
6
6
6
الدرس
6
6
6
6

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

FUNCTION OPERATIONS AND COMPOSITION OF FUNCTIONS


Welcome

لماذا ؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

العمليات على الدوال :

درست في الصف الثاني الثانوي عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود، وفي هذا الدرس ستتعلمُ إحدى العمليات نفسها على الدوال.

مفهوم أساسي

العمليات على الدوال

إذا كانت f , g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

الطرح : $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

الضرب : $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

القسمة : $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\ ,\ g(x)\neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدال الجديدة يساوي تقاطع مجال الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل g(x) = 0 في دالة القسمة .

مثال 1

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x,\ g(x) = \sqrt{x+2},\ h(x) = 3x - 5$ ، فاوجد كلاً من الدوال الآتية ، ثم حدد مجالها :

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$= \left(x^2 + 4x\right) + \left(\sqrt{x+2}\right)$$

$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة **f** هو $(-\infty, \infty)$ مجال الدالة **g** هو $[-2, \infty)$

لذا فإن مجال الدالة **(f + g)** هو تقاطع مجالي **f , g**، وهو $[-2, \infty)$ ؛

b) $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x)=f(x)-h(x)$$

$$=\left(x^{2}+4x\right)+\left(3x-5\right)$$

$$=x^{2}+4x+3x-5$$

$$=x^{2}+x+5$$

مجال الدالة كل من f , h هو $(-\infty,\infty)$ لذا فإن مجال الدالة (f - h) $(-\infty,\infty)$

c) $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$

$$= \left(x^2 + 4x\right)(3x - 5)$$

$$= 3x^3 + 5x^2 + 12x^2 - 20x$$

$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجال الدالة كل من f , h هو $(-\infty, \infty)$ لذا فإن مجال الدالة (f . h) $(-\infty, \infty)$

(d $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x)=\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال الدالة كل من **h , f** هو $(-\infty,\infty)$

و لكن $x=0$ أو $x=-4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفراً ؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$

هو $\{x \mid x\neq 0, x\neq -4, x\in R\}$

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\bullet g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة .

1A) $f(x)=x-4, g(x)=\sqrt{9-x^2}$

$$(f+g)(x)=x-4+\sqrt{9-x^2}$$

$$D=[-3,3]$$

$$(f-g)(x)=x-4-\sqrt{9-x^2}$$

$$D=[-3,3]$$

$$(f\bullet g)(x)=x\sqrt{9-x^2}-4\sqrt{9-x^2}$$

$$D=[-3,3]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$D=[-3,3]$$

$$f(x)=x^2-6x-8,\ g(x)=\sqrt{x}$$ **(1B**

$$(f+g)(x)=x^2-6x-8+\sqrt{x}$$

$$D=[0,\infty)$$

$$(f-g)(x)=x^2-6x-8-\sqrt{x}$$

$$D=[0,\infty)$$

$$(f\bullet g)(x)=x^2\sqrt{x}-6x\sqrt{x}-8\sqrt{x}$$

$$D=[0,\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-6x-8}{\sqrt{x}}$$

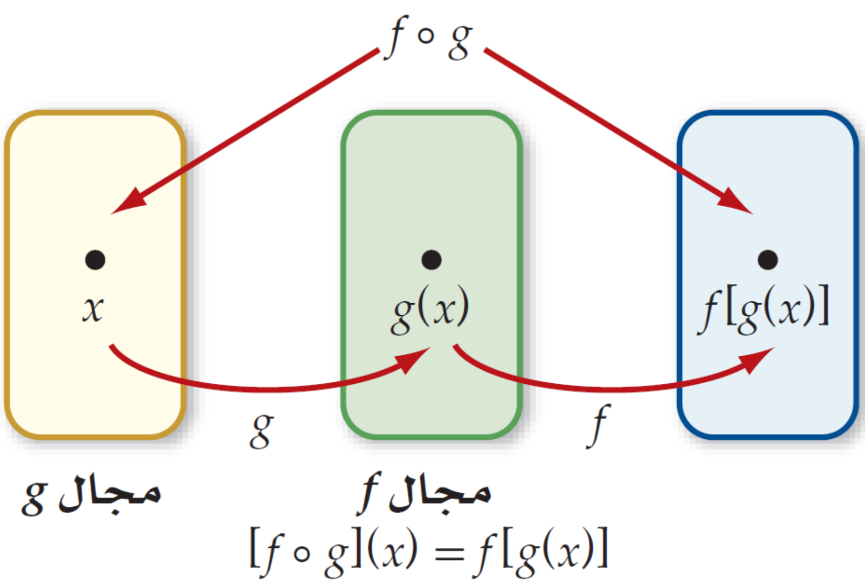
$$D=(0,\infty)$$

تركيب الدوال :

تنتج الدالة $y=(x-3)^2$ أو $y=x-3$ والدالة التربيعية $y=x^2$

لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويُسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي **تركيب دالتين**



يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي :

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

و يتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون g(x) في مجال f.

تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g. حيثُ تُطبَّق الدالة g أولاً ثم الدالة f .

مثال 2

تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x - 4$ ، فأوجد كلاًّ مما يأتي :

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x - 4)$ $g(x) = x - 4$

$= (x - 4)^2 + 1$ بتعويض $(x - 4)$ بدلاً من x في g(x)

$= x^2 - 8x + 16 + 1$ بالتبسيط

$= x^2 - 8x + 17$

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ — تعريف $g \circ f$

$= g(x^2+1)$ — $f(x) = x^2+1$

$= (x^2+1) - 4$ — بتعويض (x^2+1) بدلاً من x في g(x)

$= x^2 - 3$ — بالتبسيط

c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع a عندما x = 2

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ — بتعويض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3), [g \circ f](x), [f \circ g](x)$ في كل مما يأتي :

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

$$[f \circ g](x) = -3x^2 + 16$$

$$[g \circ f](x) = -9x^2 - 6x + 4$$

$$[f \circ g](3) = -11$$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

$$[f \circ g](x) = 6x^2 + 24x + 20$$

$$[g \circ f](x) = 6x^2 - 2$$

$$[f \circ g](3) = 146$$

بما أن مجال كل من f , g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $\{x \mid x \in R\}$

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x

في مجال g التي تكون صورها g(x) موجودةً في مجال f .

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين :

(a $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، لجميع قيم g(x)، التي

يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$ ؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل

$x^2 - 9 = -1$، و هي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ وعليه يكون مجال $f \circ g$

هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$

نجد الآن $[f \circ g](x)$

$$[f \circ g](x) = f\left[g(x)\right]$$ تعريف $f \circ g$

$$= f\left(x^2 - 9\right)$$ $g(x) = x^2 - 9$

$$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$$ بتعويض $\left(x^2 - 9\right)$ بدلاً من x في f(x)

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$ أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$

ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$

ومجالها $\left\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\right\}$

b) $f(x) = x^2 - 2 \, , g(x) = \sqrt{x-3}$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$ لجميع قيم x ، حيث $x \geq 3$

ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$ و نطرح منها 2 . وعليه يكون مجال $f \circ g$

هو $\{x \,|\, x \geq 3, x \in R\}$

نجد الآن $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f\left[g(x)\right]$ تعريف $f \circ g$

$= f\left(\sqrt{x-3}\right)$ $g(x) = x^2 - 9$

$= \left(\sqrt{x-3}\right)^2 - 2$ بتعويض $\sqrt{x-3}$ بدلاً من x في f(x)

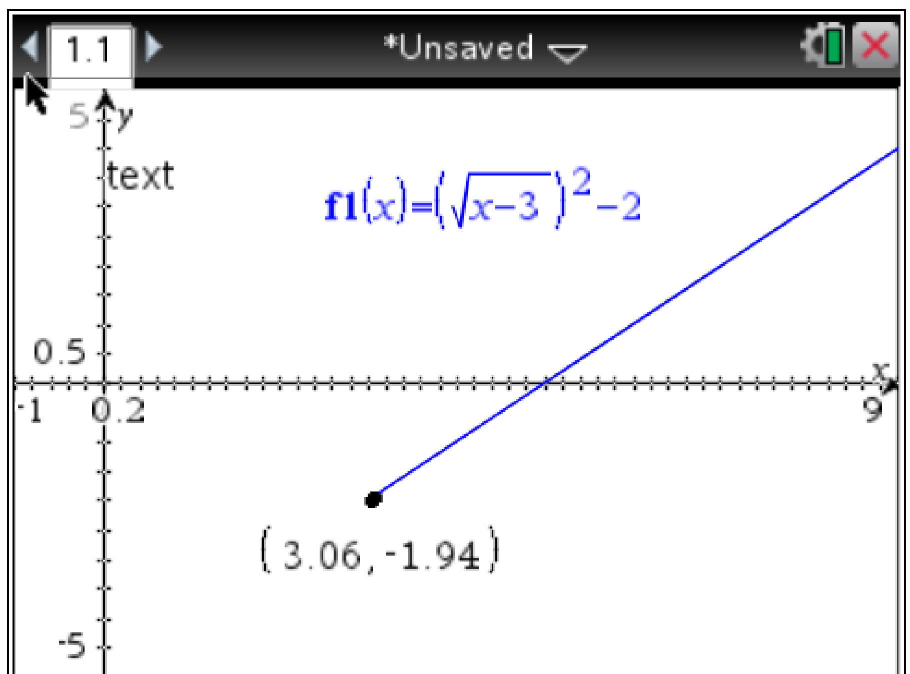
$= x - 3 - 2 = x - 5$ بالتبسيط

احظ أن مجال الدالة x – 5 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بشرط $x \geq 3$ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$

