خلاصة بحث الأشعة في الفراغ

1) لإثبات ثلاث نقاط على استقامة واحدة نطبق ما يلي :

* نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين .

* نثبت أن شعاعين مرسومين منهما مرتبطان خطياً .

2) لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد نثبت ما يلي :

* ثلاث أشعة مرسومة منها مرتبطة خطياً . * نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد لبقية النقاط

3) معادلة كرة مركزها (x_0 , y_0 , z_0) ونصف قطرها R هي :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

4) معادلة كرة مركزها $O(0 , 0 , 0)$ ونصف قطرها R هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

5) معادلة مخروط :

* رأسه O ومحوره $(o , \vec{i})$ وقاعدته دائرة مركزها $(h , 0 , 0)$ ونصف قطرها r هي :

$$y^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}x^2 = 0 \ ; \ 0 \le x \le h$$

* رأسه O ومحوره $(o , \vec{j})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0 , h , 0)$ ونصف قطرها r هي :

$$x^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}y^2 = 0 ; \ \ 0 \le y \le h$$

* رأسه O ومحوره $(o , \vec{k})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0 , 0 , h)$ ونصف قطرها r هي :

$$x^2 + y^2 - \frac{r^2}{h^2} z^2 = 0 \ ; \ 0 \le z \le h$$

6) معادلة الأسطوانة :

* محورها $(o , \vec{i})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيها $(0 , 0 , a) , (0 , 0 , b)$ هي :

$$y^2 + z^2 = r^2 : a \le x \le b$$

* محورها $(o , \vec{j})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيها $(0 , a , 0) , (0 , b , 0)$ هي :

$$x^2 + z^2 = r^2 : a \le y \le b$$

* محورها $(o , \vec{k})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيها $(0 , 0 , a) , (0 , 0 , b)$ هي :

$$y^2 + x^2 = r^2 \ : a \le z \le b$$

7) إثبات توازي مستقيمين :

نثبت الارتباط الخطي لشعاع توجيه للمستقيم الأول مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني .

8) إثبات تقاطع مستقيمين :

① نبرهن أن شعاع توجيه للمستقيم الأول غير مرتبط خطياً مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني

② نبرهن أن المستقيمين يقعان في مستوٍ واحد .

9) فائدة الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

① إثبات انتماء اربع نقاط على مستوٍ واحد .

② إثبات توازي مستويين .

③ إثبات توازي مستقيم ومستوٍ

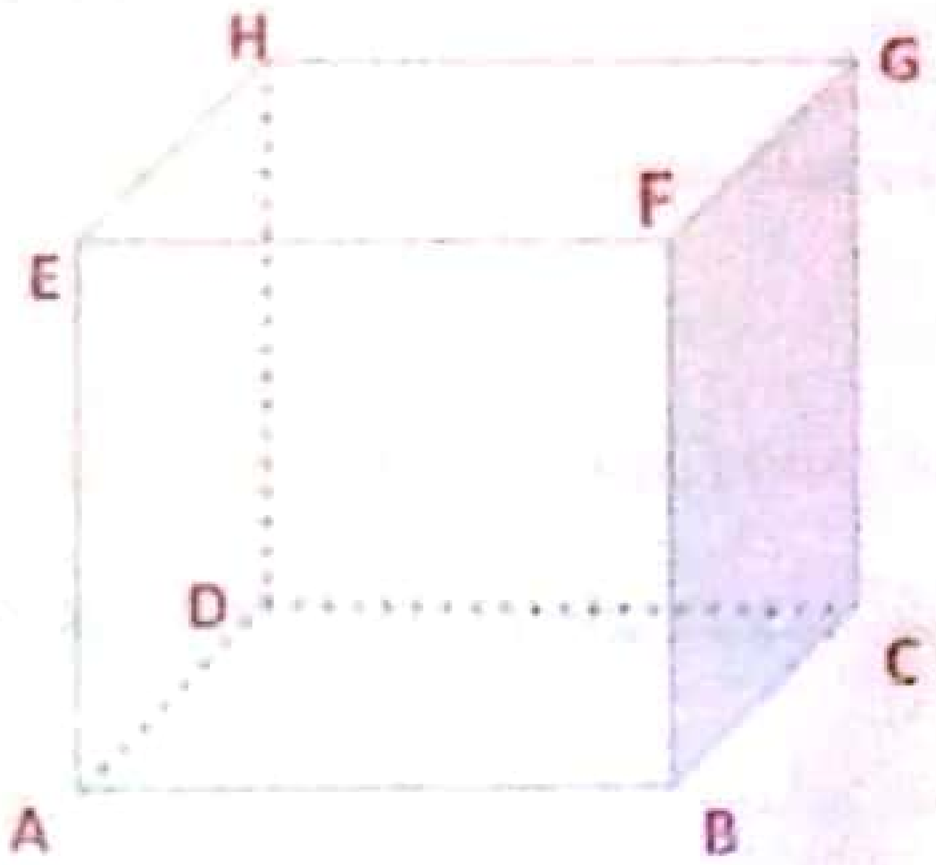
④ إثبات وقوع ثلاثة أشعة في مستوٍ واحد .

10) فائدة مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ :

① إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة

② إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد .

③ إثبات تقاطع مستقيمات



طول ضلعه (•) ABCDEFGH مكعب

لدينا معلم $\left(A, \frac{1}{•}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{•}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{•}\overrightarrow{AE}\right)$

A(0 , 0 , 0)

B(• , 0 , 0)

D(0 , • , 0)

E(0 , 0 , •)

C(• , • , 0)

F(• , 0 , •)

H(0 , • , •)

G(• , • , •)

فاصلة ترتيب راقم

نتائج:

① كل نقاط المستوي الأرضي D , C , B , A راقمها (0)

② كل نقاط المستوى الخلفي F , E , B , A ترتيبها (0)

③ كل نقاط المستوى اليساري H , E , D , A فاصلتها (0)

④ كل نقاط المستوي اليميني (المظلل) B , C , G , F فاصلتها (•)

⑤ كل نقاط المستوي العلوي H , G , F , E راقمها (•)

⑥ كل نقاط المستوي الأمامي G , H , C , D ترتيبها (•)

ملاحظات :

- يمكن ترميز المعلم السابق كما يلي $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$ بحيث $\left(•\vec{i} = \overrightarrow{AB}, •\vec{j} = \overrightarrow{AD}, •\vec{K} = \overrightarrow{AE}\right)$
- إذا كان طول ضلع (حرف) المكعب يساوي (2) مثلاً ..فإننا نضع عوضاً عن (•) في الإحداثيات السابقة العدد (2)
- إذا كان طول الضلع يساوي (2) نرمز للمعلم بالشكل $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ أو كما يلي :

$(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$ حيث $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = 2\vec{k}$

الارتباط الخطي لشعاعين :

شرطه هو : $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ حيث λ عدد حقيقي

$$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$$

$\vec{u}, \vec{v}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow$ المركبات متناسبة.

نتائــج:

1- الارتباط الخطي لشعاعين : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

يعني أن المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

2- الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً فالنقاط A,B,C على استقامة واحدة.

