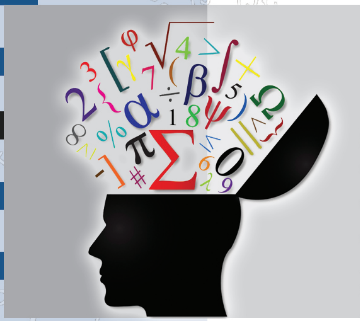

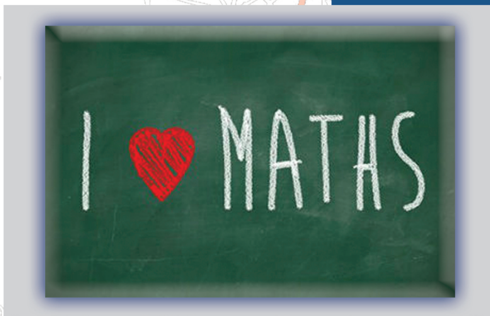

المتتاليات

الوحدة الأولى – الجزء الأول

إعداد المدرس :
محمد رسول الصباغ

0934 131 159

خلال زمن ضئيل.. صنعنا تفوق أصيل

MRS
أ . محمد رسول صباغ
المكتب العلمي الرياضي

أهنئ طلابي المتفوقين في مادة الرياضيات لدورة عام 2020

590+

فؤاد معين	599	سميرة أرناؤوط	599	أحمد ادريس	599		
ريم السلمو	599	محمد رأفت حلاق	598	محمد ناولو	598	روجين شيخو	597
طارق صناع	597	محمد دبـاس	597	محمد مرجان	597	آية لبابيدي	596
زينب شيخ دبس	596	لين ناصيف	596	أسامة المحمد	595	هيا فلاحة	595
سوزان ابراهيم	595	رشا غزال	595	مؤمن الحلو	595	روان العبسي	595
هدى خضر	595	أنس قدسي	595	ابراهيم كجي	595	عمر كراكشة	595
فوزي غنوم	595	عبد العزيز السواس	594	طاهر نعوس	594	عبدو عميان	593
مايكل درزي	593	هديان شاهين	592	فراس نبهان	592	نور عبد الحنان	591
علاء العويد	590	أحمد سليمان	590	ماجد عطار	590	إيمان لبابيدي	590
أحمد رؤوف كلارجي	590	اسماعيل كيالي	590	معاذ استانبولي	590	محمود ناصيف	590

600

أحمد قارح	محمد سماوي	عبادة بوادقجي	كنان دحروج
عبد الملك خيرالله	محمد نور السعيد	روح سلطان	صلاح البوشي
سيدار النعيمي	عبيدة ريحاوي	جود كريمش	محمد دركلت
محمد سفلو	ليان نجار	عبدالوهاب بليد	خلدون الباشا
ضياء أبو نوري	لطيفة عبد الرزاق	محمد خليفة	انجي عطار
عمار صباغ	سارة آغا القلعة	أديب الشامي	محمد صالح سيكت
محمد علي حج حسين	بشر خربوطلي	مجد سلوم	محمد علي معراوي
	هبة بطل		

575+

هاجر جداد	589	غيث صباغ	588	يمان زعموط	587
لين شعبوق	587	أيهم عيان	585	ملاك دبك	585
فاخر اللبني	584	عمر صاصيلا	584	بثينا صدور	584
أسماء طاهر	582	زينة السيد أحمد	582	سمى داخل	580
سدل قزاز	580	عماد عليوي	580	سلام الجاسم	580
أحمد قولي	580	مهند الأمير	580	هديل كريمش	580
أمل قضيماتي	578	محمد حسين	578	سارة عثمان	578
لالش شيخ محمد	578	محمد خليف	575	أحمد صليبي	575
عائشة العكيلي	575	زيد محيمد	575	بتول عمرايا	575
محمد شواخ	574			عبد القادر بريمو	574

560+

جميل البيك	572	محمود صباغ	570	ألين محمود	570
عدنان أصفري	570	جميل حماض	570	نجوى برهوش	569
أحمد جليلاتي	566	أحمد عسلية	565	حمزة درعوزي	565
محمود حوري	564	نيرمين سلطان	564	راما العبدان	563
محمد حجوان	562			مرح هباش	561

550+

سارة اللجي	560	تسنيم حزوري	559	رند بلال	558
علي نعمة	558	أحمد زلف	558	طريف غنام	556
فائزة بغدادي	552	نور نعساني	552	لانا حبابا	550
ليث نيال	550	شهد الناصر	547	تقى فستق	545

المتتاليات

المتتالية: هي قائمة مرتبة من الأعداد.

2 4 6 8 10 12 ...

3 3 3 3 3 3 ...

5 −5 5 −5 5 −5 ...

المتتالية: هي تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية IN أو أي مجموعة جزئية غير منتهية منها

	التابع	المتتالية
الرمز	$f, g, h, \ldots$	$u, v, w, \ldots$
المتغير	x	$n ; n \in IN$
المنطلق		$n\{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$
قاعدة الربط	$f(x)$	U_n
الشكل العام	$f: D \to H$	$(U_n)_{n \geq n_0}$

- كيف نوجد حدود متتالية ؟ :

$\boxed{1}$ الحد العام (الحد ذو الدليل n): يعطينا صيغة الحد العام ومن خلالها نوجد باقي الحدود.

مثال: $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حدها العام $U_n = 2n + 1$

أوجد U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3

- $U_0 = 2(0) + 1 = 1$
- $U_1 = 2(1) + 1 = 3$
- $U_2 = 2(2) + 1 = 5$
- $U_3 = 2(3) + 1 = 7$

$U_n = \sqrt{3n+1}$

أوجد U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3.

$U_0 = \sqrt{3(0)+1} = \sqrt{1} = 1$

$U_1 = \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{4} = 2$

$U_2 = \sqrt{3(2)+1} = \sqrt{7}$

$U_3 = \sqrt{3(3)+1} = \sqrt{10}$

$\boxed{2}$ علاقة تدريجية:

ونعرف كل حد من خلال حد يسبقه وذلك من خلال علاقة تسمى بالعلاقة التدريجية.

مثال:
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -2U_n + 3 \end{cases}$$

أوجد U_1, U_2, U_3.

$U_1 = -2U_0 + 3 = -2(2) + 3 = -1$

$U_2 = -2U_1 + 3 = -2(-1) + 3 = 5$

$U_3 = -2U_2 + 3 = -2(5) + 3 = -7$

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$$

أوجد U_1, U_2, U_3, U_4:

$U_1 = U_0 + 2 = -1 + 2 = 1$

$U_2 = U_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$U_3 = U_2 + 2 = 3 + 2 = 5$

$U_4 = U_3 + 2 = 5 + 2 = 7$

دراسة جهة اطراد متتالية:

$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad \ldots$

مطردة (متزايدة).

$8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \ldots$

مطردة (متناقصة).

$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad \ldots$

مطردة (ثابتة).

$5 \quad -5 \quad 5 \quad -5 \quad 5 \quad -5 \quad \ldots$

غير مطردة (متناوبة).

$2 \quad 4 \quad 6 \quad 0 \quad -2 \quad 8 \quad 9 \quad \ldots$

غير مطردة (مختلطة).

* الفرق (المقارنة مع الصفر)

$U_{n+1} - U_n > 0$

متزايدة تماماً.

$U_{n+1} - U_n < 0$

متناقصة تماماً.

$U_{n+1} - U_n = 0$

ثابتة.

مثال: ادرس جهة اطراد المتتالية $U_n = 2n + 1$

الحل:

$U_{n+1} - U_n$

$= 2(n+1) + 1 - (2n+1)$

$= \cancel{2n} + 2 \cancel{+1} - \cancel{2n} \cancel{-1}$

$= 2 > 0$

فهي متزايدة تماماً

- $U_n = -2n+5$

الحل:

$U_{n+1} - U_n$

$= -2(n+1)+5-(-2n+5)$

$= \cancel{-2n} - 2 \cancel{+5} \cancel{+2n} \cancel{-5}$

$= -2 < 0$

فهي متناقصة تماماً

- $U_n = n^2+1$

$U_{n+1} - U_n$

$= (n+1)^2+1-(n^2+1)$

$= \cancel{n^2}+1+2n\cancel{+1}\cancel{-n^2}\cancel{-1}$

$= 2n+1 > 0$

متزايد تماماً.

* القسمة (المقارنة مع الواحد):

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ متزايدة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ متناقصة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ ثابتة.

