي مرجعاً مهماً في جميع أنحاء العالم إلى عهد قريب .

وقد اتبع الكرخي الطريقة التحليلية لعلم الجبر والمقابلة مقتديا بالعالم الخوارزمي وأبي كامل وبعلماء مسلمين آخرين :

وقد علق الأستاذ « هوردأيفز » في كتابه « تاريخ الرياضيات » إن « كتاب الفخري في الحساب » للعالم الكرخي أحسن كتاب كُتب في علم الجبر في العصور الوسطى مستنداً على كتاب الخوارزمي « الجبر والمقابلة »وكتاب الفخري والذي قام الكرخي من خلاله بوضع منهجية للأسس الجبرية ، وانتقل بعدها إلى تطبيق العمليات الحسابية فاهتم بعمليتي الجمع والطرح وأعطى قاعدة عامة لعمليتي ضرب وقسمة كثيرات الحدود (الحدوديات) « قسمة وحيدة على أخرى، وقسمة كثيرة حدود على وحيدة حد »

كما أنه أول من توصل إلى طريقة عامة لاستخراج الجذر التربيعي لكثيرة الحدود في حالات المعاملات النسبية الموجبة، ليمهد بذلك الطريق أمام من جاء بعده من الرياضيين أمثال العالم السموأل بن يحي عباس المغربي المتوفي (٥٧٠هـ) للانطلاق في أبحاثه المتقدمة في هذا المجال من خلال كتابه « الباهر » فقد توصل على سبيل المثال إلى ما يكافئ قولنا :

$س^{ن} . س^{م} = س^{ن+م}$ لكل ن ، م $\in$ ص

وكذلك صياغة « قواعد الإشارات » وهي ضرب أو قسمة الأعداد الموجبة والسالبة .

مع العلم أن طريقة الكرخي مكنته من إيجاد الجذر التربيعي لكثيرة الحدود في حالات المعاملات النسبية (موجبة أو سالبة) .

خلفية علمية

سبق دراسة المقادير الجبرية: مكوناتها والعمليات عليها؛ وسنهتم في هذه الوحدة بدراسة الحدودية ذات المتغير الواحد والتي هي عبارة عن مقدار جبري لا يحتوي على متغير في الأس، أو في المقام أو تحت الجذر؛ والتي على الصورة :

$$\text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{أ}_{0}$$ حيث $\text{أ}_{\text{ن}} \neq 0$

$$\text{أ}_{\text{ن}} ، \text{أ}_{\text{ن}-1} ، \dots ، \text{أ}_{0} \in \text{ح} ، \text{ن} \in \text{ط}$$

أي أن الحدودية من الدرجة ن والتي معاملاتها ($\text{أ}_{\text{ن}}$ ، $\text{أ}_{\text{ن}-1}$ ، . . . . ، أ_{0}) فان عدد معاملاتهاهو (ن +1).

يمكن أن يساوي اي من المعاملات $\text{أ}_{\text{ن}-1}$ ، . . . . . ، أ_{0} القيمة صفراً ؛ أما $\text{أ}_{\text{ن}}$ فهو دائماً لا يساوي صفراً .

وتجري العمليات الحسابية على الحدوديات كما تم إجراؤها على المقادير الجبرية في المرحله الأساسية.

وإذا كانت حـ حدودية في المتغير س، وكان $\text{أ} \in \text{ح}$ ، فإن حـ(أ) هي القيمة العددية للحدودية عندما المتغير س= أ ، فإذا كانت هذه القيمة العددية حـ(أ)= صفراً ، سُمّي أ صفراً من أصفار الحدودية .

وسُمّي (س – أ) عاملاً من عوامل الحدوذية .

المصطلحات باللغة العربية وما يقابلها باللغة الإنجليزية	
حدودية	Polynomial
درجة	Degree
جمع	Addition
طرح	Subtraetion
ضرب	Multiplication
قسمة	Division
قابلية القسمة	Divisbility
خارج القسمة	Quatient
المقسوم عليه	Dividend
الباقي	Remainder
مبرهنة الباقي	Remainder theorem
عامل	Factor
مبرهنة العامل	Factov theorem
أصفار الحدودية	Zeros of polgnmial

توجيهات طرائقية عامة

عند جمع أو طرح حدودتين فإننا نحصل على حدودية جديدة درجتها أصغر من أو تساوي أكبر درجتيهما، حيث نجمع الحدود المتشابهة في كلا الحدوديتين جمعاً جبرياً .

أما عند ضرب حدودية في عدد فإننا نحصل على حدودية جديدة درجتها هي درجة الحدودية نفسها .

اما عند ضرب حدودية في أخرى فإننا نضرب حدودهما باستخدام قانون التوزيع، ثم نجمع الحدود المتشابهة فيكون الناتج حدودية جديدة درجتها تساوي مجموع درجتي الحدوديتين.

وعند قسمة حدودية على أخرى نتبع خطوات قسمة المقادير الجبرية (الصف الثامن)، ولابد من ترتيب حدود الحدوتين قبل إجراء عملية القسمة حسب قوى المتغير تنازلياً .

وللتحقق من صحة الحل نضرب خارج القسمة في المقسوم عليه« القاسم »؛ فنحصل على المقسوم .

ولكن أحياناً عند قسمة أي حدودية ولتكن $ح_{١}$ على أخرى ولتكن $ح_{٢}$ يكون خارج القسمة حدودية ولتكن $ح_{٣}$ ؛ ونجد أن ناتج الطرح الأخير $ح_{٤}$ وهو حدودية درجتها أقل من درجة المقسوم عليه« القاسم » فيمكن كتابة ذلك على النحو التالي : $ح_{١} = ح_{٢} . ح_{٣} + ح_{٤}$ وفي هذه الحالة يمكن القول أن $ح_{١}$ لا تقبل القسمة على $ح_{٢}$

اما إذا كان باقي الطرح الأخير عند قسمة أي حدودية على أخرى من الدرجة الأولى عدداً حقيقياً ؛ فإنه توجد طريقتان للقسمة لتحديد الباقي ، وهما :

الأولى : وهي القسمة المطولة التي تم دراستها في التعليم الأساسي ، والطريقة الأولى هي القسمة التركيبية .

ولإجراء القسمة التركيبية يجب توفر الشرطين التاليين :

١- أن يكون المقسوم عليه من الدرجة الأولى .

٢- أن يكون معامل س في المقسوم عليه يساوي ١ .

فمثلاً عند إيجاد خارج وباقي قسمة $-١٥ س^{٣} + س^{٥} - ١٠س^{٢} + ٦٠س + ٧٢$ على $س + ٣$ باستخدام طريقة القسمة التركيبية نتبع الخطوات التالية :

١) اكتب المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازلياً حسب قوى س ،

فتكون ح هي $س^{٥} - ١٥س^{٣} - ١٠س^{٢} + ٦٠ س + ٧٢$.

٢) نكتب – ٣ (صفر المقسوم عليه) على اليسار .

ملاحظة : لإيجاد صفر المقسوم عليه نجعل المقسوم عليه يساوي صفراً ، فمثلاً :

$س + ٣ = ٠ \Longrightarrow س = -٣$.

٣) أنزل أول معامل في المقسوم عليه وهو ١ .

١	٠	−١٥	−١٠	٦٠	٧٢	
	−٣	٩	١٨	−٢٤	−١٠٨	−٣
١	−٣	−٦	٨	٣٦	$\boxed{−٣٦}$	

٤) اضرب ١× −٣ ونكتب الناتج أسفل المعامل الثاني ،   ٥) اجمع لتحصل −٣ ؛

٦) اضرب −٣×−٣ واكتب الناتج أسفل المعامل الثالث ،   ٧) اجمع لتحصل على −٦؛

٨) اضرب −٦ ×−٣ واكتب الناتج أسفل المعامل الرابع ،   ٩) اجمع لتحصل على ٨ ؛

١٠) اضرب ٨×−٣ واكتب الناتج أسفل المعامل الخامس ،   ١١) اجمع لتحصل على ٣٦ ؛

١٢) اضرب ٣٦×−٣ واكتب الناتج أسفل المعامل السادس ،   ١٣) اجمع لتحصل على −٣٦ .

فيكون خارج القسمة $س^{٤} − ٣ س^{٣} − ٦س^{٢} + ٨ س + ٣٦$ والباقي − ٣٦

ومن مميزات هذه الطريقة (القسمة التركيبية) بانها أقصر وأيسر من القسمة المطولة لإيجاد باقي القسمة .

الثانية : وهناك طريقة ثانية لإيجاد باقي القسمة غير عملية القسمة السابقة الذكر (المطولةالتركيبية) ، وهي أن نعوض عن المتغير في الحدودية بصفر المقسوم عليه .

فمثلاً في المثال السابق لإيجاد الباقي نوجد أولاً صفر المقسوم عليه فتكون س = −٣ .

نوجد القيمة العددية للحدودية عندما س = −٣ فتكون ؛

$ح(−٣) = (−٣)^{٥} −١٥(−٣)^{٣} − ١٠ (−٣)^{٢} + ٦٠(−٣) +٧٢$

$= −٢٤٣ + ٤٠٥ − ٩٠ − ١٨٠ + ٧٢ = \boxed{−٣٦}$

ومن المفاهيم الجديدة في هذه الوحدة :

أ) **مبرهنة الباقي** والتي توضح كيفية إيجاد باقي القسمة بدون إجراء أي عملية، وتنص على :

باقي قسمة أي حدودية ($ح$) على حدودية من الدرجة الأولى $ح_{١}$= (أ س − ب) ، أ ، ب ∈ ح

يساوي $ح_{٢}$ = القيمة العددية للحدودية $ح$ عندما س = $\frac{ب}{أ}$

اي لإيجاد باقي قسمة حدودية $ح$ على $ح_{١}$ نوجد أولاً صفر $ح_{١}$ حيث ولها صفر واحد كونها من الدرجة الأولى.

ثم نوجد قيمة الحدودية $ح$ عندما س = صفر، $ح_{١}$ فيكون هو باقي القسمة ($ح_{٢}$) ،

فإذا كان باقي القسمة يساوي صفراً كانت $ح_{١}$ عاملاً من عوامل $ح$.

ب) **مبرهنة العامل** والتي تنص على أن :

يكون (أ س − ب) عاملاً من عوامل الحدودية إذا وفقط إذا كان $ح(\frac{ب}{أ})$ = صفر ∀ أ ، ب ∈ ح .

ج) أصفار الحدودية :

ليكن ح حدودية وهي $أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \dots + أ_{٠}$ ؛ فتكون بعض من أصفارها الصحيحة هو عامل من عوامل حدها المطلق $أ_{٠}$ ، وكل صفر من هذه الأصفار عند التعويض بها عن المتغير تجعل القيمة العددية للحدودية تساوي صفراً . أي أن

قيم س التي تجعل الحدودية ح = ٠ تسمى أصفار الحدودية

فعند إيجاد أصفار الحدودية $س^{٤} + س^{٣} - ١٣ س^{٢} - ٢٥ س - ١٢$

نحلل الحد المطلق ١٢ إلى عوامله الأولية فتكون (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢) «ويمكن أن تكون بعضها سالبة» ثم نحاول قسمة الحدودية على أحد عواملها ولمعرفة هذه العوامل نوجد مثلاً القيمة العددية للحدودية عندما س = ١ فإذا كانت صفراً كان العدد ١ صفراً من أصفارها.

$ح(١) = (١)^{٤} + (١)^{٣} - ١٣(١)^{٢} - ٢٥(١) - ١٢ \neq ٠$.

∴ العدد ١ ليس صفراً من أصفار الحدودية .

نوجد القيمة العددية للحدودية عند ما س = $^{-}١$

$(-١)^{٤} + (-١)^{٣} - ١٣ (-١)^{٢} - ٢٥(-١) - ١٢ =$ صفر

∴ (س+١) أحد عوامل الحدودية ح ولإيجاد بقية الأصفار نقسم الحدودية ، $س^{٤} + س^{٣} - ١٣ س - ٢٥ س - ١٢$ على (س+١) ، (س + س −١٣ س −٢٥ س−١٢) ÷ (س+١) = $س^{٣}$ −١٣ س −١٢ ، نختار عاملاً آخر من عوامل العدد − ١٢ فيكون −٣ ،

∴ نوجد ح (−٣) = $(-٣)^{٣}$ −١٣(−٣) −١٢ = صفر . ، ∴ (س+ ٣) أحد عوامل الحدودية

$(س^{٣} - ١٣ س - ١٢) \div (س + ٣) = س^{٢} - ٣ س - ٤$ ، = (س − ٤) (س + ١)

∴ أصفار الحدودية الأربعة هي : ٤ ، −١ ، −١ ، −٣

ونلاحظ أن حاصل ضرب هذه الأصفار = −١٢ تساوي الحد المطلق. نحاول إيجاد أصفار حدودية أخرى مثلاً :

$٢ س^{٢} + ٥ س + ٢$

نعلم أن : $(٢ س^{٢} + ٥ س + ٢) = (٢ س + ١)(س + ٢)$

إذن أصفار الحدودية هي − ٢ ، − $\frac{١}{٢}$. ونلاحظ أن ، $\frac{-١}{٢}$ ليس عاملاً من عوامل العدد ٢ (الحد المطلق)؛ وحاصل ضربهما لا يساوي بالضرورة الحد المطلق .

٤ : ١ الصورة العامة للحدودية في متغير واحد

عدد الحصص : حصة واحدة .

الأهداف

١- يتعرف على الحدودية، ويحدد درجتها ومعاملاتها .

٢- يكتب حدودية إذا علمت معاملاتها .

تنفيذ حصص البند

تنفذالحصة على النحو التالي: الصورة العامة للحدودية في متغير واحدمع حل بعض التمارين كتدريبات صفية واعطاء بعضها كواجب منزلي .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) درجة الحدودية السادسة عدد الحدود أربعة حدود

ب) السابعة ، خمسة حدود ، ج) الأولى ، حدين ، ء) صفر ، حد واحد .

[٢] أ) $٧\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢$ ، ب) $٢\text{س}^{٦} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣$

ج) $٢\text{س}^{٧} - \text{س}^{٦} + \text{س}^{٥} + \frac{١}{٤}\text{س}^{٣} + ١$ ، ء) $٢\text{س}^{٣} + ١$.

[٣] أ) الرابعة ، المعامل الرئيس هو١ ، الحد المطلق ٥ .

ب) السابعة ، المعامل الرئيس هو ٣ ، الحد المطلق صفر .

ج) الثانية ، المعامل الرئيس هو ١ ، الحد المطلق ٩ .

ء) الأولى ، المعامل الرئيس هو ١ ، الحد المطلق ٢ .

[٤] أ) $٣(-\frac{١}{٢})^{٢} + (٢ \times -\frac{١}{٢}) + ٣ = \frac{٣}{٤} - ١ + ٣ = \frac{٣}{٤} + ٢ = \frac{١١}{٤}$

ب) $٢ \times (٠)^{٣} - (٠)^{٢} + ٣ = \boxed{٣}$

ج) $٣(-٣)^{٢} + ٧ = ٢٧ + ٧ = ٣٤$

ء) $٦(-١)^{٤} - (-١)^{٣} + ٣ = ٦ + ١ + ٣ = ١٠$

٤ : ٢ العمليات الأربع على الحدوديات

عدد الحصص : أربع حصص .

الأهداف

١- يوجد مجموع وفرق حدوديتين ويحدد درجةالناتج .

٢- يضرب حدودية في عدد، ويحدد درجة الناتج .

٣ - يوجد حاصل ضرب حدودية في أخرى ويحدد درجة الناتج .

٤ - يوجد خارج قسمة حدودية على أخرى .

٥ - يحدد قابلية القسمة لحدودية على أخرى .

٦ - يوجدخارج قسمة وباقي قسمة حدودية على أخرى غير صفرية باستخدام القسمة المطولة .

تنفيذحصص البند ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : جمع وطرح الحدوديات .

الحصة الثانية : ضرب الحدوديات .

الحصة الثالثة : قسمة الحدوديات .

الحصة الرابعة : تمارين ومسائل

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال مناقشة الأمثلة، ومتابعة حل التدريبات الصفية ومراجعة تمارين الواجب المنزلي؛ ويمكن إعطاء هذا التمرين التالي أو تمرين مشابه وذلك نهاية الحصة الرابعة كخطوة تقويم :

لتكن ح$_{1}$ هي ٣ س^{4} − س^{3} − س −٣ ، ح$_{2}$ = س^{2} + ١ ،

أوجد ما يلي : ا) ح$_{1}$ + ح$_{2}$ ب) ح$_{1}$ − ح$_{2}$

جـ) ح$_{1}$ · ح$_{2}$ د) ح$_{1}$ ÷ ح$_{2}$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) ٢ س^{3} + س^{2} + ٣ س − ٢ ، ب) −٣٠ س^{3} + ٥س^{2} − ٢٥ س + ٣٠

جـ) −٢ س^{3} + س^{2} + ٣ س −٦ ، ء) = ٤س^{5} − ٥ س^{4} + ١٨ س^{3} − ٥ س^{2} + ٤ س

هـ) = ٨س^{2} + ١٦ س^{4} −١٦ س^{3} + ١٦س −٢٤ ، و) = ٥ س^{3} + س^{2} + س + ٥ .

[٢] أ) (٣ س^{٣}) . (٢س + ٣) = ٦ س^{٤} + ٩ س^{٣}

في كل الحالات من (أ – و) درجة ح$_{١}$. ح$_{٢}$ تساوي مجموع درجتي كلٍّ من ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$.

ب) س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٨ س + ٨ — جـ) (–٢ س^{٦} + س^{٤} –٣ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س –١)

ء) (٣ س^{٧} + ٩ س^{٥} + ٩ $\sqrt{٥}$ س^{٤}) — هـ) ٨ س^{٤} –٤ س^{٣} – ٤ س^{٢} + ٢ س .

و) ٢ س^{٦} + ٢ س^{٥} – ٢س^{٣} –٢س .

[٣] أ) خاصية التجميع لعملية جمع الحدوديات ، ب) خاصية التبديل لعملية جمع الحدوديات .

جـ) خاصية التبديل لعملية ضرب الحدوديات ، ء) خاصية التجميع لعملية ضرب الحدوديات .

هـ) خاصية توزيع عملية ضرب الحدوديات على عملية جمع الحدوديات .

[٤] أ) ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ حدودية من الدرجة الرابعة . ، ب) ح$_{١}$ – ح$_{٢}$ حدودية من الدرجة الرابعة .

جـ) ٥ ح$_{٢}$ حدودية من الدرجةالثانية . ، ء) ح$_{١}$. ح$_{٢}$ حدودية من الدرجةالسادسة .

هـ) ح$_{١}^{٢}$ حدودية من الدرجة الثامنة . ، و) ح$_{١}^{٢}$. ح$_{٢}$ حدودية من الدرجة العاشرة .

ز) $\frac{١}{٢}$ ح$_{١}$.ح$_{٢}^{٢}$ حدودية من الدرجة الثامنة .

[٥] لإيجاد العامل الآخر نقسم س^{٣} + ١ على س + ١ فيكون خارج القسمة هو العامل الآخر .

أ) = س^{٢} – س + ١ — ب) = (٣ س^{٢} – ٤ س – ١٥)

جـ) = (٢ س^{٢} + ١) — ء) = (س – ٢)

هـ) = (–٣س^{٢} + ٤)

[٦] لإيجاد خارج وباقي قسمة ح$_{١}$ على ح$_{٢}$ نوجد :

ح$_{١}$ ÷ ح$_{٢}$ فيكون ح$_{٢}$ هو خارج القسمة ، ح$_{٣}$ هو باقي القسمة .

أ) خارج القسمة (س –١) ، وباقي القسمة = ٢ .

ب) خارج القسمة (٢س + ٦) ، وباقي القسمة = صفراً .

جـ) خارج القسمة (٣س^{٣} –٧س^{٢} + ١٥س –٣٠) ، وباقي القسمة = ٦١ .

ء) خارج القسمة (٥ س^{٢} + ٢ س + ٥) ، أما باقي القسمة (٢س –٣)

هـ) خارج القسمة (٣ س –٢) ، أما باقي القسمة ٦س .

و) خارج القسمة (٣س^{٣} –٩ س^{٢} + ٢٤ س – ٦٦)، وباقي القسمة ١٧٤س + ٧٣ .

[٧] $ح_٣(٢) = (٢^٢ - ٢ + ١) = ٣$.

$ح_٤(٢) = (٢ + ١) = ٣$.

∵ $ح_١ = ح_٢ \cdot ح_٣ + ح_٤$

$ح_١(٢) = ح_٢(٢) \cdot ح_٣(٢) + ح_٤(٢)$ ، $= ٥ \times ٣ + ٣ = ١٥ + ٣ = ١٨$.

[٨] لإيجاد كلٍّ من $ح_٣$ ، $ح_٤$ نقسم $ح_١$ على $ح_٢$.

$(٥س^٣ + ١٠س^٢ - ٢س + ٧) \div (٣س^٢ + س - ٥)$ فيكون خارج القسمة

$(\frac{٥}{٣}س + \frac{٢٥}{٩})$ ،وباقي القسمة $(\frac{٣٢}{٩}س + \frac{١٨٨}{٩})$ ؛

أي أن : $ح_٣ = \frac{٥}{٣}س + \frac{٢٥}{٩}$ ، $ح_٤ = (\frac{٣٢}{٩}س + \frac{١٨٨}{٩})$.

∴ $٥س^٣ + ١٠س^٢ - ٢س + ٧ = (٣س^٢ + س - ٥) \cdot (\frac{٥}{٣}س + \frac{٢٥}{٩}) + (\frac{٣٢}{٩}س + \frac{١٨٨}{٩})$.

٤ : ٣ مبرهنتا الباقي والعامل

عدد الحصص : حصتان .

الأهداف

يستخدم مبرهنتي الباقي والعامل في :

١- إيجاد باقي قسمة حدودية على أخرى من الدرجة الأولى .

٢- تحديدفيما إذا كانت حدودية من الدرجة الأولى عاملاً لحدودية أم لا .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : مبرهنة الباقي ،

الحصة الثانية : مبرهنة العامل .

التقويم يكون التقويم بنائياً من خلال مناقشة وحل الأمثلة والتدريبات الصفية والواجب المنزلي .ويعطى هذا التمرين أو تمرين شبيه به كخطوة تقويم :

أ) أوجد باقي قسمة $(٢س^٣ - ٣ - س^٢ + ٣س - ٤)$ على $(س - ٢)$.

ب) لتكن $ح_١$ هي $س^٤ - ٣س^٢ + ٥س + ٦$ ، $ح_٢$ هي $س + ٢$ ، بين أن $ح_٢$ عامل من عوامل $ح_١$.

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) ٢١　　ب) −٣٩٧　　جـ) $\frac{٤٧}{٨}$　　ء) ٦

هـ) ١٠　　و) ٣٧٧

[٢] لكي تكون حـ$_٢$ عاملاً من عوامل حـ$_١$ لا بد أن تكون القيمة العددية لـحـ$_١$ عندما س = صفراً، حـ$_٢$ = صفراً .

أ) حـ$_١$ (٢) = (٢)^٢ − ٤ (٢) + ٤ = صفر ،　∴ حـ$_٢$ عامل من عوامل حـ$_١$.

ب) حـ$_١$ (٢) = (٢)^٣ − (٢×٢) − ٤ = ٨ − ٨ = صفر ، ∴ حـ$_٢$ عامل من عوامل حـ$_١$.

جـ) حـ$_١$ (−٣) = ٢ (−٣)^٣ + ٧ (−٣)^٢ − ٩ . ،　= −٥٤ + ٦٣ − ٩ = صفر ،

∴ حـ$_٢$ عامل من عوامل حـ$_١$.

ء) حـ$_١$ (−١) = (−١)^٣ + ٢ (−١)^٢ − ٨ (−١) − ٩ = −١ + ٢ + ٨ − ٩ = صفر

∴ حـ$_٢$ عامل من عوامل حـ$_١$.

هـ) حـ $\left(\frac{-٢}{٣}\right)$ = ٣× $\left(\frac{-٢}{٣}\right)^{٣}$ − ٤ $\left(\frac{-٢}{٣}\right)^{٢}$ − $\left(\frac{-٢}{٣}\right)$ +٢ ، = $\cancel{٣}^{١}$ $\left(\frac{-٨}{\cancel{٢٧}_{٩}}\right)$ − ٤ $\left(\frac{٤}{٩}\right)$ + $\frac{٢}{٣}$ + ٢

= $\frac{-٨}{٩}$ − $\frac{١٦}{٩}$ + $\frac{٨}{٣}$ ، = − $\frac{٨}{٩}$ − $\frac{١٦}{٩}$ + $\frac{٢٤}{٩}$ = $\frac{-٢٤+٢٤}{٩}$ = صفراً ،

∴ حـ$_٢$ عامل من عوامل حـ$_١$.

[٣] أ) من مبرهنة الباقي يكون باقي القسمة يساوي حـ (٢) ، حـ (٢) = ٩

حـ (٢) = أ (٢)^٢ − (أ + ١) (٢) + ٣ = ٩ ؛ ٤أ − ٢أ − ٢ + ٣ = ٩ ، ٢أ = ٨ ، ∴ أ = ٤ .

ب) حـ (−١) = ٦ ، (أ + ٣) (−١)^٣ + ٥أ (−١)^٢ + ١ = ٦ ، ٤أ = ٨ ، أ = ٢ .

جـ) حـ (−١) = ٣ ، (−١)^٣ + ٤ (−١)^٢ − أ (−١) + ١ = ٣ ، −١ + ٤ + أ + ١ = ٣ ، أ = −١ .

[٤] أ) لكي يكون (س + ٢) عامل من عوامل الحدودية لابد أن يكون حـ (−٢) = صفراً .

حـ (−٢) = (−٢)^٣ + ٨ (−٢)^٢ + ب (−٢) + ٤ = ٠ ، −٨ + ٣٢ − ٢ب + ٤ = ٠

−٢ب + ٢٨ = ٠ ، ٢ب = ٢٨ ، ب = ١٤ ، ∴ الحدودية حـ هي س^٣ + ٨ س^٢ + ١٤ س + ٤ .

لإيجاد العامل الآخر نوجد خارج قسمة س^٣ + ٨س^٢ + ١٤ س + ٤ على (س + ٢) فيكون س^٢ + ٦س + ٢ .

أي أن س^٣ + ٨س^٢ + ١٤ س + ٤ = (س + ٢) . (س^٢ + ٦س + ٢) .

ب) تقبل الحدودية ٤س^٢ + ٨ س − ٥ على (٢ س + ب) عندما يكون حـ$\left(\frac{-ب}{٢}\right)$ = صفراً .

٤ $\left(\frac{-ب}{٢}\right)^{٢}$ + ٨ $\left(\frac{-ب}{٢}\right)$ − ٥ = ٠ ،　٤ $\left(\frac{ب^{٢}}{٤}\right)$ − ٤ ب − ٥ = ٠ .

ب^٢ − ٤ب − ٥ = ٠ ، (ب − ٥) (ب + ١) = ٠ ، إ، ب = ٥ ، أما ب = −١ .

[٥] أ) لكي تقبل الحدودية [س^{٣} − (٢ ب + جـ) س^{٢} + ب (ب + ٢جـ)س − ب^{٢} جـ]

القسمة على (س− جـ) لابد أن يكون حـ (جـ) = صفراً ،

حـ(جـ) = جـ^{٣} − (٢ ب^{٢}+ جـ) (جـ)^{٢} + ب (ب + ٢جـ) جـ − ب جـ = ٠

جـ^{٣} − ٢ ب جـ^{٢} − جـ^{٣}+ ب^{٢} جـ + ٢ ب جـ^{٢} − ب^{٢} جـ = ٠ ،

∴ حـ(جـ) = صفراً.

∴ الحدودية س^{٣} − (٢ ب + جـ) س^{٢} + ب (ب+٢ جـ) س − ب^{٢} جـ تقبل القسمة على (س − جـ)

ب) نحلل المقسوم عليه : ، س^{٣} − س^{٢}− س + ١ = (س^{٣} − س^{٢}) − (س − ١)

= س^{٢} (س −١) − (س −١) ، = (س −١) (س^{٢} −١) ، = (س −١) (س −١) (س +١)

= (س −١)^{٢} (س +١) ، ∵ حـ هي (س^{ن}−١) (س$^{ن+١}$−١) ،

∴ حـ(١) = (١^{ن}−١) (١$^{ن+١}$ − ١) = ٠

وبالمثل : حـ(− ١) = [(−١)^{ن} − ١] [(−١)$^{ن+١}$ −١]

١ − عندما ن عدداً زوجياً :حـ(−١) = [(−١)^{ن} − ١] [(−١)$^{ن+١}$ −١] = (١ − ١) (−٢) = صفراً

٢ − عندما ن عدداً فردياً :حـ(−١) = [(−١)^{ن} −١] [(−١)$^{ن+١}$ − ١] = (−٢) (١−١) = ٢ × ٠ = صفراً

∴ حـ تقبل القسمة على(س^{٣} − س^{٢} − س + ١)

٤ : ٤ أصفار الحدودية

عدد الحصص :ثلاث حصص .

الأهداف

١− يوجد أصفار حدودية ما .

٢− يكتب حدودية معطاة على صورة حاصل ضرب عواملها (يحلل حدودية معطاه).

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : أصفار الحدودية ،

الحصتان الثانية والثالثة : تمارين ومسائل .

التقويم يكون التقويم بنائياً من خلال مناقشة وحل الأمثلة وبعض التمارين الصفية ومن خلال متابعةحل تمارين الواجب المنزلي، ويعطى التمرين التالي أو تمرين شبيه به كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثالثة:

إذا كان العدد (١) أحد أصفار الحدودية ٤ س^{٢} + ٣ س − ٧ ؛ فأوجد صفرها الآخر .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ١) س = − ٤ ، ٢) − ٢ ، −٣ ، ٣) −١ ، ٤

٤) − ٣ ، $\frac{١}{٢}$ أصفار للحدودية (٢ س^{٢} + ٥ س − ٣) ٥) ٣ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$س − ١ = ٠

بضرب طرفي المعادلة × ٢ ، ٦ س^{٢} + س − ٢ = ٠ ، (٢س − ١) (٣س + ٢) = ٠

اما س = $\frac{١}{٢}$ أو س = $\frac{-٢}{٣}$.

٦) س^{٣} − ٢ س^{٢} − س + ٢ = ٠ ، (س^{٣} − ٢ س^{٢}) − (س − ٢) = ٠ ، س^{٢} (س − ٢) − (س − ٢) = ٠

(س − ٢) (س^{٢} − ١) = ٠ ، (س − ٢) (س + ١) (س − ١) = ٠ ، ∴ أصفار الحدودية ١ ، ٢ ، −١ .

٧) س^{٣} − ٥س^{٢} − ٨س + ١٢ = (س^{٣} − ٥ س^{٢} − ٦س) − ٢س + ١٢ = س (س^{٢} − ٥س − ٦) − ٢(س − ٦)

= س (س − ٦) (س + ١) − ٢ (س − ٦) = (س − ٦) [س (س + ١) − ٢] = (س − ٦) (س^{٢} + س − ٢)

= (س − ٦) (س + ٢) (س − ١) = ٠ ، ∴ أصفار الحدودية : ٦ ، ١ ، −٢ .

٨) س^{٤} − س^{٣} − ٣١ س^{٢} + ٢٥س + ١٥٠

أما أن نحلل الحدودية إلى عواملها باستخدام التجميع . أو نجعل س = أحد عوامل الحد المطلق

فمثلاً س = − ٢ اي (س + ٢) ثم نقسم الحدودية حـ على (س + ٢)

(س^{٤} − س^{٣} − ٣١ س^{٢} + ٢٥ س + ١٥٠) ÷ (س + ٢) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٢٥ س + ٧٥

ثم نقسم (س^{٣} − ٣س^{٢} − ٢٥س + ٧٥) على أحد عوامل الحد المطلق ١٥٠ ،

وليكن س = ٥ أي على العامل (س − ٥) ، (س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٢٥س + ٧٥) ÷ (س − ٥) = (س^{٢} + ٢س − ١٥)

= (س + ٥) (س − ٣) ، ∴ أصفار الحدودية الأربعة : − ٥ ، −٢ ، ٣ ، ٥ .

[٢] أ) بما أن (−١) صفر من أصفار الحدودية ، أي أن حـ(− ١) = صفراً . إذن (س + ١) عامل من عوامل الحدودية حـ ؛ ولتعيين بقية الأصفار نقسم الحدودية حـ على العامل (س + ١) أي أن :

(س^{٢} + ٧س + ٦) ÷ (س + ١) = (س + ٦) ، ∴ − ٦ صفر آخر للحدودية .

ب) (س^{٣} − ٦س^{٢} − ١٣ س + ٤٢) ÷ (س − ٧) = س^{٢} + س − ٦ ، = (س + ٣) (س − ٢)

∴ − ٣ ، ٢ صفران آخران للحدودية .

جـ) نفس الأسلوب الذي تم به حل أ . فنحصل على بقية اصفار الحدودية وهي − ٥ ، −١ .

ء) بما أن ١ ، −١ صفران للحدودية حـ ، أي أن حـ(١) = صفراً ، إذن (س −١) عامل من عوامل الحدودية،
وبالمثل حـ(−١) = صفر إذن (س +١) عامل من عوامل الحدودية ، ولتعيين بقية الأصفار
نقسم الحدودية أولاً على (س −١) وبعد ذلك نقسم خارج القسمة على العامل الثاني (س +١)
(أو نقسم الحدودية على حاصل ضرب العاملين) فنحصل على $(س^{٢} - ٢)$ ، وبجعل $س^{٢} - ٢ = ٠$

$(س - \sqrt{٢})(س + \sqrt{٢}) = ٠$ ، أما $س = \sqrt{٢}$ أو $س = -\sqrt{٢}$ ،

∴ الصفران الآخران للحدودية هما $\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$.

هـ) لإيجاد بقية الأصفار نقسم الحدودية على س + ٢ ، أي :

$س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢ \div (س + ٢) = س^{٢} - س - ٦$ ، $= (س - ٣)(س + ٢)$

∴ الصفران هما −٢ ، ٣ ، نلاحظ أن (−٢) صفر مكرر .