مثال امتحاني: ليكن لدينا النقاط.:

$$A(2,1,0), B(3,2,-1), C(0,2,-5)$$

هل النقاط A, B, C على استقامة واحدة؟

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2,1,-5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-2} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \neq 1$$

المركبات غير متناسبة فالنقاط ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستو

نتيجة هامة :

3 نقاط ليست على استقامة واحدة .. تعين مستو.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

لاثبات أن ثلاثة اشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطة خطياً نثبت أنه يوجد

عددان حقيقيان α, β يحققان العلاقة : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

تمرين امتحاني

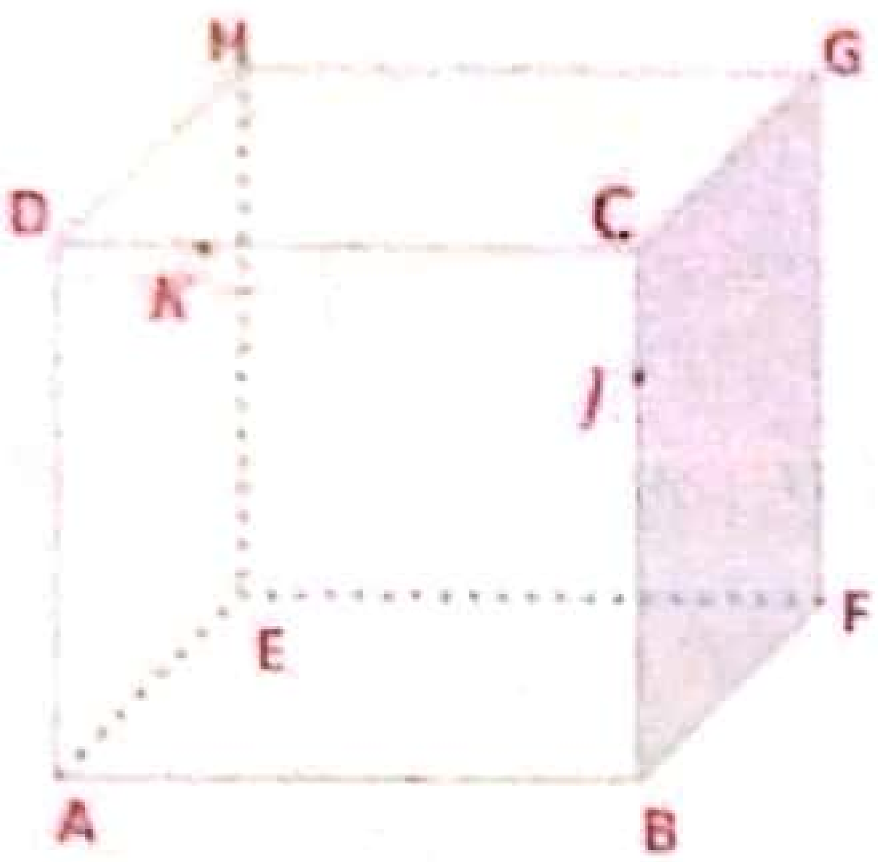
ABCDEFGH مكعب حيث K نقطة من CD تحقق: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة $J \in BC$ بحيث : $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

المطلوب: 1) جد إحداثيات النقط H , E , J , K , G في المعلم $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AD})$.

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ} , \overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً.

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ} , \overrightarrow{EG} , \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً.

4) استنتج أن المستقيم HK يوازي (EGJ).



الحل:

1) $J\left(1, 0, \frac{3}{4}\right)$ $\quad H(0, 1, 1)$

$K\left(\frac{1}{4}, 0, 1\right)$ $\quad E(0, 1, 0)$ $\quad G(1, 1, 1)$

2) $\overrightarrow{EG}(1, 0, 1)$, $\overrightarrow{EJ}\left(1, -1, \frac{3}{4}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{0}{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$1 \neq 0$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً.

*طريقة لإيجاد حداثيات K: نفرض $K(x , y , z)$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$(x - 0 , y - 0 , Z - 1) = \frac{1}{4}(1, 0, 0)$$

$$(x, y, Z - 1) = \left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \\ Z - 1 = 0 \Rightarrow Z = 1 \end{array}\right\} K\left(\frac{1}{4}, 0, 1\right)$$

3) $\overrightarrow{HK} = \propto \overrightarrow{EJ} + \beta \overrightarrow{EG}$

ونحسب $\beta, \propto$

$$\left(\frac{1}{4}, -1, 0\right) = \propto \left(1, -1, \frac{3}{4}\right) + \beta(1, 0, 1)$$

$$\left(\frac{1}{4}, -1, 0\right) = \left(\propto, \propto, \frac{3}{4}\propto\right) + (\beta, 0, \beta)$$

$$\left(\frac{1}{4}, -1, 0\right) = \left(\propto + \beta, -\propto + 0, \frac{3}{4}\propto + \beta\right)$$

$$\propto + \beta = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$-\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 1 \quad ②$$

$$\frac{3}{4}\alpha + \beta = 0 \quad ③$$

من العلاقة ② نعوض في ①،

$$1 + \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{4}$$

نعوض في ③

$$\frac{3}{4}(1) + \left(\frac{-3}{4}\right) = 0$$

محقق $0=0$

$$\overrightarrow{HK} = 1\overrightarrow{EJ} - \frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$$

فالاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

4) من الطلب السابق: لدينا الاشعة $\overrightarrow{EG}$ و$\overrightarrow{EJ}$ و$\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً وفيه المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ) أي:

(HK) \\ (EGJ)

معادلة المستوي

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

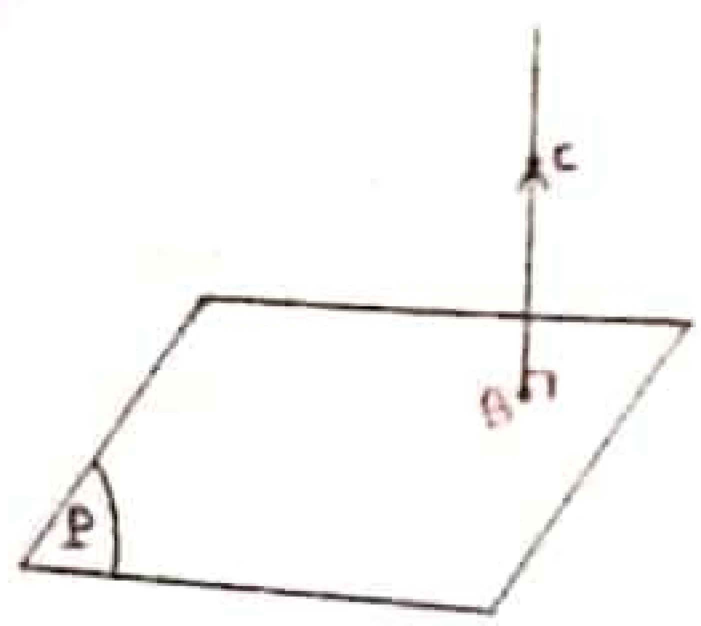
النقطة

حالات معادلة المستوي

1) معادلة مستوٍ يمر من نقطة و ناظم معلوم (يعامد شعاع معلوم):

نعوض مباشرة في معادلة المستوي

مثال: عيّن مستوٍ يمر بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{BC}$ ناظماً، حيث $B(+2,-1,0)$, $C(-1,2,1)$



