جم

- التحليل التوافقي -

قوانين الحساب — توظيف القوانين في حل المسائل — منثور ذي الحدين

أولاً: قوانين الحساب:

المضروب $n!$ — التراتيب P^r_n — n^r — التوافيق $\binom{n}{r}$

[1] المضروب $n!$:

① $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

② $n! = n(n-1)!$
$5! = 5 \times 4 \times 3!$ } اختزال

③ $0! = 1$ و $1! = 1$

② التراتيب P^r_n :

$n \geq r \geq 1$

عدد المرات ← (n)

① $P^r_n = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$

$5-3+1=3$

$P^3_5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$10-2+1=9$

$P^2_{10} = 10 \times 9 = 90$

$7-3+1=5$

$P^3_7 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

② $P^n_n = n!$ و $P^5_5 = 5!$

$P^1_n = n$ و $P^1_{10} = 10$

[3] n^r :

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

4 التوافيق $\binom{n}{r}$.

$n \leftarrow$ عدد العناصر

$n \geq r$

① $\binom{n}{r} = \dfrac{P_n^r}{r!}$

P_5^3

$\binom{5}{3} = \dfrac{5 \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 10$

$\binom{10}{2} = \dfrac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$

$\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

② $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$ $\rightarrow$ منستعملها لما r مجهولة أو n و r تحليل

③ $\binom{n}{n} = 1$ و $\binom{n}{0} = 1$ و $\binom{n}{1} = n$

$\binom{10}{10} = 1$ و $\binom{15}{0} = 1$ و $\binom{20}{1} = 20$

④ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$

$\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$

$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$

⑤ $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ $\rightarrow$ إما: $p = q$
أو: $p + q = n$

/ /

نوصل الكسر عند الصفر

تمرين (1): بسط العبارات الآتية:

1) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n(n+1)$

2) $\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n)!-(n-1)!} = \frac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2(n)(n-1)!-(n-1)!}$

$= \frac{(2n-1)!(2n-1)}{(n-1)!(2n-1)} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$

3) $\frac{(2n)!}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)} =$

$= \frac{2n\cancel{(2n-1)}(2n-2)\cancel{(2n-3)}\times\cdots\cancel{\times3}\times2\times1}{\cancel{1\times3\times5}\times\cdots\times\cancel{(2n-1)}}$

نختصر الفردي في البسط والمقام ←

$= 2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)\times\cdots\times2$

$= 2(n)\,2(n-1)\,2(n-2)\,2(n-3)\times\cdots\times2$

$= 2^n\cdot n!$

تمرين (2): أثبت صحة العلاقة:

2) $\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$

$P_1 = \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,\cancel{r!}}}{\frac{n!}{(n-r)!\,\cancel{r!}}} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!}\times\frac{(n-r)!}{n!}$

$= \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1-r)\cancel{(n-r)!}}\times\frac{\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{n+1-r} = P_2$

$n^2-3n-2n+6=56$

$+6=56$

2) $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r} \rightarrow r\,\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$P_1 = n\binom{n-1}{r-1} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!} \rightarrow (n-1-r+1)! = (n-r)!$

$= \frac{n(n-1)!\quad\times r}{(n-r)!\,\boxed{(r-1)!\times r}}$

$n! = n(n-1)!\ ;\ r! = r(r-1)!$

$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\cancel{r} = r\binom{n}{r} = P_2$

تمرين (3): احسب قيمة n في:

1) $P^4_{n+2} = 14\,P^3_n$

$n+2\geq4 \rightarrow n\geq2$ و شرط الحل $n\geq3$

$n\geq3$

$(n+2)(n+1)\cancel{(n)(n-1)} = 14\cancel{(n)(n-1)}(n-2)$

$n^2+3n+2 = 14n-28$

$\rightarrow n^2-11n+30=0$

$\rightarrow (n-6)(n-5)=0$

إما $n=6$ أو $n=5$

مقبول مقبول

2) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

$n\geq4$ و شرط الحل $: n\geq4$

$n\geq2$

$3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1} = 14\,\frac{n(n-1)}{2\times1}$

$\frac{(n-2)(n-3)}{8} = 7$

$(n-2)(n-3) = 56$

$n^2-5n-50=0$

$(n-10)(n+5)=0$

إما $n=10$ مقبول

أو $n=-5$ مرفوض

$2n - 3n$

(3) $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

اما: $3n = n+2 \to 3n - n - 2 = 0$

$2n - 2 = 0$

$2n = 2$

$n = 1$

او: $3n + n + 2 = 10 \to 4n + 2 = 10$

$4n = 8$

$n = 2$

تمرين (4): المجهولة n و r:

$$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r} \quad \text{و} \quad 3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$$

لدينا: $2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$

$$2\frac{\cancel{(n+1)!}}{(n-r)!\,\underbrace{(r+1)!}} = 5\frac{\cancel{(n+1)!}}{\underbrace{(n+1-r)!}\,r!}$$

$$\frac{2}{\cancel{(n-r)!}\,(r+1)\,\cancel{r!}} = \frac{5}{(n+1-r)\,\cancel{(n-r)!}\,\cancel{r!}}$$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n+1-r} \to 2n + 2 - 2r = 5r + 5$$

$\to 2n - 7r - 3 = 0$ — ①

لدينا: $3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$

$$3\frac{\cancel{n!}}{(n-r)!\,\underbrace{r!}} = 8\frac{\cancel{n!}}{\underbrace{(n-r+1)!}\,(r-1)!}$$

$$\frac{3}{\cancel{(n-r)!}\,r\,\cancel{(r-1)!}} = \frac{8}{(n-r+1)\,\cancel{(n-r)!}\,\cancel{(r-1)!}}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1}$$

$3n - 3r + 3 = 8r$

$3n - 11r + 3 = 0$ — ②

$2n - 7r - 3 = 0$ ①

$3n - 11r + 3 = 0$ ②

الطرح:

① − ② =

$2n - 7r - 3 - 3n + 11r - 3 = 0$

$-n + 4r - 6 = 0$ نضرب ب (−1)

$n - 4r + 6 = 0$

$n = 4r - 6$ (*)

نعوض (n) في ①

$2(4r - 6) - 7r - 3 = 0$

$8r - 12 - 7r - 3 = 0$

$r - 15 = 0 \to r = 15$

نعوض (r) في *

$n = 4(15) - 6 = 60 - 6 = 54$

$3n - 11(15) + 3 = 0$

$3n - 165 + 3 = 0$

$3n = 165 - 3$

$3n = 162$

$n = 54$

/ /

ثانياً: منشور ذي الحدين:

$$\# \quad (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots$$

$$+ \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

ex: $(2+x)^5$

$a = 2 \ , \ b = x \ , \ n = 5$

$$(2+x)^5 = \binom{5}{0}(2)^5(x)^0 + \binom{5}{1}(2)^4(x)^1 + \binom{5}{2}(2)^3(x)^2 + \binom{5}{3}(2)^2(x)^3$$

$$+ \binom{5}{4}(2)^1(x)^4 + \binom{5}{5}(2)^0(x)^5.$$

$$(2+x)^5 = 1 \times 32 \times 1 + 5 \times 16 \times x + 10 \times 8 \times x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$$

$$= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$$

$$\# \quad T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

يستخدم عندما يطلب حد معين في المنشور.

- الحد الثابت هو الحد المستقل عن x أو الحد الذي لا يحوي x أي x^0.

تمرين (5):

أوجد الحد المستقل عن x في المنشور $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$

$$T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

$a = x \ , \ b = x^{-1} \ , \ n = 8$

$$T_r = \binom{8}{r}(x)^{8-r}(x^{-1})^r = \binom{8}{r}(x)^{8-r}(x)^{-r} = \binom{8}{r}(x)^{8-2r}$$

الحد المستقل عن x: $\boxed{x^0}$

$$\rightarrow 8 - 2r = 0 \rightarrow 8 = 2r \rightarrow \boxed{r} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

$$\Longrightarrow T_4 = \binom{8}{4}(x)^{8-8} = \binom{8}{4}(x)^0 = \binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

/ /

ثالثاً: توظيف القوانين في حل المسائل:

التباديل $n!$: كل في كل دون تكرار
* عند ترتيب جميع عناصر المجموعة شرط أن لا يكون مختلفة مثنى مثنى.