هو $\{x \mid x \ge 3, x \in R\}$

تحقق : استعمل الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة . أدخل الدالة $y = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 - 2$ فيظهر التمثيل جزءاً من المستقيم $y = x - 5$ استعمل الإمكانات المتاحة في الحاسبة البيانية بالضغط علي المفتاح :

علي تحديد مجال $f \circ g$ و الذي يبدأ عند x = 3 و يمتد إلي ∞



تحقق من فهمك

3A) $f(x)=\sqrt{x+1},\ g(x)=x^{2}-1$

$$[f\circ g](x)=x$$

ومجالها $\{x \mid x\in R\}$

3B) $f(x)=\sqrt{x+1},\ g(x)=x^{2}-1$

$$[f\circ g](x)=\frac{5}{x^{2}+x}$$

ومجالها $\{x \mid x\neq 0, x\neq -1, x\in R\}$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تكفيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h، فإنك تجد دالتين (f , g مثلاً) بحيث يكون تركيبهما هو h.

كتابة الدالة كتركيب دالتين

مثال 4

أوجد دالتين f , g بحيث يكون $h(x)=[f\circ g](x)$ ، وعلى ألاّ تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x)=x$ في كل مما يأتي:

a) $h(x)=\sqrt{x^3-4}$

لاحظ أن h هو الجذر التربيعي للدالة x^3-4 لذا فإننا نختار $g(x)=x^3-4, f(x)=\sqrt{x}$

أي أنه يمكننا كتابة h كتركيب للدالتين $g(x)=x^3-4, f(x)=\sqrt{x}$ و عندئذ :

$$h(x)=\sqrt{x^3-4}=\sqrt{g(x)}=f\left[g(x)\right]=[f\circ g](x)$$

(b $h(x)=2x^2+20x+50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x)=2\left(x^2+10x+25\right)=2\left(x+5\right)^2$

أي أنه يمكننا كتابة h(x) كتركيب للدالتين $g(x)=x+5, f(x)=2x^2$ **و عندئذ :**

$$h(x)=2(x+5)^2=2\left[g(x)\right]^2=f\left[g(x)\right]=[f\circ g](x)$$

تحقق من فهمك

(4A $h(x) = x^2 - 2x + 1$

$$f(x) = x^2, g(x) = x - 1$$

(4B $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x + 7$$

يمكنك استعمال تركيب دالتين لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة

علي شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية : تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة L + 40.

أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L(L+40) = L^2 + 40L$ حيث $L \geq 20$

. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن L(t) = 20 + 15t ،

حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة ؟

$$A \circ L = A\left[L\left(t\right)\right]$$ تعريف $A \circ L$

$$= A\left(20+15t\right)$$ $L\left(t\right) = 20+15t$

$$= \left(20+15t\right)^2 + 40\left(20+15t\right)$$ بتعويض $\left(20t+15t\right)$ بدلاً من L في A(L)

$$= 225t^2 + 1200t + 1200$$ بالتبسيط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن .

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية ؟

مساحة المستطيل الأصلي 60 x 20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$

وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو t = -6.88. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال L(t) ، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) أعمال : أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب .

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d.

$$c(x)=x-100,\ d(x)=0.85x$$

5B) أوجد $[c\circ d](x)$ و $[d\circ c](x)$ وماذا يعني كلّ منهما ؟

$$[c\circ d](x)=0.85x-100 \quad [d\circ c](x)=0.85x-85$$

$[c\circ d](x)$ تمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من الخصم أولاً ثم القسيمة

$[c\circ d](x)$ تمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من القسيمة أولاً ثم الخصم

5C) أي التركيبين $c\circ d$ و $d\circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك .

الاستفادة من الخصم أولاً ثم القسيمة أو $[c\circ d](x)$

يجعل السعر أقل ، فمثلاً إذا أراد طالب شراء حاسوب سعره 1000 ريال ، فأنه يدفع 750 ريالاً إذا استفاد من الخصم أولاً ثم القسيمة ، و يدفع 765 ريالاً إذا استفاد من القسيمة اولاً ثم الخصم .

