بنك أسئلة التكامل

دورة 2021

سـوريانا التعليمية

Scanned with CamScanner

بنك أسئلة التكامل

دورة 2021

إعداد :

م . مروان بجور	حمص	0930170828
أ وسيم فاطمة	اللاذقية	0936497038
أ زياد داوود	سلمية	0936834286
أ أحمد الشيخ عيسى	الرقة	0998024183

سـوريانا التعليمية

Scanned with CamScanner

التمرين 1 :

❶ أثبت أن التابع $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ تابع أصلي للتابع $f(x)=\sqrt{x}$ على $]0,+\infty[$

❷ أيكون $F(x)$ تابعا أصليا للتابع $f(x)=\sqrt{x}$ على $[0,+\infty[$ ؟

التمرين 2 :

تحقق أنَّ G,F تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I

$$I=]\frac{5}{4},+\infty[\quad , \quad F(x)=\frac{2x^2-3x+7}{4x-5} \quad , \quad G(x)=\frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$$

التمرين 3 :

أثبت أن التابع F تابع أصلي للتابع على المجال I الموافق

1) $F(x)=x\ln x-x \quad , \quad f(x)=\ln x \ , \ I=]0,+\infty[$

2) $F(x)=\ln(\ln x) \quad , \quad f(x)=\frac{1}{x\ln x} \ , I=]1,+\infty[$

3) $F(x)=x-\ln(1+e^x) \ , \ f(x)=\frac{1}{1+e^x} \ , I=\mathbb{R}$

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

التمرين 4 :

في كل من الحالات التالية جد تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I الموافق

1) $f(x)=x^2\cdot\sin 2x \ , I=\mathbb{R}$
2) $f(x)=x\ln x\,dx \ , I=]0,+\infty[$
3) $f(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2} \quad I=\mathcal{R}_+^*$
4) $f(x)=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \quad I=]-1,+\infty[$
5) $f(x)=\cos 3x\,.\cos x \quad I=\mathcal{R}$
6) $f(x)=\sin^3 x\,.\cos^2 x \quad I=\mathbb{R}$
7) $f(x)=\frac{\ln x-1}{x^2} \quad I=\mathcal{R}_+^*$
8) $f(x)=\frac{1}{\sin 2x} \quad I=]0,\frac{\pi}{2}[$
9) $I=]-\infty,-2[, \quad f(x)=\frac{2x-1}{(x+2)^2}$
10) $f(x)=x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2} \quad I=\mathcal{R}$
11) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \quad I=]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$

سوريا التعليمية

Scanned with CamScanner

التمرين 5 :

في كل من الحالات التالية جد تابعاً أصلياً للتابع f والذي يحقق الشرط المعطى

1) $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$ **والذي يحقق** $F(0)=0$

2) $f(x)=\frac{1}{x}lnx$ **على المجال** $I=]1,+\infty]$ **الذي خطه البياني يمر بالنقطة** $(e^2,0)$

التمرين 6 :

أحسب التكاملات المحددة التالية

1) $I=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x dx$

2) $I=\int_{ln\,2}^{ln\,3}(x^2-1)e^x\,dx$

3) $I=\int_{-\pi/2}^{\pi}\sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$

4) $I=\int_1^e xlnx\,dx$

5) $I=\int_0^{\pi/3}x\sin 3x\,dx$

6) $I=\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$

7) $I=\int_0^2|x^2-1|\,dx$

8) $I=\int_0^1(x+2)e^x dx$

9) $I=\int_0^{ln2}e^x(1-e^x)dx$

10) $I=\int_0^1\frac{x}{x^2-4}dx$

11) $I=\int_0^1\frac{x}{(x^2-4)^2}dx$

12) $I=\int_0^1\frac{1}{x^2-x-6}dx$

13) $I=\int_0^1\frac{x}{x^2-x-6}dx$

14) $I=\int_0^1\frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}dx$

15) $I=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

16) $I=\int_1^e min(ln\,x\ ,x-1)\,dx$

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

سوريانا التعليمية

Scanned with CamScanner

التمرين 7 : دورة 2018 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x - 1$

1- جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$.

2- أحسب $\int_0^{ln2} f(x)dx$

التمرين 8 : الاختبار 4

ليكن التابع f المعزف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x.e^{-x}$ والمطلوب:

❶ احسب: $\int_0^{ln3} f(x)\,dx$

❷ أثبت أنّ التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة: $y' + y = e^{-x}$.