الترتيب P^r_n : بعض في كل دون تكرار
ويهمنا الترتيب
① اسحب على التوالي دون إعادة
② تشكيل كلمات دون تكرار الحروف
③ تشكيل أعداد دون تكرار أرقام
④ تشكيل لجان مع تحديد مهام

القوانين مع تكرار n^r مع تكرار
① اسحب على التوالي مع إعادة
② تشكيل كلمات مع تكرار حروف
③ تشكيل أعداد مع تكرار أرقام
( ) يهمنا الترتيب
[ ] لا يهمنا الترتيب

التوافيق $\binom{n}{r}$ مجموعات جزئية
لا يهمنا الترتيب
① اسحب معاً
② تشكيل لجان دون تحديد مهام
( ) مرتبة
[ ] المجموعة

قواعد (يهمنا الترتيب)

س: ما هو معامل التباديل؟
① عند وجود مكانين وعنصرين نضرب بـ 2 $2\times(B,W)$
② عند وجود ثلاث أماكن وعنصرين نضرب بـ 3 $3\times(B,B,W)$
③ عند وجود ثلاث أماكن وثلاث عناصر نضرب بـ 6 $6\times(B,W,B)$

القانون $= \dfrac{\text{(عدد المواقع)!}}{\text{(عدد المتشابهات)!}}$ → $ex: (b,B,W) = \dfrac{3!}{2!} =$

س: متى لا نضرب بمعامل التباديل؟
① إذا كان السحب معاً.
② إذا ذكر ترتيب معين في الطلب.
③ إذا كانت عناصر النتيجة متشابهة.

جم:

- العليل التوافقي -

قوانين الحساب. توظيف القوانين في حل المسائل منتوري ذي الحدين

أولاً: قوانين الحساب:

المضروب $n!$. التراتيب P^r_n n^r التوافيق $\binom{n}{r}$

1 المضروب $n!$:

① $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

② $n! = n(n-1)!$

$5! = 5 \times 4 \times 3!$ اختزال

③ $0! = 1$ و $1! = 1$

2 التراتيب P^r_n:

$n \geq r \geq 1$

① $P^r_n = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$

n عدد المرات

$5-3+1=3$

$P^3_5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$10-2+1=9$

$P^2_{10} = 10 \times 9 = 90$

$7-3+1=5$

$P^3_7 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

② $P^n_n = n!$ و $P^5_5 = 5!$

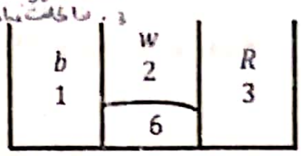
$P^1_n = n$ و $P^1_{10} = 10$

3 n^r:

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

مسألة (١):

متى لا نضرب بمعامل التبادل لـ 3
1. اذا كان السحب معاً
2. اذا ذكر ترتيب معين للطلب
3. ما طلبت مباشرة ...



سحب ثلاث كرات على التتالي بدون إعادة:

١) ما عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة.

٢) ما عدد النتائج التي تحوي على كرتين من نفس اللون.

٣) ما عدد النتائج التي تكون فيها الكرات مختلفة.

٤) ما عدد النتائج أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء.

٥) ما عدد النتائج التي تحوي على كرة سوداء على الأقل.

٦) ما عدد النتائج التي تحوي على كرتين حمراوين على الأكثر.

الحل:

١) طريقة $n(\Omega) = P_6^3 = 6.5.4 = 120$

٢) $A: 3(RRR`), 3(www`)$

طريقة $n(A) = 3.3.2.3 + 3.2.1.4 = 78$

٣) $B: 6(Rwb)$

طريقة $n(R) = 6.3.2.1 = 36$

٤) طريقة $C: (Rwb) \Rightarrow n(C) = 3.2.1 = 6$

٥) طريقة $D: 3(bb`b`) \Rightarrow n(D) = 3.1.5.4 = 60$

٦) $E: 3(RRR`), 3(RR`R`), (R`R`R`)$

$n(E) = 3.3.2.3 + 3.3.32 + 3.2.1$

$= 78$ طريقة

مسألة (٢): أعد الطلبات السابقة أن يكون السحب مع إعادة:

١) $n(\Omega) = 6^3 = 6.6.6 = 216$

٢) $A: 3(RRR`), 3(www`), 3(bbb`)$

$n(A) = 3.3.3.3 + 3.2.2.4 + 3.1.1.5$

3) $B: 6(Rwb)$

طريقة $n(B) = 6.3.2.1 = 36$

٤) $C: (Rwb), n(C) = 3.2.1 = 6$

٥) $D: 3(bb`b`), 3(bbb`), (bbb)$

طريقة $n(D): 3.1.5.5 + 3.1.1.5 + 1.1.1 = 90$

6) $E: 3(RRR`), 3(RR`R`), (R`R`R`)$

طريقة $n(E): 3.3.3.3 + 3.3.3.3 + 3.3.3 = 189$

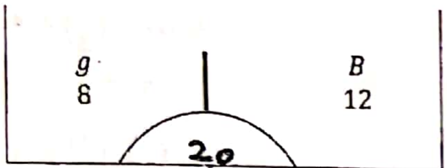
مسألة (٣): صف فيه ١٢ طالب و٨ طالبات تريد تشكيل لجنة مؤلفة من ٥ أشخاص، كم لجنة مختلفة يمكن تشكيل في كل من الحالات التالية:

١) اللجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

٢) اللجنة مؤلفة من طالبتين على الأكثر.

٣) اللجنة مؤلفة من طالبتين على الأقل.

توافيق لا نضرب بالتبادل



اختيار خمس أشخاص معاً

١) $(bbbgg)$

$$n = \binom{12}{3}\binom{8}{2} = 6160$$

٢) $(ggbbb), (gbbbb), (bbbbb)$

$$n = \binom{8}{2}.\binom{12}{3} + \binom{8}{1}\binom{12}{4} + \binom{12}{5} = 10912$$

٣) $(ggbbb), (gggbb), (ggggb), (ggggg)$

$$n = \binom{8}{2}.\binom{12}{3} + \binom{8}{3}\binom{12}{2} + \binom{8}{4}\binom{12}{1} + \binom{8}{5} = 10752$$

مسألة (٤): مغلف يحتوي على بطاقات $\{6, 7, 8, 9\}$ نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي بدون إعادة:

3 بطاقات

١) ما عدد النتائج الممكنة في التجربة.

٢) ما عدد النتائج الممكنة في كل من الحالات:

A) الأولى تحمل الرقم ٦ والثانية الرقم ٩، الثالث تحمل الرقم ٧.

B) الأولى تحمل الرقم ٨ والثانية تحمل الرقم ٩

C) الثانية تحمل الرقم ٧

D) تحوي على رقم ٧. مضروب التبادل لأنو ما ذكر الترتيب

الحل:

١) طريقة $P_4^3 = 4.3.2 = 24$

٢) A) $(6,9,7)$

طريقة $n(A) = 1.1.1 = 1$

B) (مختلفة ، 9 ،8)

طريقة $n(R) = 1.1.2 = 2$

C) (مختلفة ، 7 ، مختلفة)

طريقة $n(C) = 3.1.2 = 6$

D) (مختلفة، مختلفة ،7)3

طريقة $n(D) = 3.1.3.2 = 18$

مسألة (٥): $E = \{6,7,8,9\}$ سحب 3 بطاقات معاً. كواعصني

١) كم عدد النتائج الممكنة لتجربة.

٢) كم عدد النتائج الممكنة لظهور العدد 7.

٣) كم عدد النتائج الممكنة لظهور العدد 8، 9.

الحل:

١) طريقة $n(\Omega) = \binom{4}{3} = 4$

$\{7,7',7'\}$

٢) طريقة $n(A) = \binom{1}{1}.\binom{3}{2} = 3$

٣) {8 ، 9 ، مختلفة}

طريقة $n(B) = \binom{1}{1}.\binom{1}{1}.\binom{2}{1} = 2$

مسألة (٦): يتألف مجلس إدارة نادي من 7 أعضاء بكم طريقة يمكن اختيار (رئيس ونائب وأمين سرّ)؟

الحل:

$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ طريقة

لدينا مع تحديد ... ترتيب

مسألة (٧): اشترك 100 متسابق في سباق للدراجات يجري فيه توزيع ميدالية (ذهبية ـ فضيّة ـ برونزية) كم نتيجة لهذا السباق؟

الحل:

$P_{100}^3 = 100 \times 99 \times 98 = 970200$ طريقة

نعوض ... الترتيب

مسألة (٨): رف يحوي 7 كتب، لمؤلفين ثلاثة للمؤلف A، أربعة للمؤلف B:

١) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B؟

٢) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية؟ محدد مانو عشوائي

الحل: ١) [BBB ,4 البقية]

$n = P_4^3 . 4! = 4.3.2.4.3.2.1 = 576$

2) [B, 6 البقية]

عدد الطرق الكلي $= 1 \times 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ طريقة