وتستخدم للمتتاليات ذات الحدود الموجبة فقط.

(وتستخدم في القوى أو العاملة)

- ادرس جهة اطراد المتتالية $U_n = 2^n$

الحل:

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{2^n}}$

$= 2 > 1$

متزايدة تماماً

- $U_n = \frac{1}{n}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$

فهي متناقصة تماماً.

- $U_n = n!$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{n!}$

$= \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 > 1$

فهي متزايدة تماماً.

$$U_n = \frac{n^2}{n!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{n^2}$$

$$= \frac{n+1}{n^2} < 1$$

فهي متناقصة تماماً من أجل $n \geq 2$

ملاحظات:

$n! = n(n-1)(n-2) \_\_\_ \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$n! = n(n-1)!$

$5! = 5 \times \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 5 \times 4!$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$(n+2)! = (n+2)(n+1)!$

$(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$

- ادرس جهة اطراد المتتاليات الآتية:

$U_n = -3n+1$

$U_{n+1} - U_n$

$= -3(n+1)+1-(-3n+1)$

$= \cancel{-3n}+3\cancel{+1}\cancel{+3n}\cancel{-1}$

$= -3 < 0$

فهي متناقصة تماماً.

$U_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{n+2}{n+3} \times \dfrac{n+2}{n+1}$

$= \dfrac{(n+2)^2}{(n+3)(n+1)}$

$= \dfrac{n^2+4n+4}{n^2+n+3n+3}$

$= \dfrac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} > 1$

فهي متزايدة تماماً.

$U_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$

$U_{n+1} - U_n$

$= 1 + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

$= \cancel{1} + \dfrac{1}{n^2+2n+1} \cancel{-1} - \dfrac{1}{n^2}$

$= \dfrac{n^2-(n^2+2n+1)}{n^2(n^2+2n+1)}$

$= \dfrac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-2n-1}{n^4+2n^3+n^2} < 0$

فهي متناقصة تماماً من أجل $n \geq 1$

$U_n = \dfrac{3}{n^2}$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\cancel{3}}{n^2+2n+1} \times \dfrac{n^2}{\cancel{3}}$

$= \dfrac{n^2}{n^2+2n+1} < 1$

فهي متناقصة تماماً.

الاشتقاق:

$f(x)$ تابع

$f'(x)$ مشتق التابع f.

قواعد:

1) $f(x)=a \qquad f'(x)=0$

2) $f(x)=ax \qquad f'(x)=a$

3) $f(x)=x^n \qquad f'(x)=nx^{n-1}$

$f(x)=3x^2+4x+6$

$f'(x)=6x+4$

$f(x)=5x^3+4x^2+6x+7$

$f'(x)=15x^2+8x+6$

$f=\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x+8$

$f'=x^2+4x+5$

4) $f(x)=\frac{u}{v}$

$f'(x)=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$

5) $f(x)=u.v$

$f'(x)=u'.v+v'.u$

$U_n=\frac{n}{10^n}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{n+1}{10^{n+1}}\times\frac{10^n}{n}$

$=\frac{n+1}{\cancel{10^n}.10}\times\frac{\cancel{10^n}}{n}$

$=\frac{n+1}{10n}<1$

فهي متناقصة تماماً.

من أجل $n\geq 1$.

* تحويل المتتالية إلى تابع

من خلال التعريف

$U_n=f(n)$

ثم نشتق التابع.

$f'(x)>0$

متزايدة تماماً.

$f'(x)<0$

متناقصة تماماً.

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

$f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$

تذكرة:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$f(x) = \frac{3x+1}{4x-2}$

$f'(x) = \frac{3(4x-2) - 4(3x+1)}{(4x-2)^2}$

$= \frac{\cancel{12x} - 6 - \cancel{12x} - 4}{(4x-2)^2}$

$= \frac{-10}{(4x-2)^2}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{0-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

6) $f(x) = \sqrt{u}$

$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

اشتق كلاً مما يأتي :

$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = 9x^2 + 8x - 5$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{5} = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$ ط1

$$f' = \frac{2}{5}$$

$$f'(x) = \frac{2(5) - 0}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$ ط2

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7$$

$$f'(x) = x + 4$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 7x - 1$$

$$f'(x) = 2x^2 + \frac{4}{3}x + 7$$

$$f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$$

$$f'(x) = \frac{-1(2x+3) - 2(1-x)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{-2x} - 3 - 2 + \cancel{2x}}{(2x+3)^2} = \frac{-5}{(2x+3)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f(x) = \sqrt{1-3x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{2\sqrt{1-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\cancel{x} - 2 - \cancel{x} - 1}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x+1}\,(x-2)^2}$$

$f(x) = x\sqrt{x}$ بطريقتين

أولاً:

$$f'(x) = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$f(x) = (2x-1)\sqrt{x}$

$f'(x) = 2(\sqrt{x}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2x-1)$

$= 2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{4x + 2x - 1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = (x^2+3x-1)(x-1)$

$f'(x) = (2x+3)(x-1) + (1)(x^2+3x-1)$

$= 2x^2 - 2x + 3x - 3 + x^2 + 3x - 1$

$= 3x^2 + 4x - 4$

مثال: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معطاة بالشكل

$u_n = \sqrt{3n+1}$

١. ادرس جهة اطرادها

نفرض: $u_n = f(n)$

$f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$

فهي متزايدة تماماً

المتتالية الحسابية:

هي متتالية ينتج كل حد عن سابقه بإضافة عدد ثابت يسمى الأساس ونرمز له بـ r

2 4 6 8 10 12 ...

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 2$

3 6 9 12 15 ...

متتالية حسابية أساسها $r = 3$

$\boxed{1}$ الحد العام

$u_n = u_0 + nr$

u_0: حد البدء، n: رقم الحد، r: الأساس

مثال: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_0 = 2$ ، $r = 3$

احسب u_5

$u_n = u_0 + nr$

$u_5 = 2 + 5(3)$

$u_5 = 2 + 15 = 17$

مثال: (u_n) متتالية حسابية فيها $u_3 = 12$ ، $r = 2$ احسب u_0 .

$u_n = u_0 + nr$

$u_3 = u_0 + (3)2$

$12 = u_0 + 6$

$u_0 = 6$

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_4 = 16$ ، $u_0 = 8$ احسب r .

$u_n = u_0 + nr$

$16 = 8 + 4r$

$4r = 8 \Rightarrow r = 2$

مثال: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $r = \frac{3}{2}$ ، $u_0 = \frac{1}{2}$

احسب u_4 .

$u_n = u_0 + nr$

$u_4 = \frac{1}{2} + 4\left(\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{12}{2} = \frac{13}{2}$

[2] حدين لا على التعيين:

$\boxed{u_m = u_p + (m-p)r}$

مثال: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_5 = 12$

$r = 2$ ، احسب u_7 .

$u_m = u_p + (m-p)r$

$m = 7 \qquad p = 5$

$u_7 = u_5 + (7-5)r$

$= 12 + 2(2)$

$= 16$

لتكن $u_8 = 10$ ، $r = 3$

احسب u_5 .

$u_m = u_p + (m-p)r$

$m = 5$ ، $p = 8$

$u_5 = u_8 + (5-8)r$

$= 10 + (-3)3$

$u_5 = 1$

$$U_m = U_p + (m-p)r$$

$$\Rightarrow$$

$$r = \frac{U_m - U_p}{m-p}$$

مثال: لتكن $(U_n)_n$ متتالية حسابية فيها $U_8 = 20$ ، $U_6 = 12$ احسب r.

الحل:

$$r = \frac{U_m - U_p}{m-p}$$

$m = 8$ ، $p = 6$

$$= \frac{U_8 - U_6}{8-6}$$

$$= \frac{20-12}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$\boxed{3}$ إثبات متتالية حسابية

$$U_{n+1} - U_n = \text{ثابت}$$

ويسمى الثابت بالأساس r.

مثال: أثبت أن المتتالية $U_n = 2n+1$ حسابية وجد أساسها.

الحل:

$$U_{n+1} - U_n$$

$$= 2(n+1)+1 - (2n+1)$$

$$= \cancel{2n} + 2 \cancel{+1} \cancel{-2n} \cancel{-1}$$

$$= 2 \text{ ثابت}$$

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

أثبت أن المتتالية $U_n = n-3$ حسابية وجد أساسها.

$$U_{n+1} - U_n$$

$$= n+1-3-(n-3)$$

$$= \cancel{n} + 1 \cancel{-3} \cancel{-n} \cancel{+3}$$

$$= 1$$

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 1$.