و) $س^{٤} - ٣س^{٣} - ١٩س^{٢} + ٢٧س + ٩٠ \div (س + ٢) = س^{٣} - ٥س^{٢} - ٩س + ٤٥$ ،

$= (س^{٣} - ٥س^{٢}) - ٩(س - ٥)$ ، $= س^{٢}(س - ٥) - ٩(س - ٥)$ ،

$= (س - ٥)(س^{٢} - ٩) = (س - ٥)(س - ٣)(س + ٣)$ ،

∴ الأصفار الثلاثة الباقية للحدودية هي: ٥ ، ٣ ، −٣ .

[٣] أ) $(س - ٥)(س + ٢)$ ،

ب) $(س^{٣} - ٥س^{٢}) - (٩س - ٤٥)$ ، $س^{٢}(س - ٥) - ٩(س - ٥)$ ، $(س - ٥)(س^{٢} - ٩)$

$(س - ٥)(س - ٣)(س + ٣)$

جـ) نجعل س = ١ وهو أحد عوامل الحد الطلق ٣ ، ثم نقسم الحدودية على العامل (س −١)

$(٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ٨س + ٣) \div (س - ١) = ٢س^{٢} + ٥س - ٣ = (٢س - ١)(س + ٣)$

∴ $٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ٨س + ٣) = (س - ١)(٢س - ١)(س + ٣)$.

ء) نجعل س = −١ أحد عوامل الحد المطلق (− ١٢)، ونقسم الحدودية على (س + ١) ، فنحصل على:
$(س^{٤} + س^{٣} - ١٣س^{٢} - ٢٥س - ١٢) \div (س + ١) = س^{٣} - ١٣س - ١٢$ ، نجعل س = ٤ وهو أحد
عوامل الحد المطلق (−١٢) ، ثم نقسم الحدودية (س −١٣ س −١٢) على العامل (س −٤) ،

$(س^{٣} - ١٣س - ١٢) \div (س - ٤) = س^{٢} + ٤س + ٣$ ، $= (س + ٣)(س + ١)$

∴ $(س^{٤} + س^{٣} - ١٣س^{٢} - ٢٥س - ١٢) = (س + ١)^{٢}(س - ٤)(س + ٣)$.

٤ : ٥ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة .

الهدف يهدف هذا الاختبار إلى التعرف على مدى تحقق أهداف الوحدة عند الطالب والجدول التالي يوضح رقم الهدف ورقم السؤال الذي يقيس الهدف .

رقم السؤال	رقم الهدف
الأول أ	١
ب	٢
الثاني أ	٣
ب	٥
الثالث	٦ ، ٧
الرابع	٤

ويتم تنفيذ الدرس : في حصة واحدة .

- يقدم هذا الاختبار أو مشابه له على أن يغطي أهداف الوحدة ؛ويعتبر هذا الاختبار تقويماً ختامياً للوحدة لمعرفة مدى تحقيق أهداف الوحدة عند الطلبة .

يصحح المدرس أوراق إجابة الطلبة ويرصد الدرجات لكل هدف لمعرفة الأهداف التي لم تتحقق عند الطلبة

- يناقش الأخطاء التي وقع فيها الطلبة ويركز على الأهداف التي لم تتحقق بشكل جيد .

الاختبار

س ١ : أ) بين درجة وعدد حدود الحدودية التالية :

(١) $٢س^{٥} - ٤س^{٣} + س - ٤$

ب) أوجد القيمة العددية للحدودية التالية :

$س^{٣} + ٥س^{٢} + ٥س + ١٦$ عندما $س = -١$.

س ٢ : أ) لتكن $ح_{١}$ هي $س^{٣} - ١$ ، $ح_{٢}$ هي $س^{٢} + س + ١$.

أوجد : (١) $ح_{١} + ح_{٢}$ ، (٢) $ح_{١} \div ح_{٢}$ ،

(٣) $٢ (ح_{٢} \cdot ح_{١})$

ب) أوجد باقي قسمة $س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢س - ٤٠$ على $س - ٢$

س ٣ : أ) أوجد أصفار كل من الحدودية واكتبها على شكل حاصل ضرب عوامل :

$-س^{٣} - ٢س^{٢} - ٩س + ١٨$

س ٤) هل تقبل $ح_{١}$ القسمة على $ح_{٢}$ في كل مما يأتي ، وضح السبب :

أ) $ح_{١}$ هي $س^{٣} + س^{٢} + ٢$ ، $ح_{٢}$ هي $س + ٢$

ب) $ح_{١}$ هي $٣س^{٣} - ٤س^{٢} - ٣س + ٥$ ، $ح_{٢}$ هي $س - ٣$.

الوحدة الخامسة

البنى الجبرية

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٥ – ١	العملية الثنائية	٣
٥ – ٢	النظام الرياضي	٢
٥ – ٣	خواص العملية الثنائية	٥
٥ – ٤	الزمرة	٥
٥ – ٥	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١٦

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرّف العملية الثنائية ويحل تمارين عليها .

٢ – يتعرّف على النظام الرياضي ذي العملية الواحدة .

٣ – يعرّف خواص العملية الثنائية «التبديل – التجميع – العنصر المحايد – النظير» .

٤ – يميّز النظام الرياضي الذي يمثل زمرة ، يميز الزمرة كنظام رياضي .

٥ – يستنتج الزمرة من نظام رياضي .

٦ – يبرهن (وحدانية) كل من الصفر المحايد والنظير في الزمرة .

٧ – يبرهن قانون الاختزال .

٨ – يوجد العنصر المحايد ونظير كل عنصر لزمرة معطاة .

المقدمة

لمحة تاريخية

يرى بعض المؤرخين أن الرياضيات الحديثة تمت في الفترة من ١٦٣٧م وهو تاريخ نشر كتاب ديكارت عن الهندسة التحليلية ،وحتى ١٨٠٠م ويرى البعض الآخر أن الفترة قبل عام ١٨٠٠م تعتبر حقبة الرياضيات الكلاسيكية بينما يعتبرون الفترة بعد ١٨٠٠م زمن الرياضيات الحديثة .

وفي القرنين التاسع عشر والعشرين شهدت الرياضيات تحولا جذرياً في واحد من أقدم فروعها ألا وهو علم الجبر . وقد تحول علم الجبر من علم يقتصر على دراسة القوانين وتنمية المهارات لحل مسائل ذات أنماط متقاربة، إلى علم هدفه دراسة العمليات الجبرية على مجموعات عناصرها ذات طبيعة مجردة عامة ؛ ولهذا السبب يُفضل أكثر الباحثين تسمية هذا الجبر جبراً مجرداً « جبراً حديثاً » .

وهناك العديد من الرياضيين أضافوا الكثير لأعمال الرواد الجبرية العظيمة ؛ ومن هؤلاء :

العالم الفرنسي ليجندر .Adrian Marie Legender(١٧٥٢–١٨٣٣م)

العالم الألماني جاوس .Gart Friedrieh Gaws (١٧٧٧–١٨٥٥م)

العالم الانجليزي هاملتون William Rowan Hamilton(١٨٠٥–١٨٦٥م)

العالم الفرنسي جالوا Eraniste Galois (١٨١١–١٨٣٢م)

العالم الانجليزي كميلى Arthur Gayley (١٨٣١–١٨٩٥م)

العالم النرويجي آبل Apel (١٨٠٢–١٨٢٩م)

العالمة الألمانية إيمي نويذر Noether (١٨٤٤–١٩٣٢م)

العالم الألماني كانتور George cantor (١٨٤٥–١٩١٨م)

العالم الالماني هيلبرت David Hilbent (١٨٦٢–١٩٤٣م)

خلفية علمية

هناك فرق رئيس» بين الكلاسيكي والجبر الحديث ؛ حيث نجد أن عناصر الجبر القديم هي الأعداد والنقاط ، بينما الجبر الحديث يعتبر نظاماً مجرداً استنباطياً مبنياً على أسلوب المسلمات .

ولقد تعرفنا سابقاً على المجموعات والعمليات عليها وبعض الخواص مثل الانغلاق والتبديل والتجميع والعنصر المحايد والنظير .

وفي هذه الوحدة سوف نتعرض لدراسة تلك الخواص وخواص أخرى على تركيبات جبرية بالنسبة للمجموعات ؛ حيث تمثل التركيبات الخطوة الرئيسية في الرياضيات الحديثة ؛ فالأفكار المشتركة للمبرهنات الرياضية تتضح من خلال مفهوم التركيب ويتكون التركيب الرياضي من الآتي :

- مسميات أو إصطلاحات وبلغة أخرى مجموعة من العناصر قد تكون هذه العناصر نقاطاً أو مستويات أو أعداداً .
- علاقة أقل أو أكثر تربط بين هذه العناصر مثل علاقة البنية أو علاقة تساوي البعد في الهندسة . وقد تكون العلاقة عملية جبرية .
- بديهيات « مسلّمات » تحدّد خواص العلاقة .
- نتائج منطقية « مبرهنات » تشتق دون أي فروض تخص طبيعة العناصر .

أنواع التركيبات الرياضية :

- التركيبات الجبرية وفيها تكون العلاقة عبارة عن عملية مثل تركيب المجموعة أو الحقل .
- تركيبات الترتيب وفيها تكون العلاقة هي ≤ أو ≥ .
- التركيبات التوبولوجية وهنا تكون العلاقة هي التوبولوجي .

إن تركيب المجموعة (سہ، ٥) ما هو إلا زوج مرتب ؛ ويمثل نظاماً رياضياً اذا كانت العملية ٥ ثنائية على المجموعة سہ

النظام الرياضي هو البنية التي تعرف العلاقات فيها من خلال العملية أو العمليات؛ وتعريف العملية على المجموعة يمثل الخطوة الأولى في الجبر .

البنية الجبرية لا توصف بشكل دقيق إلا بوجود ثلاث مجموعات – المجموعة الأساسية ومجموعة العلاقات على المجموعة الأساسية ، ومجموعة المواصفات للعلاقات والمجموعة الأساسية .

فنظرية التطابق لجاوس عرّف فيها أن عددين صحيحين يكونان منطبقين بالنسبة لعدد طبيعي قياس ى ، أي يتطابق عددان صحيحان إذا كان الفرق بينهما يقبل القسمة على ى مثال ذلك :

في حالة ى = ٣ يكون العددان ١، ١٢١ متطابقين ، لأن ١٢١ – ١ = ١٢٠ وهو يقبا القسمة على ٣ ويكتب ذلك بالصورة ١ ≡ ١٢١ قياس ٣ .

- من المواضيع المهمة في الجبر دراسة الصفوف المتكافئة مثل :

... –١٠ ، –٧ ، –٤ ، –١ ، ٢ ، ٥ ، ٨ ، ...

مع عمليتي الجمع والضرب عليها لأن ذلك يوفر طريقة غير مباشرة لدراسة خواص الأعداد الصحيحة غير المنتهية والعمليات عليها .

- خواص الأنظمة الرياضية ذات العملية الواحدة التي تمثل زمرة ومسلمات الزمرة صحيحة بالنسبة لمجموعات الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع ، وهي صحيحة لبنيات رياضية وفيزيائية أخرى كثيرة مثل مجموعات معينة في التحويلات في الهندسة وفي الفيزياء؛ وأي نظام رياضي أينما وجد قد يكون في الإلكترونيات أو الكيمياء أو . . . يثبت أنه يحقق مسلمات الزمرة فإنة بالتالي يمتلك خواص الزمرة التي أثبتت في مبرهنات الزمرة .
- الرياضي الحديث يعبر ويثبت مبرهنات، ثم يدرس نظماً رياضية وفيزيائية بالبحث عن بيانات للزمرة .
- خواص الأنظمة الرياضية ذات العمليتين سيتم التعرض لها في السنة القادمة .

الرموز والمصطلحات

ط* = ط / {٠}

ص* = ص / {٠}

د* = د / {٠}

ح* = ح / {٠}

٢~ مجموعة القوة للمجموعة س، هي مجموعة عناصرها جميع المجموعات الجزئية لـ س.

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة قياس د هي

ص_د = {٠، ١، ٢، ٣، ...، (د−١)} ، ص*_د = {١، ٢، ٣، ...، (د−١)}

العمليات الثنائية	Binary operations
النظم ذات العمليات	operatioal systems
نظام جبري	system
عملية تبديلية	Commutative operation
عملية تجميعية	associative operation
عنصر محايد	identity element
المحايد الجمعي	additive identity
المحايد الضربي	multiplicative identity
(نظير) معكوس العنصر	inverse of an element
(النظير) المعكوس الجمعي	additivie inversee
(النظير) المعكوس الضربي	multiplicative inverse
زمرة	groap
منتظمة	Regular

المراجع

الرياضيات الحديثة	كمال رياض يعقوب
موجز تاريخ الرياضيات	يحي عبيد سعيد ، هاشم الطيار
طرق تدريس الرياضيات (جزءان)	فرديك هـ . بل
أصول تدريس الرياضيات	نضلة حسن احمد خضر
المبادئ الاساسية في الجبر المجرد	عدنان محمد عوض ، بسام يوسف عودة
الرياضيات الحديثة (الجزء الأول)	عبد الفتاح الشرقاوي ، نبيه عبد القادرة ، محمود زناتي ، أحمدفرغلي
الرياضيات المعاصرة	عادل سودان ، موفق دعبول ، حضر الاحمد ، محمد سعيد البرني
الجبر العالي .	ا . ح . كوروش

توجيهات طرائقية عامة

- يُمهّد لتعريف العملية الثنائية بأمثلة جمع وضرب الأعداد الطبيعية، وتوضّح خاصية الانغلاق لهما على ط من خلال مفهوم التطبيق وأمثلة التطبيق : س × س ← س
- يُعطى تعريف العملية الثنائية .
- يُعطى مثال للتعريف ومثال مضاد .
- يوضّح أن العمليتين ⊕ ، ⊙ المعرفتان على صـ إذا لم يشار إلى تعريفهما ، تعرفان كما يلي :

  أ ⊕ ب = باقي قسمة أ+ ب على د

  أ ⊙ ب = باقي قسمة أ ب على د .
- يؤكّد في العمليات التي تمثل بجداول بأن العملية تكون ثنائية إذا كانت جميع العناصر التي في الجدول تنتمي إلى المجموعة نفسها المعرّفة عليها العملية .
- يوضّح من خلال المثال ٥ ، أن عدد العمليات الثنائية لأي مجموعة مكونة من ن عنصر تساوي (ن)$^{ن^٢}$
- يعطى النظام الرياضي ذو العملية الواحدة من خلال مثال، ثم التعريف .
- يعطى عدة أزواج مرتبة مثل (ص ، +) (ط ، ×) ، (ص ، ÷) كتدريب، ويطلب من الطلبة التعرّف على كلٍ منها من حيث أنه يمثل نظاماً رياضياً أو لا يمثل، مع ذكر السبب .
- يذكّر الطلبة بخواص العمليات على المجموعات ط ، ص ، د ، ح ، ومن خلال ذلك يستنتج تعريف كل خاصية على العملية الثنائية .
- إعطاء بعد كل خاصية مثال يحقق الخاصية ومثال مضاد .
- إعطاء أمثلة متنوعة للقواعد، ثم يكوّن الجدول ، والعكس إذ تُعطى أمثلة بجدوال ثم تُستنتج القواعد .
- تنويع الأمثلة بعد دراسة أكثر من خاصية، بحيث تشمل الأمثلة جميع الخواص التي تم تدريسها .
- يؤكّد عند تدريس خاصية التجميع على مجموعات منتهية أن تؤخذ جميع الحالات، أي انه :

  إذا كانت س مكونة من عنصرين فعدد الحالات $٢^٣$ = ٨ حالات

  وإذا كانت س مكونة من ثلاثة عناصر فعدد الحالات = $٣^٣$ = ٢٧ . . . وهكذا .

  وليس بالضروري أن يتمكن الطالب من إيجاد جميع الحالات ، ولكن يكفي في حالة وجود حالة واحدة لا تمثل العملية تجميعية أن تكون العملية ليست تجميعية .

- يؤكد في العمليات التي تمثل بجداول على الآتي :

١) يتم التحقق من الخاصية التبديلية من خلال تطابق العناصر أعلى القطر الرئيسي مع العناصر أسفل القطر الرئيسي بشكل متناظر .

٢) يتم إيجاد العنصر المحايدمن تحديد العنصر الناتج من تقاطع صف يطابق الصف الرئيسي مع عمود يطابق العمود الرئيسي وفي حالة عدم تطابق صف مع الصف الرئيسي أوالعمود لا يطابق العمود الرئيسي، فليس للعملية عنصر محايد .

٣) يتحدد نظير أي عنصر من الصف من خلال تحديد عنصر من عناصر العمود تقاطعهما مع هذا الصف هو العنصر المحايد و العكس صحيح .

٤) في حالة عدم الإشارة إلى العملية بأنها ثنائية، يجب قبل التعرف على الخواص أن يتم التعرف على العملية من حيث كونها ثنائية. وذلك قبل الشروع في دراسة أي خاصية . وإن كانت ليست ثنائية فلا داعٍ لدراسة الخواص المطلوبة .

٥) يؤكد على أنه إذا لم يكن للعملية الثنائية عنصر محايد، فلا معنى للبحث عن النظير .

٦) يؤكد في حالة أن عناصر القطر الرئيسي تتكون من العنصر المحايد أي أن نظير أي عنصر هو العنصر نفسه .

- يناقش الجدوال (٥ -١٢٠أ ، ب ، جـ ، ء) كتمهيد لتعريف الزمرة ، ثم يعطى تعريف الزمرة ويطلب تحديد أيٍّ من الجدوال السابقة يمثل زمرة .
- يُعطى أمثلة متنوعة على شروط الزمرة وأمثلة مضادة بعدم تحقق كل شرط بالتدريج . ثم مثال أخير يحقق جميع الشروط .
- يُعطى مثال على مجموعة غير منتهية بقاعدة تمثل زمرة .
- تُكثّف في هذا الموضوع التدريبات الصفية .
- يبرهن أن العنصر المحايد في الزمرة وحيد، لا يوجد له آخر ويدعم ذلك بأمثلة ، كما يبرهن إنه نظير كل عنصر في الزمرة وحيد أيضاً لا يوجد له آخر ، أي أنه لا يوجد نظيران لعنصر واحد .
- يبرهن قانون الاختزال، ثم يعطى أمثلة عليه .
- يبرهن أنه يوجد حل واحد فقط للمعادلة في الزمرة .
- يعطى أمثلة يوجد من خلالها حل لمعادلة معطاة .
- بالنسبة لأي عملية على مجموعة غير منتهية، إذا كانت خاصية ما غير متوفرة لهذه العملية فيتم توضيح ذلك بمثال عددي .
- يعطى نهاية كل حصة واجب منزلي وفقاً لما ينجز في الحصة ، ويتابع في الحصة التالية، ومن خلال ذلك تُعالج أخطاء الطلبة وصعوباتهم .

٥ : ١ العملية الثنائية

عدد الحصص : ثلاث حصص .

الأهداف

– يعرّف العملية الثنائية .

– يميز العملية الثنائية من بين عمليات أخرى .

– يحل تمارين ومسائل على العملية الثنائية .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : العملية الثنائية

الحصة الثانية : أمثلة بجداول وقواعد لعمليات على مجموعات غير منتهية .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال التدريبات الصفية والواجبات المنزلية، ويعطى السوال التالي نهاية الحصة الثالثة كخطوة تقويم :

بيّن أياً من العمليات + ، – ، ÷ ، × ثنائية على ط وأياً منها ثنائية على صہ ؟ .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[٣] ١) ٣ ، –٨ ، –١٤ ٢) ٣

[٤] تُعطى أمثلة عددية للتوضيح ، ثم يبيّن أن العملية ثنائية على ط .

[٥] مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة سہ = ٢^سہ ؛ أي أن :

٢^سہ = { ∅ ، {أ} ، {ب} ، {جـ} ، {أ ، ب} ، {أ ، جـ} ، {ب ، جـ} ، سہ }

– اتحاد أي مجموعتين من ٢^سہ هي مجموعة في ٢^سہ ، إذن « ∪ » عملية ثنائية .

– تقاطع أي مجموعتين من ٢^سہ هي مجموعة في ٢^سہ ؛ إذن « ∩ » عملية ثنائية .

[٦] يُكوّن جدول لكل عملية ، يتم التعرف على العناصر المكونة للجدول ومقارنتها مع عناصر صہ

إذن كل من ⊕ ، ⊙ عملية ثنائية .

[٧] ١) يكون جدول العملية ⊙ على صہ١٠ ؛ ٢) ٢ ⊙ س = ٠ ⟸ س = {٥} ، {٧} ، ∅ .

[٩] نعم

[١١] ١) سہ × سہ = ٩ ، ٢) ٣^٩ = ١٩٦٨٣

٥ : ٢ النظام الرياضي

عدد الحصص : حصتان .

الأهداف

– يعرّف النظام الرياضي ذي العملية الواحدة ويميّزه .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى :النظام الرياضي .

الحصة الثانية :تمارين ومسائل .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال متابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية، وفي نهاية الحصة الثانية يطرح المدرس السؤال التالي أو ما شابهه كخطوة تقويم :

أياً من الأزواج المرتبة التالية يمثل نظاماً رياضياً : (ط ، ÷) ، (ح ، ÷) ، (ﻫ* ، ÷).

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] كلٌ من (صـ، ×) ، (ﻫ ، ×) ١ (ح* ، ×) يمثل نظاماً رياضياً

[٢] ١) العملية ✻ ثنائية ، العملية O ليست عملية ثنائية .

٢) أ O ب = $\frac{أ + ب}{٢}$ ، أ ✻ ب = أكبر العددين (أ ، ب)

[٣] ١) (س، △) ليس نظاماً رياضياً، لأن △ ليست عملية ثنائية .

٢) (س، O) ليس نظاماً رياضياً، لأن O ليست عملية ثنائية .

[٥] نعم

[٦] ٢) (صـم ، +) يمثل نظاماً رياضياً ، (صـم* ، ⊙) لا يمثل نظاماً رياضياً .

[٧] ، [٨] كلٌ منها تمثّل نظاماً رياضياً .

٥ : ٣ خواص العملية الثنائية

عدد الحصص : خمس حصص .

الأهداف

– يذكر خواص العملية الثنائية: « التبديل ، التجميع ، العنصر المحايد ، النظير » .

– يستخدم هذه الخواص في الأنظمة الرياضية .

– يستنتج الخواص من أنظمة رياضية على مجموعات غير منتهية .

تنفيذ حصص البند

الحصتان الأولى والثانية : خاصيتا التبديل والتجميع .

الحصتان الثالثة والرابعة : العنصر المحايد والنظير .

الحصة الخامسة : تمارين ومسائل .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال متابعة التدريبات الصفية والواجبات المنزلية، وفي نهاية الحصة الخامسة يطرح المدرس السؤال التالي أو ما شابهه كخطوة تقويم :

عيّن العنصر المحايد ونظير كل عنصر في الجدول التالي :

⊙	١	٢
١	١	٢
٢	٢	١

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] جدول (٥ – ٢١ – ا) لا تتوفر فيه أي خاصية .

جدول (٥ – ٢١ – ب) تبديلي، والعنصر المحايد(و)، ونظير كل عنصر كما في الجدول

العنصر	ا	ب	جـ	و
النظير	ب	ا	جـ	و

جدول (٥ – ٢١ – جـ) تبديلي ، والعنصر المحايد (و)، وكل عنصر نظير نفسه .

[٢] جدول (٥ – ٢٢ – ا) العملية ليست ثنائية ، ولا معنى للبحث عن الخواص ا ∇ ب = $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{٢}$ $\forall$ ا، ب $\in$ س

جدول (٥ – ٢٢ – ب) المحايد « ١ »، يوجد نظير للعنصر المحايد فقط(س ∗ ص) أكبر العددين .

جدول (٥ – ٢٢ – جـ) المحايد « ١ »، ونظير كل عنصر هو العنصرنفسه ،(ا ⊙ ب) = باقي القسمة ا ب على ٨

[٣] لا يحقق اي خاصية .

[٤] ١) ليست تجميعية ، ٢) ليس للعملية Δ عنصر محايد .

[٦] ٢) العنصر المحايد لكل من العمليتين هو « ١ »؛

٣) نظير ٣ هو (–١)، نظير ٥ هو(–٣) بالنسبة للعملية ∗ ؛ أما بالنسبة للعملية O لا يوجد نظير لأي من ٣ ، ٥ .

[٧] يحقق جميع الخواص ، وقاعدة النظير س = $\frac{\text{س}}{\text{س}-١}$

[٨] ٢) العنصر المحايد ϕ ، ٣) يوجد نظير للعنصر المحايد فقط .

[٩] ٢) العنصر المحايد هو ع ، ٣) يوجد نظير للعنصر المحايد فقط .

٥ : ٤ الزمرة

عدد الحصص : خمس حصص .

الأهداف

– يعرّف الزمرة .

– يميز النظام الذي يمثل زمرة من أنظمة أخرى .

– يعين العنصر المحايد والنظير في زمرة .

– يبرهن وحدانية كل من العنصر المحايد والنظير .

– برهن وحدانية حل المعادلة في الزمرة .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : الزمرة .

الحصة الثانية : أمثلة على الزمرة .

الحصتان الثالثة والرابعة : برهنة وحدانية العنصر المحايد؛ والنظير ؛ وحل المعادلة في الزمرة .

الحصة الخامسة : تمارين ومسائل .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال متابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية، وفي نهاية الحصة الخامسة يُطرح السؤال التالي كخطوة تقويم:

بيّن أياً من الأنظمة التالية يمثل زمرة : (ط ، –) ، (ص ، ×) ، (د* ، ×) .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] جدول (٥ – ٢٦ – أ) لا يمثل زمرة، لأنه لا يوجد نظير للعنصرين ٢ ، ٣ .

جدول (٥ – ٢٦ – ب) لا يمثل زمرة، لأنه يوجد نظير للعنصر المحايد فقط .

جدول (٥ – ٢٦ – جـ) لا يمثل زمرة، لأنه لا يوجد عنصر محايد .

جدول (٥ – ٢٦ – ء) يمثل زمرة تبديلية .

[٢] كلٌّ من ($ص_٧$، ⊕) ، ($ص^*_٧$ ، ⊙) يمثل زمرة .

[٤] نعم زمرة .

[٥] لا يمثل زمرة .

[٦] يمثل زمرة .

[٧] ٣) تمثل زمرة .

[٨] ٢) ٣ ، –٥ .

[٩] يمثل زمرة .

[١٠] لا يمثل زمرة في الحالتين .

[١١] العناصر غير المنتظمة في ح هي صفر ، –١ .

٥ : ٥ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الهدف

يهدف هذا الدرس إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

يعطى الاختبار الذي في الدليل أواختبار مشابه ، بحيث يغطى أهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

رقم السؤال	الفقرة	رقم الهدف
١	أ	١، ٢
	ب	٣
٢	أ	٣
	ب	٦
٣		٧ ، ٨
٤		٤ ،٥

اختبار الوحدة

[١] أ) لتكن العملية * معرفة بالقاعدة أ * ب = $أ^{ب}$

١- هل العملية * عملية ثنائية على ط ؟

٢- هل (صم، *) نظام رياضيّ ؟

ب) لتكن العملية ○ ثنائية على ح معرفة بالقاعدة : أ ○ ب = أ - ٢ ب ∀ أ، ب ∈ ح

هل العملية ○ تجميعية ؟

[٢] أ) في الجدول المجاور، ادرس الخواص التالية للعملية *، على سم = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

*	١	٢	٣	٤
١	٢	٣	١	١
٢	٣	١	٢	٢
٣	١	٢	٣	٤
٤	٣	٢	٤	١

التبديل - العنصر المحايد - النظير .

ب) برهن وحدانية أن العنصر المحايد في الزمرة وحيد .

[٣] إذا كان النظام (صم* ، ⊙) يمثل زمرة :

١- كوّن جدول العملية ⊙ ، ٢ - عين العنصر المحايد ونظير كل عنصر .

٣ - حل المعادلة س ⊙ ٣ = ٢ .

[٤] لنعرف العملية * على ح بالقاعدة = س * ص = س + ص + $\frac{1}{2}$ ؛ أثبت ان (ح، *) زمرة تبديلية .

الوحدة السادسة

المعادلات والمتراجحات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٦ – ١	معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد	٣
٦ – ٢	مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية	٣
٦ – ٣	تكوين معادلة من الدرجة الثانية اذاعُلمَ جذراها	٢
٦ – ٤	اتحاد وتقاطع الفترات	٣
٦ – ٥	متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد	٢
٦ – ٦	متراجحات الدرجة الثانية في متغير واحد	٥
٦ – ٧	القيمة المطلقة	٣
٦ – ٨	جملة متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد	١
٦ – ٩	متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين	٢
٦ – ١٠	جملة متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين	١
٦ – ١١	اختبار الوحدة	١
	المجموع	٢٦

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون العام .

٢ – يستنتج مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد .

٣ – يكوّن معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد إذا علم جذراها.

٤ – يتعرف على أنواع الفترات، ويجري عمليتي الاتحاد والتقاطع عليها .

٥ – يحل متراجحة من الدرجة الأولى في متغير واحد جبرياً في مجموعة الأعداد الحقيقية،ويمثلها بيانياً .

٦ – يحل المتراجحات المزدوجة، والمتراجحات بالقيمة المطلقة .

٧ – يحل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد .

٨ – يحل جملة متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد .

٩ – يحل المتراجحات الكسرية، والتي كلٌ من بسطها ومقامها حدودية .

١٠ – يمثّل مجموعة حل متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً .

١١ – يمثّل مجموعة حل جملة متراجحات من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً .

المقدمة

تحتوي الوحدة السادسة «المعادلات والمتراجحات» على عشرة بنود تشمل ما يلي :

البنود الثلاثة الأولى تتعلق بالمعادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد . ويشمل على حل المعادلة وتكوينها في حالة معرفة الجذرين ، وكذلك إيجاد مجموع وحصل ضرب الجذرين لمعادلة معطاة .

أما البنود السبعة المتبقية فتشمل على المتراجحات من الدرجة الأولى في متغير واحد وفي متغيرين ومتراجحة من الدرجة الثانية في متغير واحد .

بالإضافة إلى القيمة المطلقة والفترات التي سبق للطالب دراستها في مرحلة سابقة .

كما أن بعض بنود هذه الوحدة تخدم مرحلة متقدمة من تعلم الطالب .

لمحة تاريخية

لقد اتفق العلماء على أن العرب هم أول من أطلق لفظة جبر على العلم المعروف الآن بهذا الأسم ، وعنهم أخذ الغرب ذلك الأسم .

وأول من ألف في الجبر هو محمد بن موسى الخوارزمي (توفي بعد سنة ٢٣٢ هـ) في زمن المأمون، وكان من أشهر كتبه «الجبر والمقابلة» : ويمكن القول : أن العرب لهم الفضل الأول في تقسيم المعادلة إلى ستة أقسام، ووضعوا حلولاً لكل منها . حلوا المعادلات الحرفية واستخدموا الجذور الموجبة. ولم يجهلوا أن المعادلة ذات الدرجة الثانية لها جذران .كما استخرجوا جذري المعادلة إذا كانا موجبين . وحلوا كثيراً من معادلة الدرجة الثانية بطرق هندسية ، كما في كتاب «الخوارزمي» وغيره من كتب علماء العرب .

وحل العرب معادلات من الدرجة الثالثة وقد اجادوا في ذلك وابتكروا ابتكارات قيمة هي محل إعجاب علماء الغرب .

وقد ورد في كتاب «الخوارزمي» كلمة «جذر» وهي ما يرمز لها بالحرف س ، والمال هو ما يرمز له بالرمز س^{٢} والعدد المفرد الحد الخالي من س . وسوف نتطرق إلى بعض المعادلات التي ذكرها الخوارزمي :

- أموالاً تعدل جذوراً أي م س^{٢} = ب س
- أموالاً تعدل عدداً أي م س^{٢} = جـ
- جذوراً وعدداً تعدل أموالاً أي ب س + جـ = م س^{٢}

وبالرجوع إلى الوحدة الثالثة تجد المزيد من المعلومات التاريخية عن علم الجبر .

خلفية علمية

تشكل المعادلات والمتراجحات مجالاً خصباً كتطبيق لكل ماسبق دراسته من نظريات وحقائق ونتائج في التحليل والاختصار والعمليات الحسابية الأساسية .

وتعتبر المعادلات والمتراجحات اساساً لدراسة متقدمة في الرياضيات حيث تظهر في كل فرع من فروعها ، كما تظهر في العلوم التطبيقية كافة .

يجب التأكيدعلى حساب المميز Δ = ب^2 − ٤أ جـ وذلك عند تدريس البند الأول من هذه الوحدة لمعرفة نوع جذري المعادلة .

وكذلك عند تدريس مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما . كما في مثال (٦−٢) للمعادلة جذران ولكنهما غير حقيقين . والتأكيد على الشرط اللازم لتكوين معادلة قابلة للحل في مجموعة الأعداد الحقيقية هو : (س$_1$ + س$_2$)^2 − س$_1$ س$_2$ $\geq$ ٠

وعند تدريس البند(٦−٢) سنورد طريقتين لإيجاد جذري المعادلة أ س^2 + ب س + جـ = ٠ بطريقة ذهنية دون حساب المميّز وهما :

أولاً : إذا كان مجموع أ + ب + جـ = ٠ فإن الجذرين هما س = ١ ، س = جـ

ثانياً : إذا كان أ − ب + جـ = ٠ فإن الجذرين هما : س = − ١ ، س = $\frac{-جـ}{أ}$

مثلاً : جذرا المعادلة ٥ س^2 − ٣ س − ٢ هما س = ١ ، س = $\frac{-٢}{٥}$

لان أ + ب + جـ = ٠ وجذرا المعادلة ٣ س^2 + ٧ س + ٤ = ٠ هما س = −١ ، س = $\frac{-٤}{٣}$

لان أ − ب + جـ = ٠

كمايجب على المدرس إعطاء الصورتين لتكوين المعادلة التي علم جذراها وهما:

أ) س^2 − (س$_1$ + س$_2$) س + س$_1$ س$_2$ = ٠

ب) (س − س$_1$) (س − س$_2$) = ٠

والصورة الثانية بحاجة إلى مهارة ضرب الأقواس .