التمرين 98:

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a,b تحقق أن الخط البياني C_f للتابع f المعرف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x) = \min(x^2, 2-x)$

احسب التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ وقُل ماذا يُمثل هذا العدد ؟

احسب بالمثل $\int_0^1 h(x)\,dx$, $\int_0^2 g(x)\,dx$ في حالة

$g(x) = 1 - |1-x|$, $h(x) = \min(x^2, (x-1)^2)$ بعد رسم خطيهما البيانيين على مجال المُكاملة .

التمرين 10 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (2-x)e^x$

❶ ادرس تغيرات التابع f وارسم C .

❷ ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0\,, x = 2$ وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل . احسب مساحة S

❸ عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V .

عيِّن الأعداد a,b,c حتى يكون التابع $G: x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$

تابعاً أصلياً للتابع $x \mapsto (f(x))^2$. استنتج قيمة V

Scanned with CamScanner

التمرين 11 :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$

والمطلوب :احسب $I = \int_2^e f(x)dx$

التمرين 12 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{-x}$

أيوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F: x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$

التمرين 13 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3e^{2x}$,

جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x) = P(x)e^{2x}$ حيث P كثير حدود .

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

التمرين 14 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{2}{e^{2x}+1} + x + 1$

احسب $I = \int_2^e f(x)dx$

التمرين 15 :

ليكن التابع f المعرف على $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

❶ جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ أياً يكن x من D .

❷ احسب $J = \int_{-3}^0 f(x)\,dx$

التمرين 16 : النموذج الوزاري الثاني

ليكن f التابع المعرّف على $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x+1}$

❶ جد الأعداد a و b و c التي تحقّق: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ ، أيّاً كان x من D

❷ احسب: $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

Scanned with CamScanner

التمرين 17 : دورة 2017 الثانية , النموذج الوزاري الرابع

ليكن C لخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$

❶ اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$

❷ عيّن قيمة كلاً من a و b ثمّ أثبت أنّ المستقيم $y=ax+b$ مقارب في جوار $+\infty$.

❸ احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

التمرين 18 :

أثبت أن $\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$ واستنتج قيمة $J=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

التمرين 19 : دورة 2018 الأولى

ليكن $J=\int_0^{ln2}\frac{e^2}{e^2+2}dx$, $I=\int_0^{ln2}\frac{2}{e^2+2}dx$ والمطلوب :

❶ احسب J

❷ احسب $I+J$ ثم استنتج I

التمرين 20 :

نريد حساب $I=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$. احسب $J=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$ ثم $I+J$, واستنتج I .

التمرين 21 :

نريد حساب $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$. احسب $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ثم $I+J$ واستنتج I .

التمرين 22 : النموذج الوزاري الأول

أثبت صحّة المساواة $cos^2x.sin^2x=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}cos4x$ ثمّ احسب

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2x\,sin^2x\,dx$

Scanned with CamScanner

التمرين 23 :

باستعمال صيغتي $\sin^2 a$, $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$ أو بأي طريقة تراها مناسبة

❶ اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$, $\cos 4x$

❷ احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x \, dx$.

التمرين 24 :

G, F تابعان أصليان للتابعين $f: x \mapsto cos(ln\, x)$, $g: x \mapsto sin(ln\, x)$

على $]0, +\infty[$ ينعدمان عند $x = 1$. انطلاقاً من الصيغتين

$$F(x) = \int_1^x cos(ln\, t)\, dt \qquad G(x) = \int_1^x sin(ln\, t)\, dt$$

❶ أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أنَّ :

$$F(x) = x\, cos(ln\, x) - 1 + G(x) \quad , \quad G(x) = x\, sin(ln\, x) - F(x)$$

❷ استنتج عبارتي $F(x), G(x)$.

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

التمرين 25 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{2x} \cos x$

❶ احسب $f''(x), f'(x)$.

❷ عيِّن عددين b, a يحققان المساواة $f(x) = af'(x) + b\, f''(x)$ أياً كان x

❸ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

سوريانا التعليمية

التمرين 26 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = sin^4 x$

❶ احسب $f''(x), f'(x)$ واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 2x$.

❷ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

Scanned with CamScanner

التمرين 27 :

إثبات متراجحة

❶ **تيقن أنه بحالة** $0 < x < a$ **يكون** $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$.

❷ **استنتج أن** $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$ **في حالة** $a > 0$.