- بيّن فيما إذا كانت المتتالية $U_n = n^2 + n$ حسابية أم لا.

الحل:
$U_{n+1} - U_n$
$= (n+1)^2 + n + 1 - (n^2 + n)$
$= \cancel{n^2} + 2n + 1 + \cancel{n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{n}$
$= 2n + 2$
فهي متتالية غير حسابية.

4 ثلاثة حدود متعاقبة:
لتكن a, b, c ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية فإن:

$$b = \frac{a+c}{2}$$
$$\Rightarrow 2b = a + c$$

ويسمى b بالوسط الحسابي.

مثال:
$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة بحيث:
$a + b + c = 12$ — (1
$a \cdot b \cdot c = 48$ — (2
أوجد a, b, c.

الحل:
بما أن المتتالية حسابية a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة فإن:
$2b = a + c$ — (3
نعوض (3 في (1:
$2b + b = 12$
$3b = 12 \Rightarrow \boxed{b = 4}$
نعوض في (1:
$a + 4 + c = 12$
$a + c = 8$ — (I)
نعوض $b = 4$ في (2:
$a \cdot 4 \cdot c = 48$
$a \cdot c = 12$ — (II)
إما $a = 6$, $c = 2$
أو $a = 2$, $c = 6$

مثال: $a+b+c=9$ ——①

$a.b.c=15$ ——②

بما أن المتتالية حسابية a ، b ، c ثلاثة حدود متعاقبة فإن:

$2b=a+c$ ——③

نعوض ③ في ①:

$2b+b=9$

$3b=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

نعوض $b=3$ في ①:

$a+3+c=9$

$a+c=6$ —— (I)

نعوض $b=3$ في ②:

$a.3.c=15$

$a.c=5$ —— (II)

إما $a=1$ ، $c=5$

أو $a=5$ ، $c=1$

مثال: $a+b+c=12$ ——①

$a^2+b^2+c^2=56$ ——②

بما أن المتتالية حسابية a ، b ، c ثلاثة حدود متعاقبة فإن:

$2b=a+c$ ——③

نعوض ③ في ①:

$2b+b=12$

$3b=12 \Rightarrow \boxed{b=4}$

نعوض $b=4$ في ①:

$a+4+c=12$

$a+c=8$ —— (I)

نعوض $b=4$ في ②:

$a^2+16+c^2=56$

$a^2+c^2=40$ —— (II)

إما $a=6$ ، $c=2$

أو $a=2$ ، $c=6$

$\boxed{5}$ المجموع:

$$\underbrace{S}_{\text{مجموع}}=u_i+u_{i+1}+\dots+u_j$$

$$S=n\,\frac{a+l}{2}$$

عدد الحدود: $n=j-i+1$

الحد الأول: $a=u_i$

الحد الأخير: $l=u_j$

مثال: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها

$u_n = 2n+3$

احسب المجموع:

$S = u_3+u_4+u_5+\dots+u_{10}$

الحل:

$S = n\dfrac{a+l}{2}$

$n = j - i + 1$

$= 10 - 3 + 1 = 8$

$a = u_3 = 2(3)+3 = 9$

$l = u_{10} = 2(10)+3 = 23$

$S = \cancel{8}^{4}\dfrac{23+9}{\cancel{2}}$

$= 4(32) = 128$

- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها

$u_n = -n+1$

احسب المجموع

$S = u_2+u_3+\dots u_7$

$S = n\dfrac{a+l}{2}$

$n = j - i + 1$

$= 7 - 2 + 1 = 6$

$a = u_2 = -2+1 = -1$

$l = u_7 = -7+1 = -6$

$S = \cancel{6}^{3}\dfrac{-1-6}{\cancel{2}}$

$= 3(-7)$

$= -21$

المتتاليات الهندسية:

كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت يسمى الأساس

ونرمز له بـ q:

2 4 8 16 32 ...

متتالية هندسية أساسها $q=2$

3 9 27 81 ...

متتالية هندسية أساسها $q=3$

1 الحد العام :

$$U_n = U_0 . q^n$$

U_n الحد العام، U_0 حد البدء، q الأساس، n رقم الحد

مثال: متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية
أعطينا $U_0 = 2,\ q = 3$
احسب U_2.

الحل:
$$U_n = U_0 . q^n$$
$$U_2 = 2(3)^2$$
$$= 2(9) = 18$$

مثال: متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية
فيها $U_4 = 81,\ q = 3$
احسب U_0.

الحل:
$$U_n = U_0 . q^n$$
$$81 = U_0 . (3)^4$$
$$U_0 = \frac{81}{81} = 1$$

مثال: متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية
فيها $U_0 = 3,\ U_3 = 81$
احسب q.

الحل:
$$U_n = U_0 . q^n$$
$$U_3 = 3 . (q)^3$$
$$81 = 3q^3$$
$$q^3 = 27$$
$$\Rightarrow q = 3$$

2 مبرهنة لأعلى التعيين :

$$U_m = U_p . q^{m-p}$$

مثال: متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية
$U_8 = 81 ,\ q = 3$
احسب U_5.

الحل:
$$U_m = U_p . q^{m-p}$$
$m = 8$
$p = 5$
$$U_8 = U_5 . 3^3$$
$$81 = 27 U_5$$
$$U_5 = 3$$

$$q^{m-p} = \frac{U_m}{U_p}$$

مثال: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها

$U_4 = 36$

$U_6 = 9$

احسب q.

الحل:

$$q^{m-p} = \frac{U_m}{U_p}$$

$$q^{6-4} = \frac{9}{36}$$

$$q^2 = \frac{1}{4}$$

$$q = \pm\frac{1}{2}$$

$\boxed{3}$ إثبات متتاليات هندسية:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{ثابت}$$

الجمع ← ضرب

ضرب ← قوة

طرح ← قسمة

أثبت $U_n = 2^n$ هندسية واحسب أساسها.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}$$

$$= \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{2^n}} = 2 \quad \text{ثابت}$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q=2$

$$U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

$$= \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{3^n}\cdot 3^2} \times \frac{\cancel{3^n}\cdot 3}{\cancel{2^n}}$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{ثابت}$$

فهي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

4) ثلاثة حدود متعاقبة :

إذا كان a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية.

$$\boxed{b^2 = a.c}$$

مثال: a, b, c ثلاثة حدود متتالية من متتالية هندسية احسب a, b, c إذا علمت أن

$a + b + c = 14$ ...(1

$a.b.c = 64$ ...(2

الحل: بما أنها هندسية فإن:

$b^2 = a.c$ ...(3

نعوض 3) في 2) :

$a.c.b = 64$

$b^2.b = 64$

$b^3 = 64 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

نعوض $b = 4$ في 1) :

$a + 4 + c = 14$

$a + c = 10$ ...(I

نعوض $b = 4$ في 2) :

$a.4.c = 64$

$a.c = 16$ ...(II

من I) و II)

$a = 2 ,\quad c = 8$

$a = 8 ,\quad c = 2$

2) $a.b.c = 27$ ...(1

$a^2 + b^2 + c^2 = 91$ ...(2

بحيث a, b, c أعداد طبيعية.

الحل: بما أنها هندسية فإن:

$b^2 = a.c$ ...(3

نعوض 3) في 1) :

$a.c.b = 27$

$b^3 = 27 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

نعوض $b = 3$ في 1) :

$a.3.c = 27$

$a.c = 9$ ...(I

نعوض $b = 3$ في 2) :

$a^2 + 9 + c^2 = 91$

$a^2 + c^2 = 82$ ...(II

من (I):

$a = \frac{9}{c}$ ___ (III)

نعوض في (II):

$\frac{81}{c^2} + c^2 = 82 \quad (\times c^2)$

$81 + c^4 = 82c^2$

$c^4 - 82c^2 + 81 = 0$

$(c^2 - 1)(c^2 - 81) = 0$

إما $c^2 = 1 \Rightarrow c = 1$

من (III) $a = 9$

أو $c^2 = 81 \Rightarrow c = 9$

من (III) $a = 1$.

5 المجموع:

$S = U_i + U_{i+1} + \dots + U_j$

$$\boxed{S = a\frac{1-q^n}{1-q}}$$

$n = j - i + 1$ عدد الحدود

q الأساس.