وتعتمد المعادلات والمتراجحات في حلها على التحويلات المكافئة مما يحتم علينا معرفة التحويلات غير المكافئة وتفنيدها بوضوح حتى لا تشكل إرباكاً في طرق الحل ، ومن هذه التحويلات إيجاد الجذر التربيعي لطرفي المتراجحة فهو تحويل غير مكافئ . وكذلك تربيع طرفي المتراجحة ، ومن جهة أخرى يجب توضيح البدائل فمثلاً نجد أن س^2 > ٤ لا يعني أن س < ٢ بل −٢ < س < ٢ ويجب توضيح ذلك على خط الأعداد .

كما تجدر الإشارة إلى وجود شروط يجب مراعاتها عند الحكم على تكافؤ معادلتين أو تكافؤ متراجحتين .

عند تحديد حل المعادلة أو المتراجحة يجب أن نؤكد على أن الفترة العددية كمجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تصلح كمجموعة حل للمتراجحة في مجموعة الأعداد الحقيقية في حين أنه لا يجوز استخدامها كمجموعة حل في غير مجموعة الأعداد الحقيقية ، حيث لا يجوز التعبير عن مجموعة حل متراجحة في مجموعة الأعداد النسبية باستخدام الفترات .والفترة العددية يكون لها طرف علوي وطرف سفلي وتكون مفتوحة عند طرفها الذي لا ينتمي إليها .

قائمة الرموز

الرمز	مدلوله
$>$	أصغر من
$\geqslant$	أصغر من أو يساوي
$<$	أكبر من
$\leqslant$	أكبر من أو يساوي
$\pm\infty$	موجب أو سالب ما لا نهاية
|س|	القيمة المطلقة لعدد س
Δ	المميز

توجيهات طرائقية عامة

١ – عند حل معادلة من الدرجة الثانية يجب تعويد الطلبة على حساب المميز Δ حيث سمي بهذا الأسم لكي تميز نوع الجذرين . ويظهر جلياً أهمية المميز عن تكوين معادلة الدرجة الثانية إذا علم جذراها .

٢– عند حل المتراجحات من الدرجة الثانية في متغير واحد يجب أن نؤكد على ما يلي :

– تحويل المتراجحة إلى معادلة صفرية .

– حل المعادلة بأي صورة أي تحليلها إلى عاملين من الدرجة الأولى .

– تحديد أصفار كل عامل على حدة .

– تحديد إشارات كل عامل على حده قبل وبعد جذره .

– تحديد إشارات حاصل ضرب العاملين (العوامل).

– تحديد مجموعة الحل من خلال إشارة المتراجحة .

– تكون فترات الحل مفتوحة عندما تكون إشارة المتراجحة (> ، <) وتكون الفترات مغلقة عندما تكون إشارة المتراجحة (≥ ، ≤)

٣ – إن أصفار المقام ∉ مجموعة الحل وتكون فترات الحل مفتوحة دائماً

٤ – وعند حل متراجحة من الدرجة الأولى في متغيرين :

– نحوّل المتراجحة إلى صفرية ونستبدل المتراجحة بمعادلة من الشكل أ س + ب ص + جـ = ٠ .

– نرسم المستقيم بالطرق التي سبق تعلّمها ، فإذا كانت المتراجحة مصحوبة بإشارة (=) نرسم المستقيم بخط متواصل أما إذا كانت إشارة المتراجحة غير مصحوبةبإشارة (=) فنرسمه بخط متقطع

– نختار أي نقطة ∉ إلى المستقيم ونبحث إذا كانت تحقق المتراجحة المفروضة فيكون نصف المستوى الذي يحتوي النقطة المختارة هو مجموعة الحل ، فنقوم بتظليله ليعبر عن الحل .

– إذا كان المستقيم مرسوماً بخط متقطع فإن مجموعة نقاطه لا تنتمي إلى مجموعة الحل ونسمي مجموعة الحل نصف مستوى مفتوح ، أما إذا كان المستقيم مرسوماً بخط متواصل فإن مجموعة نقاطه تنتمي إلى مجموعة الحل ونسمي مجموعة الحل في هذه الحالة نصف مستوى مغلق .

– تحديد مجموعة الحل من خلال اشارة المتراجح فإذا كانت أكبر من ، تكون مجموعة الحل اينما تكون إشارة. حاصل الضرب موجبة أما إذا كانت اصغر من ، فتكون مجموعة الحل اينما تكون اشارة حاصل الضرب سالبة.

– وتكون فترات مجموعة الحل مفتوحة عند أصفار العوامل إذا كانت إشارة التراجح غير مصحوبة باشارة = ، وتكون مغلقة اذاكانت اشارة التراجح مصحوبة بإشارة = (أي ≤ أو ≥) .

- نفس الأمر يسرى على المتراجحات الكسرية فقط (ناتج القسمة يحل محل حاصل الضرب) . بالاضافة إلى أن أصفار المقام لا ينتمي إلى مجموعة الحل فتكون فترات الحل دائماً مفتوحة عند اصفار المقام .

عند حل متراجحة من الدرجة الأولى في متغيرين:

أولاً : نحول المتراجحة إلى صفرية وتستبدل المتراجحة بمعادلة ا س + ب ص + جـ = ٠

ثانياً : نرسم المستقيم بالطريقة التي تعلمناها عن طريق الجدول وتحديد النقاط وتوصيلها ، فإذا كانت المتراجحة مصحوبة باشارة = ، نرسم المستقيم بخط متواصل أما إذا كانت إشارة التباين غير مصحوبة باشارة = ، فنرسم المستقيم بخط متقطع .

ثالثاً : نختار أي نقطة لا تنتمي إلى المستقيم ونبحث ما إذا كانت تحقق المتراجحة المفروضة يكون نصف المستوى الذي يحتوي النقطة المختارة هو مجموعة الحل فنقوم بتظليله ليعبر عن مجموعة الحل .

وإذا كانت النقطة المختارة غير محققة للمتراجحة المفروضة فيكون نصف المستوى الذي لا يحتوي هذه النقطة هو الذي يمثل مجموعة الحل فنقوم بتظليله ليعبر عن مجموعة الحل .

رابعاً : إذا كان المستقيم مرسوم بخط متقطع مجموعة نقاطه لا تنتمي إلى مجموعة الحل ، ونسمى مجموعة الحل نصف مستوى مفتوح .

أما إذا كان المستقيم مرسوم بخط متواصل . مجموعة نقاطه تنتمي إلى مجموعة الحل . ونسمى مجموعة الحل نصف مستوى مغلق .

تتجنب الأخطاء الشائعة التالية :

- ضرب طرفي المتراجحة في مقامها إن كان المقام يحتوي على متغير . فهذا يجعل الحل غير صحيح . رغم صحة العملية إذا كان المقام خالى من المتغير .
- عند حل جملة متراجحات يجب أن نؤكد على أن مجموعة حل جملة المتراجحات تحقق جميع المتراجحات المكونة للجملة .فهي اذا تقاطع حلول جميع المتراجحات المكونة للجملة .

٦ : ٩ معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد

عدد الحصص : ثلاث حصص.

الأهداف

١ – يعرّف معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد .

٢ – يكتب القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد .

٣ – يحدّد متى يكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان أو جذران حقيقيان متساويان أو مستحيلة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية .

٤ – يحوّل مسائل لفظية إلى معادلات من الدرجة الثانية .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : مراجعة لما سبق دراسته في حل معادلة الدرجة الثانية والقانون العام .

الحصة الثانية : الأمثلة وحلها وحل مسائل لفظية وإعطاء واجب منزلي .

الحصة الثالثة : مناقشة تمارين الواجب المنزلي وإعطاء واجب صفي وسؤال تقويمي .

التقويم ما نوع جذري المعادلة $٤٩س^٢ - ٧٠\,س + ٢٥ = ٠$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

١[٣] أ) ف = {−٣ ، −٢}   ب) ف = {$\frac{١}{٣}$ ، −١} ، جـ) ف = ∅

ء) ف = ∅   هـ) ف = {$\frac{١}{٢}$ ، ٣}

و) ف = {−٣} ،   ز) ف = {$\frac{-٢+\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\frac{-٢-\sqrt{٢}}{٣}$}

ح) ف = ∅   ط) ف = {−٣ ، ٣}

ي) ف = {− هـ} ،   ك) ف = {$\frac{-٣+\sqrt{١٦}}{٢}$ ، $\frac{-٣-\sqrt{١٦}}{٣}$}

ل) ف = {٠ ، ٧} ،   م) {$\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$}

ن) ف = ∅   س) ف = {$-٣+٣\sqrt{٢}$ ، $-٣-٣\sqrt{٢}$}

ع) ف = {$\frac{٣-\sqrt{١٧}}{٤}$ ، $\frac{٣+\sqrt{١٧}}{٤}$}   ف) ف = {$\frac{-٥-\sqrt{١٣}}{٢}$ ، $\frac{-٥+\sqrt{١٣}}{٢}$}

ص) ف = {−١ ، $\frac{٣}{٢}$}

[٢] الجذر الآخر = ١   [٤] الجذران هما س = −٥ ، س = ٢

[٥] قيمة ب تساوي ١   [٦] $\frac{١٦}{٣}$

[٧] −١ أو −٥   [٨] الأعداد هي ±٦ ، ±٧ ، ±٨

[٩] العددان هما ٩ ، ١١   [١٠] العدد هو $\frac{٢}{٥}$ أو $\frac{٥}{٢}$

٦ : ٢ مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية

عدد الحصص : ثلاث حصص

الأهداف

١ – يستنتج مجموع جذري معادلة من الدرجة الثانية ، ويجده .

٢ – يستنتج حاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية ، ويجده .

٣ – يطبق مبرهنتي مجموع الجذرين أو حاصل ضربهما لإيجاد جذر مجهول .

٤ – يجد المميز لتحديد نوعية مجموع الجذرين وحاصل ضربهما .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة من الدرجة الثانية .

الحصة الثانية : حل الأمثلة مع التاكيد على ضرورة حساب المميز ، يدرب طلابه على التحقق من صحة الجذر الآخر ، وكذا استخدام المبرهنتين في إيجاد الجذر الآخر . وإعطاء واجب منزلي .

الحصة الثالثة : حل ومناقشة الواجب المنزلي ، وإعطاء واجب صفي وسؤال تقويم .

التقويم أوجد مجموع جذري المعادلة $س^٢ + ٧ = ٠$.

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) مجموع الجذرين = $\frac{-٣}{٢}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{١}{٢}$

ب) مجموع الجذرين = $\frac{٥}{٢}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{-٧}{٢}$

جـ) مجموع الجذرين = ٣ ، حاصل ضربهما = -١

ء) مجموع الجذرين = ٠ ، حاصل ضربهما = ١

هـ) مجموع الجذرين = ٦ ، حاصل ضربهما = -٨

و) مجموع الجذرين = $\frac{١٢}{٥}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{٣٦}{٢٥}$

[٢] أ) غير حقيقين ، مجموعهما = ٣ ، حاصل ضربهما = ٤

ب) حقيقيان ، مجموعهما = $\frac{٥}{١٣}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{-٢}{٣}$

جـ) حقيقيان ، مجموعهما = $\frac{١٣}{١٠}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{-٣}{١٠}$

ء) حقيقيان ، مجموعهما = $\frac{١١}{٢}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{١٥}{٢}$

[٣] مجموع الجذرين = ٣ ، حاصل ضربهما = $\frac{-١٥}{٢}$

[٤] الجذر الآخر = $\frac{-١}{٥}$

[٥] هـ = − ٢ ، الجذر الآخر = − ٤

[٦] م = $\frac{-٣}{٢}$ ، الجذر الآخر = $\frac{-٩}{٤}$

٦ : ٣ تكوين معادلة من الدرجة الثانية إذا عُلم جذراها

عدد الحصص : حصتان .

الأهداف

١ـ يكوّن معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد ، عند معرفة الجذرين .

٢ ـ يكوّن معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد عند معرفة مجموع الجذرين وحاصل ضربهما .

٣ ـ يذكر الشرط اللازم لتكوين معادلة من الدرجة الثانية التي يمكن حلها في ح .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : تكوين معادلة اذا علم جذراها . وإعطاء واجب منزلي .

الحصة الثانية : مناقشة حل الواجب المنزلي ، وإعطاء واجب صفي وسؤال تقويمي .

التقويم كون المعادلة التربيعية التي جذراها ٧ ، − ٢

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) $س^٢ - ٣ س - ٦ = ٠$ ب) $٤ س^٢ - ٢ س - ١ = ٠$

جـ) $س^٢ + ٣ س = ٠$ د) $س^٢ - ٢ س - \frac{٢}{٥} = ٠$

هـ) $س^٢ - ٣ = ٠$ و) $٥ س^٢ + ٢٥ س + ٣ = ٠$

[٢] أ) $س^٢ + س - ١٢ = ٠$ ب) $٦ س^٢ + س - ٢ = ٠$

جـ) $٥ س^٢ - ١١ س + ٢ = ٠$ د) $س^٢ + ٤ س = ٠$

هـ) $٥ س^٢ - س = ٠$

[٣] مجموع الجذرين = $\frac{١٣}{٦}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{-٥}{٦}$

[٤] مجموع الجذرين = هـ + ١ ، حاصل ضربهما = − هـ

[٥] أ) مجموع الجذرين = $\frac{٢(هـ + ١)}{هـ} = \frac{-ب}{أ}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{هـ - ٢}{هـ}$

ب) عندما هـ = ١ ∴ س = $-٢ - \sqrt{٥}$ ، س = $-٢ + \sqrt{٥}$ ،

عندما هـ = ٢ ∴ س = ٠ ، س = ٣

عندما هـ = − ١ غير قابلة للحل في ح ، مجموعة الحل = { } أو ϕ .

٦ : ٤ اتحاد وتقاطع الفترات

عدد الحصص : ثلاث حصص .

الأهداف

١ – يميّز أنواع الفترات من حيث : اطرافها المفتوحة أو المغلقة ، محدوديتها من أسفل أو من أعلى .

٢ – يمثّل الفترة العددية على خط الأعداد بشكل صحيح ويحددها

٣ – يعبّر عن المتراجحة على شكل فترة والعكس .

٤ – يتقن عمليتي الاتحاد والتقاطع للفترات .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص موزعة على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة شاملة لتعريف الفترة وأنواع الفترات

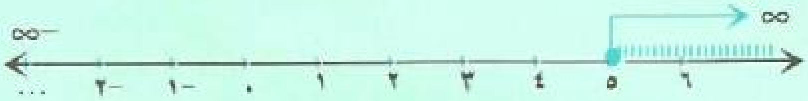
الحصة الثانية : عمليتي الإتحاد والتقاطع

الحصة الثالثة : حل ومناقشة الواجب المنزلي وإعطاء واجب صفي وسؤال تقويمي .

التقويم أوجد]٢ ، ٧[∪ [٤ ، ١٠] ومثل ذلك بيانياً .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) ف$_{١}$ = [٥ ، ∞[



شكل (٦ – ١)

ف$_{٤}$ =]–٥ ، ٧[

شكل (٦ – ٢)
...

ب) ف$_{١}$ ∪ ف$_{٣}$ = [٥ ، ∞[∪]٤ ، ∞[=]٤ ، ∞[

ف$_{٢}$ ∩ ف$_{٣}$ =]–٣ ، ٢] ∩]–∞ ، ٣] =]–٣ ، ٢]

[٢] أ)]–∞ ، –١] ∪ [٤ ، ∞[= ح /]–١ ، ٤[

ب)]–∞ ، ١[∪]١ ، ∞[= ح / {١}

جـ)]–∞ ، ١] ∪ [١ ، ∞[= ح

و) [١ ، ∞[/]٣ ، ∞[

[٣] (X) ، ٢) (✓) ، ٣) (X)

٦ : ٥ متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

عدد الحصص :حصتان .

الأهداف

١ – يستخدم التحويلات المكافئة .

٢ – يحل متراجحات الدرجة الأولى بمتغير واحد في مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة مفهوم المتراجحة مع التركيز على الفرق بين مجموعة حل المتراجحة في (ح)
ومجموعة حلها في ص. ومراجعة التحويلات المكافئة .

الحصة الثانية : الحل جبرياً وتمثيله بيانياً وحل مسائل وتمارين صفية .

التقويم حل المتراجحة ٢ س – ٣ ≥ ٤ س + ٣ ومثل ذلك بيانياً

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) مجموع حل المتراجحة : س + ٣ ≤ ٠ هي الفترة [– ٣ ، ∞ [

هـ) مجموعة الحل = [١ ، ∞ [

[٢] أ) جـ ، ب) أ ، جـ) أ

[٣] ١) (✓) ، ٢) (X) ، ٣) (X) ٤) (X)

٦ : ٦ متراجحات الدرجة الثانية في متغير واحد

عدد الحصص : ٥ حصص .

الأهداف

١ – يحدّد أصفار ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية : أ س^{٢} + ب س + جـ

٢ – يحل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد من خلال تحديد إشارات عوامل الثلاثية :
أ س^{٢} + ب س + جـ على خط الأعداد .

٣ – يحل المتراجحات الكسرية التي تحوي في مقامها متغير .

٤ – يحدّد مجموعة حل متراجحات الدرجة الثانية في متغير واحد .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : حل متراجحات الدرجة الثانية في متغير واحد بتحديد فترات حلّها من خلال تحديد إشارات عوامل الثلاثية : أ س^{٢} + ب س + جـ على خط الأعداد .

الحصة الثانية : حل المتراجحات الكسرية .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

الحصة الرابعة : تحديد مجموعة حل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد من خلال اشارة (أ) (معامل س^{٢}) واشارة Δ = ب^{٢} − ٤ أ جـ

الحصة الخامسة : تمارين ومسائل .

التقويم

أوجد حل متراجحة : $\frac{\text{س} + ١}{٢\text{س} - ١}$ ≥ (س − ١)

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] مجموعة الحل =]−∞ ، −٥] ∪ [٣ ، ∞[، [٢] مجموعة الحل = [−$\frac{٢}{٣}$ ، ٣]

[٣] مجموعة الحل = [١ ، $\frac{٦}{٥}$] ∪]٢ ، ∞[، [٤] مجموعة الحل =]−$\frac{٩}{٤}$ ، ٣] ∪ [−∞ ، $\frac{٩}{٤}$]

[٨] أ > ٠ ، Δ = ٩ − ٤٠ < ٠ . ⟸ مجموعة حل المتراجحة : ٢ س^{٢} + ٣ س + ٥ < ٠ هي $\emptyset$

[١٠] أ = −٤ < ٠ ، Δ = ١٦ + ٤٨ > ٠ ⟸ مجموعة حل المتراجحة : −٤ س^{٢} + ٤ س + ٣ < ٠ ،

⟸ (٢ س + ١) (−٢ س + ٣) < ٠

⟸ جذراها هما : س$_{١}$ = −$\frac{١}{٢}$ ، س$_{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

⟸ مجموعة الحل =]−∞ ، −$\frac{١}{٢}$[∪]$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

[١٤] أ = ١ > ٠ ، Δ = −٤ < ٠

مجموعة حل المتراجحة : س^{٢} + ١ > ٠ هي مجموعة الأعداد الحقيقية كلها .

٦ : ٧ القيمة المطلقة

عدد الحصص : ثلاث حصص .

الأهداف

١ – يعيد تعريف الكميات المطلقة

٢ – يدرك العلاقة بين متراجحات القيمة المطلقة والمتراجحات المزدوجة .

٣ – يحل متراجحات القيمة المطلقة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية في متغير واحد .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : تعريف القيمة المطلقة وإعادة تعريفها .

الحصة الثانية : خواص القيمة المطلقة وحل متراجحات القيمة المطلقة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

الحصة الثالثة :حل متراجحات القيمة **المطلقة** من الدرجة الثانية في متغير واحد وحل المسائل والتمارين .

التقويم

حل المتراجحة : $|\text{س} - ٢| < ٤$.

إرشادات وإجابات بعض التمارين

$$[١]\ \text{أ)}\ |\text{س} - ٢| = \begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{عند س} \geqslant ٢ \\ ٢ - \text{س} & \text{عند س} < ١ \end{cases}$$

ب) $|\text{س} - ٣\text{س} - ١٠| = |(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٢)|$ أصفار المقدار $\text{س} = ٥$ ، $\text{س} = -٢$

$$\Longrightarrow |(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٢)| = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠ \text{ ، عند س} > ٥ \\ -\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ١٠ \text{ ، } -٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠ \text{ ، س} < -٢ \end{cases}$$

[٢] و) مجموعة الحل $=]-\infty \text{ ، } \frac{-٣١}{٢}] \cup [\frac{٣٣}{٢} \text{ ، } \infty[$

هـ) مجموعة الحل $=$ ح ، $[-٤ \text{ ، } ٤]$

[٣] $\text{أ} = ٠$ ، $\text{ب} = \frac{٣}{٢}$

٦ : ٨ جملة متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

عدد الحصص : حصة واحدة

الأهداف

١ – يحل جملة متراجحتين أو اكثر من الدرجة الاولى في متغير واحد .

٢ – يمثّل الحل بيانياً .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في حصة واحدة مع حل تمارينه ومسائله .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] مجموعة الحل =] ٢ ، ∞ [[٢] مجموعة الحل = [– ١٢ ، ١]

[٣] مجموعة الحل =] – ٧ ، $\frac{1}{2}$]

٦ : ٩ متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يفصل المستوى بمستقيم معادلته معلومة الى نصفين مستويين .

٢ – يحدّد نصف المستوى المغلق ونصف المستوى المفتوح من خلال المستقيم القاسم للمستوى .

٣ – يحل مترجحة من الدرجة الأولى في متغيرين ويحدّد مجموعة الحل (نصف المستوى المغلق أو نصف المستوى المفتوح) .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين ، وكيفية رسم المستقيم أ س + ب ص + جـ = .

الحصة الثانية : تحديد نصف المستوى الذي يمثل مجموعة الحل للمتراجحة المعطاة .

التقويم

هل تنتمي النقطة (٠ ، ٢) لنصف المستوى المفتوح س (.

على المدرس أن يركّز بالاضافة إلى المفاهيم الرئيسة للبند على التالي :

١ – المعادلة : أ س + ب ص + جـ = ٠ معادلة خطية تمثل خط مستقيم .

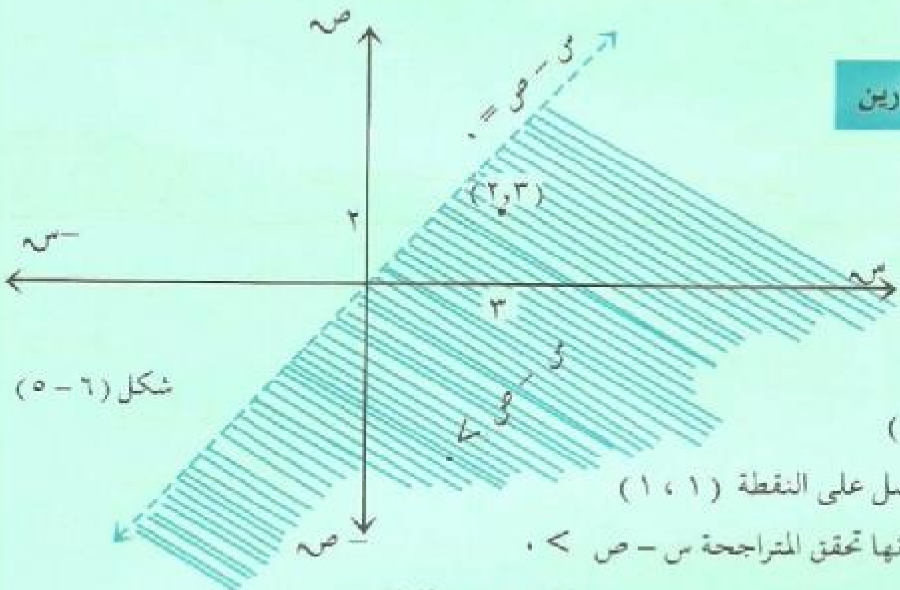
٢ – أ س + ب ص > ٠ ⟸ جـ = ٠ أي أن الجزء المقطوع من محور الصادات = ٠

والمستقيم أ س + ب ص = ٠ يمر بنقطة الأصل .

٣ – التظليل يتم لنصف المستوى الذي يمثل مجموعة الحل .

٤ – إذا احتوت المتراجحة على علامة = يكون المستقيم الممثل للمتراجحة ضمن مجموعة حل المتراجحة وبالتالي يرسم بخط متصل . أما إذا لم تكن علامة التراجح مصحوبة بعلامة = فالمستقيم لا يدخل ضمن مجموعة الحل وبالتالي يرسم بخط متقطع وتكون مجموعة الحل ممثلة بنصف مستوى **مفتوح** .

٥ – على المدرس أن يوضّح للطلاب ان المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠ يقسم المستوى إلى نصفين مستويين مفتوحين أحدهما يمثل المتراجحة : أ س + ب ص + جـ > ٠ أي ان كل نقطة تحقق هذه المتراجحة .



شكل (٦ – ٥)

إرشادات وإجابات بعض التمارين

١) س – ص > ٠ .

من المستقيم س – ص = ٠ .

نجد أن :

س = ٠ ⟸ ص = ٠ ،

نحصل على النقطة (٠ ، ٠)

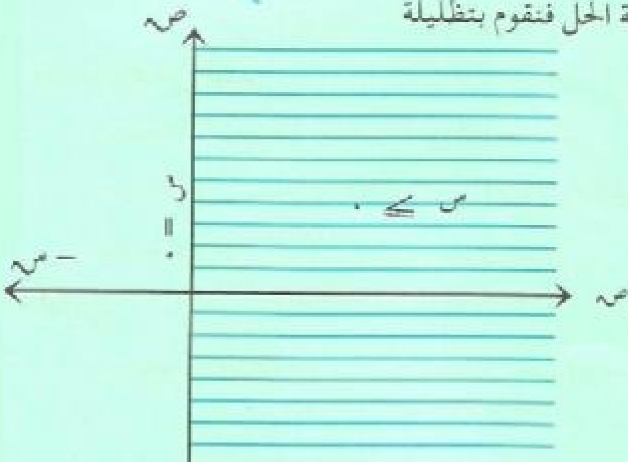
س = ١ ⟸ ص = ١ نحصل على النقطة (١ ، ١)

نختار النقطة (٣ ، ١) فنجد أنها تحقق المتراجحة س – ص > ٠

فهي واقعة على نصف مستوى مفتوح الذي يمثل مجموعة الحل فنقوم بتظليله

[١١] س ≥ ٠ بأخذ المعادلة س = ٠ وهي معادلة محور الصادات .

نختار النقطة (١ ، ١) فنجد أنها تحقق المتراجحة فنظلل مستواها



شكل (٦ – ٦)

٦ : ١٠ جملة متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين

عدد الحصص : حصة واحدة .

الأهداف

١ – يحل متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين .

٢ – يحل جملة متراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا الدرس في حصة واحدة يتم فيها حل متراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[٣] س – ص < – ٢

س ≥ ٠

الحل : نرسم المستقيمين

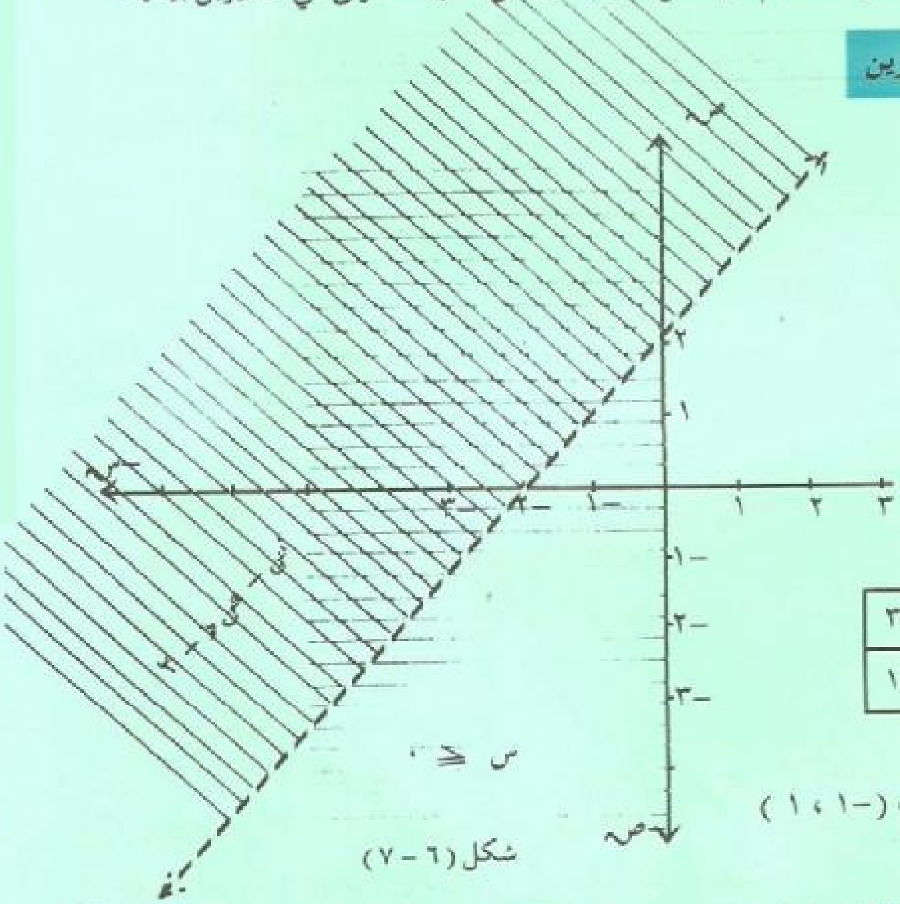
س – ص = – ٢

س = ٠

س – ص = – ٢

⟸ س = ص – ٢

س	٠	–١	–٢	–٣
ص	٢	١	٠	–١



شكل (٦ – ٧)

نحصل على النقاط (٠ ، ٢) ، (–١ ، ١)

(–٢ ، ٠)

نختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد أنها لا تحقق المتراجحة س – ص < – ٢ ⟸ (٠ ، ٠) ∌ مجموعة الحل فنظلل النصف الآخر .

٢س = ٠ هو الإحداثي الصادي .

نختار النقطة (٢ ، ٢) فنجد أنها لا تحقق المتراجحة س – ص < – ٢ ⟸(٢ ، ٢) ∌ نصف المستوى في حل المتراجحة فنقوم بتظليل النصف الآخر.

فيكون حل نظام المتراجحة س – ص < –٢ ، س ≥ ٠

هو المنطقة المشتركة في التظليل كما في الشكل (٦ – ٧)

٦ : ١١ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة .

الهدف

– قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار

يكلّف المدرس طلبته بحل الاختبار الموجود في كتاب التمارين كتهيئة لاختبار الوحدة . يعطى الاختبار الذي في الدليل ثم يقوم بدراسة النتائج ومدى تحقق أهداف الوحدة وفيما يلي جدول بأرقام الأسئلة والأهداف المراد قياسها :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	٢ ، ٥ ، ٦
٢	٣ ، ٤ ، ٧
٣	١ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١

الاختبار

السؤال الأول :

١) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة

٢ س^{٢} – ٣ س = ٥

٢) أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحتين التاليتين :

أ) س + ١ > ٣ ب) |٢ س – ١| ≤ ٣

السؤال الثاني :

١) كوّن المعادلة إذا كان :

س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٤ ، س$_{١}$ × س$_{٢}$ = ١٠ حيث س$_{١}$ ، س$_{٢}$ هما جذرا المعادلة

٢) إذا كانت ف$_{١}$ = [٢ ، ٥] ، ف$_{٢}$ =] – ∞ ، ٣]

اوجد كلاً من : أ) ف$_{١}$ ∪ ف$_{٢}$. ب) ف$_{١}$ ∩ ف$_{٢}$

٣) أوجد مجموعة حل المتراجحة : |س^{٢} – ٣ س – ١٠| ≥ ٨

السؤال الثالث :

١) لتكن المعادلة : ٣ س^{٢} – (هـ + ٢) س – (هـ – ٤) = ٠

أ) أوجد مجموع الجذرين ، وحاصل ضربهما بدلالة هـ .

ب) ما قيمة هـ التي تجعل أحد جذري المعادلة = ١ .

٢) أوجد مجموعة حل متراجحه: |٢ س^{٢} – س – ٣| ≤ ٣

٣ حل جملة المتراجحتين التاليتين : ٣ س – ٢ ص ≥ ٤ ، س – ٤ ص – ٣ > ٠

الوحدة السابعة

حساب المثلثات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٧ – ١	الزاوية الموجّهة	٢
٧ – ٢	وحدات قياس الزوايا	٢
٧ – ٣	النسب المثلثية	٤
٧ – ٤	العلاقات بين النسب المثلثية	٥
٧ – ٥	استخدام الآلة الحاسبة لحساب النسب المثلثية	٢
٧ – ٦	حل المثلث القائم	٢
٧ – ٧	مسائل تطبيقية	٢
٧ – ٨	اختبار الوحدة	١
	المجموع	٢٠

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكونَ قادراً على أن :

١ – يعرِّف الزاوية الموجَّهة ويوجد قياسها .

٢ – يحدِّد الوضع القياسي للزوايا الموجّهة .

٣ – يعرِّف التقدير الدائري كوحدة قياس .

٤ – يستنتج العلاقة بين التقدير الستيني والتقدير الدائري، ويستخدمها في التحويلات .

٥ – يحدِّد العلاقات بين النسب المثلثية .

٦ – يحسب النسب المثلثية للزوايا (٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°) باستخدام دائرة الوحدة .

٧ – يستنتج إشارات النسب المثلثية .

٨ – يبرهن بعض العلاقات بين النسب المثلثية .

٩ – يستخدم حاسبات الجيب لحساب النسب المثلثية .

١٠ – يتعرَّف على مفهوم حل المثلث .

١١ – يحل المثلث القائم الزاوية إذا عُلم منه طول ضلع وزاوية، أو طولا ضلعين .

١٢ – يحل مسائل تطبيقية على النسب المثلثية (المثلث القائم) .