التمرين 28 :

نفترض أن b, a **عددان حقيقيان و أنّ** $0 \leq a < b \leq \pi$ **أثبت صحة المتراجحة**

$$\cos a - \cos b \geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b$$

التمرين 29 :

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ **وفق** $f(x) = x^2 - 1$

والمستقيم Δ **الذي معادلته** $y = x + 1$

والمطلوب :

❶ **جد مساحة السطح المحصور بين** C **و محور الفواصل**

والمستقيمين $x = 1$ **و** $x = 2$

❷ **جد مساحة السطح المحصور بين** C **و محور الفواصل**

والمستقيمين $x = 0$ **و** $x = 1$

❸ **جد مساحة السطح المحصور بين** C **و محور الفواصل**

والمستقيمين $x = 0$ **و** $x = 2$

❹ **جد مساحة السطح المحصور بين** C **و والمستقيم** Δ

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

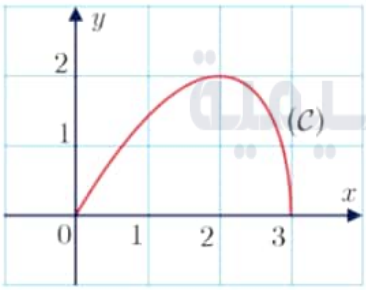
التمرين 30 : الاختبار 3

في الشكل المجاور (C) **هو الخط البياني للتابع** f

المعرّف على المجال $[0,3]$ **بالصيغة:** $f(x) = x\sqrt{3-x}$

عندما يدور (C) **دورة كاملة حول محور الفواصل**

يولّد مجسّماً دورانيّاً $\mathcal{S}$



❶ **ما طبيعة مقطع هذا المجسّم بمستوٍ عمودي على**

محور الفواصل

ويمر بالنقطة $I(x,0)$ **في حالة** $x \in]0,3[$ ؟

❷ **عيّن** $\mathcal{A}(x)$ ، **مساحة هذا المقطع بدلالة** x **ثمّ استنتج** $\mathcal{V}$ **حجم المجسّم** $\mathcal{S}$

Scanned with CamScanner

التمرين 31 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

❶ أوجد عددين حقيقيّن a و b يُحقّقان:

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

❷ بالاستفادة ممّا سبق ، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n\geq 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

ثم أوجد المشتق من المرتبة السادسة

❸ ادرس تغيّرات f على $\mathbb{R}$ ونظم جدولا بها

❺ ارسم الخط البياني C ومقارباته واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومقاربه الأفقي والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

التمرين 32 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{x}{2}+2\sin x$ والمطلوب :

❶ ادرس سلوك التابع f عند $+\infty$

❷ أوجد قيمة تقريبية للعدد $f(1000)$

❸ بيّن أنّ التابع f فردي، وأذكر الصفة التناظرية لخطه البياني C

❹ ادرس تغيّرات f على $[0,\pi]$ ونظم جدولا بها

❺ ارسم C في المجال $[-\pi,\pi]$ واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x=-\pi$ و $x=0$

التمرين 33 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=e^{-2x}+e^{-x}-2$

❶ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف وعين معادلة المقارب الأفقي

❷ أدرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه

❸ ادرس تغيّرات f على $\mathbb{R}$ ونظم جدولا بها

❹ أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ وأوجد هذا الحل جبريا

❺ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومقاربه الأفقي والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

Scanned with CamScanner

التمرين 34 :

ليكن C لخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = lnx$

❶ أوجد معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة فاصلتها $x = e^2$

❷ أثبت أن C يقع تحت جميع مماساته

❸ ليكن التابع g المعرّف على $]0, +\infty[$ وفق: $g(x) = \frac{x^2}{e^2} + 1 - lnx$

ادرس تغيرات ونظم جدولاً بها

❹ أثبت أن $G(x) = \frac{x^2}{2e^2} + 2x - xlnx$ هو تابع أصلي للتابع g واحسب مساحة السطح المحصور بين C و Tوالمستقيمين $x = e$ و $x = e^2$

التمرين 35 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

مروان بجور
زياد داوود
احمد الشيخ عيسى
وسيم فاطمة

أولا :

❶ بيّن أنّ التابع f فردي، وأذكر الصفة التناظرية لخطه البياني C

❷ ادرس تغيّرات f على $\mathbb{R}$

❸ اكتب معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي بين C و d

❹ ارسم C و d في معلم واحد

❺ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ مهما كانت $m \in \mathbb{R}$
ثم أثبت أنّ $\alpha = ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right)$

ثانيا :

ليكن C_1 الجزء من الخط البياني للتابع f المرسوم في المجال $[0 , \ln 2]$

❶ أحسب مساحة السطح المحدد بـ C_1 و xx' والمستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$

❷ يدور C_1 حول xx' دورة كاملة مولدا مجسما دورانيا حجمه $\mathcal{V}$

① ما طبيعة مقطع المجسم بمستو عمودي على محور الفواصل
في النقطة $I(x, 0)$ حيث $0 \leq x \leq \ln 2$

② جد مساحة هذا المقطع $\mathcal{A}(x)$

② استنتج حجم المجسم $\mathcal{V}$

Scanned with CamScanner