مثال: لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 3 أوجد

. $S = U_2 + U_3 + U_4$

الحل: $S = a\frac{1-q^n}{1-q}$

$= 3\frac{(1-2^3)}{1-2}$

$= 3\frac{-7}{-1}$

$= 3 . 7 = 21$

متتالية هندسية $(U_n)_{n\geq 0}$ فيها $U_0 = 4$ ، $U_4 = 64$:

احسب المجموع.

. $S = U_1 + U_2 + \dots U_6$

نحسب الأساس.

$U_n = U_0 . q^n$

$64 = 4 . q^4$

$q^4 = 16 \Rightarrow q = 2$

$S = a . \frac{1-q^n}{1-q}$

$n = 6 - 1 + 1 = 6$

$U_1 = U_0 . q^{1-0} = 4 \times 2 = 8$

$$S = 8\,\frac{1-2^6}{1-2}$$

$$= 8\,\frac{1-64}{-1}$$

$$= 8(63) = 504$$

الاستقراء الرياضي:

لإثبات صحة علاقة

$\boxed{ط_1} = \boxed{ط_2}$

[١] ننطلق من الطرف الأول ونوصله إلى الطرف الثاني.

[٢] ننطلق من الطرف الثاني ونوصله إلى الطرف الأول.

[٣] ننطلق من الطرف الأول ونوصله إلى مكان معين ثم ننطلق من الطرف الثاني ونوصله إلى ذات المكان.

الاستقراء الرياضي:

يستخدم لإثبات صحة علاقة مؤلفة من n حد ويتم ذلك من خلال مرحلتين:

المرحلة الأولى:

نثبت صحة العلاقة من أجل حد البدء.

المرحلة الثانية:

الفرض: نص المسألة.

الطلب: نستبدل كل n بـ $n+1$.

الإثبات: [١] مضاعفات

ننطلق من الطرف الأول من الطلب ونوصله للطرف الثاني من الطلب بالاستفادة من الفرض ويكون لدينا عدد نكتبه بشكل مجموع عددين أحدهما مضاعف السؤال.

[٢] المساواة

ننطلق من الطرف الأول من الطلب ونوصله للطرف الثاني بالاستفادة من الفرض.

[٣] المتراجحة

ننطلق من الفرض ونوصله للطلب بالاستفادة من خواص المتراجحات.

مثال: أثبت صحة القضية $E(n)$ حيث:

$E(n)$: 4^n+5 من مضاعفات العدد 3،

وذلك من أجل $n \geq 1$.

الحل: من أجل $n=1$

$$4^1+5=9$$

فهي محققة من أجل $n=1$.

- الفرض: 4^n+5 من مضاعفات العدد 3.
- الطلب: $4^{n+1}+5$ من مضاعفات العدد 3.
- الإثبات:

$$4^{n+1}+5 = 4.4^n+5$$
$$= (3+1)4^n+5$$
$$= \underbrace{3.4^n}_{\text{من مضاعفات 3 لأنه مضروب بـ 3}} + \underbrace{4^n+5}_{\text{من مضاعفات العدد 3 فرضاً}}$$

_ العلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة.

مثال: أياً كان العدد الطبيعي n أثبت أن $2^{3n}-1$ من مضاعفات العدد 7.

الحل: من أجل $n=0$

$$2^0-1=1-1=0$$

وهو من مضاعفات العدد 7.

فهي محققة من أجل $n=0$.

الفرض: $2^{3n}-1$ من مضاعفات العدد 7.

الطلب: $2^{3(n+1)}-1$ من مضاعفات العدد 7.

الإثبات:

$$2^{3(n+1)}-1 = 2^{3n+3}-1$$
$$= 2^3.2^{3n}-1$$
$$= 8(2^{3n})-1$$
$$= (7+1)2^{3n}-1$$
$$= \underbrace{7.2^{3n}}_{\text{من مضاعفات 7}} + \underbrace{2^{3n}-1}_{\text{من مضاعفات 7 فرضاً}}$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة.

مثال: أثبت بالتدريج أن n^3+2n مضاعف للعدد 3 أياً كان n عدد طبيعي.

من أجل $n=0$

$0^3+2(0)=0$

وهو من مضاعفات العدد 3.

فهي محققة من أجل $n=0$.

الفرض: n^3+2n من مضاعفات العدد 3.

الطلب: $(n+1)^3+2(n+1)$ من مضاعفات العدد 3.

الإثبات: $(n+1)^3+2(n+1)$

$= n^3+3n^2+3n+1+2n+2$

$= 3n^2+3n+3+n^3+2n$

$= \underbrace{3(n^2+n+1)}_{}+\underbrace{n^3+2n}_{}$

من مضاعفات 3 فرضاً من مضاعفات 3

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة.

مثال: أثبت بالتدريج أن

$1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n!$

$=(n+1)!-1$

من أجل $n\geq 1$.

الحل:

من أجل $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1=1 \\ \ell_2=(1+1)!-1=2!-1=1 \end{array}\right\} \ell_1=\ell_2$$

فالعلاقة محققة من أجل $n=1$

الفرض:

$1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n!=(n+1)!-1$

الطلب:

$1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+(n+1)(n+1)!$

$=(n+2)!-1$

الإثبات:

$\ell_1=\underbrace{1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\cdot n!}_{\text{من الفرض}}+(n+1)(n+1)!$

$=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!$

$=(n+1)!(1+n+1)-1$

$=\underbrace{(n+1)!(n+2)}_{}-1$

$=(n+2)!-1=\ell_2$

وهو المطلوب.

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$n\geq 1$

الحل: من أجل $n=1$

$\ell_1=(1)^3=1$

$\ell_2=\frac{(1)^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$ $\Big\}\ \ell_1=\ell_2$

فهي محققة من أجل $n=1$.

الفرض:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الطلب:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

الإثبات:

$$\ell_1=\underbrace{1^3+2^3+3^3+\dots n^3}+(n+1)^3$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

من خواص المتراجحة:

$a>b+c$

$\Rightarrow a>b$

$a>c$

نستطيع حذف x: $10>3+2+x$

$10>3+2$

ـ أثبت بالتدريج صحة القضية

$E(n): 3\times n^2\geq(n+1)^2$

من أجل $n\geq 2$.

الحل: من أجل $n=2$

$3(4)\geq(2+1)^2\Rightarrow 12\geq 9$

وهي محققة من أجل $n=2$

الفرض: $3n^2\geq(n+1)^2$

الطلب: $3(n+1)^2\geq(n+2)^2$

$3n^2+6n+3\geq n^2+4n+4$

الإثبات: لدينا فرضاً

$3n^2 \geq (n+1)^2$

$3n^2 \geq n^2+2n+1$

نضيف لطرفي المتراجحة $6n+3$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+2n+1+6n+3$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+4n+4+\cancel{4n}$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+4n+4$

وهو المطلوب

$3^n \geq (n+2)^2$

من أجل $n \geq 3$

الحل:

من أجل $n=3$

$(3)^3 \geq (3+2)^2$

$27 \geq 25$

وهي محققة من أجل $n=3$.

الفرض: $3^n \geq (n+2)^2$

الطلب: $3^{n+1} \geq (n+3)^2$

$3^{n+1} \geq n^2+6n+9$

الإثبات: لدينا فرضاً $3^n \geq (n+2)^2$

$3^n \geq n^2+4n+4$

نضرب الطرفين بـ (3):

$3^{n+1} \geq 3(n^2+4n+4)$

$3^{n+1} \geq 3n^2+12n+12$

$3^{n+1} \geq n^2+6n+9+\cancel{2n^2+6n+3}$

$3^{n+1} \geq n^2+6n+9$

العلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة محققة.

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

من أجل $n \geq 1$

الحل: من أجل $n=1$

$l_1 = 1$

$l_2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$

$\Big\}\ l_1 = l_2$

فهي محققة من أجل $n=1$

الفرض:

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الطلب:

$1^2+2^2+3^2+\dots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\ell_2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

الإثبات:

$$\ell_1 = \underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}_{\text{من الفرض}}+(n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \ell_2$$

وهو المطلوب.

التدريبات:

$$U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} \qquad \frac{1}{18}$$

أثبت أنها متتالية هندسية وجد أساسها.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

$$= \frac{\cancel{2^n}.2}{\cancel{3^n}.3^2} \times \frac{\cancel{3^n}.3}{\cancel{2^n}}$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

فهي متتالية هندسية أساسها

$$q = \frac{2}{3}$$

2.

1) $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية فيها

$$u_2 = 41 \ , \ u_5 = -13$$

احسب u_{20}.