المقدمة

لمحة تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع الرياضيات ذو الصلة الوثيقة بعلم الهندسة ، وكان في بداية الأمر يعتبر حساب المثلثات نوع من علم الفلك عند اليونانين ، حساب المثلثات هي المادة الوحيدة لتطبيق النظريات الهندسية .

وفي النصف الثاني من القرن الحادي عشر ، بدأ العرب والمسلمون في تنظيم وتطوير المعارف المتعلقة بحساب المثلثات ، حيث جعلوا منه علماً مستقلاً عن علم الفلك وأسموه «علم الأنساب»، وذلك لأنه يقوم على النسب المختلفة الناشئة عن أضلاع المثلث .

ومن أبرز العلماء المسلمين الذين كان لهم دور كبير في تقدُّم حساب المثلثات :

١- أبو الوفاء محمد بن يحيى إسماعيل بن العباس البوزجاني :(سنة ٣٢٨- ٣٨٨هـ) . الذي ألف العديد من الكتب ولكن ظهرت عبقريته في مؤلفه (كتاب في عمل المسطرة والبركار والكونيا) ويقصد بالكونيا المثلث القائم الزاوية ، ويشرح كيفية الرسم ، واستعمال الآلات. واشتهر أبو الوفاء بعلم الفلك ، كما أنه من أشهر الذين برعوا في الهندسة . ومن أهم الأعمال التي اشتهر بها البوزجاني :

- وضع النسب المثلثية ، بالإضافة إلى أنه كان له الفضل في استنباط أشكال الظل ، والمماس والجداول ، وأدخل القاطع ، وقاطع التمام ، ووضع الجداول الرياضية للمماس ، وأوجد طريقة جديدة لحساب الجداول الرياضيّة للمماس ؛ وأوجد طريقة جديدة لحساب جداول الجيوب ، وكانت صحيحة حيث حسب بها جيب (٣٠ ْ) إلى ثمانية أرقام عشرية دون خطأ .
- وضع بعض المعادلات التي تتعلق بجيب زاويتين وعرف العلاقات التالية :

$$\text{ظا س} : ١ = \text{جا س} : \text{جتا س}$$

$$\text{ظتا س} : ١ = \text{جتا س} : \text{جا س}$$

$$\text{قا س} = \sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}$$

$$\text{قتا س} = \sqrt{١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س}}$$

$$\frac{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}}{} = ١ - \text{جتا س}$$

$$\text{جا س} = ٢ \times \text{جا} \frac{\text{س}}{٢} \times \text{جتا} \frac{\text{س}}{٢}$$

٢ - أبو عبد الله محمد بن جابر بن سنان البتاني : (٢٣٥ - ٣١٧ م) عرف بانه الموسوعة العلمية لعلم الفلك ، وهو أول من استعمل المعادلات المثلثية ، كما اهتم كثيراً بعلم التنجيم . ومن أهم الإنجازات التي قام بها البتاني اكتشافه لقاعدة إيجاد ارتفاع الشمس ؛ إذ وجدها ٣٦٥ يوماً و٦ ساعات و١٤ دقيقة و٢٦ ثانية، وهذه القيمة قريبة جداً لما وصل إليه العلماء المعاصرون .

وهناك علماء مسلمون آخرون ، قد أسهموا في علم حساب المثلثات منهم: العالم المسلم نصير الدين الطوسي (٥٩٧ - ٦٧٢ م) ، وهو أول من أظهر حساب المثلثات كعلم مستقل عن علم الفلك ، في كتابة « أشكال القطاعات » .

خلفية علمية

- الرياضي الاغريقي (tlipparchus 140 B.C) : أنشأ علاقات الأكبر والأصغر . واستعمل الثلاث النسب لحل المثلث القائم الزاوية : جا ، جتا ، ظا .

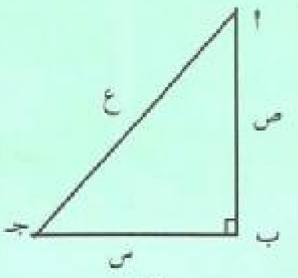
في الشكل (٧-١) المثلث ا ب جـ قائم الزاوية في ب

النسبة المثلثية :

$$\text{جاجـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{|\text{ا ب}|}{|\text{ا جـ}|}$$

$$\text{جتاجـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{ا جـ}|}$$

$$\text{ظاجـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{|\text{ا ب}|}{|\text{ب جـ}|}$$



شكل (٧ - ١)

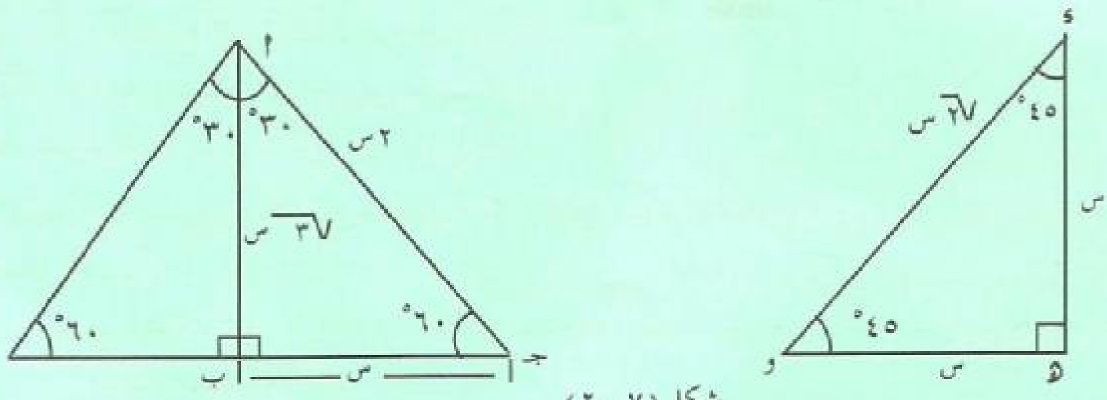
كما نلاحظ $\text{ص}^2 + \text{س}^2 = \text{ع}^2$ ...

$$\frac{\text{ص}^2}{\text{ع}^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{ع}^2} = \frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2} \quad \text{بالقسمة على ع}^2$$

$$\boxed{\left(\frac{\text{ص}}{\text{ع}}\right)^2 + \left(\frac{\text{س}}{\text{ع}}\right)^2 = 1} \quad ...$$

كيف نوجد النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

للحصول على النسب المثلثية للزوايا التي قياسها (٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°) سوف نستخدم المثلثات التالية :



شكل (٧ - ٢)

في المثلثين ا ب جـ ، ء هـ و

$\text{جا } 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{س}}{2\text{س}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\text{جتا } 60^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{2\text{س}} = \frac{1}{2}$

$\text{ظا } 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{س}}{\text{س}} = \sqrt{3}$ ، $\text{جا } 45^\circ = \frac{\text{س}}{\sqrt{2}\,\text{س}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

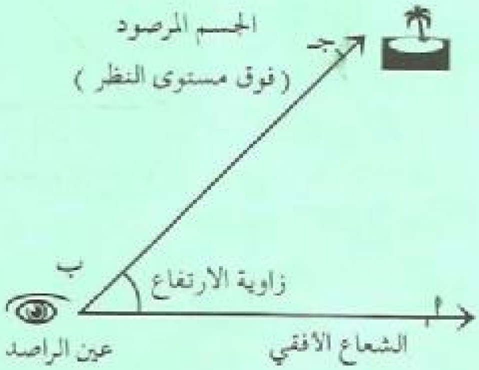
$\text{جتا } 45^\circ = \frac{\text{س}}{\sqrt{2}\,\text{س}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\text{ظا } 45^\circ = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1$

نلاحظ كذلك أن :

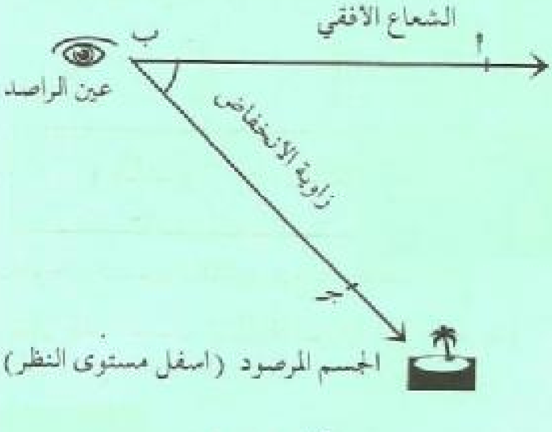
١) $\text{جا}(90 - \text{هـ}) = \text{جتا هـ}$ ، $\text{جتا}(90 - \text{هـ}) = \text{جا هـ}$

٢) $\text{جا}^2\text{ هـ} + \text{جتا}^2\text{ هـ} = 1$ ؛ ٣) $\text{ظا} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$

زوايا الارتفاع والانخفاض



شكل (٧ – ٣)



شكل (٧ – ٤)

إذا نظر شخص إلى جسم أعلى من مستوى النظر الأفقي كأن تكون عين الراصد مثلاً (النقطة ب) والجسم المرصود عند النقطة (جـ) كما في الشكل (٧ – ٣)
فإن $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ هو الشعاع الأفقي الصادر من عين الراصد ،
$\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ هو الشعاع الصادر من العين إلى الجسم المرصود
يقال عندئذ أن ∢ أ ب جـ تسمى زاوية ارتفاع الجسم .

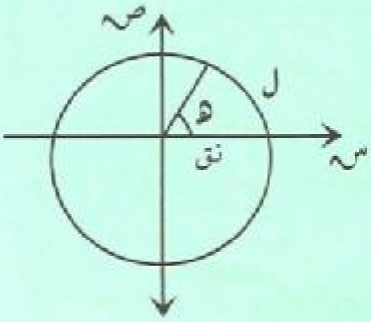
أما إذا كان الجسم المرصود أسفل مستوى النظر الأفقي كما في الشكل (٧ – ٤) فإن ∢ أ ب جـ تسمى زاوية انخفاض الجسم .

– لإيجاد قياسات زوايا الارتفاع والانخفاض يستخدم جهاز يسمى جهاز الثيودوليت يستخدمه المهندسون في اعمالهم الهندسية .

- **القياس نصف القطري** : (The Radian Measure)

تقاس الزاوية بالدرجات (Degrees) وتعرف الدرجة بالزاوية المركزية التي تقابل قوسا من محيط الدائرة طوله يساوي $\frac{1}{360}$ من المحيط ويرمز لها بالرمز « 1° » وقد استعمل الطالب هذه الوحدات بكثرة في دراساته السابقة . وهناك نوع آخر من وحدات قياس الزاوية ، تعرف بالوحدات نصف القطرية (Radians) وتعرف الوحدة نصف القطرية بانها الزاوية المركزية في الدائرة التي تقابل قوساً من محيط طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة . ويرمز لهذه الوحدة بالرمز (ر) وعليه فإن :

$$هـ ر = \frac{ل}{نق}$$



شكل (٧ – ٥)

حيث ل هو طول قوس الدائرة المقابل للزاوية المركزية هـ والمقاسة بالوحدات نصف القطرية ، و نق هو طول نصف قطر الدائرة [انظر الشكل (٧ – ٥)]

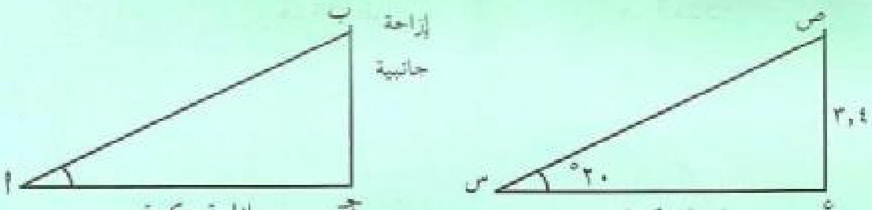
طرق تدريس حساب المثلثات :

هنا بعض الطرق الحديثة في تقديم حساب المثلثات عن طريق المتجهات أو الدوال مع توضيح المفاهيم الأولية لحساب المثلثات مثل : الزاوية ، ومقياسها ، والزاوية الموجّهة ، وتطابق الزوايا .

١ – تدريس حساب المثلثات عن طريق المتجّهات :

يدرس حساب المثلثات عن طريق معالجة للمتجّهات وهي الإزاحات . فالإزاحة من س إلى ص أو الأزاحة س ص في الاتجاه الموضح في الشكل (٧ – ٦) يمكن ان تكوّن مجموع إزاحتين : أحدهما أفقية في اتجاه س ع والأخرى عمودية عليه أي أن

س ص = س ع + ع ص

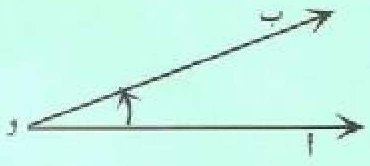


شكل (٧ – ٦)

٢ – مراجعة المفاهيم الأولية لحساب المثلثات بالأسلوب الحديث :

أ) الزاوية الموجّهة :

هي الثنائي المرتب من الأشعة –
($\overleftarrow{وأ}$ ، $\overleftarrow{وب}$) ويسمى $\overleftarrow{وأ}$ بالضلع الابتدائي، و $\overleftarrow{وب}$ بالضلع النهائي للزاوية وقد يرمز بالرمز ∡ أ و ب [الترتيب مهم] .
أي أن الزاوية ($\overleftarrow{وأ}$ ، $\overleftarrow{وب}$) ليست هي الزاوية ($\overleftarrow{وب}$ ، $\overleftarrow{وأ}$) .
[انظر في الشكل (٧ – ٧)] .



شكل (٧ – ٧)

ب) مقياس الزاوية :

في معظم أنظمة القياس (قياس المسافات ، الأبعاد ، درجات الحرارة ، الدوران) يلزم معرفة

١– نقطة بداية . ٢ – اختيار اتجاه موجب وآخر سالب .

٣ – اختيار وحدة قياس .

وبالنسبة للزوايا في وضعها الأساسي ويسمى الوضع القياس (او الابتدائي) تعتبر :

١– نقطة البداية في مقياس الزاوية هو الاتجاه الموجب لمحور السينات أي تكون الزاوية ضلعها الابتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٢ – تختار الاتجاه المضاد لعقرب الساعات بالاتجاه الموجب .

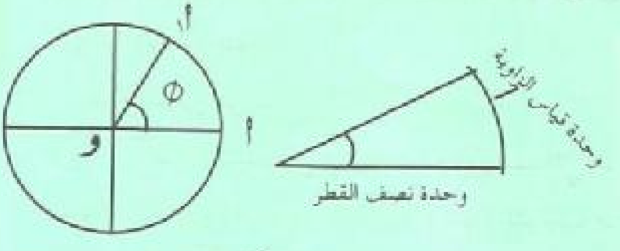
٣ – تختار وحدة القياس في التقدير الستيني الدرجه ،بحيث أن الوحدة الكاملة تقتسم إلى ٣٦٠° ، والدرجة إلى ٦٠ دقيقة، والدقيقة إلى ٦٠ ثانية. ومقياس الزاوية بالتقدير الستيني هو الدالة التي تعطى لكل زاوية موجهة ∡ا و ب قيمة س° ، بحيث أن ٠° ≥ س ≥ ٣٦٠° . وتسمى هذه الدالة مقياس الزاوية بالتقدير الستيني، وتكون الزاوية ∡ ا و ب (أى $\overleftarrow{\text{و ا}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$) موجهة إذا كان الوصول من الوضع $\overleftarrow{\text{و ا}}$ إلى الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}}$ في عكس عقرب الساعة .

جـ) مقياس الزاوية بالتقدير الدائري (بالاعداد الحقيقية) :

كما في الشكل (٧ – ٨) يأخذ دائرة الوحدة التي مركزها و ، ونصف قطرها الوحدة والزاوية ϕ في وضعها القياسي (أي ضلعها الأبتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات) فإن مقياس الزاوية الموجبة بالتقدير الدائري يعرف بانه الدالة التي تربط الزاوية بطول القوس في عكس عقرب الساعة من ا إلى ا، . أي أن القياس الدائري للزاوية ∡ا و ا، هو العدد الحقيقي ϕ الذي يقيس طول القوس ا، ا بحيث أن طول نصف القطر و ا هو وحدة الأطوال أي مقياس الزاوية هو العدد:

$$\frac{\text{طول القوس ا، ا}}{\text{طول نصف القطر و ا}} \quad \text{بحيث أن : صفر} \leq \phi < 2\pi \; .$$

ويسمى الزاوية التي مقياسها بالتقدير الدائري الوحدة بالزاويه النصف قطرية .، ويرمز لها بالرمز ١ر وهي $= \frac{180^\circ}{\text{ط}} = 57{,}3^\circ$



شكل (٧ – ٨)

المصطلحات والرموز

زاوية قائمة	Right - angle
زاوية حادة	Acute - angle
دائرة الوحدة	Unit circle
القياس الستيني	Degree measure
القياس الدائري	Radian measure
قوس من دائرة	Arc
نصف قطر الدائرة	Radius of the circle
الضلع الابتدائي للزاوية	Intial side
الضلع النهائي للزاوية	Terminel side
الوضع القياس للزاوية	Standard position
يحوّل	Convert
الربع (الأول ، الثاني ، الثالث، الرابع)	Quadrant (1,2,3,4)
حل المثلث	Solution of a triangle
الجيب (جا)	The sine (sin)
جيب التمام (جتا)	The cosine (cos)
الظل (ظا)	The tangant (tan)

المراجع

١ – نظلة حسن احمد خضر : المدرس والرياضيات الحديثة والتقليدية .

٢ – جمال بشير عكاشه ، مصطفى أسعد حمادة أبو عوض ، سمير أبو علي : تاريخ الرياضيات ، عمان ، الأردن ، ١٩٩٠م ٣ .

3 – Question Bank in Mathematics, for class X Manoj Dubey , 2002.

4 – A Text book oP I C S E Mathematics , For Class IX, O.P .Sinhal 2001.

٧ : ١ الزاوية الموجّهة

عدد الحصص : حصتان .

الأهداف

١ – يتعرّف على الزاوية الموجّهة .

٢ – يحدّد الوضع القياسي للزاوية الموجّهة .

٣ – يجد القياس السالب والقياس الموجب للزاوية الموجّهة .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : الزاوية الموجّهة .

الحصة الثانية : تمارين ومسائل .

توجيهات طرائقية

– يُعرّف الزاوية الموجّهة بأنها عبارة عن شعاعين ينطلقان من نفس النقطة .

ويسمى الشعاع الأول الضلع الابتدائي ($\overleftarrow{\text{ب أ}}$) الثابت

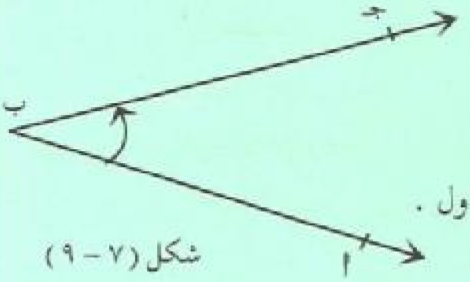
ويسمى الشعاع االثاني الضلع النهائي ($\overleftarrow{\text{ب جـ}}$) المتحرك

– يكون إتجاه الزاوية موجباً إذا دار الشعاع المتحرك (الضلع النهائي) باتجاه عقارب الساعة . ويكون سالباً إذا دارعكس عقارب الساعة .

– تكون الزاوية الموجّهة في الوضع القياسي لها اذا :

١ – انطبق الضلع الابتدائي على محور السينات الموجب

٢ – انطبق رأس الزاوية على نقطة الأصل



شكل (٧ – ٩)

انواع الزويا :١) زاوية حادة : ٠° < ﻫ° < ٩٠° تقع في الربع الأول .

٢) زاوية قائمة : ﻫ° = ٩٠° (زاوية محورية) .

٣) زاوية منفرجة : ٩٠ < ﻫ° < ١٨٠° تقع في الربع الثاني .

٤) زاوية مستقيمة : ﻫ° = ١٨٠° (زاوية محورية) .

٥) زاوية منعكسة : ١٨٠° < ﻫ < ٣٦٠° تقع في الربع الثالث ، الرابع .

٦) زاوية كاملة : (دورة كاملة) ﻫ° = ٣٦٠° (زاوية محورية) .

التقويم : تتم عملية التقويم البنائي من خلال مشاركة ومناقشة الطلبة في حل الأمثلة ، ومن خلال متابعة حل التمارين الصفية والواجبات المنزلية وفي نهاية الحصة الثانية يعطى اسئلة كخطوة تقويم كالآتي :

س (١) : اختر الاجابة الصحيحة فيما يأتي :

الزاوية التي قياسها ٧٣٠° تقع في الربع (أ) الأول (ب) الثاني (جـ) الثالث (د) الرابع

س (٢) : ارسم الزاوية التي قياسها (أ) ٤٥° (ب) ٢٥٠°

س (٣) : زاوية واحدة من الزوايا الموضّحة قياساتها فيما يلي لا تقع في الربع الثاني : ماهي ؟

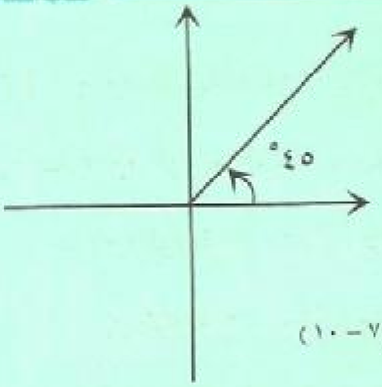
(أ) ٢٠٠° (ب) ٥٦٠° (جـ) ٣٦٠° (د) ٥١٠°

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) (٤) الرابع

ب) (٣) الثالث

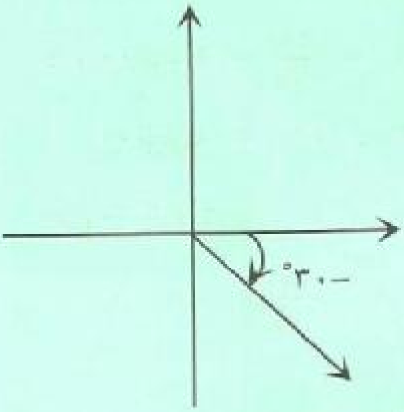
[٢] أ) ٤٥° تقع في الربع الأول



شكل (٧ – ١٠)

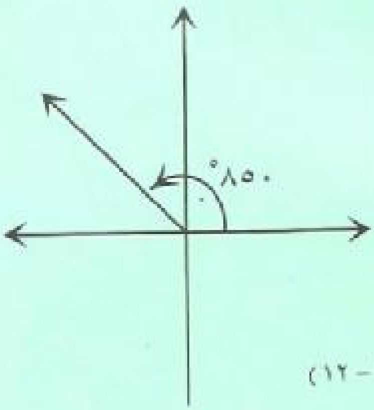
ب) –٣٠° تقع في الربع الرابع

جـ) – ٣٩٠° تقع في الربع الرابع



شكل (٧ – ١١)

ء) ٨٥٠° تقع في الربع الثاني

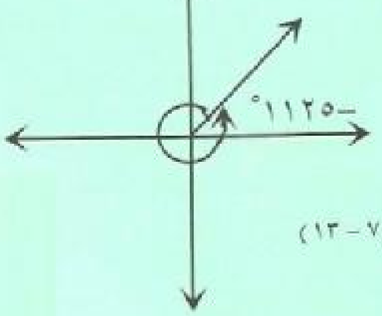


هـ) – ١٩٢٠° تقع في الربع الثاني

شكل (٧ – ١٢)

و) – ١١٢٥° تقع في الربع الأول

ز) ٢٩٨١° تقع في الربع الثاني



شكل (٧ – ١٣)

[٣] أ) ∵ الزاوية = ٣١٥° ، ٢٧٠° < ٣١٥° < ٣٦٠° فإن الزاوية تقع في الربع الرابع (زاوية منعكسة)

ب) ∵ الزاوية = ٢٠٠° ، ١٨٠° < ٢٠٠° < ٢٧٠° فإن الزاوية تقع في الربع الثالث (زاوية منعكسة)

جـ) ∵ الزاوية = ٥٦٠° ، فإن عدد الدورات = $\frac{٥٦٠}{٣٦٠}$ = ١ والباقي ٢٠٠°

∴ الزاوية = ٢٠٠° ، ١٨٠° < ٢٠٠° < ٢٧٠° فإن الزاوية تقع في الربع الثالث (زاوية منعكسة)

الزاوية ٥٦٠° = ٥٦٠° – ١ × ٣٦٠° = ٥٦٠ – ٣٦٠° ، = ٢٠٠°

د) ∵ الزاوية = $\frac{٤٨٠°}{٣٦٠}$ = ١ والباقي = ١٢٠°

∵ الزاوية = ١٢٠° ، ٩٠° < ١٢٠° < ١٨٠° فان الزاوية تقع في الربع الثاني (زاوية منفرجة) .

هـ) ∵ الزاوية = ٢٥٠° ، ١٨٠° < ٢٥٠° < ٢٧٠° فإن الزاوية تقع في الربع الثالث (زاوية منعكسة) .

و) ∴ الزاوية = $\frac{١٨٠°}{٨٥٠°}$ ، هي تقع في الربع الرابع .

٧ : ٢ وحدات قياس الزوايا

عدد الحصص : حصتان .

الأهداف

١ – يعرف القياس الدائري للزاوية .

٢ – يستنتج العلاقة بين التقديرين الدائري والستيني .

٣ – يحوّل قياس زاوية معطاة بالتقدير الستيني إلى التقدير الدائري والعكس .

تنفيذ حصص البند

ينفّذ الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : التقدير الدائري الستيني .

الحصة الثانية : حل بعض التمارين .

توجيهات طرائقية

التقدير الستيني أو (القياس الستيني) : هو قياس الزاوية بالدرجات وأجزائها

درجة (1°) $= 60'$ أى ٦٠ دقيقة ، دقيقة ($1'$) $= 60''$ أى ٦٠ ثانية

ثانية ($1''$) $= 60'''$ أي ٦٠ ثانية

تلاحظ انه سمي القياس بهذا الأسم لتعاملة مع العدد(٦٠) في كل مرة من اجزائة .

التقدير الدائري أو(القياس الدائري) : هو قياس آخر للزاوية يتعامل بالرمز π ويقرأ باي

وتكون هذه العلاقة $\pi \longleftarrow 180^\circ$ هي الرابط التقديري

ملاحظة : اذا اردنا تحويل التقدير من ستيني إلى دائري نضرب $\times \frac{\pi}{180}$ ، والعكس نضرب $\times \frac{180}{\pi}$

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال النقاش ومتابعةأداء الطلبة في الصف وكذلك من خلال الإطلاع وتصحيح الواجبات المنزلية وحل التمارين الصفية ،وفي نهاية الحصة الثانية تتم خطوة تقويم من خلال الأسئلة التالية :

س (١) حوّل إلى التقدير الدائري (أ) 60° ، (ب) -120° .

س (٢) حوّل إلى التقدير الستيني (أ) $\frac{\pi}{9}$ ، (ب) $\frac{-\pi}{18}$.

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] التحويل من التقدير الستيني إلى التقدير الدائري نضرب $\times \frac{\pi}{180}$

أ) $360^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ر $= 2\pi$ ر . ب) $90^\circ = 90^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ر $= \frac{1}{12}\pi$ ر .

جـ) $45^\circ = 45^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ر $= \frac{1}{4}\pi$ ر . ء) $15^\circ = 15^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ر $= \frac{5}{3}\pi$ ر .

هـ) $120^\circ = 120^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ر $= 2\pi$ ر . و) $300^\circ = 300^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ر $= \frac{1}{2}\pi$ ر .

ز) $-540^\circ = -540^\circ \times \frac{\pi}{180}$ ر $= -3\pi$ ر . ح) صفر° = صفر° $\times \frac{\pi}{180}$ ر = صفر ر .

[٢] للتحويل من التقدير الدائري إلى التقدير الستيني نضرب × $\frac{١٨٠}{\pi}$

أ) $\frac{\pi}{٢}$ر = $\frac{\pi}{٢}$ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٩٠°

ب) −٤٥°   جـ) ١٥٠°   ء) ٤٦٨°   هـ) ٦٣٠°   و) ٩٠٠°

[٣]

التقدير الستيني	٢٤٠°	٣١٥°	٣٣٠°
التقدير الدائري	$\frac{٥\pi}{٦}$ ر	$\frac{٥\pi}{٤}$ ر	٢ π ر

[٤] نحول القياس إلى التقدير الدائري ٣٣٠° = ٣٣٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{١١}{٦}$ π ر

ل = نق × هـ = ٥ سم × $\frac{١١}{٦}$ π = $\frac{٥٥\pi}{٦}$ = ٩,١سم تقريباً

= ٩,١ × ٣,١٤ = ٢٨ سم تقريباً

[٥] أ) ٤٩ سم تقريباً   ب) ٢١ سم تقريباً

جـ) طول القوس = نصف القطر × الزاوية بالتقدير الدائري ،

= ٥ سم × $\frac{٣\pi}{٤}$

= ١٥ π = ١٥ × ٣,١٤ = ٤٧,١سم تقريباً

ء) ٧٨,٥ سم تقريباً

[٦] ١٥َ ٣٣° = $\frac{١٥}{٦٠}$ + ٣٣° = $\frac{١}{٤}$ ٣٣°

$\frac{١}{٤}$ ٣٣° = $\frac{١٣٣}{٤٠}$ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{١٣٣}{٧٢٠}$ π

∴ ل = ٥ × $\frac{١٣٣}{٧٢٠}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٢,٩سم

[٧] ل = نق × هـ

٢,٢ سم = ٣,٥سم × هـ

∴ هـ = $\frac{٢,٢}{٣,٥}$ = $\frac{٢٢}{٣٥}$ر

∴ الزاوية بالدرجات = $\frac{٢٢}{٣٥}$ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ ، = $\frac{٧ × ١٨٠ × ٢٢}{٢٢ × ٣٥٠}$

= ٣٦°

[٨] ٢٥ سم تقريباً

٧ : ٣ النسب المثلثية

عدد الحصص : اربع حصص

الأهداف

١ – يعرف دائرة الوحدة.

٢ – يحدد العلاقات بين جا ، جتا ، ظا ومقلوب كل منها .

٣ – يستنتج النسب المثلثية للزواياالتي قياسها (٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°)

٤ – يستنتج إشارات النسب المثلثية حسب موقعها في الأرباع الأربعة لدائرة الوحدة .

تنفيذ حصص البند ينفّذ الدرس في أربع حصص على النحو التالي :

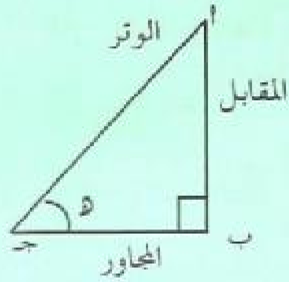
الحصة الأولى : دائرة الوحدة ، العلاقات بين جا ، جتا ، ظا ومقلوب كل منها

الحصة الثانية : النسب المثلثية للزوايا التي قياسها (٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°) .

الحصة الثالثة : إشارات النسب المثلثية حسب موقعها في الارباع الأربعة لدائرة الوحدة ، وحل بعض التمارين.

الحصة الرابعة : حل بعض التمارين .

توجيهات طرائقية



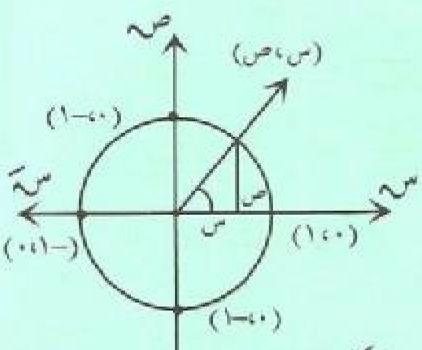
شكل (٧ – ١٤)

حتى نجد كلاً من النسب المثلثية يفترض أن لدينا مثلثاً قائم الزاوية مثل أ ب جـ كما في الشكل (٧–١٤) فالنسب جاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، قتاهـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

والآن لدينا تعريف جديد للنسب المثلثية من خلال دائرة الوحدة .

– لنرسم دائرة الوحدة وهي الدائرة التي يكون نصف قطرها وحدة واحدة.

ولذلك يكون تقاطع الدائرة مع المحاور كما هو في الشكل (٧–١٥)



شكل (٧ – ١٥)

نرسم الزاوية في الوضع القياسي وحتى نجد كلاً من الجيب وجيب التمام ننزل عموداً من نقطة تقاطع الشعاع المتحرك مع الدائرة في النقطة (س،ص) ويشكل عندنا مثلثاً قائم الزاوية .

جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ⟸ جا هـ = ص .

جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ⟸ جتا هـ = س .

- أي أن الجيب هو الإحداثي الصادي لأي نقطة على دائرة الوحدة .

وجيب التمام هو الإحداثي السيني (س ، ص)

جتا هـ   جا هـ

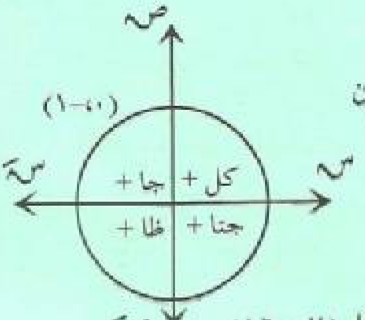
ولتوضيح قاعدة الإشارات نوضح الآتي : من خلال دائرة الوحدة يكون

في الربع الأول النسب موجبة (جا ، جتا ، ظا) ،

وفي الربع الثاني جا فقط موجبة والباقي سالب ،

وفي الربع الثالث ظا موجبة فقط والباقي سالب ،

في الربع الرابع جتا موجبة فقط والباقي سالب .