مسألة (٩): فريق لتسلّق الجبال يضم مدربين و 3 لاعبين نريد ترتيبهم في رتل، بكم طريقة يمكن ترتيب الرتل في كل حالة من الحالات التالية:

١) مدرب في بداية الرتل ومدرّب في نهاية الرتل؟

٢) المدربان في بداية الرتل؟

٣) لاعبان في بداية الرتل و مدرّب في نهايته؟

الحل:

١) [مدرب, البقية 3, مدرب]

$n = P_2^1 . 3! . P_1^1 = 2.3.2.1 = 12$

٢) [البقية 3, مدرب, مدرب]

$n = P_2^2 . 3! = 2.6 = 12$

٣) [مدرب, البقية 2, لاعبان]

$n = P_3^2 . 2! . P_2 = 3.2.2.2 = 24$ طريقة

مسألة (١٠): يلتقي ١٠ أشخاص في حفل يصافح كلّ منهم التسعة الآخرين ما عدد المصافحات في الحفل:

الحل:

$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ مصافحة

نعوض بكل لا يهمنا الترتيب

قانون $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

مسألة (١١): أثبت أنّ عدد أقطار مضلع محدّب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$

عدد الأقطار = عدد القطع المستقيمة − عدد الأضلاع

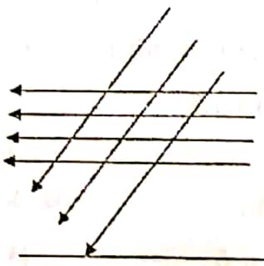
الحل:

عدد الأقطار $= \binom{n}{2} - n$

$= \frac{n(n-1)}{2!} - n$

$= \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$

مسألة (١٢): ما عدد متوازيات الأضلاع في هذا الشكل



$\binom{4}{2}\binom{3}{2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1}.3 = 18$

أضلاع الشاقولية

أضلاع الأفقية

مسألة (١٣):

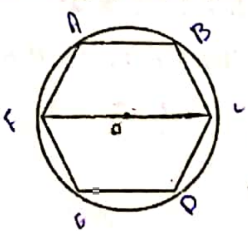
مسدس منتظم تمرّ من رؤوسه دائرة يوصل جميع الرؤوس

١) ما عدد المثلثات؟

٢) ما عدد المثلثات القائمة؟

٣) ما عدد المثلثات المنفرجة؟

٤) ما عدد نقاط التقاء الأقطار؟



لا يهمنا الترتيب

عدد الأضلاع = عدد الرؤوس

Note: بس طلبنا منك شي وتعرف معنى عطوه ومنظر حوس الحل

الحل:

1) $\binom{6}{3} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

2) $\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \cdot 4 = 12$

[لأننا تأثر قطر داخلي]

3) عدد الرؤوس = عدد المثلثات المنفرجة $= 6$

4) $\binom{6}{4} + 6 = \binom{6}{2} + 4 = 15 + 4 = 19$

$\uparrow \binom{n}{4} + \uparrow n$

مسألة (١٤): نريد تأليف لجنة مكوّنة من (مدير – نائب مدير – أمين سرّ) من مجموعة تضم خمسة أشخاص، بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً أن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها؟

عدد اللجان الكلي $= P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

عدد اللجان المرفوضة $=$ (م م م) $\times 3$

$= 3 \times P_2^2 \times P_3^1 = 18$

عدد الطرق $= 60 - 18 = 42$

م متفاهم
أم ليس متفاهم

مسألة (١٥): يريد معلم توزيع $(n+1)$ جائزة على n تلميذ بحيث يأخذ كلّ تلميذ جائزة واحدة على الأقل، بكم طريقة يتم ذلك؟

الحل:

١) اختيار جائزتين ووضعهما معاً كجائزة واحدة: $\binom{n+1}{2}$

٢) توزيع n جائزة على n تلميذ: $n!$

$\binom{n+1}{2} \cdot n! = \dfrac{(n+1) \cdot n \cdot n!}{2} = \dfrac{n}{2} \cdot (n+1)!$ ، طريقة

Note:

* عندما يكون عدد الرؤوس الجبار يساوي الـ 5 يكون عدد المثلثات المنفرجة = عدد الرؤوس

نقاط التقاء الأقطار $\binom{n}{4} + n$ بشرط $n \geq 4$

n = عدد الرؤوس

تمرين (١): بسّط العبارات:

① $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$

$= n^2 + n$

② $\dfrac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!} = \dfrac{(2n).(2n-1)! - (2n-1)!}{2n(n-1)! - (n-1)!}$

$= \dfrac{(2n-1)(2n-1)!}{(2n-1)(n-1)!}$

$= \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!}$

---

③ $\dfrac{(2n)!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}$

$= \dfrac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3) \times \dots \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}$

$= (2n)(2n-2)(2n-4) \times \dots \times 2$

$= 2n.2(n-1).2(n-2).2(n-3) \times \dots \times 2 \times 1$

$= 2^n . n!$

تمرين (٢): أثبت صحة العلاقة:

① $\dfrac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{n+1-r}$

$L_1 = \dfrac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}}{\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}}$

$= \dfrac{(n+1)!}{\cancel{r!}(n+1-r)!} \times \dfrac{\cancel{r!}(n-r)!}{n!}$

$= \dfrac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1-r)\cancel{(n-r)!}} \times \dfrac{\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}}$

$= \dfrac{n+1}{n+1-r} = L_2$

② $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$

$L_1 = n\binom{n-1}{r-1} = n\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}$ ؛ $n! = n.(n-1)!$ ؛ $r! = r.(r-1)!$

$= \dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} = \dfrac{r\,n!}{r(r-1)!\,(n-r)!}$

$= \dfrac{r\,n!}{r!\,(n-r)!} = r\binom{n}{r} = L_2$

تمرين (٣): احسب قيمة n

١)

$$P^4_{n+2} = 14P^3_n$$

$n+2 \ge 4 \Rightarrow n \ge 2$

$\Rightarrow n \ge 3$

شرط الحل: $\boxed{n \ge 3}$ تقاطع الشرطين

$(n+2)(n+1)(\cancel{n})(\cancel{n-1}) = 14\cancel{n}(\cancel{n-1})(n-2)$

$n^2+3n+2 = 14n-28$

$n^2-11n+30=0 \Rightarrow (n-6)(n-5)=0$

$n=6$ مقبول

$n=5$ مقبول

٢)

$$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$$

$n\ge 4 \quad . n\ge 2$

شرط الحل: $n\ge 4$

$$\frac{3\cancel{n}(\cancel{n-1})(n-2)(n-3)}{4\times 3\times 2\times 1} = \frac{14\times \cancel{n}(\cancel{n-1})}{2\times 1}$$

$(n-2)(n-3)=56$

$n^2-5n+6=56$

$n^2-5n-50=0$

$(n-10)(n+5)=0$

$n=10$ مقبول

$n=-5$ مرفوض

٣)

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

شرط الحل:

$n+2\le 10$

$n\le 8$

$\Rightarrow 3n\le 10 \Rightarrow n\le 3$

$\Rightarrow n\le 3$

إما $3n = n+2 \Rightarrow n=1$ مقبول

أو $3n+n+2=10$

$\Rightarrow n=2$ مقبول

تمرين (٤): احسب قيمة n و r إذا علمت

$$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1} \text{ و } 2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$$

$$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$$

$$3\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = 8\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\frac{3}{r(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{8}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1} \Rightarrow 8r = 3n-3r+3$$

$\boxed{3n-11r+3=0}$ .... ①

$$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$$

$$\frac{2(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = \frac{5(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$$

$$\frac{2}{(r+1)\cdot r!\,(n-r)!} = \frac{5}{r!\,(n+1-r)(n-r)!}$$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n+1-r} \Rightarrow 5r+5 = 2n+2-2r$$

$\boxed{2n-7r-3=0}$ ... ②

$-2\times①:\ -6n+22r-6=0$

$3\times②:\ \ 6n-21r-9=0$

$r-15=0$

$\Rightarrow \boxed{r=15}$

نعوض في ②

$2n-105-3=0 \Rightarrow \boxed{n=54}$

تمرين (٥): أوجد الحد المستقل عن x في المنشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ ؟

الحل: $a=x\ ,\ b=x^{-1}\ ,\ n=8$

$T_r = \binom{8}{r}.(x)^{8-r}.(x^{-1})^r$

$= \binom{8}{r}.(x)^{8-r}.x^{-r}$

$= \binom{8}{r}.x^{8-2r}$

من أجل الحدّ الثابت نضع $8-2r=0$

$\Rightarrow r=4$

الحدّ الثابت هو T_4

$$T_4 = \binom{8}{4} = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1} = 70$$