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1)

1) $f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = \sqrt{x}$

$(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4;$

المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = x^2 - \sqrt{x} + 4$

المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$

المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$

المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

(2 $f(x) = 8 - x^3$

$g(x) = x - 3$

$$(f+g)(x) = -x^3 + x + 5$$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$$(f-g)(x) = -x^3 - x + 11$$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$$(f \cdot g)(x) = -x^4 + 3x^3 + 8x - 24$$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{8 - x^3}{x - 3}$$

المجال: $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

$g(x) = x + 2$

$(f+g)(x) = x^2 + 6x + 8$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = x^2 + 4x + 4$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 3$

المجال: $\{x \mid x \neq -2, x \in R\}$

4) $f(x) = x^2 + x$

$g(x) = 9x$

$(f+g)(x) = x^2 + 10x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = x^2 - 8x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 9x^3 + 9x^2$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{9}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0,\ x \in R\}$

(5 $f(x) = x - 7$

$g(x) = x + 7$

$(f+g)(x) = 2x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = -14$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = x^2 - 49$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-7}{x+7}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$

6)

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

$$g(x) = x^3 + x$$

$(f+g)(x) = x^3 + x + \frac{6}{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = -x^3 - x + \frac{6}{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 6x^2 + 6$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(\frac{f}{x})(x) = \frac{6}{x^4 + x^2}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

7)

$$f(x) = \frac{x}{4}$$

$$g(x) = \frac{3}{x}$$

$(f+g)(x) = \frac{x^2 + 12}{4x}$ ؛ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \frac{x^2 - 12}{4x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \frac{3}{4}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{12}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$g(x) = 4\sqrt{x}$

$(f+g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 4$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{4x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

9) $f(x) = \sqrt{x+8}$

$g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

$(f+g)(x) = \sqrt{x+8} + \sqrt{x+5} - 3$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+5} + 3$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2 + 13x + 40} - 3\sqrt{x+8}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5} - 3}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \neq 4, x \in R\}$

(10 $f(x)=\sqrt{x+6}$

$g(x)=\sqrt{x-4}$

$;(f+g)(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-4}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$;(f-g)(x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=\sqrt{x^2+2x-24}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$\{\frac{f}{g}\,(x)=\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 4, x \in R\}$

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](6)$ لكل زوج من الدوال الآتية.

(مثال 2)

11) $f(x) = 2x - 3$

$g(x) = 4x - 8$

$[f \circ g](x) = 8x - 19$

$[g \circ f](x) = 8x - 20$; $[f \circ g](6) = 29$

12) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$

$g(x) = -5x + 6$

$[f \circ g](x) = -50x^2 + 145x - 101$

$[g \circ f](x) = 10x^2 + 25x + 1$; $[f \circ g](6) = -1031$

13) $f(x) = x^2 - 16$

$g(x) = x^2 + 7x + 11$

$[f \circ g](x) = x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 154x + 105$

$[g \circ f](x) = x^4 - 25x^2 + 155$; $[f \circ g](6) = 7905$

14) $f(x) = 2 + x^4$

$g(x) = -x^2$

$[f \circ g](x) = 2 + x^8$; $[g \circ f](x) = -x^8 - 4x^4 - 4$

$[f \circ g](6) = 1679618$

حدِّد مجال $f \circ g$ ، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية:

(15 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$g(x) = x^2 - 4$

$\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\};\ (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$

(16 $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

$g(x) = x^2 + 6$

$\{x \mid x \in R\};\ (f \circ g)(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$

(17 $f(x) = \sqrt{x+4}$

$g(x) = x^2 - 4$

$\{x \mid x \in R\};\ (f \circ g)(x) = |x|$

(18 $f(x) = \dfrac{5}{x}$

$g(x) = \sqrt{6-x}$

$\{x \mid x < 6, x \in R\};\ (f \circ g)(x) = \dfrac{5}{\sqrt{6-x}}$

(19 $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

$g(x) = \sqrt{x+8}$

$$\{x \mid x > -8, x \in \mathrm{R}\}; (f \circ g)(x) = \frac{-4}{\sqrt{x+8}}$$

(20 $f(x) = \sqrt{x+5}$

$g(x) = x^2 + 4x - 1$

$$\{x \mid x \in \mathrm{R}\}; (f \circ g)(x) = |x+2|$$

21) النظرية النسبية: في النظرية النسبية $m(v) = \dfrac{100}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$،

حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية، و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية، وكتلته الأصلية $100\,kg$.

(مثال 4)

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برِّر إجابتك.

$\{v \mid 0 \le v < c, v \in R\}$؛ لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء؛ لأنك تحصل على $\dfrac{100}{0}$، وهي كمية غير معرفة. كذلك لا تكون v أكبر من c؛ لأنك تحصل على عدد سالب تحت الجذر التربيعي، وهذه كمية غير معرفة، وأخيرًا لا تكون السرعة أقل من صفر؛ لأن السرعة ليست سالبة.

b) أوجد $m(1000000)$, $m(10000)$, $m(10)$.

$$m(10) = 100 \text{ kg}; \; m(10000) \approx 100.0000001 \text{ kg};$$
$$m(1000000) \approx 100.0005556 \text{ kg}$$

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تقترب v من c من اليسار.