شكل (٧ – ١٦)

التقويم

– يتم التقويم بصورة مستمرة وذلك من خلال الأسئلة الشفوية والمشاركة في المناقشات ومن خلال متابعة وحل بعض التدريبات والتمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الرابعة تُعطى الأسئلة التالية :

س (١) : إذا كانت ($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$) نقطة للزاوية هـ فإن جا هـ يساوي

(١) $\frac{٣}{٥}$ (٢) $\frac{٥}{٣}$ (٣) $\frac{-٥}{٣}$ (٤) $\frac{-٣}{٥}$

س (٢) حدد اشارة كل نسبة من النسب المثلثية الآتية

(أ) جا ٧٥° (ب) ظا ٤٥° (جـ) جتا ٣٥° (د) جتا ١٢٠°

(هـ) جتا ٣٥٠° (و) ظا ٢٢٠°

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ∵ جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ = ١ ، جاهـ = $\frac{٣}{٥}$ ، ∴ جتا^{٢}هـ + $(\frac{٣}{٥})^٢$ = ١

⟸ جتا^{٢}هـ + $\frac{٩}{٢٥}$ = ١ ⟸ جتا^{٢}هـ = ١ − $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

⟸ جتا^{٢}هـ = $\frac{١٦}{٢٥}$ ، جتا هـ = $\pm\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \pm \frac{٤}{٥}$

∵ جيب التمام (جتا) في الربع الثاني ٩٠° < هـ < ١٨٠° ، ∴ جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$

وعليه ظا هـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{-٤}{٥}} = \frac{٣}{٥} \times \frac{-٥}{٤} = -\frac{٣}{٤}$

قا هـ = $\frac{١}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{١}{\frac{-٤}{٥}} = \frac{-٥}{٤}$

ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظاهـ}}$ = $\frac{١}{\frac{-٣}{٤}} = \frac{-٤}{٣}$ ،

[٢] تحل بالطريقة نفسها . [٣] تحل بالطريقة نفسها .

[٥] أ) الجواب ٢ ، ب) الجواب ١٧ ، جـ) الجواب $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$ ، ء) الجواب $\frac{٣}{٨}$

[٦] الجواب ٣٠°

[٧] جاهـ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، جتاهـ = $-\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ، ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = -\frac{١}{\sqrt{٣}} \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ∴ ظاهـ = + $\frac{١}{٢}$

[٨] جاهـ = $-\frac{١}{٢}$ ، جتاهـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، قتاهـ = −٢ ، قاهـ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

[٩] جاع = $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، جتاع = $-\frac{١}{٣}$ ، ظاع = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}}{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} \times \frac{-٣}{١}$

∴ ظاع = $-٢\sqrt{٢}$

٧ : ٤ العلاقات بين النسب المثلثية

عدد الحصص : خمس حصص

الأهداف

١ – يستنتج العلاقات المثلثية التالية :

(أ) جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١ ، (ب) ١ + ظا^{٢} هـ = قا^{٢} هـ ، (جـ) ظتا^{٢} هـ + ١ = قتا^{٢} هـ .

٢ – يستنتج النسب المثلثية للزوايا التي قياسها :

(أ) (π – هـ) ، (ب) (π + هـ) ، (جـ) (– هـ) ، (د) ($\frac{\pi}{٢}$ – هـ) .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : استنتاج العلاقات المثلثية التالية :

(أ) جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١ ، (ب) ١ + ظا^{٢} هـ = قا^{٢} هـ ، (جـ) ظتا^{٢} هـ + ١ = قتا^{٢} هـ .

الحصتان الثانية والثالثة : استنتاج النسب المثلثية للزوايا التي قياسها :

(أ) (π – هـ) ، (ب) (π + هـ) ، (جـ) (– هـ) ، (د) ($\frac{\pi}{٢}$ – هـ) .

الحصتان الرابعة والخامسة : حل بعض التمارين .

التقويم

يكون التقويم بنائياً من خلال مناقشة الطلبة وأدائهم من خلال حلولهم للواجبات المنزلية ، كما يعطى الاسئلة التالية أو ما يشبهها في نهاية الحصة الخامسة كخطوة تقويم :

س (١) : أوجد قيمة كلٍّ من : (أ) جتا (– ٣٠°) (ب) جا (١٥٠°)

س (٢) أثبت أن : جا^{٢} ب + جا ب جتا^{٢} ب = جا ب .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] جا (– ٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، جا (– ٦٠°) = – جا ٦٠° = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ،

ظا (– ٦٠°) = – ظا ٦٠° = – $\sqrt{٣}$ ، ظتا (– ٦٠°) = – ظتا ٦٠° = – $\frac{١}{\sqrt{٣}}$.

جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°) = – جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا ٢١٠° = جا (١٨٠° + ٣٠°) = – جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا ٢١٠° = ظا (١٨٠° + ٣٠°) = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ظتا ٢١٠° = ظتا (١٨٠° + ٣٠°) = ظتا ٣٠° = $\sqrt{٣}$

جا – ٣π = جا – π = – جا π = صفر ، جتا – ٣π = جتا – π = جتا π = – ١

ظا – ٣π = ظا – π = – ظا π = صفر ، ظتا – ٣π = ظتا – π = – ظتا π = غير معرفة

[٢] (أ) $\text{ظتا}(180^\circ - \text{هـ}) = \dfrac{1}{\text{ظا}(180 - \text{هـ})}$ ، $= \dfrac{1}{-\text{ظا هـ}} = -\text{ظتا هـ}$

(ب) $\text{ظتا}(180 + \text{هـ}) = \text{ظتا هـ}$ ، (جـ) $\text{قا}(180 - \text{هـ}) = \text{قا هـ}$ ،

(ء) $\text{قتا}(180 - \text{هـ}) = \text{قتا هـ}$

[٣] $\dfrac{\text{جا هـ}}{\text{ظا هـ}} \times \dfrac{\text{ظا هـ}}{-\text{ظتا هـ}} \times \dfrac{\text{جتا هـ}}{-\text{جتا هـ}} = \text{جتا هـ} \times \dfrac{1}{\text{ظتا هـ}} = \text{جتا هـ} \times \dfrac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \text{جا هـ}$

[٤] $\text{جا}\,150^\circ = \text{جا}(180^\circ - 30^\circ) = \text{جا}\,30^\circ = \dfrac{1}{2}$ ، $\text{جتا}\dfrac{2\pi}{3} = \text{جتا}(\pi - \dfrac{\pi}{3}) = -\text{جتا}\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{جا}\,240^\circ = \text{جا}(180^\circ + 60^\circ) = -\text{جا}\,60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\text{جتا}\dfrac{5\pi}{4} = \text{جتا}(\pi + \dfrac{\pi}{4}) = -\text{جتا}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

[٥] المقدار: $(\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س})(\text{قا}^2\text{س} + \text{ظا}^2\text{س}) - \text{ظا}^2\text{س} = (1 + \text{ظا}^2\text{س})(\text{قا}^2\text{س} + \text{ظا}^2\text{س}) - \text{ظا}^2\text{س}$

$= \text{قا}^2\text{س} + \text{ظا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$.

[٦] الطرف الأيمن $= \text{جا}^2\text{جـ}\ \text{قتا جـ} + \text{جتا}^2\text{جـ}\ \text{قا جـ} = \text{جا}^2\text{جـ} \times \dfrac{1}{\text{جا جـ}} + \text{جتا}^2\text{جـ} \times \dfrac{1}{\text{جا جـ}}$ ، $= \text{جا جـ} + \text{جتا جـ}$

[٧] الطرف الأيمن $= (\text{جا أ} + \text{قتا أ})^2 + (\text{جتا أ} + \text{قتا أ})^2$ ، $= (\text{جا}^2\text{أ} + 2\,\text{جا أ قتا أ} + \text{قتا}^2\text{أ}) +$

$(\text{جتا}^2\text{أ} + 2\,\text{جتا أ قا أ} + \text{قا}^2\text{أ}) = (\text{جا}^2\text{أ} + \text{جتا}^2\text{أ}) + (\text{قتا}^2\text{أ} + \text{قا}^2\text{أ}) + 2\,\text{جا أ قتا أ} + 2\,\text{جتا أ قا أ}$

$= 1 + 1 + \text{ظا}^2\text{أ} + 1 + \text{ظتا}^2\text{أ} + 2 + 2 = \text{ظتا}^2\text{أ} + \text{ظتا}^2\text{أ} + 7$

[٨] أ) الطرف الأيمن $= \left(\dfrac{1}{\text{جا جـ}} - \dfrac{\text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}}\right)^2 = \left(\dfrac{1 - \text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}}\right)^2$ ، $= \dfrac{(1 - \text{جتا جـ})^2}{\text{جا}^2\text{جـ}} = \dfrac{(1 - \text{جتا جـ})^2}{1 - \text{جتا}^2\text{جـ}}$

$$= \frac{(1 - \text{جتا جـ})^2}{(1 - \text{جتا جـ})(1 + \text{جتا جـ})} = \frac{1 - \text{جتا جـ}}{1 + \text{جتا جـ}}$$

ب) الطرف الأيسر $= \dfrac{\text{ظا جـ}}{\text{قا جـ} - 1}$ ، $= \dfrac{\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}{\frac{1}{\text{جتا جـ}} - 1} = \dfrac{\text{جا جـ}}{1 - \text{جتا جـ}}$

$$= \frac{\sqrt{1 - \text{جتا}^2\text{جـ}}}{\sqrt{(1 - \text{جتا جـ})^2}} = \frac{\sqrt{(1 - \text{جتا جـ})(1 + \text{جتا جـ})}}{\sqrt{(1 - \text{جتا جـ})^2}} = \sqrt{\frac{1 + \text{جتا جـ}}{1 - \text{جتا جـ}}}$$

٧ : ٥ استخدام الآلة الحاسبة في حساب المثلثات

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يتعرّف على بعض المفاتيح في الآلة الحاسبة .

٢ – يستخدم [و رر] لأدخال أجزاء الدرجة .

٣ – يستخدم [Inv] لمعرفة قياس الزاوية التي علمت إحدى نسبها .

٤ – يجد نسب مثلثية لزاوية معلوم قياسها .

٥ – يجد قياس زاوية علمت إحدى نسبها المثلثية .

تنفيذ حصص البند

ينفذالدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : استخدام الآلة الحاسبة لحساب النسب المثلثية

الحصة الثانية : حل بعض التمارين .

توجيهات طرائقية

مفاتيح الرموز اللاتينية للنسب المثلثية . Sin(جا) Cos(جتا) tan(ظا)

الرمز [و رر] لإدخال أجزاء الدرجة (التحويل من ستيني إلى دائري والعكس) .

الرمز [Inv] قياس الزاوية التي علمت إحدى نسبها يسمى بالمعكوس .

– التركيز على الملاحظة « عندما يكون قياس الزاوية بالدرجات وأجزائها نجعل الآلة الحاسبة على الوضع DEG حيث [DEG] يعني أن القياس بالدرجات والرمز [RAD] يعني أن القياس بالردیان.

– لإيجاد مقلوب النسب المثلثية باستخدام الآلة الحاسبة

Sin^{-1} ($جا^{-1}$) Cos^{-1} ($جتا^{-1}$) tan^{-1} ($ظا^{-1}$)

– إيجاد كلٍّ من : [$\sqrt{}$] ، [a b/c] ، الكسر والعدد الكسري

التقويم :

يتم التقويم البنائي بصورة مستمرة في كل حصة من خلال مشاركة الطلبة والنقاش أثناء الدرس ومن خلال متابعة اداء الطلبة للواجبات الصفية والمنزلية . وفي نهاية الحصة الثانية يعطى اسئلة على النحو التالي كخطوة تقويم :

س (١) : باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من :

(أ) جا ٧٥° (د) جا ٣٣ ٩٠°

س (٢) باستخدام الحاسبة أوجد قيمة س إذا علم أن :

(أ) ظاس = $\sqrt{3}$ (ب) جتاس = ٠,٦٥٦١

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) ٠,٩٠٦٣ ، ب) ٤٢٢٦,٠ ، جـ) ٢,١٤٤٥

د) جا ٠,٢٦٣٢ ، هـ) جتا ٠,٩٦٤٧ ، د) ظا ٠,٢٧٢٨

ط) ظا ١,٢٢٧٥ ، ع) جا (−١٧٠٧١و٠) ، ك) ٢,٠٣٠٧

[٢] أ) ١,١٤٢٧ ، ب) −٣,٠٨٥٥ ، جـ) −٠,٤٩٩٩

د) −٠,٤٣٣ ، هـ) ١,٢٠٧٠٤

[٣] جا ٨٤٠° جا ٧٨٠° + جا ٣٩٠° جتا ٤٨٠° ، = جا ١٢٠° جا ٦٠° + جا ٣٠° جتا ١٢٠°

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ (هـ.ط.ث)

[٤] ٦,١٤٠٢

[٥] أ) س$_1$ = ١٤° ٤٩َ ٥٨ً س$_2$ = ١٦٥° ١٠َ ٢ً

ب) س = ٣٤° ٢٤َ ٥ً جـ) س = ١١٢° ٥٢َ ٥١ً

ء) س = ٤٨° ٢٩َ ٥١ً هـ) س = ٦٧° ٣٠َ ٢ً

٧ : ٦ حل المثلث القائم الزاوية

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يحل المثلث القائم الزاوية ، إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية .

٢ – يحل المثلث القائم الزاوية ، إذا علم منه طولا ضلعين .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : حل المثلث القائم الزاوية .

الحصة الثانية : حل بعض التمارين والمسائل

التقويم

يتم تقويم الطلبة بصورة مستمرة وذلك من خلال الأسئلة الشفوية والمشاركة في المناقشات ومن خلال متابعة حل بعض التدريبات والتمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الثانية تعطى الأسئلة التالية :

س (١) أوجد طول $\overline{بجـ}$ باستخدام مبرهنة فيثاغورث بعد أن علم أن

|أب| = ٦,٨ سم ، ق (∡ جـ) = ٦٥°

إرشادات وإجابات بعض التمارين

باستخدام الآلة الحاسبة

[١] أ) |أب| = ٥٣,٦ سم ، |ب جـ| = ٤٤,٩ سم، ق(∡أ) = ٤٠°

ب) |أب| = ٢٨,٧ سم ، |ب جـ| = ٤٤,٩ سم، ق(∡أ) = ٥٥°

جـ) |أب| = ٨٨,٠ سم ، |ب جـ| = ٨١,٠ سم

[٢] أ) |س ص| = ١٥٠,٥ سم ، ب) |س ص| = ١١٩,٥ سم

[٣] أ) |ب جـ| = ١٠√٣ سم ، ق(∡جـ) = ٣٠° ، ق(∡أ) = ٦٠°

ب) |أ جـ| = ٢١,٩ سم ، ق(∡أ) = ٠,٢٧٧ ، ق(∡جـ) = ٣٤,٨٠٤°

جـ) |أ جـ| = ١٠,١٥ سم ، ق(∡جـ) = ٥١,٩٩٨٩ ≈ ٥٢°

|ب جـ| = ٦,٢٥٠ سم ، ق(∡أ) = ٣٨°

د) ق(∡جـ) = ٧٦,٩٩٧ ≈ ٧٧° ، ق(∡أ) ≈ ١٣°

|أ جـ| = ٤٠ سم ، |أ ب| = ٣٩ سم

هـ) |أ جـ| = ٨٠ سم ، |ب جـ| = ٤ سم ، |أ ب| = ٨ سم ، ق(∡جـ) = ٦٣,٤° ،

ق(∡أ) = ٢٦,٥٦°

[٤] ق(∡جـ) = ٢٢,٧٦٠° ≈ ٣٦″ ٤٥′ ٢٢° ، ق(∡أ) = ٦٧,٢٤٠°

٧ : ٧ تطبيقات على حل المثلث القائم الزاوية

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يحل المثلث القائم الزاوية ، إذا علم منه طول ضلع وقياس وزاوية.

٢ – يحل المثلث القائم الزاوية، إذا علم منه طولا ضلعين .

تنفيذ حصص البند

ينفذ الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : تطبيقات على حل المثلث القائم الزاوية .

الحصة الثانية : حل تمارين ومسائل .

توجيهات :

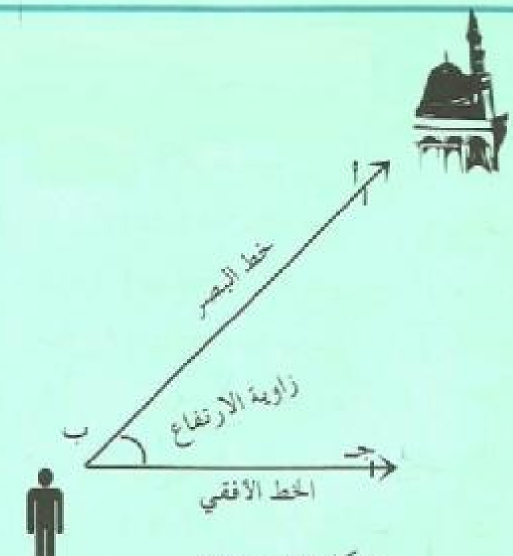
زاوية الارتفاع :

لاحظ الشكل (٧ – ١٨) :

يرصد شخص مسجداً . لاحظ أن قمة المسجد أعلى من الشخص . يسمى الخط المستقيم المار بعين الناظر وقمة المسجد **خط البصر** .

وتسمى الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي المار بعين الناظر زاوية ارتفاع قمة المسجد .

فزاوية ارتفاع المسجد وهي ∢ أ ب جـ



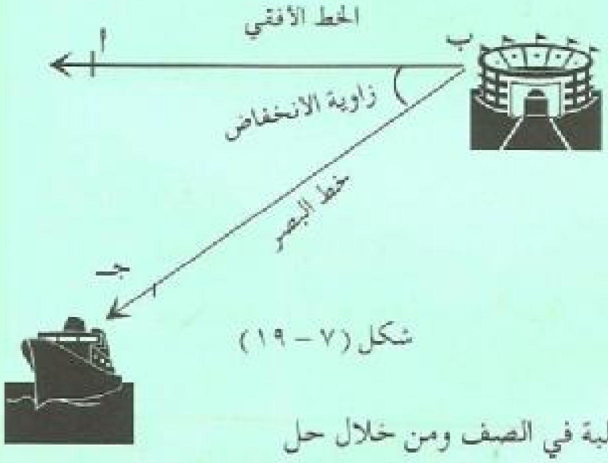
شكل (٧ – ١٨)

زاوية الانخفاض :

لاحظ الشكل (٧ – ١٩)

ينظر شخص إلى سفينة في البحر من أعلى ملعب . لاحظ أن موقع الشخص أعلى السفينة ، فإن خط البصر هو الخط المستقيم المار بعين الناظر والسفينة .

وتسمى الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي المار بعين الناظر زاوية انخفاض السفينة فزاوية الانخفاض هي ∢ أ ب جـ .



شكل (٧ – ١٩)

التقويم يتم التقويم بنائياً من خلال مناقشة ومشاركة الطلبة في الصف ومن خلال حل التمارين الصفية والواجبات المنزلية وفي نهاية الحصة الثانية يعطيا أسئلة على النحو التالي كخطوة تقويم:
ما ارتفاع شجرة إذا علمت أن طول ظلها على أرض افقية يساوي ٢٠ متراً وزاوية إرتفاع الشمس ٣٠° ؟

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] جتا ٣٠° = $\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|}$ ⟸ |أ جـ| = $\frac{|\text{ب جـ}|}{\text{جتا ٣٠°}}$ = $\frac{٦٠}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ ⟸ |أ جـ| = $\frac{١٢٠}{\sqrt{٣}}$ م

∵ جا ٣٠° = $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|}$ ⟸ |أ ب| = جا ٣٠° × |أ جـ| = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١٢٠}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{٦٠}{\sqrt{٣}}$

طريقة اخرى : ظا ٣٠° = $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|}$ ⟸ |أ ب| = |ب جـ| × ظا ٣٠° = ٦٠م × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{٦٠}{\sqrt{٣}}$ م

∴ ارتفاع البرج ≈ ٣٤,٦٤م

[٢] جتاجـ = $\frac{|\text{ب أ}|}{|\text{أ جـ}|}$ = $\frac{١٠}{٢٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ ق (∢ جـ) = ٦٠° ، زاوية ميل السلم = ٦٠°

[٣] ظا ٢٥° ٤ً) = $\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ ب}|}$ = |ب جـ| = |أ ب| × ظا (٢٥ ٤١َ°) = ٦٠ × ٨٨,٦١ = ٥٣م

[٤] ٥٧٤,٧٦٩٤ متر .

٨ : ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الهدف يهدف الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة لدى الطلبة ومعرفة جوانب القوة والضعف لديهم ، ويقدم المدرس الاختبار الذي في الدليل كاختبار للوحدة أو اختبار مشابه شريطة أن يلتزم بتحقيق الأهداف:

وفيما يلي جدول بأرقام الأسئلة والأهداف المراد قياسها .

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٢
٢ ، ٣ ، ٤	٣ ، ٤
٥ ، ٦ ، ٧	٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩
٧ ، ٨	٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢

الاختبار

[١] ارسم كلا من الزوايتين الموجهتين الآتيتين في وضعها القياسي مبيناً الربع الذي تقع فيه ، ثم أوجد القياس الأساسي لكل منهما :

أ) -٧٠° ب) ١٧٢٠°

[٢] حوّل إلى التقدير الدائري

أ) -٩٠° ب) ٥٤٠°

[٣] حوّل إلى التقديرالستيني

أ) $\frac{٥\pi}{٢}$ ر ب) $\frac{-\pi}{٦}$ ر

[٤] أوجد الزاوية هـ التي تقابل قوساً طوله ٤٠سم في دائرة نصف قطرها ٣٠سم

[٥] اثبت أن : جتا ٩٠° + جتا ٠° + جتا ١٨٠° = ٢ جا ٣٠°

[٦] إذا كانت ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) هي النقطة لزاوية قياسها هـ فأوجد قيمة كلٍ مما يأتي :

أ) جتا ١٢٠° ب) ظتا ١٣٥°

[٧] أوجد قيمة كلٍ مما يأتي :

أ) جتا ١٢٠° ب) ظتا ١٣٥°

[٨] استخدم الآلة الحاسبة :

من نقطة على سطح الأرض على بعد ٢٠٠ متر عن قاعدة منارة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة منارة = ١٠° أوجد ارتفاع المنارة عن سطح الأرض .

الوحدة الثامنة

الهندسة الإحداثية والتحولات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٨– ١	مراجعة	١
٨ – ٢	ميل المستقيم	٣
٨ – ٣	معادلة المستقيم	٥
٨ – ٤	بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم	٢
٨ – ٥	الانعكاس تحليلياً	٤
٨ – ٦	الانسحاب تحليلياً	٣
٨ – ٧	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١٩

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يوجد ميل مستقيم عُلم قياس زاويته الموجبة .

٢ – يوجد ميل مستقيم يمر بنقطتين معلومتين .

٣ – يوجد ميل مستقيم بمعلومية ميل مستقيم آخر موازٍ له أو عمودي عليه .

٤ – يتعرّف على معادلتي محور السينات ومحور الصادات ومعادلات المستقيمات الموازية لهما .

٥ – يستنتج معادلة مستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات .

٦ – يستنتج معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين عليه .

٧ – يستنتج معادلة المستقيم بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات .

٨ – يستخدم قانون بُعد نقطة معلومة من مستقيم معلوم .

٩ – يحدّد إحداثي صورة نقطة تحت تأثير انعكاس أو انسحاب .

١٠ – يحدّد نقطة بدلالة صورتها تحت تأثير انعكاس أو انسحاب .

١١ – يوجد العلاقة بين إحداثي نقطة وإحداثي صورتها بالانعكاس أو الانسحاب .

١٢ – يوجد معادلة صورة مستقيم معلوم تحت تأثير انعكاس أو انسحاب .

١٣ – يميّز متى يكون التحويل الهندسي انعكاساً أو انسحاباً .

١٤ – يرسم صورة شكل هندسي تحت تأثير انعكاس أو انسحاب .

١٥ – يحل مسائل تطبيقية على معادلات المستقيم والتحويلات الهندسية .

المقدمة

لمحة تاريخية

تعتبر شهرة العرب في الهندسة أقل منها في الجبر وحساب المثلثات، وذلك لنبوغ اليونانيين في الهندسة أكثر منهم، حيث تعتبر الهندسة علماً يونانياً. وكتاب إقليدس (Euclid) (٣٠٠ ق .م) الأصول (Elements) هوأول كتاب جمع الهندسة وعرضها بشكل منطقي يعتمد على البرهان باستخدام المسلمات للمرة الأولى .

وعندما بدأ العرب نهضتهم ترجموا كتاب الأصول، بالإضافة لمؤلفات هندسية لعلماء آخرين مثل ارخميدس(٢٨٧-٢١٢ ق . م) ابولونيوس(٢٦٠-٢٠٠) ق . م وهيرون الأسكندراني ... الخ إضافة لذلك فقد قام العرب بتأليف كُتبٍ في الهندسة مثل كتاب ابن الهيثم « الجامع في أصول الحساب »، والذي يقول عنه مؤلفه "استخرجت أصوله لجمع أنواع الحسابات من أوضاع إقليدس في أصول الهندسة والعدد، وجعل السلوك في استخراج المسائل الحسابية بجهتي التحليل الهندسي والتقدير العددي، وعدلت فيه عن أوضاع الجبريين والفاظهم .

ويقول ابن القفطي عن فضل ابن الهيثم في الهندسة " إنه صاحب التصانيف والتآليف في علم الهندسة .

كان عالماً بهذا الشأن متقنناً فيه قيماً بغوامضه ومعانيه، ومشاركاً في علوم الأوائل، أخذ عنه الناس واستفادوا .

كما طبق العرب الهندسة على المنطق، وكتب ابن الهيثم كتاباً قال فيه « كتبت كتاباً جمعت فيه الأصول الهندسية والعددية من كتاب إقليدس وأبولوينوس، ونوعت فيه الأصول وقسمتها، وبرهنت عليها براهين نظمتها من الأمور التعليمية والمنطقية حتى انتظم ذلك مع انتقاص توالي إقليدس وأبولوينوس ». ومن هنا يتبين أنه قد رتب في هذا الكتاب المبرهنات وبرهن عليها ببراهين متتابعة، في حين لا يوجد في الأصلين اللذين أخذ عنهما تتابع أو اتصال . وقد استطاع ابن الهيثم أن يستخدم في حل المسائل المتعلقة بالبصريات مبرهنات هندسية قام ببرهانها رياضياً وبشكل جيد . وألف البغدادي رسالة موضوعها « تقسيم أي مستقيم إلى أجزاء متناسبة مع أعداد مفروضة برسم مستقيم »، وهي اثنتان وعشرون قضية ، سبع في المثلث ، وتسع في المربع ، وست في المخمس .كما ساهم العرب في دراسة مسلمة التوازي لإقليدس، وأعطوا أفكاراً عميقة خاصة نصير الدين الطوسي الذي اعتمد الغربيون على أفكاره التي كانت بذوراً للهندسات اللا إقليدية .

وأول من كتب فيها العباس بن سعيد الجوهري، وهو معاصر للخوارزمي، وأول كتاب وضعه هو « إصلاح كتاب الأصول »؛ فقد اقترح الجوهري برهان مسلمة إقليدس في المتوازيات، لكن هذا البرهان يعتمد ضمناً على تطابق الزوايا الداخلية المتقابلة ، فيصل إلى القول بأن مثل هذه المستقيمات المتوازية لا تلتقي، وقد استفاد من فكرته ليجندر (Legendre) عام ١٨٠٠م .

كما درس الفيريزي مسلمة التوازي في كتابه عن الهندسة، وبرهن عدة قضايا في الهندسة منها :

« تحدد المسافات بين مستقيمين متوازيين بالبعد بينهما »، «المستقيمان العموديان على مستقيم واحديكونان متوازيين» ، « مجموع الزاويتين الداخليتين من جهة واحدة من المستقيم القاطع يساوي قائمتين» . كما ظهرت كتب لثابت ابن قره في الهندسة الإقليدية مثل «مقالة في برهان المسلمة المشهورة من إقليدس» .كما صاغ عمر الخيام مسلمة ارخميدس ومسلمة التوازي ثم توصل إلى الاستنتاج :

«المستقيمان العموديان على مستقيم يبقيان على البعد نفسه» . ويقول قدري طوقان أن الأوربيين عرفوا إقليدس عن طريق العرب، حيث ترجموا الأصول إلى اللاتينية من العربية. وقدم الطوسي طريقتين عن مبرهنة إقليدس الخامسة ويجب القول أن ديكارت (١٥٩٦ – ١٦٥٠) -أحد اكبر علماء الرياضيات ومؤسس الهندسة التحليلية والفيلسوف الكبير- فقد اطلع على علوم المسلمين واستفاد منها كثيراً. ومن العلماء المشهورين الذين عملوا في الهندسة الأخوة بنو موسى (ابو جابر محمد والحسن واحمد أولاد موسى بن شاكر) في عهد الخليفة المأمون حيث ألفوا « كتاب الأخوة الثلاثة في الهندسة» .

وتلخيصاً لراي العلماء العرب في الهندسة كعلم نظري وعملي نجد القول « فقدرأوا في الهندسة علماً يخدم حياة الناس العملية وعلماً نظرياً، لأنه أحد الأبواب التي تؤدي إلى معرفة جوهر النفس التي هي جذر العلوم وعنصر الحكمة .

خلفية علمية

المعادلة : أ س + ب ص + جـ = ٠

تمثل معادلة مستقيم ل ، ويمكن كتابتها كتطبيق ص = ق (س)، حيث أن س هو المتغير المستقل (Independent Variable) ، و ص هو المتغير التابع ؛ أي كتابة ص بدلالة س كالتالي :

ص = $-\frac{أ}{ب}$ س $-\frac{جـ}{ب}$ حيث أن $-\frac{أ}{ب}$ تمثل ميل المستقيم (م) ، وهو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

– $\frac{جـ}{ب}$ تمثل عدد الوحدات الطولية التي يقطعها المستقيم ل من محور الصادات (الجزء المقطوع من محور الصادات)، أي أن المستقيم ل يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، $-\frac{جـ}{ب}$) .

وتسمى المعادلة أ س + ب ص + جـ = ٠ بالصورة العامة للمستقيم، وهناك صور أخرى لكتابة معادلة المستقيم جميعها صحيحة، ولكن قد تكون إحداها أكثر ملائمة من الأخرى وفقاً للموقف الرياضي الذي توضع فيه المعادلة . ومن هذه الصورة ما يلي :

– معادلة المستقيم بمعلومية ميله هـ والجزء المقطوع من محور الصادات جـ ، وهي : ص = هـ س + جـ

– معادلة المستقيم بمعلومية ميله م ونقطة عليه $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ هي : $\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$ ،

– معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ واقعتين عليه هي :

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \quad \text{، أو} \quad \frac{\text{ص} - \text{ص}_2}{\text{س} - \text{س}_2} = \frac{\text{ص}_1 - \text{ص}_2}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

– معادلة مستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين من محوري السينات والصادات أ ، ب على التوالي هي :

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = 1 .$$

وبما أن أي نقطة على المستقيم الموازي لمحور الصادات ويبعد عنه ب وحدة طولية أحداثيها السيني = ب ، إذن معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويبعد عنه ب وحدة طولية هي $\text{س} = \text{ب}$ ، أما محور الصادات نفسه فمعادلته $\text{س} = 0$.

وبالنسبة للمستقيم الموازي لمحور السينات ويبعد عنه أ وحدة طولية فمعادلته $\text{ص} = \text{أ}$ ، ومحور السينات نفسه فمعادلته $\text{ص} = 0$.

إذا كان لدينا المستقيمان $\text{ل}_1 : \text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{جـ}_1 = 0$ ، $\text{ل}_2 : \text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{جـ}_2 = 0$ ؛ فهناك ثلاث حالات :

١) لا توجد نقاط مشتركة بينهما ، في هذه الحالة نقول إن المستقيمين متوازيان .

٢) توجد نقطة واحدة فقط مشتركة بينهما ، في هذه الحالة نقول إن المستقيمين يتقاطعان .

٣) توجد أكثر من نقطة مشتركة بينهما ، في هذه الحالة نقول إن المستقيمين ينطبقان على بعض .، أي أنهما متطابقان ؛ وفي هذه الحالة أيضاً نقول إن المستقيمين متوازيان .

إذن يتوازى المستقيمان ل_1 ، ل_2 إذا وقعا في مستوى واحد وكانا متطابقين أو لا يتقاطعان ؛ أي أن $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ إذا وقعا في مستوى واحد وإذا وفقط اذا كان $\text{ل}_1 = \text{ل}_2$ أو $\text{ل}_1 \cap \text{ل}_2 = \Phi$.

أما البعد من نقطة معلومة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ عند مستقيم معلوم $\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = 0$ ، أي طول العمود النازل من النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ إلى المستقيم $\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = 0$ ، فهو $\dfrac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

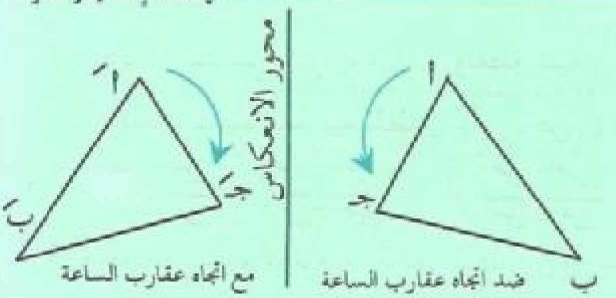
التحويل الهندسي هو تطبيق مجموعة ذات عناصر هندسية على مجموعة ذات عناصر هندسية أيضاً ؛ فالانعكاس في مستقيم معادلته $\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = 0$ هو تطبيق يقرن النقطة $\text{هـ}(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ بالنقطة $\text{هـ}'(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ حيث أن : $\text{س}_2 = \dfrac{1}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}\left((\text{ب}^2 - \text{أ}^2)\,\text{س}_1 - 2\text{أ ب ص}_1 - 2\text{أ جـ}\right)$

$$\text{ص}_2 = \frac{1}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}\left((\text{أ}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ص}_1 - 2\text{أ ب س}_1 - 2\text{ب جـ}\right) .$$

أما النقطة $\text{هـ}'(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ هي صورة النقطة هـ ، بالانعكاس في المستقيم $\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = 0$ ، حيث :

$$\text{هـ}\left(\frac{(\text{ب}^2 - \text{أ}^2)\,\text{س}_1 - 2\text{أ ب ص}_1 - 2\text{أ جـ}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2} ، \frac{(\text{أ}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ص}_1 - 2\text{أ ب س}_1 - 2\text{ب جـ}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}\right)$$

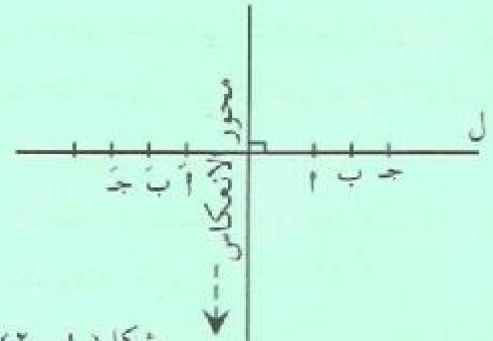
وهذا النوع من التحويلات الهندسية، أي الانعكاس في محور (مستقيم)، يحافظ على الأطوال وقياس الزوايا ولكنه لا يحافظ على الاتجاه [انظر الشكل ٨ – ١].