تمرين (6): ما هي أمثال الحد x^2y في المنشور $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$ ؟

الحل:

$a = y^2.x^{-1},\ b = x.y^{-1},\ n = 8$

$$T_r = \binom{8}{r}.(y^2x^{-1})^{8-r}.(x.y^{-1})^r$$

$$= \binom{8}{r}.y^{16-2r}.x^{-8+r}.x^r.y^{-r}$$

$$= \binom{8}{r}.x^{2r-8}.y^{16-3r}$$

من أجل الحد x^2y نضع:

$2r-8 = 2 \Rightarrow r = 5$

$16-3r = 1 \Rightarrow r = 5$

الحدّ موجود في المنشور وأمثاله هي

$$\binom{8}{5} = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1} = 56$$

تمرين (7):

$$A_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

أثبت أن A_n طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n

الحل: الحدّ العام في منشور $(2+\sqrt{3})^n$ هو

$$T_r = \binom{n}{r}2^{(n-r)}.\sqrt{3}^r$$

الحدّ العام في منشور $(2-\sqrt{3})^n$ هو

$$T'_r = \binom{n}{r}2^{(n-r)}.(-\sqrt{3})^r$$

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r}2^{(n-r)}(\sqrt{3})^r + \binom{n}{r}2^{(n-r)}.(-\sqrt{3})^r$$

$$= \binom{n}{r}2^{(n-r)}\sqrt{3}^r(1+(-1)^r)$$

في حالة r زوجي : $r = 2k$

$$A_n = T_r + T'_r$$

$$= \binom{n}{r}2^{(n-r)}.(\sqrt{3})^{2k}(1+(-1)^{2k})$$

$$= \binom{n}{r}.2^{(n-r)}.3^k.2$$

$$= \binom{n}{r}.2^{(n-r+1)}.3^k$$

$\Leftarrow$ A_n طبيعي

في حالة r فردي : $r = 2k+1$

$$A_n = T_r + T'_r = \binom{n}{r}.2^{n-r}.\sqrt{3}^{(2k+1)}.(0) = 0$$

$\Leftarrow$ A_n طبيعي

إذاً مهما كان n طبيعي فإنّ A_n طبيعي.

مسالة (16) :

مجموعة أرقام $S = \{1,2,5,8,9\}$ نريد تشكيل عدد مؤلف من 3 منازل بكم طريقة يمكن ذلك في كل من الحالات التالية:

١- العدد مؤلف من ثلاث منازل

٢- العدد مؤلف من ثلاث منازل مختلفة مثلي مثلي.

٣- جميع الأعداد أكبر من 500 و منازله مختلفة.

٤- جميع الأعداد من مضاعفات العدد 5 و منازله مختلفة.

٥- جميع الأعداد زوجية. آحاده زوجية دون تكرار

الحل:

آحاد عشرات مئات

١- $\boxed{5\ |\ 5\ |\ 5}$

$n = 5\times5\times5 = 125$ طريقة

٢- مختلفة: دون تكرار

$\boxed{3\ |\ 4\ |\ 5}$

$n = 5\times4\times3 = 60$ طريقة

٣- الكبر من 500 : المئات 5 او 8 او 9 مختلفة: دون تكرار

$\boxed{3\ |\ 3\ |\ 4}$ ← 5، 8، 9

$n = 3\times4\times3 = 36$ طريقة

٤- من مضاعفات 5 : الآحاد حصراً 5

$\boxed{3\ |\ 4\ |\ 1}$ → 5

$n = 1\times4\times3 = 12$ طريقة

٥-

$\boxed{5\ |\ 5\ |\ 2}$ → 2، 8

$n = 2\times5\times5 = 50$ طريقة

* دون تكرار وضمن الشروط في حالات مختلفة بدون...

مسالة (17) :

المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$

بكم طريقة يمكن تشكيل عدد مؤلف من خمس منازل مختلفة من هذه المجموعة جميعها أكبر من 20 000 و لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات العدد 5

Note:

الحل

- أرقامه مختلفة بدون تكرار
- آحاده ليس 5
- عشرات الألوف = $\{2,3,4,5\}$

	عشرات الألوف	ألوف	مئات	عشرات	آحاد	
عشرات الألوف 5	1	4	3	2	1	24
ألوف 5	3	1	3	2	1	18
مئات 5	3	3	1	2	1	18
عشرات 5	3	3	2	1	1	18

عدد الطرق = 24 + 18 + 18 + 18 = 78 طرق

النسبة المئوية لحدث تعبير عن احتمال هذا الحدث

Note:

ثانياً: مسائل القوانين

① الحدث المعاكس للحدث A: هو الحدث A' الذي يقع عندما لا يقع (احتمال) الحدث A.

* مجموع احتمالي أي حدثين متعاكسين يساوي الواحد

* $P(A)+P(A')=1$
  - $\to P(A')=1-P(A)$
  - $\to P(B')=1-P(B)$
  - $\to P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$
  - $\to P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

② التقاطع $\cap$: هو مجموعة العناصر المشتركة بين حدثين.

$P(A\cap B)=P(B\cap A)$
- ← يقع الحدثين A و B.
- ← يقع الحدثين معاً.

③ الاجتماع $\cup$: هو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين حدثين
- ← يقع الحدث A أو B.
- ← يقع احد الحدثين على الأقل.

* $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- $\to P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

④ عند وجود معاكس واحد:
* $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$
* $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

⑤ عند وجود معاكسين:
* $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$
* $P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

⑥ الاحتمال الشرطي:
- احتمال A علماً أن B قد وقع: $P(A|B)$ ، $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
* احتمال B علماً أن A قد وقع: $P(B|A)$ ، $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

س: متى نستخدم الاحتمال الشرطي؟؟

1- عند وجود احدى الكلمات (اذا علمت، علماً أن، بشرط وقع، قد وقع، اذا كانا)
(نختار عشوائياً حدث من بعد احتمال وقوع حدث آخر)

مسألة:
يدرس 30% من الطلاب اللغة الفرنسية و 40% من الطلاب اللغة الروسية و 60% من الطلاب احدى اللغتين على الأقل. والمطلوب:

① ما احتمال أن يدرس الطالب اللغتين معاً ← تقاطع $\cap$
② ما احتمال أن يدرس الطالب اللغة الفرنسية فقط؟
③ ما احتمال أن يدرس الطالب لغة واحدة فقط؟ تنفي الحدث الآخر
④ ما احتمال ألا يدرس الطالب أي لغة؟
⑤ اذا علمت أن الطالب يدرس الروسية فما احتمال أنه يدرس F؟
⑥ ما احتمال أن يدرس الطالب الروسية علماً أنه لا يدرس الفرنسي؟

الحل

$P(F)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$ ، $P(R)=\frac{40}{100}=\frac{4}{10}$ ، $P(F\cup R)=\frac{6}{10}$

① $P(F\cap R)=P(F)+P(R)-P(F\cup R)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}-\frac{6}{10}=\frac{1}{10}$

② يدرس الفرنسية فقط: $\underbrace{\text{يدرس الفرنسية}}_{F}\ \underbrace{\text{و}}_{\cap}\ \underbrace{\text{لا يدرس الروسية}}_{R'}$

$P(F\cap R')=P(F)-P(F\cap R)=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{2}{10}$

③ يدرس الطالب لغة واحدة فقط:
* $\underbrace{\text{يدرس فرنسي}}_{F}\ \underbrace{\text{ولا}}_{\cap}\ \underbrace{\text{يدرس روسي}}_{R'}$
* $\underbrace{\text{يدرس روسي}}_{R}\ \underbrace{\text{ولا}}_{\cap}\ \underbrace{\text{يدرس فرنسي}}_{F'}$

$P(F\cap R')+P(R\cap F')$

$=P(F)-P(F\cap R)+P(R)-P(R\cap F)=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}+\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{5}{10}$

④ لا يدرس الطالب أي لغة: $\underbrace{\text{لا يدرس فرنسي}}_{F'}\ \underbrace{\text{ولا}}_{\cap}\ \underbrace{\text{يدرس روسي}}_{R'}$

$P(F'\cap R')=P(F\cup R)'=1-P(F\cup R)=1-\frac{6}{10}=\frac{4}{10}$

⑤ اذا علمت أنه يدرس الروسية فما احتمال أنه يدرس الفرنسية
- الشرط: R
- المطلوب: F

$P(F|R)=\frac{P(F\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}}=\frac{1}{4}$

⑥ ما احتمال أن يدرس الروسية علماً أنه لا يدرس الفرنسية.
- المطلوب: R
- الشرط: F'

$P(R|F')=\frac{P(R\cap F')}{P(F')}=\frac{P(R)-P(R\cap F)}{1-P(F)}=\frac{\frac{4}{10}-\frac{1}{10}}{1-\frac{7}{10}}=\frac{3}{7}$

Note: * نستخدم المخطط الشجري عند وجود الشرط حالة في المسألة (مصانع، معامل، ورشات، سحب من صندوق ووضعه في آخر، مضاعفة عدد الكرات)

ثانياً: المخطط الشجري

* قواعد وملاحظات هامة

1) تمثل كل عقدة حالة من حالات التجربة.
2) مجموع الاحتمالات للأفرع الصادرة من كل عقدة يساوي الواحد.
3) يمثل المسار التام «من بداية الجذر الى نهاية الطرف» تقاطع الأحداث التي يمر بها هذا المسار.
4) ان احتمال المسار (التقاطع) هو جداء احتمال الأحداث التي يمر بها هذا المسار.
5) لحساب احتمال حدث موجود في نهاية أكثر من طرف نجمع احتمالات المسارات المؤدية لهذا الحدث.
6) إذا كان الاحتمال الشرطي عكس الشجرة نأخذ الاحتمال من الشجرة، أما اذا كان الاحتمال الشرطي مع الشجرة نطبق قانون الاحتمال الشرطي.