عندما تقترب v من c فإن $\frac{v^2}{c^2}$ تقترب من العدد1، ويقترب المقام من العدد صفر؛ أي أن $m\ (v)$ تقترب من ∞.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

إجابة ممكنة: $m\ (v) = f(g(v))$

$$f(v) = \frac{100}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$g\ (v) = \frac{v}{c}$$

أوجد دالتين f , g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$. (مثال 4)

22) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

$f(x) = \sqrt{x} + 7; g(x) = 4x + 2$

23) $h(x) = \dfrac{6}{x+5} - 8$

$f(x) = \dfrac{6}{x} - 8; g(x) = x + 5$

24) $h(x) = |4x + 8| - 9$

$f(x) = |x| - 9; g(x) = 4x + 8$

25) $h(x) = [-3(x-9)]$

$f(x) = [-3x]; g(x) = x - 9$

26) $h(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x+2}}$

$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \dfrac{5-x}{x+2}$

27) $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

$f(x) = x^3; g(x) = \sqrt{x} + 4$

28) $h(x) = \dfrac{8}{(x-5)^2}$

$f(x) = \dfrac{8}{x^2}; g(x) = x - 5$

29) $h(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-6}; g(x) = x + 4$

30) **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m kg، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$ ، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$.

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته.

$$f(v) = \frac{h}{25v}$$

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

قيمة v ليست صفرًا. وإذا كانت كذلك ، فلا يوجد طول موجة.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h.

$$\lambda = \frac{h}{200}$$

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

$$f(v) = a[b(v)] = \frac{h}{25v}, b(v) = 25v, a(v) = \frac{h}{v}$$

31) **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افرض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5)

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برر إجابتك.

$h[f(x)]$؛ تحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة.

6000 ريال

أوجد دالتين f, g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$.

32) $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2+1};\ g(x) = \sqrt{x-1}$$

33) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{9x}{7};\ g(x) = -7x$$

34) $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

34) $$f(x) = \frac{x-4}{2x-9} + \sqrt{\frac{4}{x-4}};$$
$$g(x) = x + 4$$

أوجد $f(x+1)$, $f(-6)$, $f(0.5)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك:

35) $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6,\ g(x) = x + 4$

$f(0.5) = -0.75, f(-6) = 22,$
$f(x+1) = x^2 + 4x + 1$

36) $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3},\ g(x) = 2x$

$f(0.5) = 8.7, f(-6) = 11.6,$
$f(x+1) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$

37) $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x},\ g(x) = \sqrt{1 - x}$

$f(0.5) = 2.4, f(-6) = 650.9,$
$f(x+1) = \sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 18 - \frac{\sqrt{2}}{x+1}$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ في كل مما يأتي:

(38 $f(x) = x + 8$

$g(x) = x^2 - 6$

$h(x) = \sqrt{x} + 3$

$$[f \circ g \circ h](x) = x + 6\sqrt{x} + 11$$

(39 $f(x) = \sqrt{x + 5}$

$g(x) = x^2 - 3$

$h(x) = \frac{1}{x}$

$$[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}$$

40) إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

a) $(f + g)(x) = x^2 + x + 6$

$g(x) = x^2 + 4$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$

$g(x) = 4x + 8$

41) إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

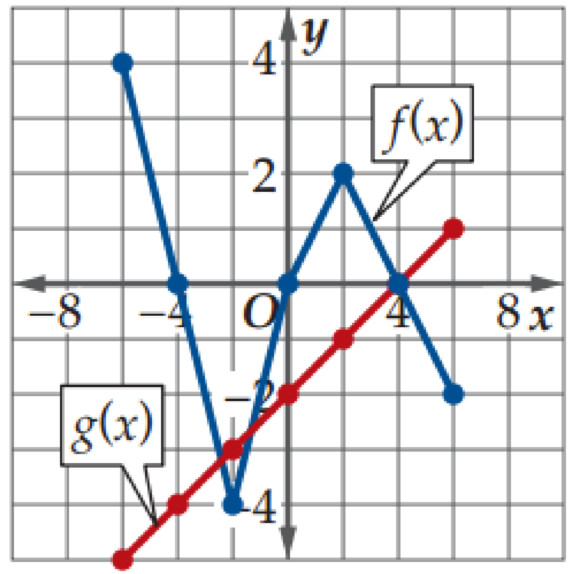
a) $[f \circ g](x) = |6x|$ $\qquad$ $g(x) = 9x^2$

b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$ $\qquad$ $g(x) = 50x^2 + 25$

42) إذا كان $f(x) = 4x^2$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

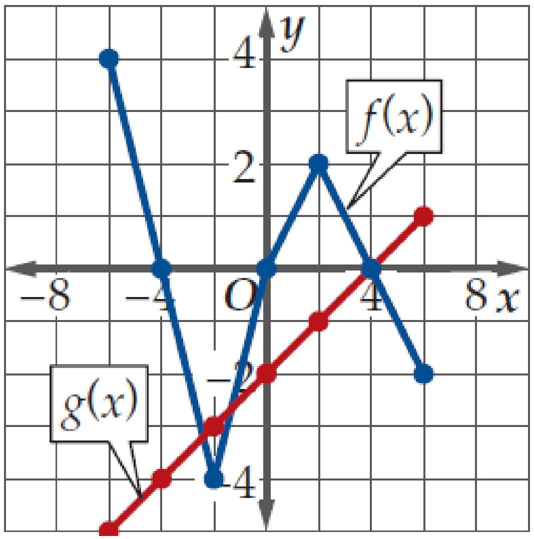
a) $[f \cdot g](x) = x$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{4x}$

b) $[f \cdot g](x) = 4x$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{x}$