بما أن المتتالية حسابية:

$$r = \frac{u_m - u_p}{m-p}$$

$$m = 2$$
$$p = 5$$

$$= \frac{u_2 - u_5}{2-5}$$

$$r = \frac{41+13}{-3} = -18$$

$$u_m = u_p + (m-p)r$$

$$41 = u_{20} + (2-20)(-18)$$

$$u_{20} = 41 - 324$$
$$= -283$$

② متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 0}$ فيها $u_{10} = \frac{25}{2197}$ ، $u_7 = \frac{1}{1080}$

احسب u_{30} .

بما أن المتتالية هندسية

فإن:

$$q^{m-p} = \frac{u_m}{u_p}$$

$m = 10$

$p = 7$

$$q^{10-7} = \frac{u_{10}}{u_7} = \frac{\frac{25}{2197}}{\frac{1}{1080}}$$

$$q^3 = \frac{27000}{2197}$$ بالجذر التكعيبي

$$q = \frac{30}{13}$$

$$u_m = u_p \cdot q^{m-p}$$

$m = 30$

$p = 7$

$$u_{30} = u_7 \cdot q^{30-7}$$

$$= \frac{1}{1080}\left(\frac{30}{13}\right)^{23}$$

③ متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$

احسب u_n بدلالة n

واستنتج قيمة المجموعين

$S_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

$S_2 = u_{30} + u_{31} + u_{32}$

الحل:

$\ast$ $u_n = u_0 + nr$

$u_1 = u_0 + 3$

$-2 = u_0 + 3$

$u_0 = -5$

$\ast$ $u_n = u_0 + nr$

$u_n = -5 + 3n$

$\ast$ $S = n\,\frac{a+l}{2}$

$n = 20 - 1 + 1 = 20$

$a = u_1 = -2$

$l = u_{20} = -5 + 60 = 55$

$$S = 20\,\frac{u_1+u_{20}}{2}$$

$$= \cancel{20}^{10}\,\frac{-2+55}{\cancel{2}}$$

$$= 10(53) = 530$$

$$S_2 = n\,\frac{a+l}{2}$$

$$n = 32-30+1 = 3$$

$$a = u_0 + nr$$

$$u_{30} = -5+90$$

$$u_{30} = 85$$

$$l = u_0 + nr$$

$$u_{32} = -5+96$$

$$u_{32} = 91$$

$$S_2 = 3\,\frac{85+91}{2}$$

$$= 3\,\frac{176}{2}$$

$$= 3(88) = 264$$

5) متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ فيها $u_0=-3$ وأساسها -2

احسب $u_{25}+u_{26}+\dots+u_{125}$.

الحل:

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = -3-2n$$

$$S = n\,\frac{a+l}{2}$$

$$n = 125-25+1 = 101$$

$$a = u_{25} = -3-50 = -53$$

$$l = u_{125} = -3-250 = -253$$

نعوض:

$$S = n\,\frac{a+l}{2}$$

$$= 101\,\frac{-53-253}{2}$$

$$= 101 \times \frac{-\cancel{306}^{153}}{\cancel{2}}$$

$$= (100+1)(-153)$$

$$= -15300-153$$

$$= -15453$$

(6) متتالية هندسية $(U_n)_{n\geq 0}$
أساسها 2 وفيها $U_0 = 1$
احسب $U_3 + U_4 + \dots + U_{10}$
بما أن المتتالية هندسية:
$U_n = U_0 \cdot q^n$
$U_n = 2^n$
$S = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$
$n = 10 - 3 + 1 = 8$
$a = U_3 = 2^3 = 8$
$S = 8\,\frac{1-2^8}{1-2}$
$= 8\left(\frac{1-2^8}{-1}\right)$
$= -8(1-256)$
$= -8(-255)$
$= 2040$

(7) احسب المجموع
$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots + 10$
نلاحظ أنها متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$
لأن كل حد ينتج عن سابقه بإضافة $(\frac{1}{2})$
$S = n\,\frac{a+\ell}{2}$
$a = 1 \quad , \quad \ell = 10$

$U_m = U_p + (m-p)r$
$m = n \quad , \quad p = 1$
$U_n = U_1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)$ $n = n-1+1$
$10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$
$\boxed{n = 20}$
$S = 20\,\frac{\frac{1}{2}+10}{2}$
$= 10\left(\frac{1}{2}+10\right) = 5 + 100 = 105$

(8) a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية. احسب a علماً أن:
$a \cdot b \cdot c = 343$ (1)
$a + b + c = 36.75$ (2)
$b^2 = a \cdot c$ (3)
نعوض (3) في (1):
$b^3 = 343 \rightarrow \boxed{b = 7}$
نعوض $b = 7$ في (1):
$a \cdot 7 \cdot c = 343$
$a \cdot c = 49$ (I)
نعوض $b = 7$ في (2):
$a + 7 + c = 36.75$
$a + c = 29.75$ (II)

من I : III $a = \frac{49}{c}$

نعوض III في II:

$$\frac{49}{c} + c = 29{,}75$$

نضرب الطرفين بـ c:

$$c^2 - 29{,}75c + 49 = 0$$

$$\Delta = 885{,}0625 - 196 = 689{,}0625$$

$$c_1 = \frac{29{,}75 + 26{,}25}{2} = 28 \Rightarrow a = 1{,}75 \text{ من III}$$

$$c_2 = \frac{29{,}75 - 26{,}25}{2} = 1{,}75 \Rightarrow a = 28 \text{ من III}$$

3. $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق: $v_0 = 1$

هام

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$$

1) تحقق أن $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

من أجل $n=0$:

$v_0 = 1 > 0$

فهي محققة من أجل $n=0$

الفرض: $v_n > 0$

الطلب: $v_{n+1} > 0$

الإثبات: لدينا فرضاً $v_n > 0$

$$1 + v_n > 0$$

$$\frac{v_n}{1+v_n} > 0$$

خاصة الإيجابية

2) أثبت أن المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{v_n}{v_n+1}} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{v_n}{v_n} = 1$$

فهي متتالية حسابية أساسها $r=1$

3) استنتج عبارة v_n بدلالة n.

لدينا u_n متتالية حسابية أساسها $r=1$

$$u_n = u_0 + nr$$

لكن $u_n = \frac{1}{v_n}$

$$u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$u_n = 1 + n$$

لدينا $u_n = \frac{1}{v_n}$

$$u_n \cdot v_n = 1$$

$$v_n = \frac{1}{\ldots}$$

4. ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

① $u_n = \frac{3}{n^2}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{3}$

$= \frac{\cancel{3}}{n^2+2n+1} \times \frac{n^2}{\cancel{3}}$

$= \frac{n^2}{n^2+2n+1} < 1$

فهي متناقصة تماماً

② $u_n = \sqrt{3n+1}$

ليكن $u_n = f(n)$

$f' = \frac{3}{2\sqrt{3n+1}} > 0$

فهي متزايدة تماماً.

③ $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$ أو بطريقة القسمة

$u_{n+1} - u_n$

$= \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4}$

$= \frac{(n+4)(2n+1) - (n+5)(2n-1)}{(n+5)(n+4)}$

$= \frac{\cancel{2n^2}+\cancel{n}+8n+4-\cancel{2n^2}+n-10n+5}{(n+5)(n+4)}$

$= \frac{5}{(n+5)(n+4)} > 0$

فهي متزايدة تماماً.

④ $u_n = \frac{1}{n^2+1}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$= \frac{1}{n^2+2n+2} \times \frac{n^2+1}{1}$

$= \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} < 1$

فهي متناقصة تماماً.

⑤ $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$

أو بطريقة المشتق من أجل $n > 2$

$u_{n+1} - u_n$

$= \frac{3n+4}{n-1} - \frac{3n+1}{n-2}$

$= \frac{(n-2)(3n+4) - (n-1)(3n+1)}{(n-1)(n-2)}$

$= \frac{\cancel{3n^2}+4n-6n-8-\cancel{3n^2}-\cancel{n}+\cancel{3n}+1}{(n-1)(n-2)}$

⑧ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$

فهي متناقصة تماماً ،

⑨ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$

فهي متزايدة تماماً .