$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-3,3,1)$$

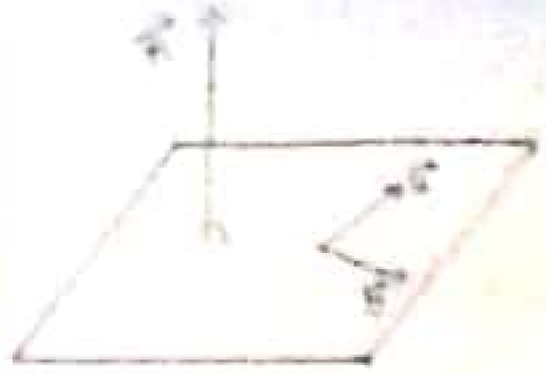
$$\Rightarrow a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$\Rightarrow -3(x-2) + 3(y+1) + 1(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 3y + 6 + 3 + z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: -3x + 3y + z + 9 = 0}$$

2) معادلة مستوي P من ثلاث نقاط أو (علم شعاعا توجيهه $\vec{v},\vec{u}$ ومر بنقطة):



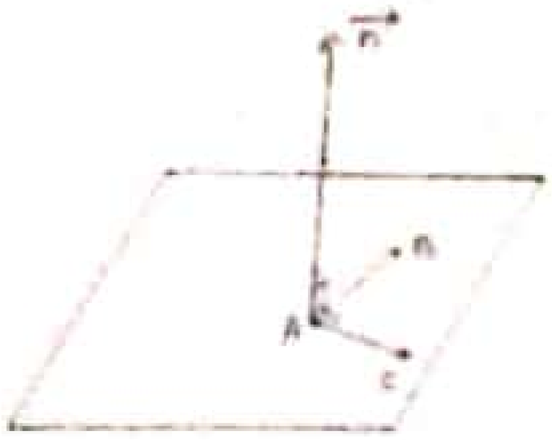
1) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم.

2) $\vec{n}\perp\vec{u} \Leftarrow ax_1+by_1+z_1=0$ *

3) $\vec{n}\perp\vec{v} \Leftarrow ax_2+by_2+cz_2=0$ **

4) نفرض عدد = c ونعوض في * و ** ونحل حل مشترك فنحسب a,b ثم نعوض في معادلة المستوي.

مثال



ليكن لدينا النقاط التالية:

$A(1,2,3)\,,B(2,1,2)\,,C(3,3,1)$

المطلوب:

1) اثبت أن النقاط C ,B,A تعين مستو.

2) عين شعاع ناظم على المستوي (ABC).

3) أكتب معادلة للمستوي (ABC).

الحل: $\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(2,1,-2)$

$$\frac{1}{2}=\frac{-1}{1}=\frac{-1}{-2}\Rightarrow\frac{1}{2}\neq-1$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً فالنقاط C ,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستو

2-شعاعا توجيه المستوي هما:

$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)\ ,\overrightarrow{AC}(2,1,-2)$

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow\boxed{a-b-c=0}$ *

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

$\boxed{2a+b-2c=0}$ **

نفرض $c=1 \Leftarrow$ نعوض في * :

$\boxed{a-b-1=0}$ *

$\boxed{2a+b-2=0}$ **

بالجمع نجد : $3a-3=0\Rightarrow3a=3$ فإن $a=1$

نعوض في * : $1-b-1=0\ \Rightarrow b=0$

$\Rightarrow\vec{n}=(1,0,1)$

$\Leftarrow$ **معادلة المستوي :**

$\Rightarrow1(x-1)+0(y-2)+1(z-3)=0$

$\Rightarrow x-1+z-3=0$

$\Rightarrow\boxed{P: x+z-4=0}$

هام جداً :

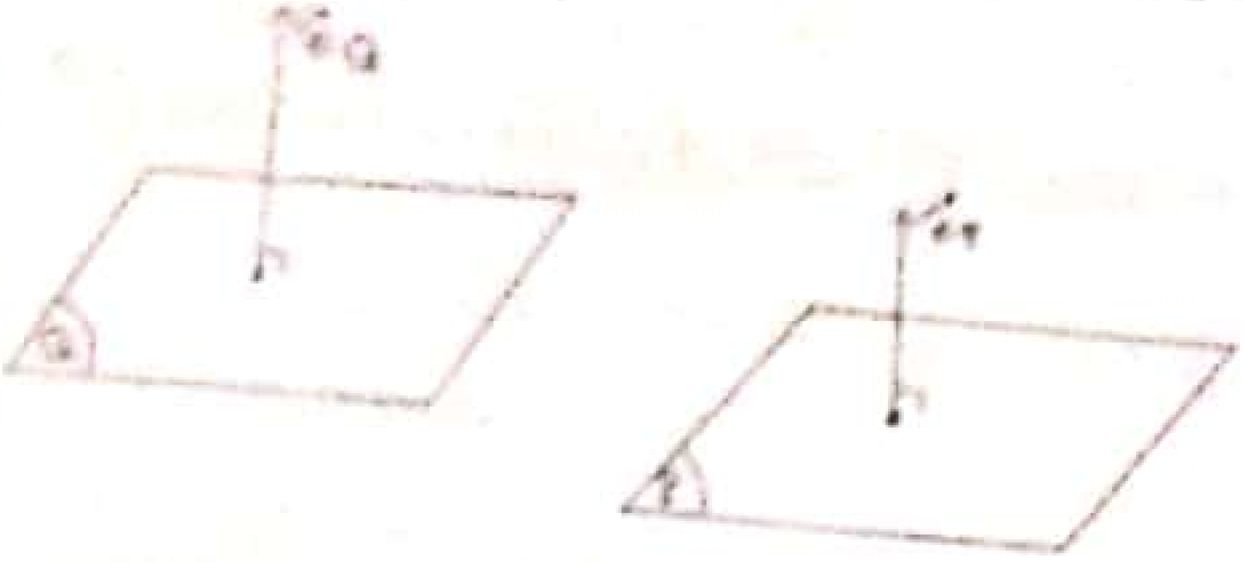
راجع نوطة النماذج 25 الشاملة النهائية لمركز أونلاين يمكن طلبها من مكتبة الأمل 0959458194

ملاحظة هامة :

لإيجاد البعد بين مستويين متوازيين نوجد نقطة من أحدهما ثم نحسب بعدها عن المستوي الآخر

وظيفة

أوجد معادلة مستوي مار بالنقطة $A(2,0,1)$ ويقبل $\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,-2,1)$ شعاعي توجيه لها



3) معادلة مستوي يمر من نقطة ويوازي مستو معلوم :

نعتبر ناظم المستوي المعلوم هو ناظم المستوي المطلوب

لأن (المستويان المتوازيان ناظماهما مرتبطان خطيا)

ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي ثم ننشر

مثال

اكتب معادلة المستوي P المار بالنقطة $A(1,-1,2)$ ويوازي المستوي $Q: 2x + y + 8z - 4 = 0$