$(f+g)(2)$ **(43**

باستعمال منحنيي الدالتين $f(x)$, $g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



43) $(f+g)(2)$ 1

44) $(f-g)(-6)$ 9

45) $(f\cdot g)(4)$ 0

46) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ $\frac{4}{3}$

47) $(f\circ g)(-4)$ 0

48) $(g\circ f)(6)$ -3

49) كيمياء: إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة $30°C$ بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m)=\sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$ ، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول.

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ فسر معناها.

$\{m|m>0, m\in R\}$؛ لا يمكن أن تكون كتلة جسم ما سالبة أو صفرًا.

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة $30°C$.

$7.22\,m/s$ تقريبًا

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

تتناقص سرعتها.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

إجابة ممكنة:

$v(m)=f\left(g(x)\right); f(m)=\sqrt{m}$

$g(m)=\frac{(24.9435)(303)}{m}$

أوجد ثلاث دوال f, g, h ، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

50) $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

$f(x) = x^2 ; g(x) = \sqrt{x} + 4;$
$h(x) = x - 7$

51) $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

$f(x) = \sqrt{x} ; g(x) = x^2 + 8;$
$h(x) = x - 5$

52) $a(x) = \dfrac{3}{(x-3)^2 + 4}$

$f(x) = \dfrac{3}{x} ; g(x) = x^2 + 4;$
$h(x) = x - 3$

53) $a(x) = \dfrac{4}{(\sqrt{x} + 3)^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{4}{x+1} ; g(x) = x^2;$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

أوجد $f \circ g,\ g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة:

(54 $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

$[f \circ g](x) = x$; ومجالها $\{x \neq x \geq -4, x \in R\}$

$[g \circ f](x) = |x-3| + 3$; ومجالها $\{x : x \in R\}$

(55 $f(x) = \sqrt{x+6}$

$g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

$[f \circ g](x) = \sqrt{\sqrt{16 + x^2} + 6}$; ومجالها $\{x : x \in R\}$

$[g \circ f](x) = \sqrt{x + 22}$ ومجالها $\{x \mid x \geq -6, x \in R\}$

(56 $f(x)=\sqrt{x}$

$g(x)=\sqrt{9-x^2}$

$[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{9-x^2}}$ ومجالها $\{x: -3\le x\le 3, x\in R\}$

$[g\circ f](x)=\sqrt{9-x}$ ومجالها $\{x \mid 0\le x\le 9, x\in R\}$

(57 $f(x)=\dfrac{6}{2x+1}$

$g(x)=\dfrac{4}{4-x}$

$$[f\circ g](x)=\frac{24-6x}{12-x}$$

ومجالها $\{x|x\neq 4, 12, x\in R\}$

$$[g\circ f](x)=\frac{4x+2}{4x-1}$$

ومجالها $\{x|x\neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, x\in R\}$

58) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

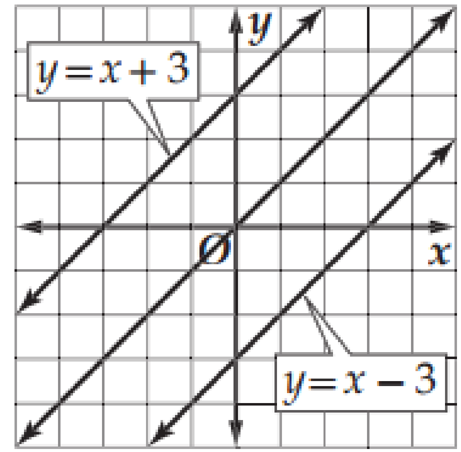
a) **جبريًا:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

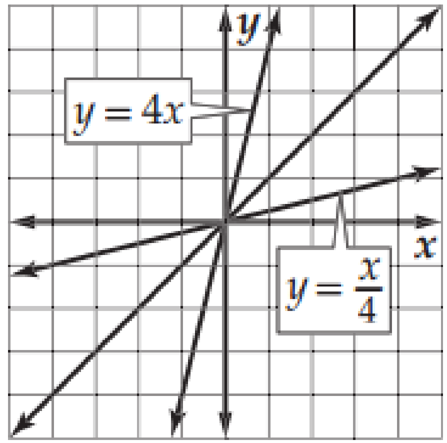
لكل دالة منها $[f \circ g](x) = x$

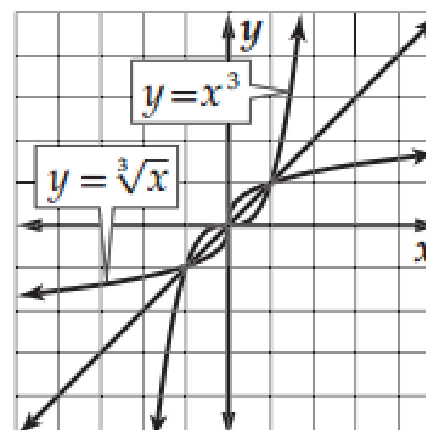
b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