$= \frac{-7}{(n-1)(n-2)} < 0$

فهي متناقصة تماماً من أجل $n > 2$

⑥ $u_n = \frac{n}{10^n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$= \frac{n+1}{10^{n+1}} \times \frac{10^n}{n}$

$= \frac{n+1}{\cancel{10^n} \cdot 10} \times \frac{\cancel{10^n}}{n}$

$= \frac{n+1}{10n} < 1$

وذلك من أجل $n \geq 1$ ،

⑦ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$

فهي متناقصة تماماً ،

$\frac{4}{18}$) متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
أساسها 3 وفيها $u_1=-2$
احسب u_n بدلالة n
واستنتج قيمة المجموعين
$u_1+u_2+\dots+u_7$
$u_2+u_4+u_6+\dots+u_{2n}$
بدلالة n.

الحل

$q=3$, $u_1=-2$

لدينا $u_n=u_0\cdot q^n$ $\quad n=1$

$u_1=u_0(3)^1 \Rightarrow -2=u_0(3)$

$u_0=\frac{-2}{3}$

$u_n=u_0\cdot q^n$

$u_n=\frac{-2}{3}(3)^n$

$\Rightarrow S_1=u_1+u_2+\dots+u_7$

$S_1=a\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$a=u_1=-2$

$n=7-1+1=7$

$S_1=\cancel{-2}\,\frac{1-(3)^7}{\cancel{1-3}}$

$=1-(3)^7$

$=1-2187$

$=-2186$

$S_2=u_2+u_4+u_6+\dots+u_{2n}$ بدلالة n

نحول المجموع من مجموع حدود غير متتالية إلى مجموع حدود متتالية

بفرض $u_2=v_1$

$u_4=v_2$

$\vdots$

$u_{2n}=v_n$

$S_2=v_1+v_2+v_3+\dots+v_n$

$S_2=a\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$a=v_1=u_2=\frac{-2}{3}(3)^2=-6$

ولنحسب أساس المتتالية الجديدة

$v_2=u_4=\frac{-2}{\cancel{3}}(3)^{\cancel{4}\,3}$

$=-2(27)=-54$

$q^{m-p}=\frac{v_m}{v_p}$ $\quad m=2$, $p=1$

$U_m = U_p + (m-p)r$

$m = n$

$p = 1$

$U_n = U_1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)$

$5 = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}n - \cancel{\frac{1}{2}}$

$\boxed{n = 10}$

$S = \cancel{10}^{5} \, \frac{\frac{1}{2}+5}{\cancel{2}}$

$= 5\left(\frac{1}{2}+5\right)$

$= 2,5 + 25 = 27,5$

$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$

نلاحظ أنها متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ لأن كل حد ينتج عن سابقه بضربه بالعدد $\left(\frac{1}{2}\right)$.

$S = a \, \frac{1-q^n}{1-q}$

$a = \frac{1}{2} \quad , \quad q = \frac{1}{2}$

$q^{2-1} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow q = \frac{-54}{-6}$

$\Rightarrow \boxed{q = 9}$

$S_2 = -6 \, \frac{1-9^n}{1-9}$

$= -6 \, \frac{1-9^n}{-8}$

$= \frac{3}{4}(1-9^n)$

تمرينات إضافية

احسب المجموع:

$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + 5$

الحل: نلاحظ أنها متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ لأن كل حد ينتج عن سابقه بإضافة $\left(\frac{1}{2}\right)$

$S = n \, \frac{a+l}{2}$

$a = \frac{1}{2} \quad , \quad l = 5$

$U_m = U_p \cdot q^{m-p}$

$m = n$

$p = 1$

$U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$

$\frac{1}{256} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^8}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{2^n} \Rightarrow n = 8$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}}$

$S = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$

21 نعرّف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

① احسب S_1 ، S_2 ، S_3 ، S_4 ثم عبّر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n هام

$S_1 = 1^2 = 1$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = S_1 + 2^2$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = S_2 + 3^2$

$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = S_3 + 4^2$

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

② أثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

من أجل $n = 1$

$l_1 = S_1 = 1$

$l_2 = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$l_1 = l_2$

فالعلاقة محققة من أجل $n = 1$

الفرض: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الطلب: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

الإثبات: من الطلب السابق

$l_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ فرضاً

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = l_2$

2. ليكن $x > -1$ في حالة عدد طبيعي n. نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة
$$(1+x)^n \geq 1+nx$$
أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

من أجل $n=0$

$$E(0) = (1+x)^0 \geq 1+0$$
$$1 \geq 1$$

فهي محققة من أجل $n=0$.

الفرض: $(1+x)^n \geq 1+nx$

الطلب: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

الإثبات: لدينا فرضاً
$$(1+x)^n \geq 1+nx$$
نضرب الطرفين بـ $(1+x) > 0$
$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(1+n)x+nx^2$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(1+n)x$$
وهو المطلوب .

تمرينات ومسائل

$\frac{1}{22}$ بيّن أي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة (ربما بدءاً من حد معين n_0)

① $u_n = -3n+1$

$$u_{n+1} - u_n$$
$$= -3(n+1)+1-(-3n+1)$$
$$= \cancel{-3n}-3\cancel{+1}\cancel{+3n}\cancel{-1}$$
$$= -3 < 0$$

فهي مطردة متناقصة تماماً .

② $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+3} \times \frac{n+2}{n+1}$$
$$= \frac{(n+2)^2}{(n+3)(n+1)}$$
$$= \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} > 1$$

فهي مطردة متزايدة تماماً .

③ $u_n = 2^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{\cancel{2^n}.2}{\cancel{2^n}} = 2 > 1$$

فهي مطردة متزايدة تماماً.

④ $u_n = \left(\frac{-1}{n}\right)^n$

$$u_n \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ زوجي} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ فردي} \end{cases}$$

المتتالية متناوبة غير مطردة.

⑤ $u_n = \frac{1}{n^2} + 1$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \cancel{1} + \frac{1}{(n+1)^2} \cancel{-1} + \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - (n^2 + 2n + 1)}{n^2(n^2 + 2n + 1)}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^4 + 2n^3 + n^2}$$

$$= \frac{-2n - 1}{n^4 + 2n^3 + n^2} < 0$$

فهي مطردة متناقصة تماماً من أجل $n \geq 1$.

⑥ $u_n = \frac{n^2}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)}{n^2} < 1$$

فهي مطردة متناقصة تماماً من أجل $n \geq 2$

Farah Notebook

⑦ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$u_{n+1} - u_n$

$= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \dots - \cancel{\frac{1}{2^n}}$

$= \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

فهي مطردة متزايدة تماماً

⑧ $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 2 \end{cases}$

$u_1 = \frac{3}{4} u_0 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_2 = \frac{3}{4} u_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_3 = \frac{3}{4} u_2 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

نلاحظ أنها متتالية ثابتة.

ونبرهن ذلك بالاستقراء:

$\left.\begin{matrix} u_0 = 8 \\ u_1 = 8 \end{matrix}\right\} u_1 - u_0 = 0$ ثابتة

وهي محققة من أجل حد البدء.

الفرض: $u_{n+1} - u_n = 0$

الطلب: $u_{n+2} - u_{n+1} = 0$

الإثبات: $u_{n+2} - u_{n+1}$

$= \frac{3}{4} u_{n+1} + \cancel{2} - \frac{3}{4} u_n - \cancel{2}$

$= \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

$= \frac{3}{4}(0)$ فرضاً

$= 0$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي متتالية ثابتة.

ط ٢: لدينا فرضاً $u_{n+1} - u_n = 0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n$

$\frac{3}{4} u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n$

$\frac{3}{4} u_{n+1} + 2 = \frac{3}{4} u_n + 2$

$u_{n+2} = u_{n+1}$

$u_{n+2} - u_{n+1} = 0$

فهي ثابتة لأن العلاقة محققة من أجل $n+1$.

⑨

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$$

$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{21}{8} + 2 = \frac{37}{8}$

نلاحظ أنها متتالية متزايدة.

ولنبرهن ذلك بالاستقراء:

$\left.\begin{array}{l} u_1 = \frac{7}{2} \\ u_0 = 2 \end{array}\right\} u_1 - u_0 = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} > 0$

فهي متزايدة

إذاً هي محققة من أجل الحد البدء

الفرض: $u_{n+1} - u_n > 0$

الطلب: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

الإثبات: لدينا

$u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} > u_n$

نضرب طرفي المتراجحة بـ $\frac{3}{4}$:

$\frac{3}{4}u_{n+1} > \frac{3}{4}u_n$

نضيف لطرفي المتراجحة 2:

$\frac{3}{4}u_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}u_n + 2$

$u_{n+2} > u_{n+1}$

فهي محققة من أجل $n+1$

فهي متتالية متزايدة.