الحل : لدينا $Q \parallel P$ اذا $\vec{n}_Q = \vec{n}_p = (2,1,8)$

$$\Rightarrow 2(x-1) + (y+1) + 8(z-2) = 0$$

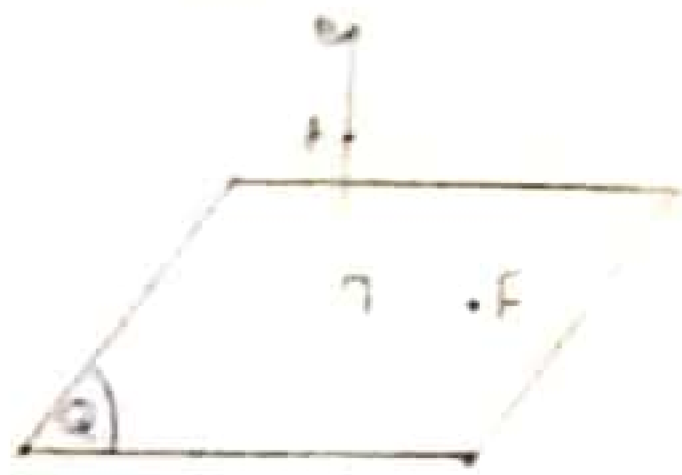
$$\Rightarrow P: 2x + y + 8z - 17 = 0$$

4) معادلة مستوي يمر من A ويعامد مستقيم (BC) :

نعتبر شعاع توجيه المستقيم هو الناظم أي : $\vec{BC} = \vec{n}$ ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي

مثال

اكتب معادلة مستوي Q يمر بالنقطة $F(1,-2,4)$ و يعامد المستقيم (AB) حيث $A(3,0,-3)$ و $B(-1,-3,2)$



الحل : $\vec{n} = \vec{AB} = (-4,-3,5)$

$$\Rightarrow Q: -4(x-1) - 3(y+2) + 5(z-4) = 0$$

$$\Rightarrow Q: -4x - 3y + 5z - 22 = 0$$

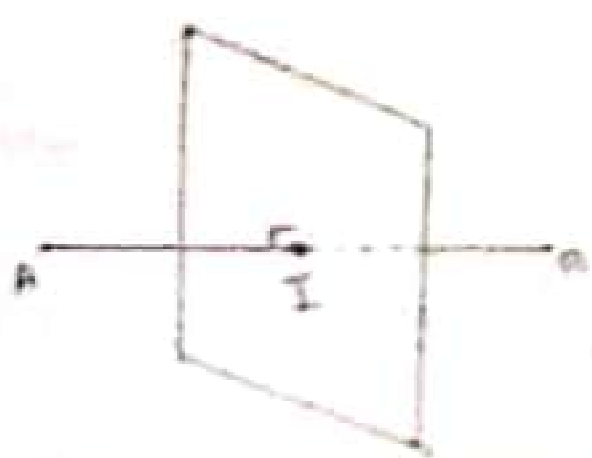
5) معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$

نعتبر الناظم $\vec{n} = \vec{AB}$ و النقطة هي I منتصف القطعة $[AB]$

مثال

أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث : $A(1,1,2)$ و $B(3,-1,4)$

الحل : $\vec{n} = \vec{AB}\,(x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A) \quad \Rightarrow \vec{n}\,(2,-2,2)$



النقطة التي يمر منها المستوي هي I منتصف $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_B + z_A}{2}\right) \Rightarrow I(2,0,3)$$

$$2(x-2) - 2(y-0) + 2(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + 2z - 10 = 0 \Rightarrow x - y + z - 5 = 0$$

6) معادلة مستوي يمر من نقطة و يعامد مستويين P, Q :

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب فيكون : $\vec{n} \perp \vec{n_P}$ و $\vec{n} \perp \vec{n_Q}$ فنعود للحالة (2)

مثال

أوجد معادلة المستوي R المار بالنقطة $A(1,1,3)$ والذي يعامد المستويين Q, P حيث :

$$Q: x - y + 2z + 3 = 0 \quad , \quad P: 2x + z - 1 = 0$$

الحل : نفرض $\vec{n_R}(a,b,c)$ فيكون :

$$\vec{n_R} \perp \vec{n_P} \Rightarrow \vec{n_R} \cdot \vec{n_P} = 0 \Rightarrow 2a + c = 0 \quad ①$$

$$\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \Rightarrow \overrightarrow{n_R} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0 \quad ②$$

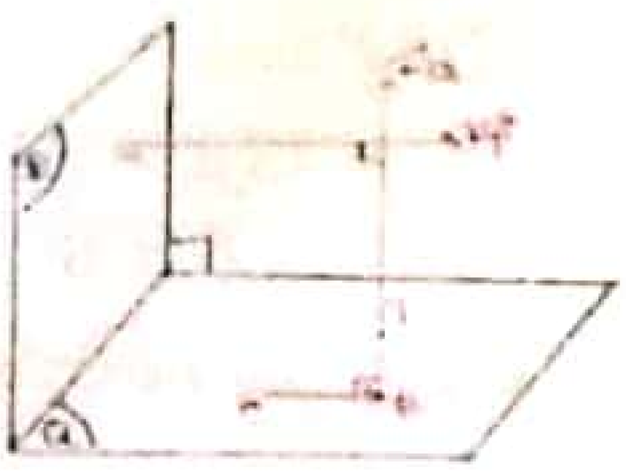
بفرض $c = 1$ نحل المعادلتين فينتج $a = \frac{-1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Rightarrow R: -x + 3y + 2z - 7 = 0$$

7) معادلة مستوي يمر من نقطتين ويعامد مستوي :

نفرض ناظم يعامد ناظم المستوي المعطى فنتج علاقة و يعامد الشعاع المار من النقطتين فتنتج علاقة ثانية فنعود للحالة(2)

مثال اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ عموديا على المستويP حيث : $P: 2x - 3y + z - 5 = 0$



الحل : $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$, $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ فيكون :

$$n_Q \perp n_P \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow 2a - 3b + c = 0 \quad ②$$

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -3a + 4b + 5c = 0 \quad ①$$

بفرض $c = 1$ فيكون $a = 19$, $b = 13 \Leftarrow Q: 19x + 13y + z - 25 = 0$

8) معادلة مستوي يمس كرة في نقطة منها :

نعتبرالناظم هو الشعاع المار من نقطة التماس ومركز الكرة والنقطة هي نفسها نقطة التماس

مثال لتكن لدينا الكرة S التي معادلتها $S: x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$
اكتب معادلة المستوي المماس للكرة في النقطة $A(1,1,0)$

الحل : مركز الكرة $\Omega(0,-2,-1)$, ونقطة التماس $A(1,1,0)$

$\overrightarrow{\Omega A}(1,3,1)$

$$\Rightarrow (x-1) + 3(y-1) + (z-0) = 0 \Rightarrow x + 3y + z - 4 = 0$$

الكرة

هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة

النقطة الثابتة : مركز الكرة **البعد الثابت** : نصف القطر

معادلة الكرة : $(x - x_{\text{المركز}})^2 + (y - y_{\text{المركز}})^2 + (z - z_{\text{المركز}})^2 = R^2$

9) معادلة مستوي يمر من اربع نقاط A, B, C, D :

نوجد معادلة المستوي المار من النقاط A, B, C ثم نبرهن أن D تنتمي للمستوي (نعوض)

اشكال معادلة الكرة

1) كرة علم مركزها ونصف قطرها :

نعوض في المعادلة مباشرة دون فك الأقواس

مثال اكتب معادلة كرة مركزها $(1,0,-2)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{3}$

الحل : نعوض في المعادلة : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=3$$

2) كرة علم مركزها وتمر بنقطة :

نحسب نصف القطر وهو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة المعطاة و مركز الكرة