إجابة ممكنة: لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معامِلات غير الواحد، ولا يبقى ثوابت.

c) **بيانيًّا:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم محور الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.







d) **لفظيًّا:** خمّن معادلة محور الانعكاس.

إجابة ممكنة: محور الانعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y = x$.

e) **تحليليًّا:** ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$؟

إجابة ممكنة: ويكافئ كل من التركيبين $[f \circ g](x)$ $[g \circ f](x)$ الدالة المحايدة.

f) تحليلياً : أوجد $g(x)$ بحيث يكون
$[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

a) $f(x) = x - 6$

$g(x) = x + 6$

c) $f(x) = x^5$

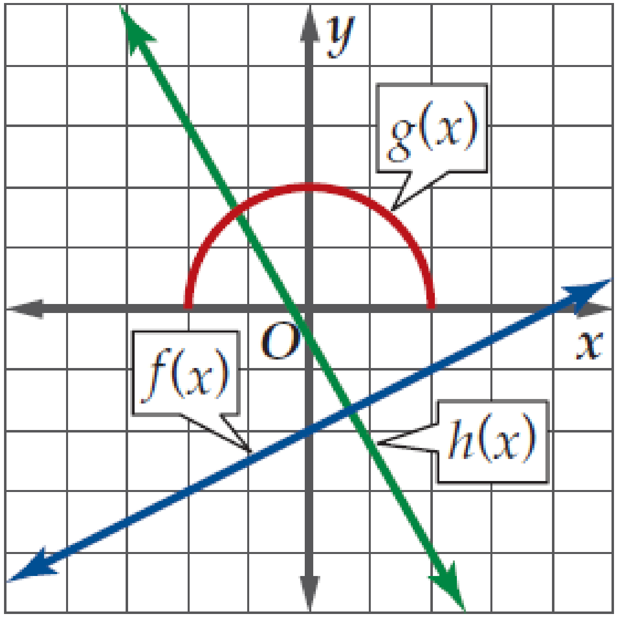
$g(x) = \sqrt[5]{x}$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$