تمرين (1): يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء. احتمال تسجيل ضربة الجزاء الأولى $\frac{8}{10}$. اذا سجل الأولى فإن احتمال تسجيل الثانية $\frac{7}{10}$. واذا لم يسجل الأولى فإن احتمال ان يسجل الثانية $\frac{6}{10}$.

لتكن الحدث A: سجل اللاعب ضربة الجزاء

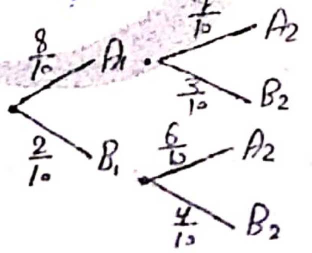
B: اخفق اللاعب في تسجيل ضربة الجزاء

1) أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.
2) احسب احتمال تسجيل ركلة الجزاء الثانية.
3) اذا علمت أنه سجل في الركلة الثانية ما احتمال تسجيل الأولى.

شرط — مطلوب

الحل

1)



2) $P(A_2) = $ مسار (1) + مسار (3)
$= \frac{8}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{68}{100}$

3) $P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{8}{10} \times \frac{7}{10}}{\frac{68}{100}} = \frac{56}{68} = \frac{14}{17}$

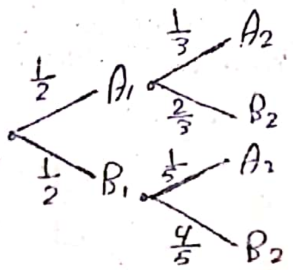
تمرين (2): ترمي سعاد حلقتين لإدخالهما في وتد.
احتمال نجاح سعاد في ادخال الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها. اذا نجحت في الحلقة الأولى فإن احتمال نجاحها في الثانية $\frac{1}{3}$. واذا فشلت في الأولى فإن احتمال فشلها في الثانية $\frac{4}{5}$. والمطلوب:

1) أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2) احسب احتمال نجاحها في الحلقة الثانية.
3) اذا علمت أنها نجحت في الحلقة الثانية فما احتمال نجاحها في الأولى.

« A: نجاح ، B: فشل »

الحل

1)



2) $P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{30}$

3) $P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{8}{30}} = \frac{5}{8}$

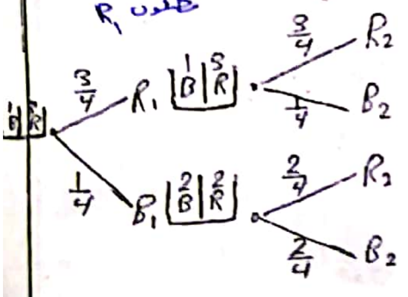
تمرين (3): لتكن لدينا صندوق I يحوي (3) كرات حمراء وكرة زرقاء. وصندوق II يحوي كرتين حمراوين وكرة زرقاء.
نسحب كرة من الصندوق الأول ونضعها في الثاني ثم نسحب كرة من II

1) ارسم مخطط شجري
2) احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء.
3) اذا علمت أن الكرة الثانية حمراء فما احتمال أن تكون الأولى حمراء.

R_1 مطلوب — شرط — مشروط

الحل

1)

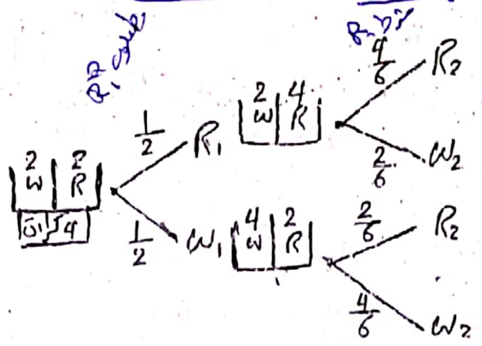


2) $P(R_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{16}$

3) $P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{11}{16}} = \frac{9}{11}$

تمرين (4): يحوي صندوق كرتين حمراء (R) وكرتين بيضاء (W). نسحب كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها ونضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب كرة ثانية. والمطلوب: مضاعف عدد

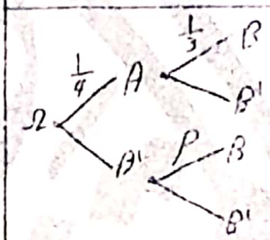
1) ارسم مخطط شجري للتجربة.
2) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء.
3) إذا علمت أن الثانية حمراء فما احتمال أن تكون الأولى حمراء.



2) $P(R_2)=P(R_1\cap R_2)+P(W_1\cap R_2)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{12}$

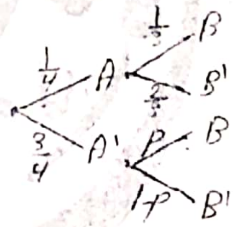
3) $P(R_1|R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}}{\frac{6}{12}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

تمرين (5):



1) انقل المخطط المجاور وأتممه.
2) احسب $P(B)$ بدلالة P.
3) عين P ليكون الحدثين A و B مستقلان احتمالياً.
4) من أجل $P=\frac{1}{3}$ احسب $P(A'|B)$.

الحل
1)



2) $P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}P \Rightarrow P(B)=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}P$

3) حتى يكون A و B مستقلين احتمالياً يجب أن يكون
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}+\frac{3}{4}P\right] \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}P$
$\overset{\times 12}{\Rightarrow} 4=1+9P \Rightarrow P=\frac{1}{3}$

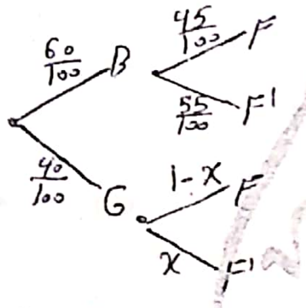
4) $P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{12}+\frac{3}{12}}=\frac{\frac{3}{12}}{\frac{4}{12}}=\frac{3}{4}$

حتى يكون الحدثين A و B مستقلين احتمالياً يجب أن يتحقق:
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

تمرين (6): مصنع يضم ورشتين A و B. لدى المصنع طلبية 1200 مصباح. تنتج الورشة A (800) مصباح فقط في حين تنتج الورشة B بقية الطلبية. يكون 3% من إنتاج الورشة A معيب (D) في حين 5% من مصابيح الورشة B معيبة. نختار عشوائياً مصباح.
1) ارسم مخطط شجري للتجربة.
2) احسب احتمال أن يكون المصباح معيب.
3) إذا علمت أن المصباح معيب فما احتمال أن يكون من إنتاج الورشة A.

تمرين (7): في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة القدم. إذا علمت أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور، وأن 55% من الذكور لا يمارسون كرة القدم. نختار عشوائياً فتاة. ما احتمال أنها لا تمارس كرة القدم.

الحل
لدينا: F: يمارس لعبة كرة القدم، B: ذكر، G: أنثى



$P(F'|G)=?$

لدينا: $P(F)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$
ولدينا: $P(F)=P(B\cap F)+P(G\cap F)$
$\Rightarrow \frac{3}{10}=\frac{60}{100}\times\frac{45}{100}+\frac{40}{100}(1-x)$
$\overset{\times 10000}{\Longrightarrow} 3000=2700+4000(1-x) \Rightarrow 3000=2700+4000-4000x$
$\Rightarrow 4000x=3700 \Rightarrow x=\frac{37}{40}$

ثالثاً: المتغير العشوائي

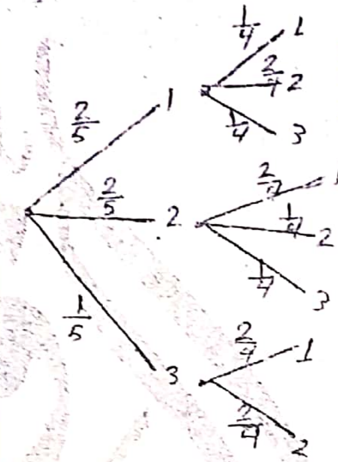
ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية. نعرف متغيراً عشوائياً كل تابع معرف على Ω ويأخذ قيمه من R.