مثال اكتب معادلة كرة مركزها $\Omega(1,0,-2)$ وتمر بالنقطة $A(-2,1,1)$

الحل : $R=\Omega A=\sqrt{(-2-1)^2+(1-0)^2+(1+2)^2}$

$$R=\sqrt{9+1+9}$$

ومنه $R=\sqrt{19}$ نعوض في المعادلة : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=19$$

3) كرة علم طرفا قطرها :

نحسب نصف القطر $\left(R=\frac{\text{طول القطر}}{2}\right)$ ونحسب احداثيات المركز من قانون احداثيات منتصف قطعة مستقيمة (منتصف طرفا القطر)

مثال اكتب معادلة كرة طرفا قطرها $B(1,0,-2)$ و $A(2,1,1)$

الحل : $R=\frac{BA}{2}=\frac{\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(1+2)^2}}{2}\Longrightarrow R=\frac{\sqrt{1+1+9}}{2}$

ومنه $R=\frac{\sqrt{11}}{2}$ و احداثيات المركز Ω هي $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

نعوض في المعادلة : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$

> هام جداً : لبرهان كرة تمس مستوي نثبت أن بعد مركز الكرة عن المستوي يساوي نصف القطر

4) كرة علم مركزها وتمس مستوي في نقطة :

R هو البعد بين مركز الكرة والمستوي

مثال لتكن النقطة $A(2,1,0)$ والمستوي P الذي معادلته :

$P: 3x-y+2z-1=0$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس P

الحل : $R=dist(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\vec{n}(3,-1,2) \text{ و } d=-1$$

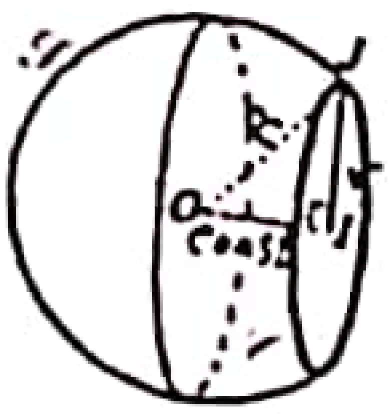
$$\Rightarrow R=\frac{|(3)(2)+(-1)(1)+(2)(0)-1|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{16}{14}$$

الوضع النسبي لمستقيم وكرة :

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة الكرة ثم نحل المعادلة الناتجة عن طريق المميز Δ ونميز ثلاث حالات :

1) $\Delta < 0$: مستحيلة الحل فالمستقيم لايقطع الكرة (خارج الكرة)
2) $\Delta = 0$: يوجد حل وحيد والمستقيم مماس للكرة في نقطة نحصل عليها بتعويض قيمة الحل في المعادلات الوسيطية
3) $\Delta > 0$: يوجد حلين فالمستقيم يقطع الكرة في نقطتين مختلفتين نحصل عليهما بتعويض قيم الحلول في التمثيل الوسيطي



الوضع النسبي لمستوي وكرة :

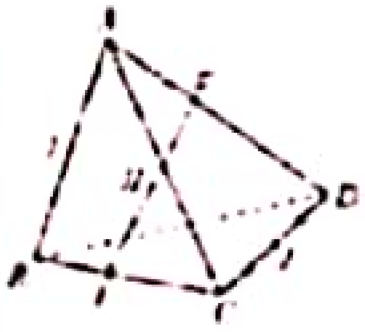
نحسب البعد $dist$ بين مركز الكرة والمستوي ونميز مايلي :

1) $dist > R$: المستوي خارج الكرة (غير قاطع)
2) $dist = R$: المستوي مماس للكرة
3) $dist < R$: المستوي قاطع للكرة في دائرة مركزها هو المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي ونصف قطرها يحسب بفيثاغورث $r = \sqrt{R^2 - (dist)^2}$

مركز الأبعاد المتناسبة

- يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α), (B,β) إذا تحقق :
  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ حيث $\alpha + \beta \neq 0$
- إذا كان G (م.أ.م) للنقاط (A,α), (B,β) فإن : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\beta+\alpha}\overrightarrow{AB}$ علاقة الإنشاء
- يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (C,γ), (A,α), (B,β) إذا تحقق :
  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ حيث : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
- يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (D,δ), (C,γ), (A,α), (B,β) إذا تحقق :
  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ حيث : $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$

دورة 2017 $ABCD$ رباعي وجوه و $\propto$ عدد حقيقي ولدينا I,J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$, $[CD]$ و E,F نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{BF} = \propto \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \propto \overrightarrow{AD}$ و اخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أن I,J,H تقع على استقامة واحدة الباك مستو يمر من اربع نقاط



الحل : $\overrightarrow{BF} = \propto \overrightarrow{BC}$ ومنه F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,\propto -1)$ $(C,\propto)$

$\overrightarrow{AE} = \propto \overrightarrow{AD}$ ومنه E (م.أ.م)للنقطتين $(A,1-\propto)$ $(D,\propto)$

ولكن H (م.أ.م) للنقطتين $(E,1)$ $(F,1)$ ومنه $(H,2)$ (م.أ.م) لرؤوس رباعي الوجوه حسب الخاصة التجميعية

$(I,2-2\propto)$ (م.أ.م) للنقاط $(A,1-\propto)$ $(B,1-\propto)$

$(J,2\propto)$ (م.أ.م) للنقاط $(D,\propto)$ $(C,\propto)$

ومنه H (م.أ.م) للنقاط $(J,2\propto)$ $(I,2-2\propto)$ فالنقاط I,J,H على استقامة واحدة

فائدة استخدام مركز الأبعاد

1. اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

⇐ يجب أن نثبت أن إحداهما هي مركز الأبعاد للنقطتين الآخريين

2. اثبات وقوع اربع نقاط في مستو واحد

⇐ يجب أن نثبت أن إحداهما هي مركز الأبعاد للنقاط الثلاث الأخرى

3. اثبات تقاطع مستقيمات في نقطة

⇐ يجب أن نثبت وجود مركز أبعاد مشترك بين نقطتين من كل مستقيم

تحديد مجموعة النقاط

تحديد مجموعة النقاط من الشكل : $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$

نتمم الطرف الأيسر إلى مربع كامل فتصبح من الشكل :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = const$$

عندها نميز ثلاث حالات :

1) $const > 0$: تمثل كرة مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $R = \sqrt{const}$

2) $const = 0$: تمثل نقطة (x_0, y_0, z_0)

3) $const < 0$: تمثل مجموعة خالية $\emptyset$

مثال في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ عين مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ من الفراغ

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

الحل :

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 6y + 9 - 9 + z^2 = 2$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 12$$

ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها $\Omega(1, -3, 0)$ ونصف قطرها $2\sqrt{3}$

تحديد مجموعة نقاط من الفراغ التي تحقق : $\| \quad \| = \| \quad \|$:

- $\|\overrightarrow{MA}\| = const$ ⇐ مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها A و نصف قطرها $R = const$
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ ⇐ مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها A و نصف قطرها $[AB]$
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ ⇐ مجموعة النقاط تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

مثال ليكن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,2),(C,-1)$ ماطبيعة مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{15}$

الحل : بما أن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,2),(C,-1)$ فإن :

$$\|3\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{15}\Rightarrow\|\overrightarrow{MH}\|=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