$g(x) = 3x$

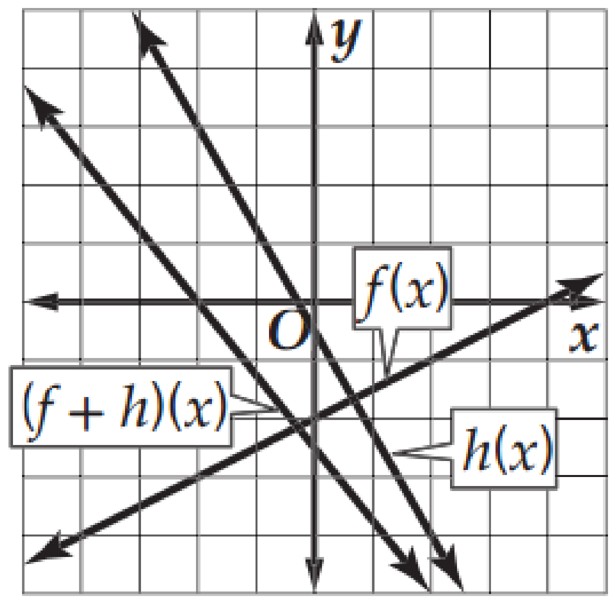
d) $f(x) = 2x - 3$

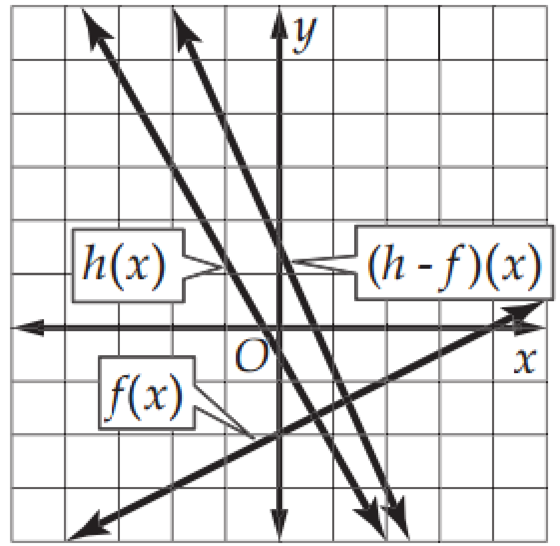
$g(x) = \frac{x+3}{2}$



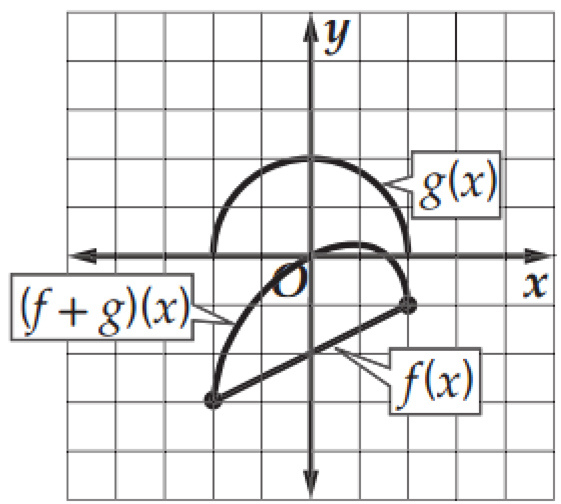
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 60 مثِّل الدوال $f, h, f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 63-61:

59) $(f+h)(x)$



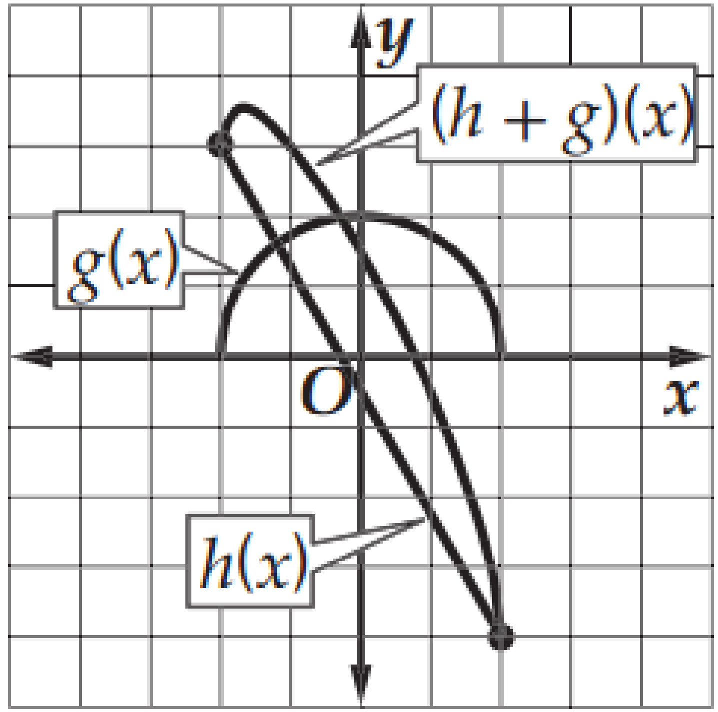


$(h - f)(x)$ **(60**

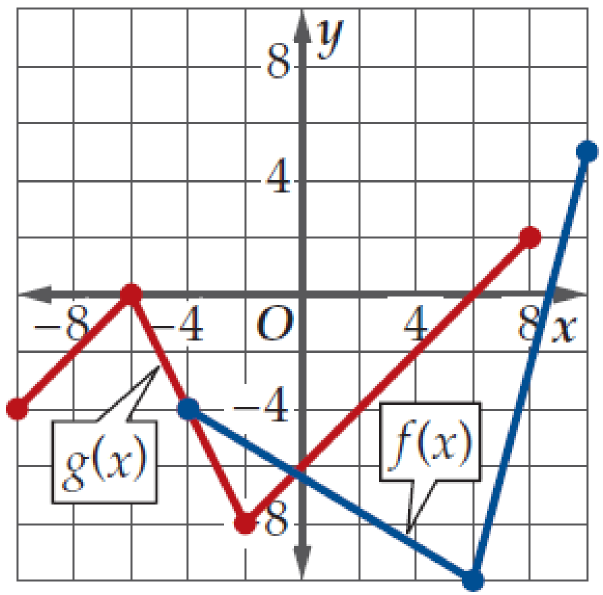


$(f + g)(x)$ **(61**

$(h + g)(x)$ **(62**



حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



63) $(f \circ g)(x)$

$g(x)$ معرّفة على $[-10, 8]$ و $f(x)$ غير معرفة عند قيم $g(x)$ حيث $x \in (-4 , 2)$، لذا فإن مجال الدالة هو:

$\{x \mid -10 \le x \le -4$ أو $2 \le x \le 8, x \in R\}$

64) $(g \circ f)(x)$

$f(x)$ معرّفة على $[-4 ,10]$ و $g(x)$ معرفة عند جميع قيم $f(x)$، لذا فإن مجال الدالة $(g \circ f)(x)$ هو:

$\{x \mid -4 \le x \le 10, x \in R\}$