شكل (٨ – ١)

وصورة أية نقطة على محور الانعكاس هي نفسها، وفي هذه الحالة نقول أن «النقاط الواقعة على محور الانعكاس ثابتة كذلك صورة محور الانعكاس».

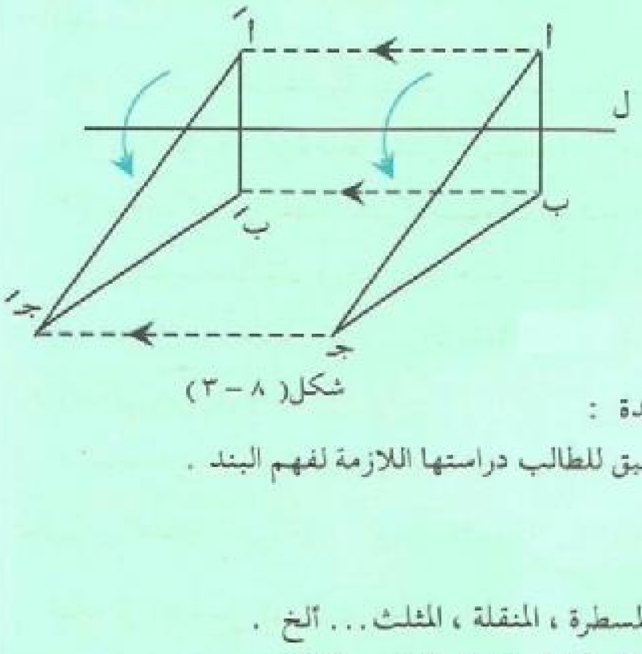
وصورة العمودي على محور الانعكاس هو العمودي نفسه، أي أن " المستقيم العمودي على محور الانعكاس ثابت " بالرغم من أن نقاطه (ما عدا نقطة التقاطع مع محور الانعكاس ليست ثابته) [شكل (٨– ٢)] .



شكل (٨ – ٢)

والانسحاب (أ ، ب) هو تطبيق يربط النقطة هـ (س، ص) بالنقطة هـَ (س + أ ، ص + ب).

وهذا النوع من التحويلات الهندسية ، أي الانسحاب، يحافظ على الأطوال وقياس الزوايا وكذلك الاتجاه [شكل (٨ –٣)] . صورة المستقيم ل الموازي لمتجه الانسحاب هو نفسه[شكل (٨ – ٣)] أي أنه ثابت بالنسبة لهذا التطبيق (الانسحاب).



شكل (٨ – ٣)

توجيهات طرائقية عامة

على المعلم مراعاة ما يأتي عند تدريس هذه الوحدة :

١ – أن يمهِّد لكل من المفاهيم والمعارف الأخرى التي سبق للطالب دراستها اللازمة لفهم البند .

٢ – يحاول قدر الإمكان ربط النظرية بالواقع .

٣ – تقريب المفاهيم الرياضية عن طريق الرسم .

٤ – استخدام الوسائل التعليمية أثناء تنفيذ الدرس كالمسطرة ، المنقلة ، المثلث... ألخ .

٥ – إشراك الطلبة ، لتدريبهم على تحديد المعطيات في المسألة الرياضية والمطلوب إثباته .

٦ – إيجاد المطلوب إثباته بواسطة طرق البراهين المعروفة كالطريقة التحليلية والطريقة التركيبية والدمج بينهما.

٧ – تدريب الطلبة على إعادة صياغة البراهين الرياضية بأنفسهم .

٨ – حل الأمثلة في كل بند بمعية الطلبة قدر الإمكان لتدريب الطلاب على تنظيم خطوات الحل مع تبيان السبب عند كل خطوة .

٩ – إعطاء بعض التمارين والمسائل كواجب صفي وكواجب منزلي .

١٠– مناقشة حل الواجب المنزلي بمعية الطلاب .

المصطلحات العلمية

Coordinate Geometry	الهندسة الإحداثية
X- axis	المحور السيني
Y- axis	المحور الصادي
Origin	نقطة الأصل
Abscissa	الإحداثي السيني
Ordinate	الإحداثي الصادي
Slope	الميل
Angle of inclination	زاوية الميل
Straight line	مستقيم
Parallel	موازي
Perpendicular	عمودي
Co- linear points	نقاط على استقامة واحدة
Equation of a line	معادلة مستقيم
Slope- Intercept form	معلومية ميله ونقطة عليه
Slope- point form	لمعلومية نقطتين واقفتين عليه
Two- points form	لمعلومية ما يقطعه من محوري الإحداثيات
Interceos - form	تحويلات
Transtrmations.	الانعكاس
Reflection	صورة
Image	محور الانعكاس
Axis of reflection	الانسحاب
Translation	

المراجع

١ - وليم هـ . دورفي (ترجمة : محمد علي السمري) : حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، دار ماك جر وهيل للنشر ، القاهرة ١٩٨٢م .

2- Loney , S.L , The Elements of Coordinate Geometry ,Macnillen and Co.Ltd, London ,1965.

3- Thomes, G.B. , Calculus and Analytic Geometry , Addison - Wesly, New York ,1959.

٨ : ١ مراجعة

عدد الحصص : حصة واحدة

الأهداف

استذكار المفاهيم الهندسية التي سبق أن درسها الطالب والضرورية لفهم هذه الوحدة، وهي :

١ – يحدّد النقطة في المستوى الإحداثي، ويذكر إحداثي نقطة معطاة في المستوى الإحداثي .

٢ – يوجد البعد بين النقطتين .

٣ – يوجد إحداثي منتصف قطعة مستقيمة .

التقويم

يتم من خلال المناقشات متابعة حلول التمارين الصفية والمنزلية وعليه أن يعطى السؤال التالي أو سؤال شبيه كخطوة تقويم :

لتكن أ(٣ ، ٢) ، ب (٠ ، ٤) ، جـ(– ٥ ، ٢)

١– حدّد في أي ربع تقع النقاط أ ، ب ، جـ في مستوى الإحداثيات ، ثم ارسمها للتأكد من إجابتك .

٢ – أوجد |ب جـ| .

٣ – إحداثي منتصف $\overline{\text{أب}}$.

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] (–٣ ، ٥) تقع في الربع الثاني

(٢، ٧) تقع في الربع الأول .

(١ ، ٣) تقع في الربع الأول

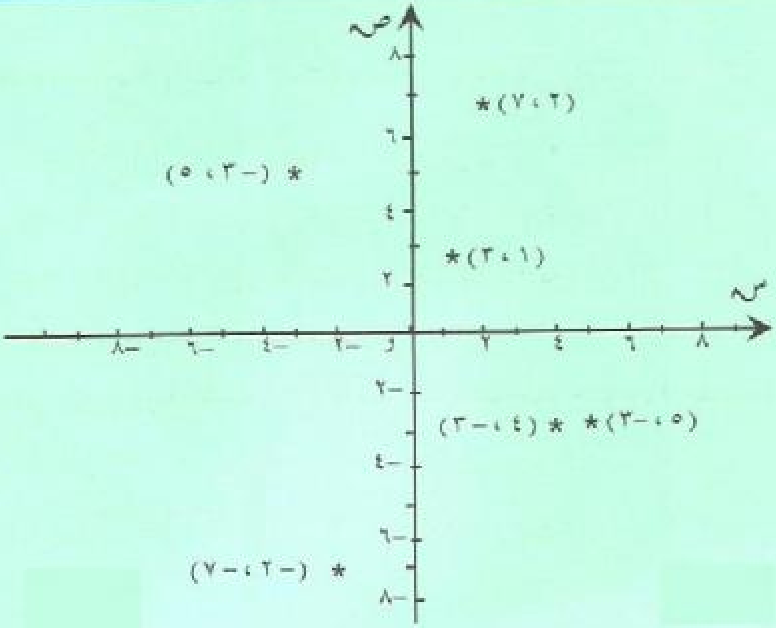
(٥، –٣) تقع في الربع الرابع .

(٤ ، –٣) تقع في الربع الرابع .

(– ٢ ، – ٧) تقع في الربع الثالث .

(–٣ ، –$\frac{1}{2}$) تقع في الربع الثالث

(– ٣ ، ٤) تقع في الربع الثاني ، الشكل التالي يوضّح ذلك .



[٢] أ) البعد بين النقطتين (٤ ، ١) ، (−٢ ، ٩) = $\sqrt{(-٢-٤)^{٢}+(٩-١)^{٢}}$

= $\sqrt{٣٦+٦٤}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

بالطريقة نفسها يمكن إيجاد البعد بين أزواج النقاط الأخرى

ب) $\sqrt{٢٩}$ جـ) − ٣   د) −٢ $\sqrt{٢}$

هـ) − ٧   و) ١٠ .

[٣] أ) نقطة منتصف القطعة الواصلة بين النقطتين

(٤ ، ١) و (−٢ ، ٩) هي ، $\left(\frac{٤-٢}{٢} ، \frac{١+٩}{٢}\right)$ = (١ ، ٥) .

بالطريقة نفسها يمكن إيجاد إحداثي منتصف القطعة الواصلة بين أزواج النقاط الأخرى

ب) $\left(\frac{٧}{٢} ، ٤\right)$ جـ) $\left(\frac{١١}{٢} ، ٠\right)$ د) (٤ ، ٥)

هـ) $\left(\frac{١}{٢} ، −٢\right)$ و) (٠ ، ٠)

[٤] النقطة التي تنصف |أب| هي جـ$\left(\frac{١}{٢} ، -\frac{٣}{٢}\right)$

|أ جـ| = $\sqrt{(٤+\frac{١}{٢})^{٢}+(-٦+\frac{٣}{٢})^{٢}}$ = $\sqrt{\frac{٨١}{٤}+\frac{٨١}{٤}}$ = $\frac{٩}{٢}\sqrt{٢}$

|جـ ب| = $\sqrt{(-\frac{١}{٢}+٥)^{٢}+(-\frac{٣}{٢}-٣)^{٢}}$ = $\sqrt{\frac{٨١}{٤}+\frac{٨١}{٤}}$ = $\frac{٩}{٢}\sqrt{٢}$

نستنتج أن |أ جـ| = |جـ ب| ، وهذا يؤكد صحة أن النقطة جـ هي منتصف القطعة أ ب .

[٥] لإثبات أن النقاط أ(−١ ، ١) ب(١ ، −٣) ، جـ(٧ ، ٥) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية نثبت أن :

|ب جـ|² = |أ ب|² + |أ جـ|² (مبرهنة فيثاغورس)

∴ (٧ − ١)² + (٥ + ٣)² = (١ + ١)² + (−٣ − ١)² + (٧ + ١)² + (٥ − ١)²

١٠٠ = ٢٠ + ٨٠ = ١٠٠ ، ∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية عند أ .

[٦] لإثبات أن أ(١ ، −٤) ، ب(٣ ، ١) ، جـ(−٢ ، ٣) .

ء(−٤ ، −٢) هي رؤوس مربع نثبت أن الأضلاع أ ب ، ب جـ ، جـ ء ، ء أ متساوية الأطوال وكذلك القطرين أ جـ ، ب ء .

|أ ب| = √((٣ − ١)² + (١ + ٤)²) = √(٤ + ٢٥) = √٢٩ .

بالطريقة نفسها نجد أن :

|ب جـ| = √٢٩ ، |جـ ء| = √٢٩ ، |ء أ| = √٢٩ . |أ جـ| = √٦٨ ، |ب ء| = √٦٨

(القطران متساويان اولاً)

[٧] أثبت أن كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول وبالتالي متوازيان .

[٨] بوضع ص = ٠ نحصل على ما يقطعه كل مستقيم من محور السينات ؛ وبوضع س = ٠ ، نحصل على ما يقطعه من محور الصادات .

أ) المستقيم ص = س − ١ ، يقطع وحدة من محور السينات، ووحدة أخرى من محور الصادات السالب .

ب) المستقيم ص + ٢ س − ٣ = ٠ ، يقطع ٣/٢ وحده من محور السينات، و ٣ وحدات من محور الصادات .

جـ) المستقيم ص −٢ س = ٦ ، يقطع ٣ وحدات من محور السينات السالب، و ٦ وحدات من محور الصادات .

د) المستقيم س − ٣ ص + ٦ = ٠ ، يقطع ٦ وحدة من محور السينات السالب ،ويقطع ٢ وحده من محور الصادات .

٨ : ٢ ميل المستقيم

عدد الحصص : ثلاث حصص

الأهداف

١- يوجد ميل مستقيم بمعلومية : (أ) قياس زاويته الموجبة ، (ب) ميل مستقيم آخر موازٍ له ، (جـ) ميل مستقيم آخر عمودي عليه .

٢ - يتعرّف على العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين ، أو متعامدين .

٣ - يتعرّف على ميل محور السينات . وميل محور الصادات .

٤ - يوجد ميل مستقيم يمر بنقطتين معلومتين .

٥ - يتعرّف على العلاقة بين مستقيمين في مستوى .

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : تعريف مفهوم ميل مستقيم .

الحصة الثانية : إيجاد ميل مستقيم بمعلومية نقطتين .

الحصة الثالثة : حل تمارين ومسائل .

وعلى المعلم أن يمهد لهذا البندبمراجعة (للنسب المثلثية للزاوية الحادة هـ والزاوية المركبة (هـ + ٩٠°) للتأكد من أن الطلبة على علم تام بها .

التقويم

يتم من خلال المناقشات مناقشة الطلبة في الحصص ، ومتابعة حلولهم للتمارين وللمسائل كواجب صفي أو منزلي ويعطى السؤال التالي أو سؤال مشابه في نهاية الحصة الثالثةكخطوة تقويم :

ليكن أ(٥ ، ٢) ، ب (٠ ، ٣) ، جـ(١٠ ، ١)

١- أوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

٢ - ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

٣ - ميل المستقيم الموازي لـ $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$.

٤ - يبين أن النقاط أ ، ب ، هـ على استقامة واحدة (باستخدام مفهوم الميل) .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) ميل المستقيم الواصل بين (٢ ، ٣) و (٣ ، ٤) ، م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٤ - ٣}{٣ - ٢} = ١$

وبالمثل يمكن إيجاد ميل المستقيمات الواصلة بين أزواج النقاط الآخرى :

ب) $-\frac{٤}{٣}$ ، جـ) $\frac{٢}{٣}$ ، د) -١ ، هـ) $\frac{٢}{(ع + ص)}$

[٢] ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٥ + ٣}{٦ - ٤} = ٤$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{١ - ٥}{٥ - ٦} = ٤$

لإثبات أن النقاط ا ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة نثبت أن ميل $\overleftrightarrow{أ جـ}$ أيضاً يساوي ٤ .

ميل $\overleftrightarrow{أ جـ} = \frac{١ + ٣}{٥ - ٤} = ٤$ ، $\therefore$ النقاط ا ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

[٣] بنفس فكرة السؤال (٢) يمكن إثبات أن النقاط تقع على استقامة واحدة .

[٤] ميل المستقيم بمعلومية (-٢ ، -١) ، (٣ ، ص) = $\frac{ص + ١}{٣ - ٢}$ ،

ميل المستقيم بمعلومية (٣ ، ص) ، (١ ، ٣) = $\frac{٣ - ص}{١ - ٣}$

بما أن الميلين متساويان ينتج أن :

$\frac{ص + ١}{٥} = \frac{٣ - ص}{-٢} \Leftarrow -٢ ص - ٢ = ١٥ - ٥ ص \Leftarrow ٣ ص = ١٧ \Leftarrow ص = \frac{١٧}{٣}$.

[٥] ميل المستقيم الواصل بين (٠ ، ٠) و (٤ ، ١١) $م_١ = \frac{١١ - ٠}{٤ - ٠} = \frac{١١}{٤}$.

ميل المستقيم الواصل بين (٨ ، ٢) ، (-٣ ، ٦) $م_٢ = \frac{٦ - ٢}{-٣ - ٨} = -\frac{٤}{١١}$.

$\because م_١ \times م_٢ = \frac{١١}{٤} \times \frac{-٤}{١١} = -١$ ، $\therefore$ المستقيمان متعامدان .

[٦] أ) ليكن ا (-٢ ، ٣) ، ب) (١ ، ٤) ، جـ) (٢ ، ١) ، ء) (-١ ، ٠)

$|اب| = \sqrt{(١ + ٢)^٢ + (٤ - ٣)^٢} = \sqrt{١٠} = |جـ ء|$ ،

بالمثل سنجد أن : $|اء| = \sqrt{١٠} = |ب جـ|$.

أيضاً ميل $\overleftrightarrow{أب} = م_١ = \frac{٤ - ٣}{١ + ٢} = \frac{١}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب جـ} = م_٢ = \frac{١ - ٤}{٢ - ١} = -٣$.

بما أن $م_١ \times م_٢ = -١$ ،

$\therefore$ ق ∡ ب = ٩٠° . بالمثل ق ∡ ء = ٩٠° .

بما أن كل ضلعين متقابلين متساويان وكل ضلعين متجاورين متعامدان ، الشكل ا ب جـ ء مستطيل .

ب) بالطريقة السابقة نفسها يمكن إثبات أن النقاط (٥ ، –٤) ، (–١١ ، ١٦) ، (–١ ، ٤) ، (–٥ ، ٨) هي رؤوس متوازي أضلاع، ولكنه ليس مستطيلاً .

[٧] ميل المستقيم الواصل بين (١ ، – ٤) ، (٣ ، ١) يساوي $\frac{٥}{٢}$ ،

ميل المستقيم الواصل بين (٣ ، ١) ، (–٢ ، ٣) يساوي $\frac{-٢}{٥}$

حاصل ضرب الميلين يساوي –١ ، هذا يثبت أن النقاط الثلاث هي رؤوس مثلث قائم الزاوية عند(٣ ، ١) .

[٨] ميل المستقيم الواصل بين (– ٤ ، – ٢) و (٢ ، ٥) يساوي $\frac{٧}{٦}$.

ميل المستقيم الواصل بين (٢ ، ٥) و (س ، –١) يساوي $\frac{-٦}{س-٢}$.

∴ $\frac{٧}{٦} \times \frac{-٦}{(س-٢)} = -١$ ، أو ٧ = س – ٢ ، ∴ س = ٩ .

[٩] ليكن إحداثي النقطة ع هو (س ، ص) ؛

∴ $\frac{ص-٠}{س-٠} = -٢ \Longleftarrow$ ص + ٢ س = ٠ . . . . (١)

أيضاً $\frac{ص-٠}{س-٣} = \frac{٣}{٢} \Longleftarrow$ ٢ ص – ٣ س = – ٩ . . . (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على س = $\frac{٩}{٧}$ ، ص = – $\frac{١٨}{٧}$.

[١٠] منتصف $\overleftrightarrow{اب}$ النقطة ء (٢ ، –٣) ، ومنتصف $\overleftrightarrow{بجـ}$ هي النقطة هـ ($\frac{١١}{٢}$ ، –٢)

ميل $\overleftrightarrow{ءهـ}$ الواصل بين منتصفي $\overleftrightarrow{اب}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{٢}{٧}$ ، ميل $\overleftrightarrow{اجـ}$ = $\frac{٧}{٢}$

∴ $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ∥ $\overleftrightarrow{اجـ}$ (الضلع الثالث)

بالطريقةنفسها يمكن حل المسالة في حالة اختيار أضلاع أخرى .

٨ : ٣ معادلة المستقيم

عدد الحصص : خمس حصص

الأهداف

١ – يتعرّف على المعادلة العامه للمستقيم .

٢ – يستنتج معادلة مستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات .

٣ – يتعرّف على معادلة المحور الصادي ومعادلات المستقيمات الموازية له .

٤ – يتعرّف على معادلة المحور السيني ومعادلات المستقيمات الموازية له .

٥ – يستنتج معادلة مستقيم بمعلومية ميله ونقطة واقعة عليه .

٦ – يستنتج معادلة مستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين عليه .

٧ – يستنتج معادلة مستقيم بمعلومية ما يقطعه من محوري الاحداثيات .

٨ – يميّز الشكل البياني للمستقيم من خلال معادلته .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : إيجاد معادلة مستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات .

الحصة الثانية : إيجاد معادلة مستقيم بمعلومية ميله ونقطة واقعة عليه .

الحصة الثالثة : إيجاد معادلة مستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين عليه .

الحصة الرابعة : إيجاد معادلة مستقيم بمعلومية ما يقطعه من محوري الاحداثيات.

الحصة الخامسة : حل تمارين ومسائل .

وعلى المعلم في البدء أن يبين العلاقة بين المعادلات من الدرجة الأولى بمتغير كمدخل لاستنتاج الصور المختلفة لمعادلة المستقيم .

ويمكن للمعلم إعطاء بعض التمارين والمسائل من تلك الموجودة في كتاب الطالب أو كتاب التمارين بعد كل حصة كنوع من التقييم المستمر للبند .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال مشاركة الطلبة ومناقشتهم عند الإجابة على أسئلة المعلم وتوضيح الأمثلة وذلك من خلال متابعة حلّهم للواجب الصفي والمنزلي ويُعطى سؤال كالتالي في نهاية الحصة الخامسة كخطوة تقويم.

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢،٣) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين (١ ، −٥) ، (−٣ ، ١) .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) هـ = ٠ ، جـ = ٢ ، المعادلة ص = ٢ .   ب) هـ = ١ ؛ جـ = −١ ، المعادلة ص = س −١ .

جـ) هـ غير معرّف، جـ = صفر ، المعادلة س = ٢,٥ .   د) هـ = −٢/٣ ، جـ = ٢ ، المعادلة ص = −٢/٣ س + ٢ .

[٢] أ) ٢ س − ص + ٤ = ٠   ب) ٤ ص = ٧ س + ٨

جـ) س + ص + ٣ = ٠   د) ص = ١ ، (هـ) ص = −٣

و) ٤ س + ٢ ص + ٢ ص + ٨ = ٠

[٣] أ) ميل المستقيم ص = س يساوي ١ . فيكون

معادلة العمودي : ص − ٠ = −١ (س + ٧) ⟸ س + ص − ٧ = ٠

معادلة الموازي : ص − ٠ = ١ (س + ٧) ⟸ س − ص + ٧ = ٠

بالطريقة نفسها تجد أن :

ب) العمودي : ٨س − ٧ ص − ٦٢ = ٠ ، الموازي : ٧ س + ٨ ص − ٢٦ = ٠

جـ) العمودي : ب س − أ ص + ٥أ = ٠ ، الموازي : أ س + ب ص − ٥ ب = ٠

[٤] أ) بكتابة المعادلة على الصورة ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٣ نجد
ميل المستقيم يساوي $-\frac{١}{٢}$ ، وبكتابة المعادلة على الصورة $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٣} = ١$ ، نجد ما يقطعه من محور السينات ا = ٦ ، وما يقطعه من محور الصادات ب = ٣ .

وبالمثل يكون :

ب) م = $\frac{١}{٣}$ ، ا = −١١ ، ب = $\frac{١١}{٣}$.   جـ) م = $\frac{١٢}{٥}$ ، ا = $\frac{١٧}{١٢}$ ب = $-\frac{١٧}{٥}$

د) م = $\frac{١٤}{٣}$ ، ا = ($\frac{٤+جـ}{٧}$) ، ب = $\frac{٢}{٣}$ (٤ + جـ)

[٥] ميل المستقيم المطلوب هو $\frac{١}{٢}$ ، ونقطة منتصف القطعة هي (٢ ، −٢) .

المعادلة المطلوبة هي ص + ٢ = $\frac{١}{٢}$ (س − ٢) ⟸ س − ٢ ص − ٦ = ٠ .

[٦] بالطريقة نفسها كما في السؤال (٥) نجد أن المعادلة المطلوبة هي س + ص − ٩ = ٠ .

[٧] قطرا المربع متعامدان وينصف كل منهما الآخر . ، كما في السؤال (٦) نجد أن معادلة $\overleftrightarrow{ب ء}$ هي
س + ص − ٩ = ٠ .

[٨] ليكن ما يقطعه من محور السينات ا ، فيكون ما يقطعه من محور الصادات (٧ − ا) ، إذن معادلة
المستقيم $\frac{س}{ا} + \frac{ص}{(٧-ا)}$ = ١ ، أو (٧ − ا) س + ا ص = ا (٧ − ا) . . . (١)
النقطة (−٣ ، ٨) تحقق المعادلة ١٠) فنجد − ٢١ + ٣ا + ٨ا = ٧ ا − ا^٢
أو ا^٢ + ١٤ ا − ٢١ = ٠ ا = ٣ ، ا = −٧ (مرفوض)
∴ معادلة المستقيم هي : $\frac{س}{٣}$ + $\frac{ص}{٤}$ = ١ ، أو ٤ س + ٣ ص − ١٢ = ٠

[٩] أ) س + ٢ ص + ١ = ٠ ،

ب) ٢ س − ص − ٢ = ٠ (انظر حل المسألة (٥))

جـ) بمعلومية ا (٣ ، −٢) ونقطة منتصف $\overleftrightarrow{ب جـ}$ (٠ ، $\frac{٥}{٢}$) ، تكون المعادلة ٣ س + ٢ ص −٥ = ٠

د) بمعلومية ا (٣ ، −٢) وميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٥}{٢}$ حيث يكون ميل العمودي $-\frac{٢}{٥}$.

المعادلة المطلوبة هي ٢ س + ٥ ص + ٤ = ٠ .

٨ : ٤ بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يتعرف على قانون بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

٢ – يستخدم قانون البُعد في تطبيقات مختلفة، مثل إثبات علاقات أو إيجاد مساحة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي .

الحصة الأولى : استخدام القانون بصورة أساسية في إيجاد طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم .

الحصة الثانية : حل تمارين ومسائل .

وعلى المعلم أن يلاحظ أن استنتاج القانون يمكن أن يعطى للطلبة إذا كان هناك متسع من الوقت أو أن لدى الطلبة رغبة في مزيد من المعرفة حتى ولو كان خلال النشاط اللاصفي، ولكنه على أي حال ليس مطلوباً وقد وضع في الكتاب للإطلاع الذاتي .

التقويم

يتم التقويم بنائياً كالعادة ، تختتم الحصة الثانية بسؤال كالتالي :

أوجد مساحة المثلث الذي رؤسه أ (١ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (−١ ، ٢) .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) بالتعويض في القانون عن $س_١ = ١$ ، $ص_١ = ١$ ، أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = −٥ نجد أن :

$$|\text{ف}| = \frac{|٢ \times ١ + ٣ \times ١ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٩}} = \frac{٠}{\sqrt{١٣}} = ٠$$

النقطة (١ ، ١) تقع على المستقيم : ٢ س + ٣ ص − ٥ = ٠ ، وبالمثل نجد أن :

ب) $٢\sqrt{٢}$ ، حـ) $\frac{٨}{٥}\sqrt{٥}$ ، د) $\frac{٤}{١٣}\sqrt{١٣}$ ، (هـ) $\frac{١}{١٠}$.

[٢] بنفس فكرة السؤال (١) نجد : ١ ، $\frac{٧}{٥}$ ، $\frac{٩}{٥}$ ، صفر .

[٣] نوجد أولاً معادلات الأضلاع أب ، أجـ ، ب جـ وهي على التوالي ٣ س − ٤ص + ١١ = ٠ ، ص − ٢ = ٠ ، س − ص + ٢ = ٠ ، وتكون أطوال الارتفاعات هي : $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ٣ ، $\frac{٣}{٥}$.

[٤] أ) ليكن أ (٤ ، ٤) ، ب (٨ ، –١٢) ، جـ (١٢ ، ١٠) .

طول القاعدة أ جـ = ١٠ ، معادلة $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ هي ٣ س – ٤ ص + ٤ = ٠ .

طول الارتفاع النازل من ب = $\frac{\text{٧٦}}{\text{٥}}$ ، $\therefore$ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × القاعدة × الارتفاع .

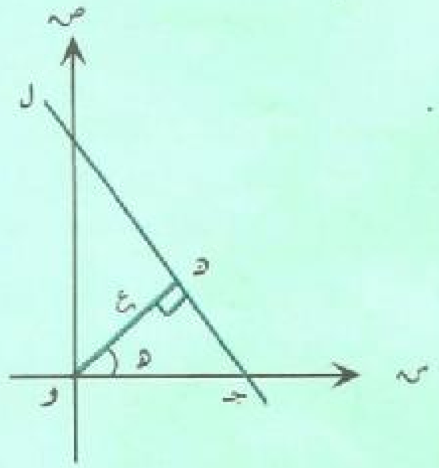
= $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ١٠ × $\frac{\text{٧٦}}{\text{٥}}$ = ٧٦ وحدة مربعة

بالطريقة نفسها يمكن إيجاد مساحة متوازي الأضلاع وشبه المنحرف .

ب) ٦٦ وحدة مربعة جـ) $\frac{\text{٧}}{\text{٢}}\sqrt{\text{٥٨}}$.

[٥] النقطة (٠ ، –٥) تقع على المستقيم س + ٢ ص + ١٠ = ٠ .

$\therefore$ المسافة العمودية بين المستقيمين هي : | ف | = $\frac{|\text{٠ + ٢ × –٥ + ٤}|}{\sqrt{\text{١ + ٤}}}$ = $\frac{\text{٦}}{\sqrt{\text{٥}}}$ = $\frac{\text{٦}}{\text{٥}}\sqrt{\text{٥}}$



[٦] انظر الشكل : الجزء المقطوع من محور السينات | و جـ | = $\frac{\text{ع}}{\text{جتا هـ}}$.

والجزء المقطوع من محور الصادات | و د | = $\frac{\text{ع}}{\text{جا هـ}}$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوبة ، $\frac{\text{س}}{\left(\frac{\text{ع}}{\text{جتا هـ}}\right)}$ + $\frac{\text{س}}{\left(\frac{\text{ع}}{\text{جا هـ}}\right)}$

أو $\frac{\text{س جتاهـ}}{\text{ع}}$ + $\frac{\text{ص جاهـ}}{\text{ع}}$ = ١

أو س جتاهـ + ص جاهـ = ع .

٨ : ٥ الانعكاس تحليلياً

عدد الحصص : أربع حصص

الأهداف

١ – يحدّد إحداثي صورة نقطة تحت تأثير انعكاس معين ، والعكس .

٢ – يحدّد العلاقة بين إحداثي نقطة وإحداثي صورتها بالانعكاس .

٣ – يوجد معادلة صورة مستقيم معلوم تحت تأثير انعكاس معين ، والعكس .

٤– يميّز متى يكون التحويل الهندسي انعكاساً .

٥– يرسم صورة شكل هندسي ما تحت تأثير انعكاس معين .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة لتعريف الانعكاس كتطبيق، وإيجاد إحداثي صورة نقطة معلومة بالانعكاس على أحد محوري الإحداثيات ، ثم الخواص الأساسية للانعكاس التي سيستند عليها استنتاج العلاقة بين إحداثي نقطة وإحداثي صورتها والعكس؛ مع اعطاء فكرة عن استنتاج هذه العلاقة .

الحصتان الثانية والثالثة :الانعكاس تحليلياً .

الحصة الرابعة : تمارين ومسائل .

ويجب التنويه هنا إلى إمكانية حل التمارين والمسائل بالتعويض المباشر في القانون، أو اتباع خطوات المعالجة التحليلية لإيجاد المطلوب .

كذلك يجب على المعلم أن ينفذ الحصة الأولى بمعية الطلاب، لأهميتها في سياق البند .

التقويم

يُعطى السؤال التالي نهاية الحصة الرابعة كخطوة تقويم :

ليكن أ(-١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ(٢ ، ٠) . أوجد :

١) صورة النقطة أ بالإنعكاس في $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

٢) صورة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) بالتعويض في القانون عن $س_١$ = ١ ، $ص_١$ = ٣ ، أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = -١ تكون صورة النقطة (١ ، ٣) هي النقطة ($-\frac{٧}{٥}$ ، $-\frac{٩}{٥}$) .

بالمثل نجد أن :

ب) ($\frac{١٦}{٥}$ ، $\frac{-١٧}{٥}$) ، جـ) (٥ ، -٢) ، د) ($\frac{١١}{٥}$ ، $\frac{١٧}{٥}$) .

[٢] أ) بالتعويض في القانون عن $س_١$ = ٢ $ص_١$ = ٣ ، أ = ٠ ، ب = ١ ، جـ = -١ تكون صورة النقطة (٢ ، ٣) هي النقطة (٢ ، -١) .

بالمثل نجد أن :

ب) (١ ، ٤) ، جـ) (-٢ ، ٣) ، د) (٠ ، -٣) .

[٣] أ) النقطتان (٠ ، ٠) و (٠ ، ١) واقعتان على المستقيم س = ٠ ، فتكون صورتهما بالانعكاس في المستقيم س + ٢ ص -٣ = ٠ هما النقطتان ($\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{١٢}{٥}$) و ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٩}{٥}$) على التوالي .

∴ صورة المستقيم س = ٠ هو المستقيم ، $\frac{ص - \frac{١٢}{٥}}{س - \frac{٦}{٥}} = \frac{\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}}{\frac{٤}{٥} - \frac{٦}{٥}} = \frac{٣}{٢}$

٢ (٥ ص - ١٢) = ٣ (٥س - ٦) ، أو ١٥ س - ١٠ ص + ٦ = ٠ .

بالمثل نجد أن :

ب) (٠، ٠) تقع على المستقيم س = ص ، صورتها ($\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{١٢}{٥}$) .