ومنه مجموعة النقاط M تبعد عن نقطة ثابتة H بعدا ثابتا $\frac{\sqrt{15}}{3}$ فهي تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{15}}{3}$

ملاحظة : ممكن فرض مركز أبعاد متناسبة للنقاط في حال لم يرد ذلك في طلبات سابقة

وظيفة $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC..جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

مسألة امتحانية شاملة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0)\ ,B(4,3,-3),C(-1,1,2),D(0,0,1)$
المطلوب :

1. أثبت أن $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ..وهل النقاط $A,B\ ,C$ على استقامة واحدة
2. جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$
3. جد احداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة I
4. جد احداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
5. هل المثلث ABC قائم ..فسر ذلك .
6. هل النقطة $F(2,3,-1)$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$
7. أوجد معادلة كرة مركزها A و تمر من D
8. جد على محور التراتيب نقطة M' متساوية البعد عن D,B
9. أوجد النقطة $K(x,y,z)$ بحيث يكون $ABCK$ متوازي اضلاع
10. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا .
11. استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث أن α,β,γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها
12. هل تقع E,D,C,B على كرة واحدة مركزها A؟؟
13. صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق احداثياتها العلاقات $2\le z\le 5,x^2+y^2=16$
14. $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD
أثبت أن النقاط $C\ ,A\ ,K$ تقع على استقامة واحدة وعيّن موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$

الحل :

1. $\overrightarrow{AB} = (3,3,-3)$ ، $\overrightarrow{AC} = (-2,1,2)$ فالشعاعان غير مرتبطان لعدم تناسب المركبات

2. $I(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-3}{2})$

3. $\frac{5}{2} = \frac{1+x_E}{2} \Rightarrow x_E = 4$

$\Rightarrow y_E = 3 \ , \ z_E = -3$

4. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \\ z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$x - 4 = 7 \Rightarrow x = 11 \ , y - 3 = 1 \Rightarrow y = 4 \ , z + 3 = -7 \Rightarrow z = -10$

$M(11,4,-10)$

5. حسب عكس فيثاغورث المثلث قائم

6. الشرط $[FB] = [FA] \Leftarrow \sqrt{11} \neq \sqrt{8}$ لا تنتمي إلى المستوي المحوري

7. $(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2$

8. نفرض $M'(0,y,0) \Leftarrow BM' = DM'$

$\sqrt{16 + (y-3)^2 + 9} = \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow y = 5.5$

9. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow K(-4,-2,5)$

10. فالأشعة مرتبطة خطيا $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

11. $\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 9\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow -7\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = 0$

12. الشرط $AE = AD = AC = AB$

13. مجموعة النقاط تمثل أسطوانة محورها $(\overline{OK})$ ونصف قطرها $r = 4$ و مركزي قاعدتيها $(0,0,2)$ ، $(0,0,5)$

14. راجع كتاب الأشعة ص29

المستقيـم في الفراغ

المعادلات الوسيطية للمستقيم

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}\right\} t \in R$$

نحتاج

نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

شعاع توجيه $\vec{u}(a, b, c)$

تطبيق : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 1, 0)$ ويقبل $\vec{u}(3, -2, 1)$ شعاع توجيه.

$$\left.\begin{array}{r} x = x_0 + at \Rightarrow x = 2 + 3t \\ y = y_0 + bt \Rightarrow y = 1 - 2t \\ z = z_0 + ct \Rightarrow z = t \end{array}\right\} t \in R$$

التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم (AB) :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a, b, c)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right\} t \in [0, +\infty[$$

دورة : أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB)

حيث $B(-2, 3, 2)$ و $A(2, -1, 0)$

الحل:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-4, 4, 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} x = x_0 + at \Rightarrow x = 2 - 4t \\ y = y_0 + bt \Rightarrow y = -1 + 4t \\ z = z_0 + ct \Rightarrow z = 2t \end{array}\right\} t \in R$$

التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a, b, c)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right\} t \in [0, 1]$$

مستويان

- متعامدان ← الناظمان متعامدان
- متقاطعان ← الناظمان غير مرتبطان خطياً
- متوازيان ← الناظمان مرتبطان خطياً

مستقيم ومستوي

المستقيم // المستوي

شعاع توجيه المستقيم يعامد الناظم

المستقيم $\perp$ المستوي

شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع الناظم

المستقيم يقطع المستوى

الشرط : شعاع توجيه المستقيم لا يعامد الناظم

1) نوجد معادلات المستقيم.
2) نعوض في المستوي.
3) نحسب t.
4) نعوض مرة أخرى في معادلات المستقيم.
5) نوجد نقطة التقاطع.

* إذا كانت الجملة مستحيلة فإن المستقيم لا يقطع المستوي.

** إذا حصلنا على المساواة 0=0 فالمستقيم محتوي في المستوى.

شرط آخر لتعامد مستقيم مع مستو :

أن يعامد مستقيمين متقاطعين في المستوي.

نتيجة : برهان $\vec{n}$ ناظم على المستوى يجب أن يعامد شعاعين غير مرتبطين في المستوي :

$$\left.\begin{matrix}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}\,(\text{ناظم})$$

تمرين هام : أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي D في نقطة يطلب تعينها $A(3, 1, -2)$ و $B(0, 2, 1)$

$$P: 2x - y + z - 2 = 0$$

الحل : شرط التقاطع $\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 3)$$

$$\vec{n} = (2, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -6 - 1 + 3 = -4 \neq 0$$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$ لا يعامد الناظم $\vec{n}$

$\Leftarrow$ المستقيم (AB) يقطع المستوي D

$$\left.\begin{matrix} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{matrix}\right\} t \in R$$

$\overrightarrow{AB}(-3, 1, 3)$

$$\left.\begin{matrix} x = 3 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 3t \end{matrix}\right\} t \in R$$

نعوض معادلات المستقيم في المستوي P: $t = \frac{1}{4}$

نعوض t في معادلات المستقيم: نقطة التقاطع $\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{-5}{4}\right)$

الوضع النسبي لمستقيمين :

- **شعاعا التوجيه**
  - **مرتبطان خطياً**
    - **المستقيمان متوازيان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ مساواة خاطئة
    - **المستقيمان منطبقان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ $0 = 0$
  - **غير مرتبطان خطياً**
    - **المستقيمان متقاطعان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ t أو s = عدد
      - ⇐ نعوض فتنتج نقطة التقاطع
    - **المستقيمان متخالفان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ المساواة خاطئة

الحالات الثلاثة الأولى : المستقيمان يقعان في مستو واحد

في حالة متخالفان : المستقيمان لا يقعان في مستو واحد

مثال : ادرس الوضع النسبي للمستقيمين الآتيين : (هل يقع المستقيمان في مستو واحد)

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ;t \in R \quad و \quad L_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - s \\ z = 3s \end{cases} ;s \in R$$

الحل :

المستقيمان غير متوازيين لأن شعاعي التوجيه لهما غير مرتبطين خطياً (تحقق من ذلك) ؛ لذا نحل معادلاتهما حلاً مشتركاً لدراسة تقاطعهما .