سؤال: كيف نتعامل مع مسألة تحوي متغير عشوائي؟؟
1) نوجد فضاء العينة Ω 2) نعين قيم المتغير X حسب نص المسألة.
3) نوجد صورة كل قيمة لـ X وفق التابع الاحتمالي.
4) ننظم جدول القانون الاحتمالي.
5) التوقع الرياضي: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$
* التباين: $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$
* الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

تمرين (1): يحوي صندوق (5) بطاقات مرقمة بالارقام 1,1,2,2,3
نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي دون اعادة.
(1) انشئ مخططاً شجرياً للتجربة.
(2) اذا علمت ان مجموع رقمي البطاقتين (4) فما احتمال ان تكون البطاقة التي تحمل الرقم (1) بينهما.
(3) ليكن X متغير عشوائي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين عين قيم X ونظم جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي.

الحل

(1)



Imp Note:
في الاحتمال الشرطي نضمن الشرط من فضاء العينة ونضمن المطلوب من الشرط (فيكون بذلك قد حصلنا على التقاطع)

(2) ليكن A: مجموع رقمي البطاقتين (4): $2\times(1,3)\ ;\ (2,2)$

$P(A)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{20}$

ليكن B: البطاقة (1) بينهما ; $2\times(1,3)$

$P(A\cap B)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{20}$

$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{20}}{\frac{6}{20}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(3) $\Omega=[\underbrace{(1,1)}_{2},\ 2\underbrace{(1,2)}_{3},\ 2\underbrace{(1,3)}_{4},\ \underbrace{(2,2)}_{4},\ 2\underbrace{(2,3)}_{5}]$

تحقق تبادلي من اجل مجموع = 1

$X=\{2,3,4,5\}$

$X=2\quad (1,1)\Rightarrow P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$X=3\quad 2(1,2)\Rightarrow P(X=3)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$

$X=4\quad 2(1,3),(2,2)\Rightarrow P(X=4)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

$X=5\quad 2(2,3)\Rightarrow P(X=5)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$

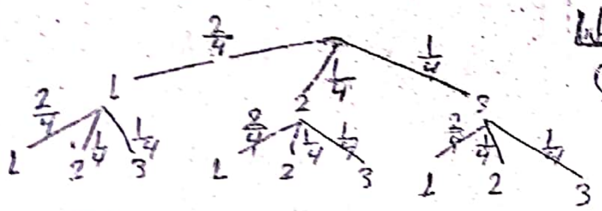
x_i	2	3	4	5	مجموع
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_iP(x_i)=\frac{(2)(1)+(3)(4)+(4)(3)+(5)(2)}{10}=\frac{38}{10}$

تمرين (2): يحوي مغلف (4) بطاقات مرقمة كما يلي 1,1,2,3
نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع اعادة والمطلوب.
(1) ارسم مخططاً شجرياً للتجربة.
(2) اذا علمت ان مجموع رقمي البطاقتين فردي فما احتمال ان احدهما (1)
(3) X متحول عشوائي يدل على جداء رقمي البطاقتين. عين قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي.

الحل

(1)



(2) ليكن A: المجموع فردي: $2\times(1,2)\ ,\ 2(2,3)$

$P(A)=2\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{16}$

ليكن B: احدهما (1): $2(1,2)$

$P(B\cap A)=2\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$

$\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{16}}{\frac{6}{16}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(3) $\Omega=[\underbrace{(1,1)}_{1},\ 2\underbrace{(1,2)}_{2},\ 2\underbrace{(1,3)}_{3},\ \underbrace{(2,2)}_{4},\ 2\underbrace{(2,3)}_{6},\ \underbrace{(3,3)}_{9}]$

$X=1\quad (1,1)\Rightarrow P(X=1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{4}{16}$

$X=2\quad 2(1,2)\Rightarrow P(X=2)=2\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$

$X=3\quad 2(1,3)\Rightarrow P(X=3)=2\times\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$

$X=4\quad (2,2)\Rightarrow P(X=4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$X=6\quad 2(2,3)\Rightarrow P(X=6)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{16}$

$X=9\quad (3,3)\Rightarrow P(X=9)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

x_i	1	2	3	4	6	9	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

تمرين (3): مغلف يحوي (5) بطاقات مرقمة بالارقام 1,1,2,2,3
نسحب بطاقتين معاً. والمطلوب. ← توافيق لا نهتم بالترتيب
(1) احسب احتمال ان يكون مجموع رقمي البطاقتين من مضاعفات 3
(2) ليكن X متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي البطاقتين. عين قيم X ونظم جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

 $V(X)=E(X^2)-E(X)$

ليكن A الحدث: مجموع رقمي البطاقتين من مضاعفات 3: $[1,2]$

$$P(A)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$$

$\dfrac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد فضاء العينة}}$

② $\Omega=[\underbrace{[1,1]}_{2},\underbrace{[1,2]}_{3},\underbrace{[1,3]}_{4},\underbrace{[2,2]}_{4},\underbrace{[2,3]}_{5}]$

$X=[2,3,4,5]$

$X=2 \quad [1,1] \Rightarrow P(X=2)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{1}{10}$

$X=3 \quad [1,2] \Rightarrow P(X=3)=\dfrac{4}{10}$

$X=4 \quad [1,3]\ [2,2] \Rightarrow P(X=4)=\dfrac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{3}{10}$

$X=5 \quad [2,3] \Rightarrow P(X=5)=\dfrac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{2}{10}$

x_i	2	3	4	5	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4} x_i\cdot P(x_i)=\frac{(2)(1)+(3)(4)+(4)(3)+(5)(2)}{10}=\frac{36}{10}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$
$$=\frac{(4)(1)+(9)(4)+(16)(3)+(25)(2)}{10}-\left(\frac{36}{10}\right)^2$$

تمرين (4): يحوي مغلف (5) بطاقات متماثلة ومرقمة 1,2,3,4,5 نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي بدون اعادة.

① اذا علمت ان المجموع زوجي فما احتمال ان يكون اكبر تماماً من 5.

② X متحول عشوائي يدل على رقم البطاقة الاصغر، عين قيم X واكتب جدول القانون الاحتمالي واحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل

① ليكن الحدث A: مجموعها زوجي: $2(1,3),\ 2(1,5),\ 2(2,4),\ 2(3,5)$

$$P(A)=2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{20}$$

ليكن الحدث B: المجموع اكبر تماماً من 5: $2(1,5),\ 2(2,4),\ 2(3,5)$

$$P(B\cap A)=2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{20}}{\frac{8}{20}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

② $X=[1,2,3,4]$

$X=1 \quad 2(1,1') \quad 1'>1 \Rightarrow P(X=1)=2\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{4}=\dfrac{8}{20}$

$X=2 \quad 2(2,2') \quad 2'>2 \Rightarrow P(X=2)=2\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{20}$

$X=3 \quad 2(3,3') \quad 3'>3 \Rightarrow P(X=3)=2\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{4}{20}$

$X=4 \quad 2(4,4') \quad 4'>4 \Rightarrow P(X=4)=2\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{20}$

x_i	1	2	3	4	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	1

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4} x_i\cdot P(x_i)=\frac{(1)(8)+(2)(6)+(3)(4)+(4)(2)}{20}=\frac{40}{20}=2$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{(1)(8)+(4)(6)+(9)(4)+(16)(2)}{20}-(2)^2$$
$$=\frac{100}{20}-4=5-4=1$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=1$$

تمرين (5): صندوق يحوي على ثلاث كرات سوداء وكرتين بيضاوين، نسحب من الصندوق كرتين معاً.

ليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

عين قيم X واكتب جدول القانون الاحتمالي واحسب التوقع الرياضي.

الحل

2 w	3 b

5 كرات

$\Omega=[[bb],[bw],[ww]]$

$X=[0,1,2]$

$X=0 \quad [bb] \Rightarrow P(X=0)=\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{3}{10}$

$X = 1 \quad (bw)$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{6}{10}$$

$X = 2 \quad (ww)$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

X_i	0	1	2	مجموع
$P(X_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X_i) = \frac{0+6+2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

حجر نرد متوازن مرقم بالأرقام : الاحتمالات متساوية

$\Omega = \{1,1,1,2,2,3\}$

فلقي الحجر مرتين :

A حدث ظهور وجهين مجموعهما أصغر تماماً من ...