4. أثبت بالتدريج صحة الخاصية الآتية ②

$n! \geq 2^{n-1}$

مع العلم أن $0! = 1$ ،

من أجل $n=0$:

$0! \geq 2^{0-1}$

$1 \geq \frac{1}{2}$

والعلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: $n! \geq 2^{n-1}$

الطلب: $(n+1)! \geq 2^n$

الإثبات: لدينا فرضاً:

$n! \geq 2^{n-1}$

نضرب طرفي المتراجحة بـ $n+1 > 1$:

$n!(n+1) \geq (n+1) \cdot 2^{n-1}$

$(7>5 \Leftrightarrow 7>4)$

$(n+1)! \geq (1+1) \cdot 2^{n-1}$

$(n+1)! \geq 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow (n+1)! \geq 2^n$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

نجد علاقة صحيحة.

6. a، b، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية، نرمز لها أساسها بالرمز q. كالعلم أن $3a$، $2b$، c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q. مع العلم $a \neq 0$

تمام جداً

$b = a \cdot q$ ①

$c = b \cdot q = a \cdot q \cdot q = a \cdot q^2$ ②

$c, 2b, 3a$ حدود متوالية من متتالية حسابية

$2b = \frac{c+3a}{2}$

$4b = c + 3a$ ③

نعوض ① و ② في ③:

$4(a \cdot q) = a \cdot q^2 + 3a$

$\div a$

$4q = q^2 + 3$

$q^2 - 4q + 3 = 0$

$(q-3)(q-1) = 0$

إما $q = 3$

أو $q = 1$

$\frac{8}{18}$ 8. a، b، c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية. احسبها علماً أن:

$a \cdot b \cdot c = 64$ ①

$a + b + c = 14$ ②

بما أن المتتالية هندسية فإن:

$b^2 = a \cdot c$ ③

نعوض ③ في ①:

$b^3 = 64 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

نعوض $b = 4$ في ①:

$a \cdot 4 \cdot c = 64$

$a \cdot c = 16$ Ⓘ

نعوض $b=4$ في ②:

$a+4+c=14$

$a+c=10$ (II)

من (I) و (II):

إما $a=8$, $c=2$

أو $a=2$, $c=8$

13. أياً كان n عدد طبيعي أثبت صحة العلاقة الآتية:

(4) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

من أجل $n=0$

$3^{1}+2^{2}=7$ وهي محققة من أجل $n=0$

الفرض: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف 7.

الطلب: $3^{2n+3}+2^{n+3}$ مضاعف 7.

الإثبات: $3^{2n+3}+2^{n+3}=3^{2}.3^{2n+1}+2.2^{n+2}$

$=(7+2)3^{2n+1}+2.2^{n+2}$

$=7.3^{2n+1}+2.3^{2n+1}+2.2^{n+2}$

$=7.3^{2n+1}+2(3^{2n+1}+2^{n+2})$

من مضاعفات 7   من مضاعفات 7 فرضاً

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة.

- ادرس جهة اطراد المتتالية

$u_n=\sqrt{3n+1}$

$u_{n+1}-u_n$

$=\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1}$

$=\frac{(\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}$

$=\frac{\cancel{3n}+4-\cancel{3n}-1}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}$

$=\frac{3}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}>0$

فهي متزايدة تماماً.

11:
25

(1) أثبت أياً كان العدد الطبيعي n ، $n\geq 2$ ، أن: $3n^{2}\geq(n+1)^{2}$

(محلول)

(2) نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية «$3^{n}\geq 2^{n}+5n^{2}$»

(1) ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عندئذ؟

الحل: $E(1): 3^1 \geq 2^1+5(1)^2$

غير محقق $3 \geq 2+5$

$E(2): 3^2 \geq 2^2+5(2)^2$

غير محقق $9 \geq 4+20$

$E(3): 3^3 \geq 2^3+5(3)^2$

غير محقق $27 \geq 8+45$

$E(4): 3^4 \geq 2^4+5(4)^2$

غير محقق $81 \geq 16+80$

$E(5): 3^5 \geq 2^5+5(5)^2$

محققة $243 \geq 32+125$

إذن (5) هو أصغر عدد طبيعي تكون $E(n)$ صحيحة عنده.

② أثبت أن $E(n)$ صحيحة، أياً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$.

الحل: من أجل $n=5$

$3^5 \geq 2^5+5(5)^2$

$243 \geq 32+125$

وهي محققة من أجل $n=5$

الفرض: $3^n \geq 2^n+5n^2$

الطلب: $3^{n+1} \geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$

الإثبات: $3^n \geq 2^n+5n^2$

نضرب طرفي المتراجحة بـ 3:

$3^n.3 \geq 3.2^n+5.3n^2$

(وبما أن $3n^2 \geq (n+1)^2$ من الطلب الأول فنستبدل الـ $3n^2$ بـ $(n+1)^2$ لتصبح المتراجحة:)

$3^{n+1} \geq (2+1)2^n+5(n+1)^2$

$3^{n+1} \geq 2.2^n+\cancel{2^n}+5(n+1)^2$

$3^{n+1} \geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة.

12. نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية «$3^n \geq (n+2)^2$»

① أتكون القضايا $E(0)$، $E(1)$، $E(2)$، $E(3)$ صحيحة؟

الحل: $E(0): 3^0 \geq (0+2)^2$

$1 \geq 4$ غ.م

$E(1): 3^1 \geq (1+2)^2$

$3 \geq 9$ غ.م

15 + 16 هام

$E(2): 3^2 \geq (2+2)^2$

غ م $9 \geq 16$

$E(3): 3^3 \geq (3+2)^2$

محققة $27 \geq 25$

من أجل $n=3$ وجدنا القضية محققة

② حلول

14. نرمز إلى القضية « يقسم العدد 9 العدد 10^n+1 » بالرمز $E(n)$ في حالة $n \in \mathbb{N}$.

① أثبت أنه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n، كانت عندئذٍ $E(n+1)$ صحيحة.

الحل: $E(n)$: 10^n+1 مضاعف لـ 9

الفرض: 10^n+1 مضاعف لـ 9

الطلب: $10^{n+1}+1$ مضاعف لـ 9

الإثبات:

$10^{n+1}+1 = 10 \cdot 10^n + 1$

$= (9+1) \cdot 10^n + 1$

$= \underline{9 \cdot 10^n} + \underline{10^n + 1}$

فرضاً من مضاعفات الـ 9

ومنه محققة من أجل $n+1$.

* يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 9

② أتكون القضية $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ برر إجابتك.

من أجل $n=0$

$10^0+1 = 2$ وهو ليس من مضاعفات العدد 9

$n=1$

$10^1+1 = 11$ وهو ليس من مضاعفات العدد 9

$10^n+1 = \underbrace{10000\ldots0}_{n \text{ صفر}}+1$

مجموع أرقامه $= 2$

وهو ليس من مضاعفات العدد 9

إذاً $E(n)$ خاطئة على $\mathbb{N}$

15. $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

① أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$

الحل: من أجل $n=0$

$0 \leq u_0 = 1 \leq 2$

والعلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: $0 \leq u_n \leq 2$

الطلب: $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

الإثبات: لدينا فرضاً:

$0 \leq u_n \leq 2$

$2 \leq 2+u_n \leq 4$

$0 \leq 2+u_n \leq 4$

$\sqrt{0} \leq \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{4}$

$0 \leq u_{n+1} \leq 2$

وهو المطلوب.

(2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

★ لإثبات اطراد متتالية معطاة بصيغة تراجعية نستخدم الاستقراء. ★

$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

$u_1 - u_0 = \sqrt{3} - 1 > 0$

فهي متزايدة.

الفرض: $u_{n+1} - u_n > 0$ (متزايدة)

الطلب: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

الإثبات: لدينا

$u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} > u_n$

$2+u_{n+1} > 2+u_n$

$\sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{2+u_n}$

$u_{n+2} > u_{n+1}$

$u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

وهو المطلوب.

16. متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{2u_n+6}$ و $u_0 = 1$ عند كل $n \geq 0$.

(1) أثبت أن التابع $x \to \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كان العدد n.

ملاحظة:

f متزايد تماماً $\Leftrightarrow f' > 0$

f متناقص تماماً $\Leftrightarrow f' < 0$

الحل:

$$f' = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x}+18-\cancel{6x}-4}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

f متزايد تماماً.