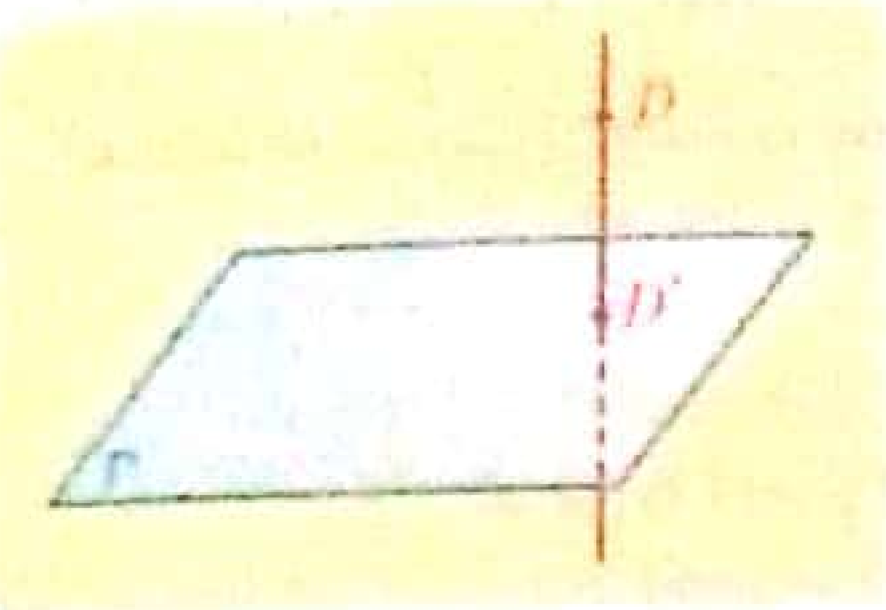
وجود نقطة مشتركة يعني وجود عددين حقيقيين و يحققان :

$$2 + 2t = 2 + s$$
$$2 + t = -1 - s$$
$$1 + 2t = 3s$$

بحل المعادلتين الأولى و الثانية نجد : $t = -1$ و $s = -2$

ولكن هذا لا يمثّل حلاً للمعادلة الثالثة ، فجملة المعادلات متناقضة ، ولا حل مشتركاً لها ، والمستقيمان متخالفان ولا يقعان في مستو واحد .

مسقط نقطة D على مستوي P (طريقة امتحانية سهلة) :



1. نوجد معادلة للمستوي P
2. نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D و الذي شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P ونحسب t ثم نعوض في المعادلات الوسيطية فينتج المسقط القائم للنقطة D على المستوي P وهو D'

تطبيق

أوجد مسقط النقطة $D(1,0,1)$ على المستوي $P: x+y+z+1=0$

الحل: نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D والذي شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= t \\ z &= 1+t \end{aligned}\right\} \quad t \in R$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P

$$1+t+t+1+t+1=0$$

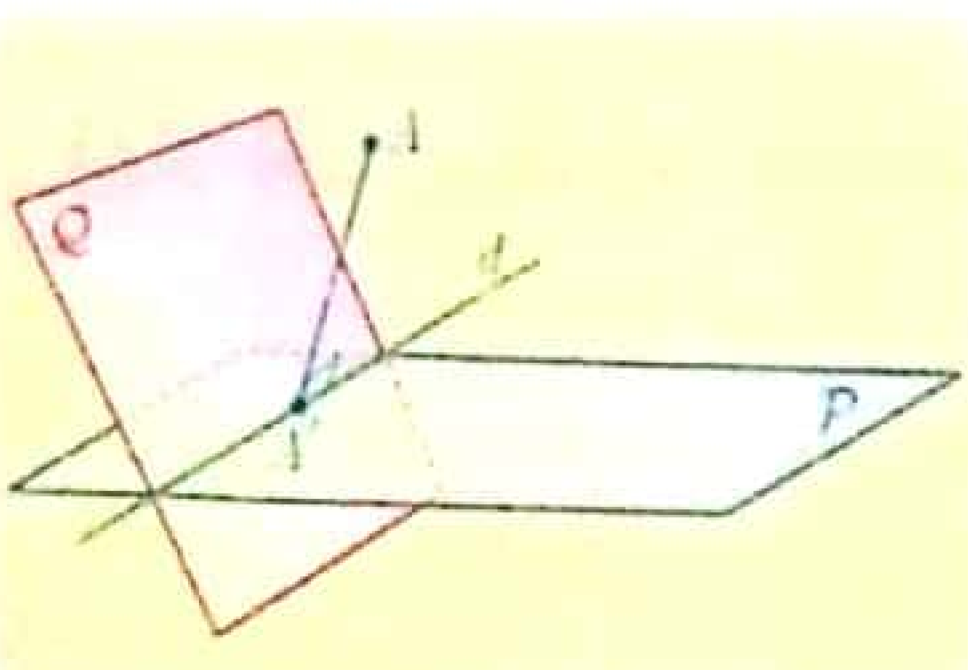
$$3t+3=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

نعوض t في المعادلات الوسيطية فنجد $\quad x=0 \;,\; y=-1 \;,\; z=0$

$$\Rightarrow \quad D'(0,-1,0)$$

إيجاد بعد نقطة A عن مستقيم d في الفراغ

(إيجاد بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين P , Q)



1. نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (للفصل المشترك)وليكن d
2. نوجد معادلة المستوي المار من النقطة A و العمودي على المستقيم (نعتبر شعاع توجيه المستقيم هو الناظم) وليكن T
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي T فتنتج t ثم نعوض مرة أخرى في المعادلات الوسيطية ل d فنجد مسقط النقطة A على المستقيم d و ليكن A'
4. نوجد البعد بين A و مسقطها A' بقانون المسافة بين نقطتين بالفراغ و هو نفسه بعد النقطة A عن الفصل المشترك

$$AA' = \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2 + (z_A - z_{A'})^2}$$

ملاحظة : يوجد طرق أخرى ..

تطبيق

لتكن النقطة $A(3,-1,2)$ و المستويان P,Q : $\begin{cases} P: 2x - y + z - 4 = 0 \\ Q: x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$

أثبت تقاطع المستويين واحسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك .

الحل :

1. نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك (d) :

نفرض $x = 0$ ونعوض في معادلتي المستويين P,Q وبالحل المشترك نجد $z = 3$, $y = -1$

$F(0,-1,3)$ نقطة من الفصل المشترك

نفرض $y = 0$ ونعوض في معادلتي المستويين وبالحل المشترك نجد : $z = 2$, $x = 1$

$F'(1,0,2)$ نقطة ثانية من الفصل المشترك

شعاع توجيه الفصل المشترك هو $\overrightarrow{FF'} = (1,1,-1)$ وباختيار النقطة F نجد

المعادلات الوسيطية : $d: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad ; \quad t \in R$

2. نوجد معادلة المستوي Q المار بالنقطة A وناظمه $\vec{n} = \overrightarrow{FF'} = (1,1,-1)$

$Q: x + y - z = 0 \quad \Leftarrow \quad Q: x - 3 + y + 1 - z + 2 = 0$

3. نعوض معادلات d في Q فنجد : $t = \frac{4}{3}$

نعوض في d فنجد المسقط $A'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

$$AA' = \sqrt{(3 - \frac{4}{3})^2 + (-1 - \frac{1}{3})^2 + (2 - \frac{5}{3})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

إيجاد نقطة تقاطع ثلاث مستويات :

1. نوجد الفصل المشترك لمستويين منهما
2. نوجد نقطة تقاطع الفصل المشترك مع المستوي الثالث

ملاحظة : يمكن استخدام طريقة غاوس .