B حدث ظهور وجهين فرقهما صفراً

1 احسب $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$

2 X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الرقم

1 احسب $E(X)$.

1

	1	1	1	2	2	3
1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3
1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3
1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3
2	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3
2	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3
3	3,1	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3

$$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$P(B) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{14}{36}} = \frac{9}{14}.$$

2

$X = \{0,1,2\}$

$$P(X=0) = \frac{25}{36} \qquad P(X=1) = \frac{10}{36}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{36}$$

X_i	0	1	2	مجموع
$P(X_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$E(X) = \frac{0+10+2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

ليكن لدينا صندوقين $I = \{1,2,3\}$ و $II = \{2,3,4,5\}$

نسحب كرة من الصندوق I وكرة من الصندوق II

1 اكتب فضاء العينة (Ω)

2 A حدث إحدى الكرتين 3

B مجموع الكرتين أكبر تماماً من 5

هل الحدثان A , B مستقلان احتمالياً"

3 X متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين

1 احسب $E(X)$

I \ II	2	3	4	5
1	1,2	1,3	1,4	1,5
2	2,2	2,3	2,4	2,5
3	3,2	3,3	3,4	3,5

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

ليكون الحدثان A , B مستقلان احتمالياً يجب أن يحقق :

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{محققة}$$

$X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$P(X=3) = \frac{1}{12}$, $P(X=4) = \frac{2}{12}$, $P(X=5) = \frac{3}{12}$

$P(X=6) = \frac{3}{12}$, $P(X=7) = \frac{2}{12}$, $P(X=8) = \frac{1}{12}$

X_i	3	4	5	6	7	8	مجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

$$E(X) = \frac{3+8+15+18+14+8}{12} = \frac{66}{12} = \frac{11}{2}$$

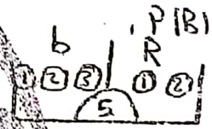
صندوق يحتوي على ثلاث كرات سوداء مرقمة 1,2,3 وكرتين حمراء مرقمة 1,2 سحب من الصندوق كرتين معاً

A : حدث الكرتين من نفس اللون

B : حدث مجموع الكرتين (3)

1) احسب $P(A)$, $P(B)$.

2) احسب $P(B|A)$,



1) A : حدث الكرتين من نفس اللون : (RR) , (bb)

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1+3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

B : حدث الكرتين مجموعهما (3) $(1,2)$

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} .$$

2) $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P(A \cap B)$: الكرتين من نفس اللون ومجموعها (3)

$(R^1 R^2)$, $(b^1 b^2)$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} + \binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية لحساب $P(A \cap B)$

$(R^1 R^2)$, $(b^1 b^2)$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} .$$

صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء سحب من الصندوق ثلاث كرات معاً X متغير عشوائي يأخذ القيمة (5) عند ظهور ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة (3) عند ظهور كرتين حمراء وكرة خضراء ويأخذ القيمة (0) فيما عدا ذلك

احسب $E(X)$ ؟

$$\Omega = \{(RRR), (RRG), (RGG), (GGG)\}$$

$X = \{5, 3, 0\}$

$X = 5$ (RRR)

$$P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$X = 3$ (RRG)

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \cdot 5}{120} = \frac{5}{12}$$

$X = 4$ (RGG), (GGG)

$$P(X=4) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \cdot 10 + 10}{120} = \frac{6}{12}$$

X_i	5	3	0	مجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	1

$$E(X) = \frac{5 + 15 + 0}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} .$$

لدى عائلة ثلاثة أطفال احتمال ولادة الذكر يساوي احتمال ولادة الأنثى

A: حدث الأطفال الثلاثة من نفس الجنس

B: حدث الطفل الثالث أنثى.

1] احسب $P(B|A)$

2] X متغير عشوائي يدل على عدد الإناث احسب $E(X)$

$A: (bbb), (ggg)$

$B: (bbg), (bgg), (gbg), (ggg)$

$A \cap B: (ggg)$

$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{8}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}$

2] $X = \{0,1,2,3\}$

$X=0$ (bbb) $\Rightarrow P(X=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$X=1$ $3(bbg)$ $\Rightarrow P(X=1) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$X=2$ $3(bgg)$ $\Rightarrow P(X=2) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$X=3$ (ggg) $\Rightarrow P(X=3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

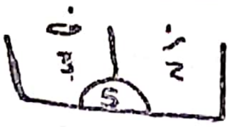
X_i	0	1	2	3	مجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X) = \frac{0+3+6+3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$

يحتوي صندوق 5 بطاقات متماثلة ومرقمة $\{1,1,2,2,3\}$ نسحب من الصندوق ثلاث بطاقات مع إعادة

1] احسب احتمال أن يكون مجموعها زوجي

2] X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور عدد فردي احسب $E(X)$



1] نفرض الحدث A أن يكون مجموع البطاقات زوجي

(ززز), 3(زفف)

$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + 3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{125} + \frac{54}{125}$

$P(A) = \frac{62}{125}.$

2] $\Omega = \{$(ززز), (فزز), (ففز), (ففف)$\}$ — 0, 1, 2, 3

$X = \{0,1,2,3\}$

$X=0$ (ززز)

$P(X=0) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

$X=1$ 3(فزز)

$P(X=1) = 3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{36}{125}$

$X=2$ 3(ففز)

$P(X=2) = 3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{54}{125}$

$X=3$ (ففف)

$P(X=3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{27}{125}$

X_i	0	1	2	3	مجموع
$P(X_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$	1

$E(X) = \frac{0+36+108+81}{125} = \frac{225}{125} = \frac{9}{5}.$

25

أول ما تظهر عدد المرات ... المتتالية بنفس الاحتمال (برنولي)

تجارب البرنولية :

قطعة نقود غير متزنة احتمال ظهور الشعار يساوي ضعفي ظهور الكتابة

1] احسب احتمال ظهور الشعار واحتمال ظهور الكتابة

2] نلقي قطعة النقود n 5 مرات متتالية

a. احسب احتمال ظهور ثلاث شعارات على الأقل ليكن A

b. X متغير عشوائي يدل على عدد ظهور الشعارات

احسب $E(X)$, $V(X)$.

1] نفرض $P(H)=2P(T)$

$P(H)+P(T)=1$

$2P(T)+P(T)=1 \Rightarrow 3P(T)=1 \Rightarrow \boxed{P(T)=\frac{1}{3}}$

$\boxed{P(H)=\frac{2}{3}}$

عند تكرار التجربة مرة واحدة $\Omega\{H,T\}$

2] $n=5$, $k=\{3,4,5\}$

$p=\frac{2}{3}=P(H)$, $q=\frac{1}{3}$

$P(A)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$P(A)=\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$

$=10\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{16}{81}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{32}{243}\cdot 1$

$=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{192}{243}$

3] $E(X)=n.p \Rightarrow E(X)=5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

$V(X)=n.p.q \Rightarrow V(X)=5\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$

تجربة برنولية

نلقي حجر نرد متوازن 6 مرات ما احتمال الحصول على العدد 5 أو 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات

الحل: $n=6$, $K=3$, $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$

$P(X=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=20\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{8}{27}=\frac{160}{729}$

تجربة برنولية

يتواجه لاعبان A, B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من 5 أدوار يكسب اللاعب A الدور بالاحتمال في ويربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار. ما احتمال فوز B

الحل: يربح B المباراة إذا كسب B ثلاثة أشواط على الأقل

$n=5$, $k=\{3,4,5\}$ $P=\frac{1}{3}$ $q=\frac{2}{3}$

$P(B)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$P(B)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$P(B)=\frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{51}{243}$

برنولي

Note: يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء علماً بأنه يكون عدد الكرات الحمراء = مثلي البيضاء.

عندما لا تدل عدد الكرات الحل يفرض مجهول وطرق السحب مع الإعادة هي تجربة برنولية

1] نسحب عشوائياً كرة ما احتمال أن تكون حمراء

2] نسحب من الصندوق ثلاث كرات مع إعادة وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء احسب $E(X)$

1] نفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء $2n$.