كذلك (١ ، ١) صورتها (١ ، ١) فتكون معادلة صورة المستقيم هي :

$$\frac{ص - ١}{س - ١} = \frac{\frac{١٢}{٥} - ١}{\frac{٦}{٥} - ١} = ٧ \text{ ، أو } ص - ١ = ٧ س - ٧ \Leftarrow ٧ س - ص - ٦ = ٠$$

جـ) ٧ س - ص - ١١ = ٠ ، د) س - ٣ ص = ٠

[٤] بالتعويض في القانون عن : س َ = س َ ، ص َ = ص ، أ = ٠ ، ب = ١ ، جـ = ٠ نحصل على المطلوب.

[٥] النقطة (٠ ، ١) تقع على المستقيم ٢س + ص - ١ = ٠ ، وهي صورة للنقطة ($\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٩}{٥}$)

كذلك ($\frac{١}{٢}$ ، ٠) تقع على المستقيم وهي صورة ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢) .

∴ معادلة المستقيم هي : ٢س - ١١ ص + ١٩ = ٠

[٦] أ) ميل $\overleftrightarrow{ءءَ}$ = صفر . نقطة منتصف $\overleftrightarrow{ءءَ}$ هي (٢ ، ١) ، ∴ ميل محور الانعكاس غير معرّف

وهذا يعني أن محور الانعكاس موازٍ لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، ١) فتكون معادلته س = ٢ .

ب) ميل $\overleftrightarrow{ءءَ}$ = ١ فكون ميل محور الانعكاس = -١ . نقطة منتصف $\overleftrightarrow{ءءَ}$ هي (١ ، ٠)

معادلة محور الانعكاس : (ص - ٠) = - ١ (س - ١) ، أو س + ص - ١ = ٠

جـ) معادلة محور الانعكاس هي : س + ٢ ص - ١ = ٠ .

[٧] بالطريقة نفسها كما ورد في سؤال (٤)، يمكن إثبات أن صورة (س ، ص) بالانعكاس في المستقيم ص = س

هي صورة (س ، ص) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي (ص ، س) ،

وعليه تكون صورة (٢ ، ١) هي (١ ، ٢) .

[٨] تستخدم الطريقة نفسها كما في سؤال (٤)، وسؤال (٧) .

[٩] كما ورد في مسألة (٣) نجد :

أ) س - ص + ٢ = ٠ ب) ٢ س - ص - ٢ = ٠ جـ) ٢ س - ص + ٦ = ٠

د) ١٤ س - ص + ٨ = ٠ هـ) س - ٢ ص + ٢ = ٠ و) س - ٢ ص - ٢ = ٠

ز) ١٠ س - ٥٥ ص + ٦٤ = ٠ .

[١٠] صورة المثلث هي عبارة عن مثلث رؤوسه النقاط (- ١ ، - ٤) ، (١ ، $\frac{٢}{٥}$) ، (- $\frac{٢٧}{٥}$ ، $\frac{٩}{٥}$) .

[١١] صورة المستطيل هي عبارة عن مستطيل رؤوسه النقاط (- ٢ ، ٣) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ٢) .

٨ : ٦ الانسحاب تحليلياً

عدد الحصص : ثلاث حصص

الأهداف

١ – يحدّد إحداثي صورة نقطة تحت تأثير انسحاب معين ، والعكس .

٢ – يحدّد العلاقة بين إحداثي نقطة وإحداثي صورتها بالانسحاب .

٣ – يوجد معادلة صورة مستقيم معلوم تحت تأثير انسحاب معين ، والعكس .

٤– يميّز متى يكون التحويل الهندسي انسحاباً.

٥– يرسم صورة شكل هندسي معطى تحت تأثير انسحاب معين .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة تعريف الانسحاب ،وخواصة ومن ثم معالجتة تحليلياً .

الحصة الثانية : مناقشة الأمثلة .

الحصة الثالثة : حل تمارين ومسائل .

التقويم

يتم تكوينياً من خلال المناقشات ومشاركة الطلبة في الحصص الدراسية ، ومتابعة حلهم للواجبات الصفية والمنزلية ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى سؤال كالتالي :

ليكن أ (–١ ، –٢) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (–٢ ، ٤) أوجد :

١) صورة النقطة أ بالانسحاب (٢ ، ١) .

٢) صورة $\overline{\text{أجـ}}$ بالانسحاب (٣ ، ٥) .

٣) صورة المثلث أ ب جـ بالانسحاب (٤ ، ٣) .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) (٦ ، ١) . ب) (٠ ، ٣) ، جـ) (١ ، ٤) ، ء) (–٢ ، –٢) .

[٢] أ) (٢ ، ٦) . ب) (–٤ ، ٨) ، جـ) (٢ ، ٠) ، ء) (–٥ ، –٢) .

[٣] أ) ليكن الانسحاب (أ ، ب) . ، ∴ (٤ ، ١) = (٢ + أ ، ٣ + ب)

∴ ٢ + أ = ٤ ومنه أ = ٢ . كذلك ٣ + ب = ١ ، ومنه ب = –٢ . الانسحاب هو (٢ ، –٢)

بالمثل نجد أن :

ب) (٢ ، ٢) . جـ) (٥ ، ٠) . ، ء) (٠ ، –٤) .

[٤] أ) النقطة (٠ ، ٠) تقع على المستقيم س = ٠ وصورتها (ـ ١ ، ٢) .

النقطة (٠ ، ١) تقع على المستقيم س = ٠ وصورتها (ـ ١ ، ٣) .

إذن ميل صورة المستقيم مواز لمحور الصادات، ويقطع وحدة واحدة من محور السينات السالب .

وعليه فإن معادلة صورة المستقيم هي : س = ـ ١ .

بالمثل نجد :

ب) ص = ٢   جـ) س = أ ـ ١   ء) ص = ب + ٢

هـ) ٢ س ـ ص + ٤ = ٠   و) س + ص ـ ١ = ٠   ز) ٢ س + ٣ ص ـ ٦ = ٠

[٥] أ) النقطة (٠ ، ٢)تقع على المستقيم ص ـ ٢ س ـ ٢ = ٠ ، وهي صورة للنقطة (٢ ، ٥) .

كذلك (ـ ١ ، ٠) صورة للنقطة (١ ، ٣) . وعليه تكون معادلة المستقيم هي :

$\frac{\text{ص}-5}{\text{س}-2} = \frac{3-5}{1-2} = 2$ أو ٢ س ـ ص + ١ = ٠ .

وبالمثل نجد أن :

ب) س ـ ص + ١ = ٠   جـ) س ـ ص + ٣ = ٠   ء) س ـ ٢ ص + ٦ = ٠

[٦] صورة المثلث الذي رؤوسه النقاط (١ ، ٣) ، (٧ ، ٥) . (٢ ، ٠) بانسحاب (٣ ، ـ٢) هي مثلث رؤوسه النقاط (٤ ، ١) ، (١٠ ، ٣) (٥ ، ـ٢) .

[٧] الانسحاب هو (ـ ٤ ، ٥) . وصورة النقطة (ـ ١ ، ٥) هي النقطة (ـ ٥ ، ١٠) .

[٨] الانسحاب هو (٧ ، ٤) . والنقطة هـ هي (ـ ١٢ ، ٢) .

٨ : ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص: حصة واحدة.

الهدف

يهدف هذا البند إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في حصة واحدة بعد أن يكون المعلم قد اعطى الطالب فكرة عن الاختبار في كتاب التمارين كتدريب ، بعد ذلك يقدم المعلم الاختبار الذي في دليل المعلم كاختبار للوحدة خلال حصة . أو يقدم اختبار مشابه له شريطة مراعاة أهداف الوحدة .

الجدول التالي يبيّن رقم الهدف ورقم السؤال المقابل له .

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ – ٨
٢	٩ – ١٥

كما ترصد أخطاء الطلاب بعد تصحيح أوراق الإجابة، ومن خلالها يتم التعرف على الأهداف التي لم تتحقق لدى الطلاب حتى يتم معالجتها لاحقاً.

الاختبار

أجب عن السؤالين التاليين:

السؤال الأول:

لتكن أ(١ ، ٢) ، ب (٣ ، –١) ، جـ(٤ ، ١) ثلاث نقاط أوجد :

أ) ميل المستقيم الواصل بين النقطتين أ ، ب .

ب) معادلة المستقيم المار بالنقطة جـ وعمودي على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

جـ) ما يقطعه $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ من محوري الاحداثيات .

د) طول العمود النازل من جـ على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

السؤال الثاني :

أوجد صورة المستقيم ، ٢ س – ص + ١ = .

أ) بالإنسحاب (٣ ، –١) .

ب) بالإنعكاس في المستقيم ٣ ص – س = .

الوحدة التاسعة

المتجهات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٩ – ١	المتجهات	٢
٩ – ٢	العمليات على المتجهات	٤
٩ – ٣	توازي وتعامد متجهين	٢
٩ – ٤	متجه الوحدة	١
٩ – ٥	الضرب الداخلي لمتجهين	٣
٩ – ٦	المعادلة المتجهة	٣
٩ – ٧	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١٦

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يتعرّف على المتجه .

٢ – يوجد طول متجه وزاويته .

٣ – يوجد المجموع والفرق المتجهي .

٤ – يضرب متجه بعدد حقيقي .

٥ – يذكر شروط توازي وتعامد متجهين .

٦ – يعرّف متجه الوحدة ، ويمثل أي متجه بدلالته .

٧ – يوجد حاصل ضرب متجهين عددياً (داخلياً) .

٨ – يوجد المعادلة المتجهة لخط مستقيم .

المقدمة

لمحة تاريخية

موضوع المتجهات وتحليلها من الموضوعات الحديثة ولكن مدلول الاتجاه فهوقديم جداً ، حيث عرفت الجهات الرئيسية والفرعية؛ وقديماً كانوا يحدّدون اتجاههم في الليل عن طريق النجوم، والمسلمون في صلاتهم يتوجهون نحو الكعبة المشرفة حيث قال تعالى : ﴿فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ﴾ [البقرة: ١٤٤] وكأنك عندما تتوجه بإتجاه القبلة تتخيل أو تصنع أو ترسم خطاً مستقيماً بداية موقعك ونهايتة الكعبة المشرفة ، ويجب عليك أن تتقيد بهذا الإتجاه ، ومن هنا جاء مفهوم متجه مقيد . بدأ تحليل المتجهات على يد العالم جيبس Gibbs (١٧٣٩ – ١٨٠٣م)، وبعده جاء العالم هادامان(١٨٦٥–١٩٦٣م) فقد قدّم كلمة متجه على أنه يحمل كل نقطة هندسية مسافة ثابتة في اتجاه ثابت . أما واضع رموز المتجهات فهو هيفيسيد Heaviside (١٨٥٠ – ١٩٢٥م)

وأصبحت المتجهات الآن جزءاً أساسياً للكثير من العلوم لا يمكن الاستغناء عنها .

خلفية علمية

عبر التاريخ تطورت كلمة اتجاه إلى علم مستقل بذاته أطلق عليه اسم هندسة المتجهات أو تحليل المتجهات، وأصبح الآن مرجعاً أساسياً ومفيداً للكثير من العلوم، فقد أمتدت المتجهات وهندسة المتجهات عبر التاريخ: واصبح لدينا القدرة علي التمييز بين الكميات العددية والتي تتعين فقط بذكر مقدارها وبين الكميات المتجهة والتي تتعين بمعرفة مقدارها واتجاهها . افادتنا هندسة المتجهات في كيفية تحليل القوى والإزاحات ، أما المشتغلون في مجال الهندسة التحليلية، فقد تبين من التجربة أن الاتجاه الحديث في تدريس المفاهيم الأولية في الهندسة التحليلية خاصة تلك المفاهيم المرتبطة بالخط المستقيم في المستوى أو في الفراغ الثلاثي عن طريق المتجهات لان ذلك يؤدي إلى سهولة في الفهم والاستيعاب ، فللمتجهات دوركبير في الهندسة المستوية والفراغية، وخصوصاً في براهين معظم المبرهنات والحقائق ومن أمثلة ذلك ، استخدام المتجهات والعمليات عليها في برهان مبرهنة فيثاغورث وغيرها من المبرهنات وفي حلول معظم التمارين وإثبات معظم القوانين .

أما في حساب المثلثات فتستخدم المتجهات في برهنة معظم المتطابقات والقوانين الهامة، مثلاً استخدام المتجهات في إثبات أن : جتا (أ–ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب .

وكذلك تستخدم المتجهات في إيجاد طول ضلع مثلث بدلالة طولي الضلعين الآخرين وزاويتهما .

ومن تطبيقات المتجهات أيضاً استنتاج المعادلات الوسيطة لخط مستقيم، وكذلك استنتاج معادلته الجبرية وذلك عن طريق إيجاد معادلته المتجهه وكذلك تستخدم المتجهات في اثبات توازي و تعامد مستقيمين .

الرموز المستخدمة في هذه الوحدة

م	الرمز	مدلوله
١	$\overrightarrow{\text{أب}}$	متجه
٢	$\overrightarrow{\text{ف}} = (\text{س} ، \text{ص})$	المتجه القياسي
٣	$\overrightarrow{\text{٠}}$	المتجه الصفرى
٤	$//$	يوازي
٥	$\perp$	عمودي على
٦	$\cong$	يطابق
٧	$\lvert \overrightarrow{\text{ف}} \rvert$	طول متجه
٨	$\overrightarrow{\text{ف}}^{*}$	متجه الوحدة باتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ف}}$
٩	$\overrightarrow{\text{س}} = (٠ ، ١)$	متجه الوحدة في اتجاه المحور السيني الموجب
١٠	$\overrightarrow{\text{ص}} = (١ ، ٠)$	متجه الوحدة في اتجاه المحور الصادي الموجب
١١	$\overrightarrow{\text{ف}}_{١} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}_{٢}$	ضرب عددي (داخلي)
١٢	$\text{ك} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$	ضرب متجه بعدد حقيقي

المصطلحات

متجه	Vector	تعريف المتّجه	Pivergence of a vector
متّجه قياسي	Position vector	تحليل متّجهي	Vector analysis
متّجه صغرى	Null vector	حاصل الضرب الداخلي	Scolar Product
متّجه الوحدة	Unit vector	(العددي)	Dot - Product
محصلة	Resultant	ضرب عددي	Croos- Product
إحداثية	Rectaongular coordinates	ضرب متّجهي	Equal vectors
كمية غير متّجهة	Scolar	تساوي (تطابق) متّجهين	Negative of vector
مركبات متّجه	Components of a vector	متّجه سالب	Addition of vectors
قياس متّجه	Absoulte value of a vector	جمع المتّجهات	Difference of vectors
زاوية المتّجه	Argument of a vector	فرق المتّجهات	

توجيهات طرائقية عامة

موضوع المتجهات من الموضوعات الجديدة على الطالب ولذلك يحتاج إلى اهتمام كبير من قبل المدرس أثناء تقديم هذه المادة، وقد أوردناها في ستة بنود وبصورة مبسطة، لكي يستطيع المدرس توصيل المعلومة إلى ذهن الطالب بشكل يسير وسريع .

١ – على المدرس أن يبدأ بالتمهيد للمضوع عن طريق مراجعة للموضوع السابقة والتي سيستفيد منها الطالب في موضوع المتجهات، مثل : التحويلات الهندسية وطول قطعة مستقيمة و المستقيم والشعاع .

٢ – ذكر بعض المفاهيم الفيزيائية والتي تمثل متجهات مثل القوة والعجلة والإزاحة والسرعة وغيرها، ويعرف الطالب بأن هذه الكميات تتحدّد بالمقدار والاتجاه وبالتالي تسمى متجهات، ويناظرها في الهندسة القطعة المستقيمة الموجهة والتي تسمى بالمتجه ، والذي يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{أب}}$ أو $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ حيث تسمى أ النقطة الابتدائية ، ب النقطة النهائية .

٣ – تُعطى المتجهات أهمية خاصة من قبل المدرس لانه موضوع جديد لم يتطرق إليه الطالب من قبل ، مع التوضيح بأهمية المتجهات سواء في مجال الرياضيات أو في مجال الفيزياء .

٤ – على المدرس أن يلفت انتباه طلابه إلى بعض الأخطاء الشائعة التي يمكن الوقوع فيها ويوضحها بأمثلة، ومن أمثلة الأخطاء الشائعة :

إن $\overrightarrow{\text{أب}} \neq \overrightarrow{\text{ب أ}}$ إن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أ ء}}$ ليس جمع مقادير جبرية

إن $|\overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2| \neq |\overrightarrow{\text{ق}}_1| + |\overrightarrow{\text{ق}}_2|$ إن أ(س ، ص) نقطة في المستوى ؛

بينما $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) متجه قياسي . بدايته مبدأ الأحداثيات و (٠ ، ٠) ونهايتة النقطة (س ، ص) .

– التمييز بين المتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ والشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$

– التساير ليس معناه التطابق أو التكافؤ :

٥ – على المدرس أن يشرك طلابه في الحل وتشجيعهم على المناقشة داخل الصف مما سيحفزهم على التحضير المسبق للدرس .

٦ – متابعة حل التدريبات الصفية وكذلك الواجبات المنزلية مع الاهتمام بالأشكال والرسومات .

٧ – عند الانتهاء من تدريس أي بند على المدرس أن يعطى بعض التمارين على ذلك البند مع إشراك الطلاب في عملية الحل لمعرفة مدى تحقق اهداف ذلك البند .

٨ – عند الانتهاء من تدريس الوحدة يقوم المدرس وبمشاركة الطلاب بعمل تلخيص لجميع قوانين الوحدة ، وحل عدد من التمارين العامه .

٩ – على المدرس عمل اختبار يشمل جميع بنود الوحدة كما أعطى لذلك نموذج في كتاب التمارين وآخر في دليل المعلم .

١٠ – على المدرس أن يطّلع على إرشادات وحلول تمارين الكتاب والتي سنوردها بالتفصيل لكل بند ، ولا ينسى التركيز على تطبيقات المتجهات وربطها بما مضى في السنوات السابقة وما سيأتي فيما بعد .

٩ : ١ المتجهات

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يعرّف المتجه .

٢ – يمثّل المتجهات في المستوى .

٣ – يعرّف المتجه القياسي

٤ – يجد طول متجه وميله واتجاهه .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : المتجه وتمثيله (بيانياً في المستوى) – المتجه القياسي وتمثيله .

الحصة الثانية : طول المتجه – ميل المتجه – تحديد الزاوية التي يصنعهاالمتجه مع محورالسينات الموجب مع حل التمارين صفية ومنزلية .

التقويم

يُعطى سؤال مشابه للتالي في نهاية الحصة الثانية:

أوجد طول وميل المتّجه $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ حيث ب (٢ ، ٥) ، جـ(–١ ، ١)

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) الطول – الاتجاه ، ب) الطول – الاتجاه

جـ) ب – أ = ء – جـ ، ء) $|\overrightarrow{\text{ق}}| = \sqrt{٥}$ ، ميل $\overrightarrow{\text{ق}} = \frac{١}{٢}$ هـ) ك = ٦

[٢] أ) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = (٢,٢)، $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ = (–٢، –٢)، $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ = (٥ ، ٨)، $|\overrightarrow{\text{أ ب}}| = ٢\sqrt{٢}$ ، $|\overrightarrow{\text{جـ ء}}| = ٢\sqrt{٢}$ ،

$|\overrightarrow{\text{ء ب}}| = \sqrt{٨٩}$

ب) ظا هـ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ⇐ هـ = ٤٥°

[٣] أولاً : $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = ب – أ = (٣ ، ١٥) ⇐ (٣ ، ك – ١) = (٣، ١٥) ⇐ ك – ١ = ١٥ ⇐ ك = ١٦

ثانياً : $|\overrightarrow{\text{أ ب}}| = \sqrt{٩ + (\text{ك} - ١)^٢}$ = ٥ بالتربيع، ٩ + (ك – ١)^٢ = ٢٥ ⇐ (ك – ١)^٢ = ١٦ ⇐ ك – ١ = ± ٤

إما ك = ٥ أو ك = –٣

ثالثاً : ميل $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{ك} - ١}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ ⇐ ك = ٢

٩ : ٢ العمليات على المتّجهات

عدد الحصص : أربع حصص

الأهداف

١ – يوجد مجموع متّجهين والفرق بينهما هندسياً وجبرياً .

٢ – يذكر خواص جمع المتجهات .

٣ – يضرب متّجه بعدد حقيقي .

٤ – يذكر خواص ضرب متّجه بعدد حقيقي .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : جمع وطرح متّجهين هندسياً مع الأمثلة والخواص .

الحصة الثانية : جمع وطرح متّجهين جبرياً مع الأمثلة .

الحصة الثالثة : ضرب متّجه بعدد حقيقي مع الأمثلة والخواص .

الحصة الرابعة : حل تمارين ومسائل .

التقويم

يُعطى سؤال كالتالي في نهاية الحصة الرابعة:

اذا كان أ(٣، ٥) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ(–١ ، ٦) ، ء(١ ، ٠)

فأوجد ناتج ما يلي:

١) $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ + $\overleftarrow{\text{ءب}}$ ٢) ٢ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{جـء}}$ – ٥ $\overleftarrow{\text{بء}}$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ١) X التصويب $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ + $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$ = (٤ ، ٢) ٢) X التصويب ك = ٢

٣) ✓ ٤) X التصويب ك = –١

٥) X التصويب $\overleftarrow{٠}$

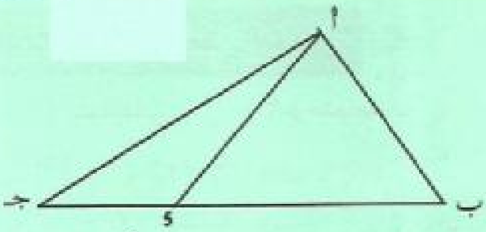
[٢] ١) (٤ ، ٢٤) ، ٢) (–٤ ، –٨) ٣) ٢ $\sqrt{١٠}$

[٣] ك = – ٢

[٤] ١) $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٢ ، ٢) ، |$\overleftarrow{\text{ف}}$| = ٢ $\sqrt{٢}$ ، هـ = ٤٥°

[٥] ١) ء = (١ ، ٥) ، ٢) ء($\frac{-٧}{٢}$ ، – ٥) ، ٣) ء(٢ ، ١)

[٦] نرسم المثلث أ ب جـ [شكل (٩ – ١)]



شكل (٩ – ١)

١) ∵ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

⇐ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ + $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

، ∵ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

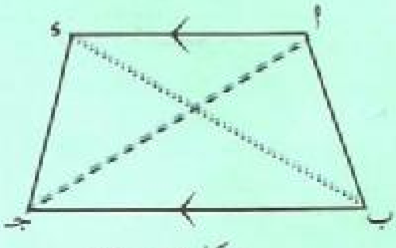
∴ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

٢) ∵ $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$

[٧] نرسم شبه المنحرف أ ب ج ء [شكل (٩ – ٢)]

الطرف الأيمن = $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ($\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$) + ($\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ء}}$) = $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

= $\overleftarrow{\text{٠}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = الطرف الأيسر .



شكل (٩ – ٢)

حل آخر :

يحلّل المتجهين $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ثم الجمع .

[٨] ١) $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ٢) $\overleftarrow{\text{٠}}$

٩ : ٣ توازي وتعامد متجهين

عدد الحصص : حصتان

الأهداف

١ – يتعرّف على شروط توازي متجهين ، ويطبقها .

٢ – يتعرّف على شروط تعامد متجهين ، ويطبقها .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : التوازي والتعامد لمتجهين مع الأمثلة .

الحصة الثانية : يحل التمارين والمسائل .

التقويم

يُعطى في نهاية الحصة الثانية سؤال كالتالي :

إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ = (– ٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = (٢ ، –٣) ، $\overleftarrow{\text{ف}}_3$ = (٣ ، ٢)

فاثبت أن : أ) $\overleftarrow{\text{ف}}_1 \parallel \overleftarrow{\text{ف}}_2$ ، ب) $\overleftarrow{\text{ف}}_3 \perp \overleftarrow{\text{ف}}_2$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ١) متوازيان ، ٢) متعامدان ، ٣) متوازيان ، ٤) ص = ٢ ، ص = $\frac{-٩}{٢}$

[٢] $\overleftarrow{\text{اء}}$ = ء − ا = (−١٠ ، ٤) ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = (−٥ ، ٢) $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = (٢ ، ٥)

١) $\overleftarrow{\text{اء}}$ // $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ لأن ، −١٠ × ٢ − ٤ × −٥ = −٢٠ + ٢٠ = ٠

٢) $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ لأن ، −٥ × ٢ + ٢ × ٥ = −١٠ + ١٠ = ٠

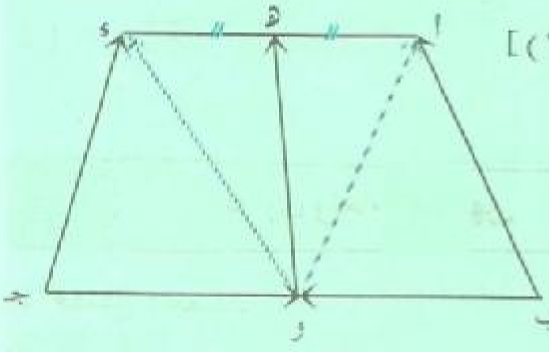
[٣] $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ = (٢ ، −٢) ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = (−٢ ، −٢) ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = (−٢ ، ٢) $\overleftarrow{\text{ء ا}}$ = (٢ ، ٢)

نجد أن : $|\overleftarrow{\text{ا ب}}|$ = $|\overleftarrow{\text{ب جـ}}|$ = $|\overleftarrow{\text{جـ ء}}|$ = $|\overleftarrow{\text{ء ا}}|$ = ٢$\sqrt{٢}$ ، ∴ الشكل ا ب جـ ء معين

∵ $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ لأن ٢ × −٢ + (−٢) × (−٢) = −٤ + ٤ = ٠ ، ∴ الشكل ا ب جـ ء مربع

مساحة المربع ا ب جـ ء = طول الضلع × نفسه

= ٢$\sqrt{٢}$ × ٢$\sqrt{٢}$ = ٨ وحدات مربعة



شكل (٩ – ٣)

[٤] نرسم شبه المنحرف ا ب جـ ء شكل [(٧ – ٣)]

ارشاد : نرسم و ا ، و ء

∵ $\overleftarrow{\text{ب ا}}$ = $\overleftarrow{\text{ب و}}$ + $\overleftarrow{\text{و ا}}$ ⟵ (١)

∵ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ + $\overleftarrow{\text{و ء}}$ ⟵ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج

$\overleftarrow{\text{ب ا}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = $\overleftarrow{\text{ب و}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ + $\overleftarrow{\text{و ا}}$ + $\overleftarrow{\text{و ء}}$ ، ∵ $\overleftarrow{\text{ب و}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ = $\overleftarrow{\text{}}$ لماذا ؟

∴ $\overleftarrow{\text{ب ا}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = $\overleftarrow{\text{}}$ + $\overleftarrow{\text{و ا}}$ + $\overleftarrow{\text{و ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ا}}$ + $\overleftarrow{\text{و ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ لماذا ؟

∴ $\overleftarrow{\text{ب ا}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{و هـ}}$

٩ : ٤ متجه الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الأهداف

١ – يعرّف متجه الوحدة .

٢ – يجد متجه الوحدة باتجاه أي متجه $\overleftarrow{\text{ق}}$.

٣ – يعرّف متجهي الوحدة الأساسيين ، ويعرّف العلاقة بينهما .

٤ – يمثل أي متجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ بدلالة متجهي الوحدة .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في حصة واحدة .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] $\overleftarrow{\text{ق}} = (\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ ، $\overleftarrow{\text{و ج}} = -\overleftarrow{\text{س}}$

[٢] ١) $٢\overleftarrow{\text{س}} + ١٠\overleftarrow{\text{ص}}$ ٢) $١٦\overleftarrow{\text{س}} + ١٥\overleftarrow{\text{ص}}$ ، ٣) $١٢\overleftarrow{\text{س}} + ١٣\overleftarrow{\text{ص}}$

[٣] $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = (\frac{٢}{\sqrt{١٣}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٣}})$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = (\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ ، $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}} = (\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$

[٤] أ = ٢ ؛ ب = ١

٩ : ٥ الضرب الداخلي لمتّجهين

عدد الحصص : ثلاث حصص

الأهداف

١ – يوجد حاصل الضرب الداخلي لمتّجهين .

٢ – يحدّد الزاوية المحصورة بين متّجهين .

٣ – يستخدم الضرب الداخلي في تحديد توازي أو تعامد متّجهين .

٤ – يتعرّف خواص الضرب الداخلي .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : الضرب الداخلي لمتّجهين مع الأمثلة .

الحصة الثانية : خواص الضرب الداخلي مع الأمثلة .

الحصة الثالثة : مناقشة تمارين الواجب وحل التمارين الصفية .

التقويم

أوجد $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} . \overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ في الحالات الآتية :

أ) $|\overleftarrow{\text{ق}}_{١}| = |\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}| = ٣$ ، $\text{هـ} = ٦٠^{\circ}$

ب) $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = (٥ ، ٦)$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = \overleftarrow{\text{س}} - ٢\overleftarrow{\text{ص}}$

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[1] 1) -7 ، 2) متعامدان ، 3) $\pm\,|\overleftarrow{\text{ف}}_1|\,.\,|\overleftarrow{\text{ف}}_2|$ ، 4) $|\overleftarrow{\text{ف}}|^2$

[2] 1) -4 ، 2) $\sqrt{3}+2$ ، 3) 50 ، 4) $-1-\sqrt{3}$ ، 5) صفر

[3] $\text{جتا هـ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\text{هـ} = 45^\circ$

[4] نبين أن: $\overleftarrow{\text{اب}} \perp \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{اب}} = (-2 ، -2)$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = (-3 ، 3) \Rightarrow \overleftarrow{\text{اب}} \,.\, \overleftarrow{\text{ب جـ}} = 0$

$\Rightarrow \overleftarrow{\text{اب}} \perp \overleftarrow{\text{ب جـ}}$، إذن Δ اب جـ قائم الزاوية في ب .

نوجد $\overleftarrow{\text{اجـ}} = (-5 ، 1)$ ، نوجد جتا ا .

$$\text{جتا ا} = \frac{\overleftarrow{\text{اب}} \,.\, \overleftarrow{\text{اجـ}}}{|\overleftarrow{\text{اب}}| \,.\, |\overleftarrow{\text{اجـ}}|} = \frac{8}{2\sqrt{2} \times \sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{13}} .$$

إذن $\text{جتا ا} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ، نتستخدم الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة لايجاد ق($\measuredangle$ ا) فتكون ق($\measuredangle$ جـ) $= 90^\circ -$ ق($\measuredangle$ ا)

[5] نضع $\overleftarrow{\text{ف}} = (\text{س ، ص})$ ، $\text{جتا } 60 = \frac{\overleftarrow{\text{ف}} \,.\, \overleftarrow{\text{ص}}}{|\overleftarrow{\text{ف}}| \,.\, |\overleftarrow{\text{ص}}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\text{ص}}{1} \Rightarrow \text{ص} = \frac{1}{2}$

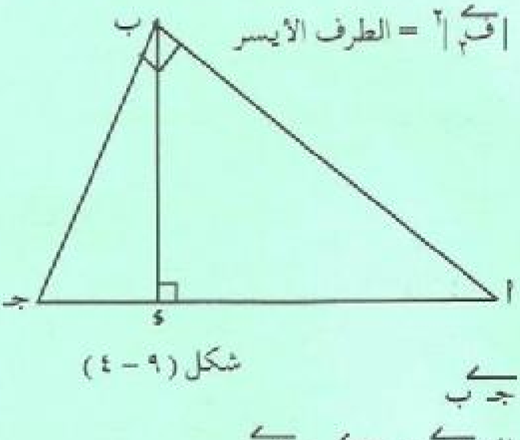
$\because |\overleftarrow{\text{ف}}| = 1 \Rightarrow \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = 1 \Rightarrow \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$ ،

$\because \text{ص} = \frac{1}{2}$ ، $\therefore \text{س}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow 1 \quad \because \text{س}^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore \text{س} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{4}\right)$ أو $\overleftarrow{\text{ف}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{4}\right)$

[6] الطرف الأيمن $= (\overleftarrow{\text{ف}}_1 - \overleftarrow{\text{ف}}_2)\ (\overleftarrow{\text{ف}}_1 + \overleftarrow{\text{ف}}_2) = \overleftarrow{\text{ف}}_1 \,.\, \overleftarrow{\text{ف}}_1 + \overleftarrow{\text{ف}}_1 \,.\, \overleftarrow{\text{ف}}_2 - \overleftarrow{\text{ف}}_2 \,.\, \overleftarrow{\text{ف}}_1 + \overleftarrow{\text{ف}}_2 \,.\, \overleftarrow{\text{ف}}_2$

$= |\overleftarrow{\text{ف}}_1|^2 + 0 + |\text{ف}_2|^2 = |\overleftarrow{\text{ف}}|^2 + |\overleftarrow{\text{ف}}_2|^2 =$ الطرف الأيسر



شكل (9 – 4)

[7] نرسم المثلث اب جـ القائم الزاوية [شكل (9 – 4)]

1) $\because \overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{اء}} + \overleftarrow{\text{ءب}}$ (1)

$\therefore \overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{اجـ}} + \overleftarrow{\text{جـب}}$ (2)

بضرب المعادلتين نحصل على :

$\overleftarrow{\text{اب}} \,.\, \overleftarrow{\text{اب}} = (\overleftarrow{\text{اء}} + \overleftarrow{\text{ءب}}) \,.\, (\overleftarrow{\text{اجـ}} + \overleftarrow{\text{جـب}})$

$\Rightarrow |\overleftarrow{\text{اب}}|^2 = (\overleftarrow{\text{اء}} + \overleftarrow{\text{ءب}}) \,.\, \overleftarrow{\text{اجـ}} + (\overleftarrow{\text{اء}} + \overleftarrow{\text{ءب}}) \,.\, \overleftarrow{\text{جـب}}$

$\Rightarrow |\overleftarrow{\text{اب}}|^2 = \overleftarrow{\text{اء}} \,.\, \overleftarrow{\text{اجـ}} + \overleftarrow{\text{دب}} \,.\, \overleftarrow{\text{اجـ}} + \overleftarrow{\text{اب}} \,.\, \overleftarrow{\text{جـب}}$ لأن $\overleftarrow{\text{اء}} + \overleftarrow{\text{ءب}} = \overleftarrow{\text{اب}}$

$\Rightarrow |\overleftarrow{\text{اب}}|^2 = \overleftarrow{\text{اء}} \,.\, \overleftarrow{\text{اجـ}} + \overleftarrow{0} + \overleftarrow{0}$ $\because \overleftarrow{\text{اء}} \parallel \overleftarrow{\text{اجـ}}$ وفي نفس الاتجاه

$\therefore |\overleftarrow{\text{اب}}|^2 = |\overleftarrow{\text{اء}}| \,.\, |\overleftarrow{\text{اجـ}}|$

٢) ∵ $\overleftarrow{\text{ب أ}} = \overleftarrow{\text{ب د}} + \overleftarrow{\text{د أ}}$ ← ① ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{ب د}} + \overleftarrow{\text{د جـ}}$ ⇐ ② بضرب ① في ②

$\overleftarrow{\text{ب أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب جـ}} = (\overleftarrow{\text{ب د}} + \overleftarrow{\text{د أ}}) \cdot (\overleftarrow{\text{ب د}} + \overleftarrow{\text{د جـ}})$

$\overleftarrow{0} = \overleftarrow{\text{ب د}} \cdot \overleftarrow{\text{ب د}} + \overleftarrow{\text{ب د}} \cdot \overleftarrow{\text{د جـ}} + \overleftarrow{\text{د أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب د}} + \overleftarrow{\text{د أ}} \cdot \overleftarrow{\text{د جـ}}$

$\overleftarrow{0} = |\overleftarrow{\text{ب د}}|^2 + \overleftarrow{0} + \overleftarrow{0} - \overleftarrow{\text{أ د}} \cdot \overleftarrow{\text{د جـ}}$

∵ $\overleftarrow{\text{أ د}} \parallel \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ وفي نفس الاتجاه

∴ $\overleftarrow{0} = |\overleftarrow{\text{ب د}}|^2 - |\overleftarrow{\text{أ د}}| \cdot |\overleftarrow{\text{د جـ}}|$

∵ $|\overleftarrow{\text{ب د}}|^2 = |\overleftarrow{\text{أ د}}| \cdot |\overleftarrow{\text{د جـ}}|$ ∴ $|\text{ب د}|^2 = |\text{أ د}| \cdot |\text{د جـ}|$

٩ : ٦ المعادلة المتّجهة

عدد الحصص : ثلاث حصص

الأهداف

١ – يتعرّف على جميع الأشكال لمعادلة خط مستقيم مار بنقطتين .