تطبيق دورة 2018

ماهي نقطة تقاطع المستويات الثلاثة P_1, P_2, P_3 حيث : $\begin{cases} P_1: 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \\ P_2: x + 2y - z - 4 = 0 \\ P_3: x + 3y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$

الحل :

• نوجد الفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 : (نترك الطريقة للطالب)

ولبكن $d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in R$

•• نعوض معادلات d في المستوي الثالث ونحسب t فنجد : $t = \frac{3}{2}$

ثم نعوض قيمة t في معادلات d : فنجد نقطة التقاطع $(\frac{-1}{2}, 3, \frac{3}{2})$

السؤال الأول : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(3,-1,2)$ و المستويان : $\begin{cases} Q: x+y+2z-5=0 \\ P: x-2y+z-4=0 \end{cases}$

1) أثبت تقاطع المستويين Q و P وتحقق من تعامدهما ثم اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك
2) أعط معادلة المستوي W الذي يعامد المستقيم d (أي يعامد كل من المستويين Q و P) ويمر من A
3) احسب إحداثيات A' نقطة تقاطع d والمستوي W ثم استنتج مسقط A على d واحسب بعد A عن d .
4) اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .
5) أثبت أن مركبات ناظم المستوي W المعامد للمستوي P تؤلف حدود متتالية حسابية

السؤال الثاني : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CG]$.

1) في المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{2}\overline{AB},\overline{AD},\overline{AE})$ احسب DJ و IJ و ID ثم أوجد $\overline{IJ}$. $\overline{DI}$ ثم احسب مساحة المثلث (DIJ) .
2) أعط معادلة للمستوي (DIJ) ثم احسب بعد H عن المستوي (DIJ) واستنتج حجم رباعي الوجوه $(HDIJ)$.
3) أعط معادلة للمستوي (HDI) ثم احسب بعد النقطة J عن المستوي (HDI) واحسب بعد J عن المستقيم IH
4) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من J و يعامد (HDI) ثم استنتج إحداثيات J' نقطة تقاطع d و (HDI)

السؤال الثالث : ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعباً طول حرفه 2 النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC')

..في المعلم المتجانس $(D',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overline{D'C'}=2\vec{j}$ و $\overline{D'A'}=2K$ و $\overline{D'D}=2\vec{i}$:

1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب ثم أعط تمثيلاً وسيطياً للقطعة المستقيمة $[AC']$.
2) أعط معادلة المستوي P الذي يعامد المستقيم (AC') و يمر من A' ثم استنتج إحداثيات H نقطة تقاطع (AC') و P
3) أثبت أن المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها
4) أوجد معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[B'C']$

السؤال الرابع : لتكن النقاط : $D(1,0,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $A(3,0,3)$

1) احسب $\overline{DC}$ ، $\overline{BD}$ ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته .
2) أثبت أن الشعاع $\overline{AC}$ ناظم على المستوي BCD .
3) أوجد معادلة المستوي BCD .
4) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

هام جداً : لا تنس حلمك ..نحن ناطرين نجاحك ...والنجاح بدو عزيمة ..والعزيمة بدها تفوق ...لا تيأس لسا الوقت كافي لتحقيق الحلم ...

السؤال الخامس : لتكن النقاط : $D(0,1,2)$ ، $C(-1,2,1)$ ، $B(1,0,0)$ ، $A(0,1,1)$

بين أن هذه النقاط تقع في المستوي نفسه ، ثم اكتب معادلة هذا المستوي .

السؤال السادس : لتكن النقاط : $C(3,-1,1)$ ، $B(2,1,0)$ ، $A(1,0,1)$

1) احسب مساحة المثلث ABC
2) أوجد معادلة المستوي ABC

السؤال السابع : لتكن النقطتان : $A(-3,2,1)$ و $B(9,4,3)$.

أوجد معادلة المستوي العمودي على القطعة المستقيمة AB في منتصفها .

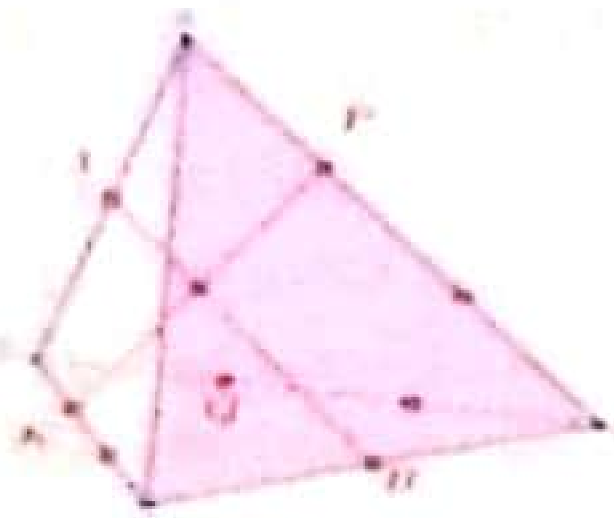
السؤال الثامن : لتكن النقطة $A(-6,2,-1)$ والمستوي المعطى بالمعادلة $P\ :\ 5x-y+z+6=0$

بين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P هو النقطة $A'(-1,1,0)$

السؤال التاسع :أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,3)$ الذي يعامد المستويين P_1 و P_2حيث :

$P_1 : 2x+z-1=0$ و $P_2 : x-y+2z+3=0$

السؤال العاشر : $ABCD$ رباعي وجوه النقاط P,Q,R,K,I تحقق :



$\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{BD}$ $\quad \overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AD}$ $\quad R$ منتصف $[CD]$ $\quad \overline{CK}=\frac{2}{3}\overline{CB}$ $\quad I$ منتصف $[AB]$

Gمركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة$(A;2),(B;2),(C;1),(D;1)$ .. المطلوب :

1) أثبت أن المستقيمان (IR)و (PK) متقاطعان .
2) عيّن موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C;1),(A;2)$.
3) عيّن المجموعة نقاط M التي تحقق : $\|2\overline{AM}+\overline{CM}\|=\|2\overline{BM}+\overline{DM}\|$

السؤال الحادي عشر : نتأمل في معلم متجانس النقاط :

$A\left(-\frac{1}{2},3,1\right)$ $\quad B(-1,0,2)$ $\quad C(2,1,1)$ $\quad D(-3,3,-1)$

① a) أثبت أن النقاط B,C,D تمثل مستوٍ أوجد معادلته .

b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته .

② a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)

b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)

③ احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$

④ a) أثبت أن النقاط B,C,D تقع على كرة مركزها A

b) احسب نصف قطر الكرة السابقة واكتب معادلتها

السؤال الثاني عشر : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم(AB) إذا علمت أن $A(3,2,1)$ و $B(0,1,0)$ ثم أعط تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم$[BA)$

السؤال الثالث عشر : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط : $A(1,-1,-2)$ $\quad B(1,-2,-3)$ $\quad C(2,0,0)$

① برهن أن النقاطA و B و C تعين مستوٍ ثم تحقق أن معادلته الديكارتية هي : $x+y-z-2=0$

② ليكن المستويانP وQ معادلتهما $P: x-y-2z=0$, $Q: 3x+2y-z+10=0$

ادرس تقاطع المستويات (ABC) و Q و P