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

الحل: من أجل $n=0$:

$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$

وهي محققة

الفرض: $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

الطلب: $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

الإثبات: لدينا فرضاً

$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$

$\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6} < u_{n+1} \leq \frac{3+2}{2+6}$

$\frac{\frac{7}{2}}{7} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

وهو المطلوب.

② $u_0 = 1 \,,\, u_1 = \frac{5}{8}$

$u_n = f(n)$

$u_{n+1} = f(u_n)$

$u_1 - u_0 = \frac{5}{8} - 1 = \frac{-3}{8} < 0$

فهي متناقصة

الفرض: $u_{n+1} - u_n < 0$

الطلب: $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$

الإثبات: لدينا فرضاً $u_{n+1} < u_n$

$f(u_{n+1}) < f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$

$u_{n+2} - u_{n+1} < 0$

(٢) 17

$u_0 = 2\cos\theta$

$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

① احسب u_1 , u_2

② أثبت بالتدريج $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ من أجل $n \geq 1$.

الحل: ①

$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$= \sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}$

$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{4}}$

$= 2\cos\frac{\theta}{4}$

② من أجل $n=1$

$u_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^1}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}$

وهي محققة من أجل $n=1$

الفرض: $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

Farah Notebook

الطلب: $U_{n+1}=2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

الإثبات:

$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$

من الفرض $=\sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

$=\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}$

$U_{n+1}=\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}}$

$=\sqrt{4\cdot\cos^2\frac{\theta}{2\cdot 2^n}}$

$=2\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

فهي محققة.

18: $S_n=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\dots+\cos((2n-1)x)$

① باستعمال دساتير مثلثية تعرفها أثبت أن:

$\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a$

الحل: لدينا:

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$

$\sin 2a=\sin(a+a)$

$=\sin a\cos a+\cos a\sin a$

$\boxed{\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a}$

$-\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

لدينا:

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b$

$\sin(a+b)+\sin(a-b)$

$=2\sin a\cdot\cos b$

② حول كلاً من العبارتين الآتيتين:

* $\sin nx\cdot\cos nx$

$\sin nx\cdot\cos nx$

$=\frac{1}{2}[\sin(nx+nx)+\sin(nx-nx)]$

$\sin nx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\sin(2nx)$

$*\ \sin x \cdot \cos((2n+1)x)$

$= \frac{1}{2}[\sin(x+2nx+x) + \sin(\cancel{x}-2nx-\cancel{x})]$

$= \frac{1}{2}[\sin(2x+2nx) + \sin(-2nx)]$

$= \frac{1}{2}[\sin(2(1+n)x) - \sin(2nx)]$

$\sin x \cdot \cos((2n+1)x) = \frac{1}{2}[\sin(2(1+n)x) - \sin(2nx)]$

③ أثبت أن $S_n = \cos(nx) \times \frac{\sin nx}{\sin x}$, $n \geq 1$

الحل: من أجل $n=1$

$l_1 = S_1 = \cos x$

$l_2 = \cos x \times \frac{\sin x}{\sin x} = \cos x$

فهي محققة من أجل $n=1$ $\quad l_1 = l_2$

الفرض: $S_n = \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x}$

الطلب: $S_{n+1} = \cos(n+1)x \times \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$

الإثبات:

$S_{n+1} = \underbrace{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n-1)x}_{\text{من الفرض}} + \cos((2n+1)x)$

$= \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x} + \cos(2n+1)x$

$= \frac{\cos nx \times \sin nx + \sin x \times \cos((2n+1)x)}{\sin x}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin(2nx) + \frac{1}{2}[\sin 2(1+n)x - \sin(2nx)]}{\sin x}$

$= \frac{\cancel{\frac{1}{2}\sin(2nx)} + \frac{1}{2}\sin 2(1+n)x - \cancel{\frac{1}{2}\sin(2nx)}}{\sin x}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2(1+n)x}{\sin x}$

$= \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cos(1+n)x \cdot \sin(1+n)x}{\sin x}$

$= \cos(1+n)x \times \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$

$= l_2$

فهي محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة.

Farah Notebook

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_{n+1}=2u_n-3$ و $u_0=2$ في حال أي عدد طبيعي غير معدوم n.

① احسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ثم خمّن عبارة u_n بدلالة n.

$u_0=2$

$u_1=2(2)-3=1$

$u_2=2(1)-3=-1$

$u_3=2(-1)-3=-5$

$u_4=2(-5)-3=-13$

$u_5=2(-13)-3=-29$

$u_1-u_0=-1=-2^0$

$u_2-u_1=-2=-2^1$

$u_3-u_2=-4=-2^4$

$u_4-u_3=-8=-2^3$

$u_5-u_4=-16=-2^4$

$u_{n+1}-u_n=-2^n$

$2u_n-3-u_n=-2^n$

$\boxed{u_n=3-2^n}$

3 المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_{n+1}=-u_n+4$ و $u_0=3$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n.

احسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 وخمّن عبارة u_n بدلالة n ثم حدد u_n بدلالة n.

$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=-u_n+4 \end{cases}$$

$u_0=3$

$u_1=-3+4=1$

$u_2=-1+4=3$

$u_3=-3+4=1$

$u_4=-1+4=3$

$u_5=-3+4=1$

$u_1-u_0=-2=(-1)^1.2$

$u_2-u_1=2=(-1)^2.2$

$u_3-u_2=-2=(-1)^3.2$

$u_4-u_3=2=(-1)^4.2$

$u_5-u_4=-2=(-1)^5.2$

$u_{n+1}-u_n=(-1)^{n+1}.2$

$-u_n+4-u_n=(-1)^{n+1}.2$

$-2u_n=-4+(-1)^{n+1}.2$

$u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1} \cdot \cancel{2}}{-\cancel{2}}$

$u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^1}$

$\boxed{u_n = 2 + (-1)^n}$

$\boxed{7}$ نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق

$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 10u_n - 18 \end{cases}$

عند كل عدد طبيعي n .

هدفنا في هذا التمرين إلى التعبير عن u_n بدلالة n .

$u_0 = 7$

$u_1 = 70 - 18 = 52$

$u_2 = 502$

$u_3 = 5002$

$u_4 = 50002$

$u_5 = 500002$

$u_1 - u_0 = 45 = 45 \times 10^0$

$u_2 - u_1 = 450 = 45 \times 10^1$

$u_3 - u_2 = 4500 = 45 \times 10^2$

$u_4 - u_3 = 45000 = 45 \times 10^3$

$u_5 - u_4 = 450000 = 45 \times 10^4$

$u_{n+1} - u_n = 45 \times 10^n$

$10u_n - 18 - u_n = 45 \times 10^n$

$9u_n = 18 + 45 \times 10^n$

$u_n = 2 + 5 \times 10^n$

2b)

أثبت بالتدريج

$n! \geq 2^{n-1}$

من أجل $n=1$

$1! \geq 2^0 \Rightarrow 1 \geq 1$

فهي محققة من أجل $n=1$.

الفرض: $n! \geq 2^{n-1}$

الطلب: $(n+1)! \geq 2^n$

الإثبات: من الفرض

$n! \geq 2^{n-1}$

نضرب طرفي المتراجحة بـ $n+1>0$

$n!(n+1) \geq (n+1)2^{n-1}$

$(n+1)! \geq (1+1)2^{n-1}$

$\boxed{7>5 \Leftrightarrow 7>4}$

$(n+1)! \geq 2 \cdot 2^{n-1}$

$(n+1)! \geq 2^n$

فهي محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة .

مثال:

2 4 6 8 10 12 ...

$u_n = 2n \qquad n \geq 1$

$u_n = 2 + 2n \qquad n \geq 0$

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \ldots$

$u_n = \frac{1}{n} \qquad n \geq 1$

0 1 4 9 16 25 ...

$u_n = n^2$

-2 2 -2 2 -2 2 -2 ...

$u_n = (-1)^{n+1} 2$

«مقارنة بين قوانين المتتاليات»

القانون	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
الحد العام	$U_n = U_0 + nr$	$U_n = U_0 \cdot q^n$
حدين لاعلى التعيين	$U_m = U_p + (m-p)r$	$U_m = U_p \cdot q^{m-p}$
إثبات نوع المتتالية	$U_{n+1} - U_n =$ ثابت	$\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ ثابت
ثلاثة حدود متتالية	$2b = a + c$	$b^2 = a \cdot c$
المجموع	$S = n\,\frac{a + l}{2}$	$S = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}$
الأساس	$r = \frac{U_m - U_p}{m - p}$	$q^{m-p} = \frac{U_m}{U_p}$