٢ – يتعرّف على شكل المعادلة المتّجهة لمعادلة خط مستقيم مار بنقطة ويوازي متّجه $\overleftarrow{\text{ف}}$.

٣ – يوجد معادلة مستقيم يمر بنقطة وعمودي على متّجه $\overleftarrow{\text{ف}}$.

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : المعادلة المتّجهة لمستقيم مار بنقطتين .

الحصة الثانية : المعادلة المتّجهة لمستقيم مار بنقطة ويوازي متّجه معلوم $\overleftarrow{\text{ف}}$ مع الأمثلة ، معادلة مستقيم مار بنقطة وعمود على متّجه $\overleftarrow{\text{ف}}$.

الحصة الثالثة : مناقشة الواجب المنزلي وحل تمارين صفية.

التقويم

يعطى سؤال كالتالي في نهاية الحصة الثالثة :

أوجد جميع الأشكال لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (–٢ ، ١)

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] ١) $\text{د}_1(٥ ، ٢)$ ، $\text{د}_2(-٢ ، ١)$ ⇐ $\text{س}_1 = ٥$ ، $\text{ص}_1 = ٢$ ، $\text{س}_2 = -٢$ ، $\text{ص}_2 = ١$

المعادلة المتّجهة : $\overleftarrow{\text{د}_1\text{د}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{د}_1\text{د}_2}$ ⇐ $(\text{س} - \text{س}_1 ، \text{ص} - \text{ص}_1) = \text{ك}\ (\text{س}_2 - \text{س}_1 ، \text{ص}_2 - \text{ص}_1)$

⇐ $(\text{س} - ٥ ، \text{ص} - ٢) = \text{ك}\ (-٧ ، -١)$

المعادلتان الوسيطيتان : $\text{س} = -٧\text{ك} + ٥$ ، $\text{ص} = -\text{ك} + ٢$

المعادلة الديكارتيه : $\dfrac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٥} = \dfrac{٢ - ١}{٥ - (-٢)}$ ⇐ $\dfrac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٥} = \dfrac{١}{٧}$

⇐ $٧\text{ص} - \text{س} - ٩ = ٠$

(٢) د$_1$ (٠ ، ٠) ، د$_2$ (٠ ، ٤) ⟸ س$_1$ = ٠ ، ص$_1$ = ٠ ، س$_2$ = ٠ ، ص$_2$ = ٤

– المعادلة المتّجهة : $\overrightarrow{\text{د د}_1}$ = ك $\overrightarrow{\text{د}_1 \text{د}_2}$ ⟸ (س ، ص) = ك (٠ ، ٤)

– المعادلات الوسيطة : س = ٠ ، ص = ٤ ك

– المعادلة الديكارتية : (ص – ص$_1$) (س$_2$ – س$_1$) = (ص$_2$ – ص$_1$) (س – س$_1$)

(ص – ٠) (٠ – ٠) = (٤ – ٠) (س – ٠) ⟸ $\boxed{\text{س} = ٠}$

٣) د$_1$ (أ ، ٠) ، د$_2$ (٠ ، ب) ⟸ س$_1$ = أ ، ص$_1$ = ٠ ، س$_2$ = ٠ ، ص$_2$ = ب

– المعادلة المتّجهة : (س – أ ، ص – ٠) = ك (– أ ، ب)

– المعادلات الوسيطة : س = أ – أ ك ، ص = ك ب

– المعادلة الديكارتية : $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \text{أ}} = \frac{\text{ب} - ٠}{٠ - \text{أ}}$ ⟸ $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{أ}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ، ⟸ أص + ب س – أب = ٠

٤) د$_1$ (٠ ، ٠) ، د$_2$ (–٦ ، ١) ⟸ س$_1$ = ٠ ، ص$_1$ = ٠ ، س$_2$ = –٦ ، ص$_2$ = ١

– المعادلة المتّجهة : (س ، ص) = ك (–٦ ، ١)

– المعادلات الوسيطة : س = –٦ ك ، ص = ك

– المعادلة الديكارتية : $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = -\frac{١}{٦}$ ⟸ س + ٦ ص = ٠

[٢] ١) ب (٧ ، –٦) ، $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (–١ ، ١) ⟸ س$_0$ = ٧ ، ص$_0$ = –٦ ، سَ = –١ صَ = ١

– المعادلة المتجهة : (س ، ص) = ك (–١ ، ١) + (٧ ، –٦) ⟸ (س ، ص) = (–ك + ٧ ، ك – ٦)

– المعادلات الوسيطة : س = –ك + ٧ ، ص = ك – ٦

– المعادلة الديكارتية : $\frac{\text{ص} + ٦}{\text{س} - ٧} = -١$ ⟸ س + ص – ١ = ٠

٢) ب (٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (–٢ ، ٠) ⟸ س$_0$ = ٠ ، ص$_0$ = ٤ ، سَ = –٢ ، صَ = ٠

– المعادلة المتجهة : (س ، ص) = ك (–٢ ، ٠) + (٠ ، ٤)

– المعادلات الوسيطة : س = –٢ ك ، ص = ٤

– المعادلة الديكارتية : ص = ٤

٣) ب (٠ ، ٠) ، ف = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ⟸ س$_0$ = ٠ ، ص$_0$ = ٠ ، سَ = ٥ ، صَ = ٥

– المعادلة المتجهة هي : (س ، ص) = ك (٥ ، ٥)

– المعادلات الوسيطة : س = ٥ ك ، ص = ٥ ك

– المعادلة الديكارتية : $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = ١$ ⟸ ص = س

٤) ب (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{س}}$ ⟸ س. = −٢ ، ص. = ١ ، سَ = ١ ، صَ = ٠

– المعادلة المتجهة : (س ، ص) = ك (١ ، ٠) + (−٢ ، ١)

– المعادلات الوسيطة : س = ك −٢ ، ص = ١

– المعادلة الديكارتية : ص = ١

[٣] ١) ب (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (−٤ ، ١) ⟸ س. = ٢ ، ص. = ٣ ، سَ = −٤ ، صَ = ١

– المعادلة الجبرية : −٤ × (س −٢) + ١ × (ص −٣) = ٠ ⟸ ص − ٤ س + ٥ = ٠

٢) ب (٥ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ف}}$ (٠ ، ١) ⟸ س. = ٥ ، ص. = ٠ جـ سَ = ٠ جـ صَ = ٣

– المعادلة الجبرية : ٠ + ٣ (ص − ٠) = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ص = ٠}}$

٣) ب (١ ، −١) ، $\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{ص}}$

– المعادلة الجبرية هي : ٠ + ١ (ص + ١) = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ص = −١}}$

٤) ب (٠ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{س}}$

– المعادلة الجبرية هي : ١ × (س − ٠) + ٠ × (ص − ٠) = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ٠}}$

٩ : ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الهدف قياس مدى تحقق اهداف الوحدة

يُعطي المدرس الاختبار الموجود في الدليل أو اختباراً مشابهاً له بحيث يُغطِّى أهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ .
٢	٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨
٣	٣ ، ٤

الاختبار

[١] اختر الإجابة الصحيحة :

أ) اذا كان ف١ = ٤ ف٢ فإن المتجهان ف١ ، ف٢ :

(١) متطابقان (٢) متعامدان (٣) متوازيان

ب) اذا كان |ف١| = √٢ ، |ف٢| = ٣ ، هـ = ٦٠° فإن ف١ . ف٢ يساوي

(١) ٣ √٢ (٢) ٢/√٣ (٣) ٣/√٢

جـ) اذا كان ب جـ = (٥ ، -٣) ، جـ د = (٢ ، ٤) فإن ب د يساوي

(١) (٧ ، ١) (٢) (١ ، ٧) (٣) (٣ ، ٧)

[٢] اذا كان ف١ = (٢ ، ٤) ، ف٢ = (١ ، -١) ، ف = ٣ ف١ - ٢ ف٢

المطلوب : (١) عبِّر عن ف بدلالة متجهي الوحدة الاساسيين .

(٢) أوجد المعادلة الديكارتية للمستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٠) وعمودي على المتجه ف

ب) اذا كانت أ (٢ ، ٠) ، ب (٣ ، ١٢) ،

جـ (٥ ، -٣) ، د (-١ ، ٦) فأوجد

(١) ٢ أب + ٣ جـ د

(٢) أب + د جـ

(٣) ميل ب أ

[٣] أ ب جـ مثلث ، د ∈ ب جـ حيث كان ، د جـ = ٢ ب د

اثبت أن : أب + أجـ = ٣ د ب .

الوحدة العاشرة

الإحصاء

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
١٠ : ١	الرمز مجـ : مدلوله وخواصه	٣
١٠ : ٢	مقاييس النزعة المركزية (المتوسط – الوسيط – المنوال)	٤
١٠ : ٣	مقاييس التشتت (المدى – الانحراف المتوسط – التباين والانحراف المعياري)	٧
١٠ : ٤	اختبار الوحدة	١
	المجموع	١٥

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يستخدم الرمز (مجـ) ويستنتج خواصه .

٢ – يحسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لتوزيع تكراري .

٣ – يعرّف مقاييس التشتت (المدى – الانحراف المتوسط – التباين والانحراف المعياري) .

٤ – يحسب مقاييس التشتت لتوزيع تكراري.

٥ – يذكر العلاقة بين التباين والانحراف المعياري .

٦ – يحل مسائل تطبيقية من واقع الحياه اليومية تتعلق بالنزعة المركزية ومقياس التشتت .

المقدمة

لمحة تاريخية

منذ نشأة الإنسان على الأرض والإحصاء ضرورة هامة في حياته. وقد استخدمت الطرق الإحصائية قديماً للحصر والعد قال الله تعالى: ﴿ لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾ ﴾ [مريم]، وقال الله تعالى: ﴿ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾ ﴾ [الجن]

إن نشأة فكرة علم الإحصاء على وجه العموم نشأ منذ فجر التاريخ كوسيلة للحصر بطريق العد؛ ففي العصور الوسطى كانت بعض القبائل وكذلك الخلافة في عهد الخليفة المأمون كانوا يقومون بين الحين والآخر بعمل تعداد للسكان ليتعرفوا على ما لديهم من الرجال وقدرتهم على الدفاع . ولما تدرج الإنسان في المدنية وتعددت مرافق الحياة دعت الضرورة إلى استخدام الإحصاء في مختلف المجالات مما أدى بكثير من العلماء إلى التفرغ لدراسة النظريات الرياضية واستخدامها في استنباط القوانين الإحصائية والتعمق في هذه الدراسة وتطبيقها في النواحي العلمية حتى تكونت بفضل جهودهم ثروة ضخمة من النظريات العلمية والطرق العلمية التي تعتبر أساس علم الإحصاء في العصر الحديث. وكان استخدام الإحصاء في المبدأ مقصوراً على الأعمال الخاصة بشؤن الدولة، كما يدل على ذلك الأصل اللغوي في مصطلح هذا العلم بالإنجليزية (statistics) ويتكون هذا المصطلح من عدة مقاطع (stat-ist-ics) ومعناها مجموعة الحقائق الخاصة بشؤن الدولة .

ولم يلبث أن انتشر استخدام هذا العلم في نواحي مختلفة، وتثبتت فائدته كطريقة سليمة من طرق البحث العلمي الدقيق. ولم يقتصر تطبيقه على النواحي التي تهتم بها الحكومات في تدبير سياستها وتصريف شؤنها العامة بل تعداها إلى جميع الظواهر الاقتصادية والاجتماعية والتربوية والعلمية البحته .

وكان علم الإحصاء في بداية نشأته يهتم بجمع البيانات وتسجيلها لاستخدامها والاهتداء بها في تعريف أمور الدولة ورسم سياساتها، ولكن هذا التسجيل لم يكن بطريقة رقمية كما هو المشاهد في الإحصاء الآن، بل كان التسجيل يقتصر على وصف تلك الحقائق بالكلمات العددية دون اللجوء إلى استخدام الأرقام لتحديد هذه الأوصاف تحديداً دقيقاً .

وربما كانت أول خطوة في استخدام الأعداد بطريقة رقمية هي التي اتخذها المؤرخ الدنمركي أنكرسون (Ankcrson) عام ١٧٤١م، ثم بعد ذلك ظهرت بالتدريج أفضلية استخدام للدلالة على الظواهر لما فيها من تمام الوضوح ودقة التعبير، وبذلك عمم استخدام الارقام .

ولما أخذ علم الإحصاء هذا الشكل الجديد كان من السهل استخدام النظريات الرياضية في استنباط القوانين الإحصائية وتدعيم نتائجها . وكان طبيعياً بعد ذلك أن يبحث علماء الرياضيات والإحصاء عن تطبيقات لهذه النظريات؛ فطرقوا ميادين متعددة بعيدة عن المجال الأصلي الذي أنشأ فيه هذا العلم وهو شؤن الدولة، وحصلوا في كل حالة على نتائج علمية دقيقة تعالج مشاكلهم وواقعهم الملموس .

خلفية علمية

يعتبر علم الإحصاء في عصرنا الحاضر هو الدعامة الأساسية التي نبنى عليها كل تخطيط سليم في مختلف ميادين الحياة .

وتأتي هذه الوحدة مكملة لما درسه الطالب في مرحلة التعليم الأساسي في الإحصاء ، حيث شملت هذه الوحدة المواضيع التالية :

- الرمز (مجـ) مدلوله، وخواصه .
- مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال)
- مقاييس التشتت (المدى – الانحراف المتوسط – التباين – الانحراف المعياري)

الرمز (مجـ) مدلوله وخواصه :

تستخدم الرموز في كثير من الدراسات الطبية والهندسية والتربوية والاجتماعية والاقتصادية وغيرها، وكل الرموز هي عبارة عن مصطلحات ترمز إلى مفاهيم معينة . الرمز (مجـ) في الإحصاء يعتبر بمثابة اختصار وتبسيط لمجموع البيانات، ويقابله في بعض الكتب العربية والإنجليزية Σ ، وهو حرف إغريقي ويقرأ سجماء وعندما نكتب

$\text{مجـ}_{ر=١}^{٥}\ ر = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥$ يعني هذا مجموع حالة المتغير (ر) من ر = ١ إلى ر = ٥ أي أن عدد الحالات التي تم جمعها هي خمس حالات .

خواص الرمز مجـ :

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً ($ن \in ص^+$) فإن :

١ – $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} (س_ر + ص_ر) = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} س_ر + \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ص_ر$.

٢ – $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} أ\, س_ر = أ\ \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} س_ر$ ، حيث أ عدد حقيقي ($أ \in ح$) .

٣ – $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ل = ن\, ل$ حيث ل عدد حقيقي ($ل \in ح$) .

مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي –الوسيط – المنوال)

تعد مقاييس النزعة المركزية في طليعة المقياس الوصفية الهامة وهي مقاييس تحدد موضع أوموقع أو مكان تمركز التوزيع؛ ومن خلال معرفة مقاييس النزعة المركزية نستطيع تحديد النقطة التي يتمركز عندها التوزيع ونستطيع أن نقارن بين عينة من البيانات والحكم على الأفضلية منها، وذلك كأن نأخذ درجات شعبتين من الطلبة ثم يتم معرفة المتوسط والوسيط، وكذلك المنوال لهذه الشعبتين بعد إبعاد القيم المتطرفة التي قد تؤثر في الحكم على أي الشعبة هي الأفضل .

المتوسط الحسابي :

يعتبر المتوسط الحسابي أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً وأهمية، ونرمز للمتوسط الحسابي بالرمز $\bar{\text{س}}$

ويعرف المتوسط الحسابي بأنه مجموع (ن) من البيانات مقسوماً على عددهذه البيانات ؛

أي أن $\bar{\text{س}} = \dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \cdots + \text{س}_{\text{ن}}}{\text{ن}}$ ، أي أن $\bar{\text{س}} = \dfrac{\text{مج}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$

حيث ن عدد القيم ، ر دليل القيم .

وفي حالة الجداول التكرارية (البيانات المبوبة) يحسب المتوسط الحسابي بالعلاقات $\bar{\text{س}} = \dfrac{\text{مج}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \times \text{ك}_{\text{ر}}}{\text{مج}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}}$

حيث $\text{ك}_{\text{ر}}$ تكرار الفئة ، $\text{س}_{\text{ر}}$ مركز الفئة .

خواص المتوسط الحسابي :

- يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة .
- لا يمكن حساب المتوسط الحسابي من فئات مفتوحة لأن مراكز هذه الفئات يصعب تحديدها بالضبط .
- المتوسط الحسابي هو المقياس الوحيد الذي تعتمد قيمته على جمع قيم التوزيع .

الوسيط :

هي القيمة التي تتوسط القيم من حيث رتبها بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً .

ويحسب الوسيط من العلاقة $\dfrac{\text{ن}+1}{2}$ اذا كان عدد القيم فردياً أما إذا كانت عدد القيم زوجياً، فان الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين التي رتبتيهما $\dfrac{\text{ن}}{2}$ ، $\dfrac{\text{ن}}{2} + 1$.

مثلا : إذا كان عدد القيم سبع قيم فإن الوسيط يأخذ القيمة التي رتبتها « ٤ »، وإذا كان عدد القيم ثمان قيم فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين التي رتبتيهما ٤ ، ٥ .

وفي حالة الجداول التكرارية (البيانات المبوبة)، فإن الوسيط يحسب من العلاقة : $\text{و} = \text{أ} + \dfrac{\frac{\text{ن}}{2} + \text{ك}_1}{\text{ك}_2} \times \text{ل}$

حيث وهوالوسيط ، أ الحد الأدنى للفئة الوسيطة ، ن التكرار الكلي، ك_1 التكرار المتجمع الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطة ، ك_2 تكرار الفئة الوسيطة ، ل طول الفئة .

المنوال :

المنوال هي القيمة الأكثر تكراراً في التوزيع وفي حالة الجداول التكرارية يكون المنوال هو مركز الفئة المنوالية (المناظره لأكثر تكرار) .

مقاييس التشتت (المدى - الانحراف المتوسط- التباين - الانحراف المعياري) .

رغم أهمية مقاييس النزعة المركزية إلا أنها لا تعطي فكرة كاملة عن خصائص التوزيعات التكرارية، وبالاخص لا توضح لنا مدى تجانس التوزيع فمثلاً قد يتساوى المتوسط الحسابي والوسيط لمجموعتين بينما إحدى المجموعتين بياناتها متجانسة، أي أن قراءتها متقاربة والمجموعة الأخرى بياناتها غير متجانسه . لذلك فإن مقياس التشتت تعالج مثل هذه المشكلات، لأنها تتعامل مع كل البيانات وبالتالي لا يتأثر بتقارب البيانات أو تباعدها .

ومن مقاييس التشتت المدى، وهو الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة في التوزيع ويعطى بالعلاقة :

المدى = أعلى قيمة – أدنى قيمة .

وفي حالة الجداول التكرارية يكون:

المدى هو الفرق بين الحد الأعلى لآخر فئة والحد الأدنى لأول فئة في التوزيع أي أن:

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى .

الانحراف المتوسط :

هو مقياس يستدل منه على الشكل الذي تتوزع به المشاهدات حول متوسطها الحسابي، وفي الحقيقة أن هذا المقياس يستخدم لقياس التباين. وعند دراستنا للاحصاء قد نحتاج أحياناً إلى إجراء بعض التحويلات الخطية على العلامات الخام والتعبير عنها بصورة أخرى والعلامة الانحرافية هي بعد العلامة الخام عن المتوسط الحسابي للتوزيع، ويرمز لها بالرمز ($ح_ر$) ؛ أي أن $ح_ر = س - \bar{س}$ ،والعلامات الانحرافية ($ح_ر$) قد تكون موجبة أو سالبة أو صفر؛ ويكون المجموع الجبري لها يساوي صفراً دائماً .

ويتم حساب الانحراف المتوسط بأخذ القيم المطلقة لكل مشاهدة (أو مركز الفئة) عن وسطها الحسابي؛ أي أن:

$|ح_ر| = س - \bar{س}$ لكل مشاهدة ثم بعد ذلك نوجد المتوسط الحسابي لهذه الإنحرافات المطلقة فيكون هذا المتوسط الناتج لكل انحراف هو متوسط الانحراف المتوسط للمشاهدات، ويرمزه بالرمز $\bar{ح}$ أي أن :

$\bar{ح}_ر = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |س_ر - \bar{س}|}{ن} = \frac{\sum |ح_ر|}{ن}$ حيث ن = عدد المشاهدات ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي للمشاهدات .

وكلما صغرت قيمة هذا المتوسط كلما اقتربت المشاهدات من متوسطها الحسابي، وكلما كبرت كلما ابتعدت عنه، أي أن هذ المتوسط (متوسط الانحرافات) يعتبر بمثابة دليل أو مؤشر على قرب أو بعد المشاهدات عن متوسطها الحسابي.

التباين والانحراف المعياري :

يعرف التباين بأنه مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على عدد القيم ويرمز لها بالرمز ($ع^2$). ، ويعبر عنه رمزياً على النحو : $ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن}$

حيث $ع^2$ التباين ، $س_ر$ القيمة ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي للقيم ، ن عدد القيم . ر دليل القيمة .

اما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين .

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^2} = ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن}}$

وفي حالة تكرار القيم يكون التباين : ، $ع = \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - س)^2 \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$ حيث ك هو تكرار القيم .

<table>
<tr><th colspan="2">قائمة بالمصطلحات والرموز</th></tr>
<tr><td>∑ Summation</td><td>الرمز (مجـ) ويعني المجموعة</td></tr>
<tr><td>Measures</td><td>مقاييس</td></tr>
<tr><td>Measures of central tendency.</td><td>– مقاييس النزعة المركزية</td></tr>
<tr><td>Arithemetic Mean</td><td>المتوسط الحسابي</td></tr>
<tr><td>Median</td><td>الوسيط</td></tr>
<tr><td>Mode</td><td>المنوال</td></tr>
<tr><td>Measures or Dispersion of Spreads</td><td>مقاييس التشتت</td></tr>
<tr><td>Range</td><td>المدى</td></tr>
<tr><td>The mean deviation</td><td>الانحراف المتوسط</td></tr>
<tr><td>The variance</td><td>التباين</td></tr>
<tr><td>The Standard deviatien</td><td>الانحراف المعياري</td></tr>
<tr><td>Histogram</td><td>المدرج التكراري</td></tr>
<tr><td>Frequency polygon</td><td>المضلع التكراري</td></tr>
<tr><td>Data</td><td>بيانات</td></tr>
<tr><td>Class intervale</td><td>الفئات</td></tr>
<tr><td>Class mark</td><td>علامة الفئة</td></tr>
<tr><td>variable</td><td>متغير</td></tr>
<tr><td>bımodal</td><td>ذو منوالين</td></tr>
<tr><td>Conclusion</td><td>استنتاج</td></tr>
<tr><td>Outlier</td><td>قيم متطرفة (شاذه)</td></tr>
</table>

توجيهات طرائقية عامة

- يراجع المدرس للتلاميذ المتطلبات السابقة لكل درس في بداية الحصة .
- يوضّح المفاهيم الأساسية لدروس الوحدة عند تقديم كل درس .
- يشرح الأمثلة ويناقشها مع التلاميذ ويتأكد من خلال النقاش بأن التلاميذ فهموا الأمثلة جيداً .
- يوضّح الرمز $\underset{ر=٠}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}$ ر مثلاً بأن عدد القيم تساوي ست قيم تبداء بالقيمة صفر وتنتهي بالقيمة ٥ (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) ، وكذلك $\underset{ر=٨}{\overset{١١}{\text{مجـ}}}$ ر عدد قيمها تساوي أربع قيم تبداء بالقيمة ٨ وتنتهي بالقيمة ١١ (٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١) . . . وهكذا .
- يوضّح المدرس للتلاميذ بانه لا يمكن إيجاد الانحراف المتوسط لبيانات معطاة الا بعد معرفة المتوسط الحسابي لهذه البيانات وكذلك عند إيجاد التباين والانحراف المعياري .
- يقدّم المدرس للتلاميذ التقويم نهاية كل درس لمعرفة أدائهم والتركيز على الأخطاء التي قد يقعون فيها ويعالجها.

١٠ : ١ الرمز (مجـ) : مدلوله وخواصه

عدد الحصص : ثلاث حصص

الأهداف

١ – يتعرّف على الرمز مجـ ($\sum$) ومدلوله .

٢ – يستخدم الرمز مجـ للتعبير عن جمع مقادير .

٣ – يستنتج خواص الرمز مجـ ويستخدمها .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : الرمز مجـ واستنتاج خواصه .

الحصة الثانية : الأمثلة .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

التقويم

يقدّم المدرس السؤال التالي أو سؤالاً آخر مشابه له في نهاية الحصة الثالثة كخطوة تقويم:

[١] اكتب قيمة :

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}$ ٣ ب) $\underset{ر=٥}{\overset{٧}{\text{مجـ}}}$ (ر + ٣) جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}$ سر

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) $\text{مجـ}_{ر=١}^{٣٠}\, ر$ ب) $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن}\, ر$ جـ) $\text{مجـ}_{ر=٥}^{١٢}\, ر$

د) $\text{مجـ}_{ر=٥}^{٧}\, (ر+٣)^{٢}$ هـ) $أ\,\text{مجـ}_{ر=١}^{ن}\, س_{ر}$ و) $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن}\, ع_{ر}^{٢}$

ح) $٢\,\text{مجـ}_{ر=٠}^{ن}\, ر$ ط) $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن}\, ٢(٢ر-١)$.

[٢] أ) ١٥ ب) $ص_{٥} + ص_{٦} + ص_{٧} + ص_{٨}$

جـ) $س_{١}ص_{١} + س_{٢}ص_{٢} + س_{٣}ص_{٣}$ د) $٦ \times ٧ = ٤٢$

هـ) ٥أ و) $٤ \times \frac{١}{٤} = ١$

ح) $س_{١}^{٢}ع_{١}^{٢} + س_{٢}^{٢}ع_{٢}^{٢} + س_{٣}ع_{٣}^{٢}$ ط) $س_{٣} + س_{٤} + س_{٥} + س_{٦} + ١٦أ$

ي) $\frac{١}{أ}(س_{١} + س_{٢} + س_{٣} + س_{٤} + س_{٥}) + ٨$

[٣] أ) ٧٠ ب) ١٢٦ جـ) ٢٢١

د) ١ هـ) ١١٢ و) ٩١

١٠ : ٢ مقاييس النزعة المركزية

عدد الحصص : أربع حصص

الأهداف

١ – يعرّف مقاييس النزعة المركزية .

٢ – يحسب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري .

٣ – يجد الوسيط لبيانات معطاة ولتوزيع تكراري .

٤ – يجد المنوال لبيانات منفردة و لبيانات معطاة على شكل فئات .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : المتوسط الحسابي .

الحصة الثانية : االوسيط.

الحصة الثالثة : المنوال وتمارين ومسائل .

الحصة الرابعة : تمارين ومسائل .

التقويم

يقدم السؤال التالي أو سؤال مشابه كخطوة تقويم نهاية الحصة الرابعة .

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات التالية :

الفئة	٥ – ٨	٩ – ١٢	١٣ – ١٦	١٧ – ٢٠
التكرار	٣	٧	٨	٢

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] أ) ٣٢,٥٧ ، ٣٢ ، ٣٢

ب) ٣٥,٣٣ ، ٤١,٥ ، ٤٢

جـ) ٥٨ ، ٥٨,٥ ، ٦٠

[٢] $\overline{س}$ = ٧,٠٤ و = ٧,١ المنوال = ٧

[٣] $\overline{س}$ = ١٥٣,٥٥ و = ١٥٤ المنوال = ١٥٣

[٤] $\overline{س}$ = ٩,٣٦ و = المنوال = ١١

١٠ : ٣ مقاييس التشتت

عدد الحصص : سبع حصص

الأهداف

١ – يتعرف على مفهوم التشتت .

٢ – يتعرّف على مقاييس التشتت (المدى ، الانحراف المتوسط ، التباين والانحراف المعياري)

٣ – يحسب المدى والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري .

٤ – يتعرّف على العلاقة بين التباين والانحراف المعياري .

تنفيذ حصص البند

الحصة الأولى : مفهوم التشتت .

الحصة الثانية : المدى.

الحصة الثالثة : الانحراف المتوسط .

الحصتان الرابعة والخامسة : التباين والانحراف المعياري.

الحصتان السادسة و السابعة : تمارين ومسائل .

إرشادات وإجابات بعض التمارين

[١] (أ) المدى = ٨ ، $ع^{٢}$ = ٨,٧ ، ع = ٢,٩   (ب) المدى = ١٩ ، $ع^{٢}$ = ٤٢ ، ع = ٦,٥

(جـ) المدى = ٣ ، $ع^{٢}$ = ١ ، ع = ١   (د) المدى = ٤ ، $ع^{٢}$ = ٣,٣٦ ، ع = ١,٨

[٢] $ع^{٢}$ = ٤,٧ وبإضافة العدد ٣ لا يؤثر على قيمة التباين .

[٣] (أ) س = ٦٤,٢٥ ، $ح_{١}$ = ٠,٧٥ ، $ح_{٢}$ = ١,٢٥ ، $ح_{٣}$ = ٢,٢٥ ، $ح_{٤}$ = ٢,٧٥ ، $\bar{ح}$ = ١,٧٥ .

(ب) $\bar{ح}$ = ١,٥ ، (جـ) $\bar{ح}$ = ١,٢ ، (د) $\bar{ح}$ = ١,٢٥

[٤] $ع^{٢}$ = ٣٩,٢٨ ، ع = ٦,٣ .

[٥] المدى = ١١ ، $\bar{ح}$ = ٢,٤٧ ، $ع^{٢}$ = ٨,٢١ ، ع = ٢,٩ .

[٦] المدى = ٢٠ .

الفئة	٧– ١١	١٢– ١٦	١٧ – ٢١	٢٢ – ٢٦	٢٧ – ٣١
التكرار	٣	١٧	٢٣	١٣	٤

$ع^{٢}$ = ٢٤,١ ، ع = ٤,٩

١٠ : ٤ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة

الهدف

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة لدى التلاميذ . والجدول التالي يبين الهدف ورقم السؤال الذي يقيسه .

أرقام الأسئلة	الأهداف المقاسة
١	١
٢	٢
٣	٣، ٤، ٥، ٦

– يقدم المدرس الاختبار الذي في الدليل أو اختباراً آخر من إعداده شريطة أن يُغطّي أهداف الوحدة .

– يقوم المعلم بتصحيح الاختباورصد الأخطاء ومن خلال الأخطاء التي يقع فيها التلاميذ يستطيع معرفة الأهداف التي لم تتحقق لدى التلاميذ ويعطي مراجعة لهذه الأهداف .

الاختبار

س ١) (أ) اكتب المقادير التالية باستخدام الرمز مجـ : أ) ٣ + ٤ + ٥ + . . . + ٣٠

(ب) اكتب بالتفصيل $\underset{ر=٣}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}(ر + ٢)^{٢}$

س ٢) من جدول التوزيع التالي :

الفئة	٠ – ٣	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	المجموع
التكرار	٣	٥	٥	٢	١٥

أوجد : (أ) المنوال (ب) المتوسط الحسابي (جـ) الوسيط

س ٣) الجدول التالي الذي يمثل التوزيع التكراري لحراس إحدى المؤسسات الحكومية حسب ساعات العمل اليومية :

الفئة	٤ – ٦	٧ – ٩	١٠ – ١٢
التكرار	٣	٥	٢

أوجد : (أ) المدى – (ب) الانحراف المتوسط – (جـ) التباين (د) الانحراف المعياري .

تم الدليل بحمد الله

وزارة التربيـــة والتعليم

مطابع الكتاب المدرسي