W: n , R: $2n$, $3n$

$P(R)=\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}$, $P(W)=\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}$

2] $\Omega=\{(WWW),(WWR),(WRR),(RRR)\}$

$X=\{0,1,2,3\}$

$X=0$ WWW: $P(X=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

$X=1$ (WWR)·3: $P(X=1)=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{27}$

$X=2$ (RRW) 3: $P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{12}{27}$

$X=3$ (RRR): $P(X=3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

	0	1	2	3	Σ
	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

$E(X)=\frac{0+6+24+24}{27}=\frac{54}{27}=2$

احسب n ليكون $E(X)=\frac{5}{2}$

x_i	n	1	2
$P(x_i)$	α	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\alpha+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{6}$

$E(X)=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{n\cdot 1}{6}+\frac{1\cdot 4}{6}+\frac{2\cdot 1}{6}=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{n+6}{6}=\frac{5}{2}$

$2n+12=30 \Rightarrow 2n=18 \Rightarrow \boxed{n=9}$

مثال:

ألقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً لنعرف

A: حدث ظهور شعار على الأقل

B: حدث ظهور شعارين فقط

① أحسب $P(B) . P(A)$

② أحسب $P(B|A)$

③ X متحول عشوائي يدل على عدد الشعارات

أحسب $V(X) . E(X)$

الحل:

① $n=5$

شعار $p=\frac{1}{2}$

$q=\frac{1}{2}$

$P(X=K)=\binom{n}{K}p^{K}\cdot q^{n-K}$

$P(A)=P(X\geq 1)$

$=1-P(X=0)$

$=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$

$=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

$P(B)=P(X=2)$

$=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

$=(10)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{10}{32}$

② $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{32}}{\frac{31}{32}}=\frac{10}{31}$

③ $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$

$E(X)=n\cdot p=5\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

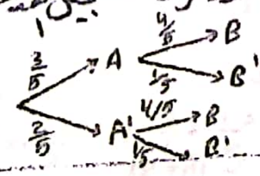
$V(X)=n\cdot p\cdot q=5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$

مثال: يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء على هدف احتمال تسجيل هدف في الضربة الأولى (A) $\frac{3}{5}$ وفي الثانية (B) $\frac{4}{5}$

① اعط مخطط شجري

② X متحول عشوائي يدل على عدد مرات تسجيل الهدف

الحل:



$X(\Omega)=\{0,1,2\}$

$P(X=0)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$

$P(X=1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{11}{25}$

$P(X=2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

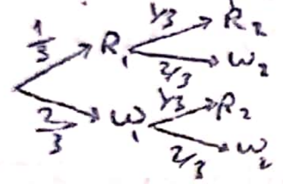
x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{12}{25}$

$E(X)=\sum x_i p_i=\frac{0+11+24}{25}=\frac{35}{25}$

مثال: صندوق يحوي 4 كرات بيضاء و 2 حمراء نسحب منه كرتين مع إعادة ① أكتب مخطط شجري

② X متحول عشوائي يدل على الكرات الحمراء أحسب توقعه

الحل: $\frac{[2R\ 4W]}{6}$



$X=\{0,1,2\}$

$P(X=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P(X=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{9}$

$P(X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

مثال: صندوق فيه $[0,0,1,1,2]$ نسحب بطاقتين معاً

A: حدث الحصول على العدد ذاته

B: أحدهما صفر

① أحسب $P(B|A)$

② X متحول عشوائي يدل على مجموع البطاقتين

الحل:

$P(A)=\frac{\binom{2}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{2}{10} \Leftarrow A=\{(0,0)\ (1,1)\}$

$A\cap B=(0,0) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$

$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}}=\frac{1}{2}$

$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$[0,0]$ $P(X=0)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$

$[0,1]$ $P(X=1)=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$

$[1,1]\ ,[0,2]$ $P(X=2)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

$[1,2]$ $P(X=3)=\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

المتغيرات العشوائية

نقول أن المتغيرين X, Y أنهما مستقلان احتماليا؟

نقول أن المتغيرين X, Y مستقلين احتماليا إذا كانت الحادثات $X=x_i$ و $Y=y_j$ مستقلات احتماليا: أي:

$$P_{ij} = P_i \cdot P'_j$$

كيف ننشئ جدول القانون احتمالي لمتغيرين عشوائيين؟

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	P_{00}	P_{01}	P_{02}	$P_0 = P_{00}+P_{01}+P_{02}$
1	P_{10}	P_{11}	P_{12}	$P_1 = P_{10}+P_{11}+P_{12}$
قانون Y	$P'_0 = P_{00}+P_{10}$	$P'_1 = P_{01}+P_{11}$	$P'_2 = P_{02}+P_{12}$	1

تمرين (1):

هل المتغيرين X و Y مستقلين احتماليا؟

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$P_0 = \frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$P_1 = \frac{17}{60}+\frac{3}{8}+\frac{1}{24} = \frac{3}{10}$
قانون Y	$P'_0 = \frac{1}{20}+\frac{17}{60}$ $P'_0 = \frac{1}{3}$	$P'_1 = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ $P'_1 = \frac{1}{2}$	$P'_2 = \frac{1}{8}+\frac{1}{24}$ $P'_2 = \frac{1}{6}$	1

ليكون X و Y مستقلان احتماليا يجب اثبات:

$$P_{00} = P_0 \times P'_0$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{00} = \frac{1}{20} \\ P_0 \times P'_0 = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \end{array}\right] \Longrightarrow P_{00} \neq P_0 \cdot P'_0$$

المتغيران X, Y ليسا مستقلان احتماليا.

تمرين (2):

أكمل الجدول علما أن X و Y مستقلان احتماليا؟

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0,4
1			0,04	
2				0,4
قانون Y	0,3			1

الحل:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0,12	0,2	0,08	0,4
1	0,06	0,1	0,04	0,2
2	0,12	0,2	0,08	0,4
قانون Y	0,3	0,5	0,2	1

مسألة:

يحتوي صندوق ثلاث كرات، واحدة حمراء تحمل الرقم (1) وكرتين زرقاوين تحملان الرقمين 2, 3.

نعرف X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء

نعرف Y متغير عشوائي يدل على مجموع الكرتين.

إذا علمت نسحب كرتين على التتالي مع إعادة.

أنشئ جدول قانون احتمالي لـ X و Y

هل X, Y مستقلات احتماليا.

R: ① B: ② ③

$X = \{0,1,2\}$

$Y = \{2,3,4,5,6\}$

X \ Y	مج 2	3	4	5	6	
0 RR	R^1R^1 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
1 BR	0	$2(B^2R^1)$ $2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	$2(B^3R^1)$ $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$
2 BB	0	0	(B^2B^2) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$2(B^2B^3)$ $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	(B^3B^3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
قانون Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{\cdot}{9}$	$\frac{\cdot}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

ليكون X, Y مستقلات احتماليا يجب إثبات

$$P_{02} = P_0 \cdot P'_2$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{02} = \frac{1}{9} \\ P_0 \cdot P'_2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{81} \end{array}\right] \Longrightarrow P_{02} \neq P_0 \cdot P'_2$$

فالمتغيرات X, Y ليسا مستقلان احتماليا.

قانون برنولي (حداني)

نستخدم قانون برنولي في تجربة تتكرر بعدد كبير من المرات ويكون الاهتمام بحدوث معين (القاء قطعة نقود، القاء حجر نرد، سحب على التالي مع إعادة ...)

نعطي قانون برنولي بالشكل:

$$P(X=K) = \binom{n}{K} \cdot P^{n} \cdot q^{n-k}$$

حيث:

n : عدد مرات تكرار التجربة

K : عدد مرات تكرار الحدث المطلوب

P : احتمال وقوع الحدث المطلوب عند تكرار التجربة مرة واحدة

q : احتمال المعاكس لـ P

$$q = 1 - P$$

* نعطي قوانين التوقع والتباين والانحراف بالشكل:

$$E(x) = n \cdot p \quad \text{و} \quad V(x) = n \cdot p \cdot q \quad , \sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

الشكل الجبري للعدد المركب:

$$Z = a + bi \quad a, b \in R$$

يتألف العدد الحقيقي من:

قسم حقيقي: $Re(Z) = a$

قسم تخيلي: $Im(Z) = b$

Note:

اذا كانت أمثال ال π
نرجع لنا الزاوية ٥
أما اذا كانت أمثال ال π
نرجع لنا الزاوية ٦

ملاحظات هامة:

* $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$
* $(i)^{4n} = 1, (i)^{4n+1} = i, i^4 = 1$

$(i)^{4n+2} = -1, (i)^{4n+3} = -i$

خواص الشكل الجبري:

$$Z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ Z_2 = a_2 + b_2 i$$

الجمع: $Z_1 + Z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

النشر: $Z_1 . Z_2 = (a_1 + b_1 i).(a_2 + b_2 i)$

القسمة: $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام.

تذكر:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

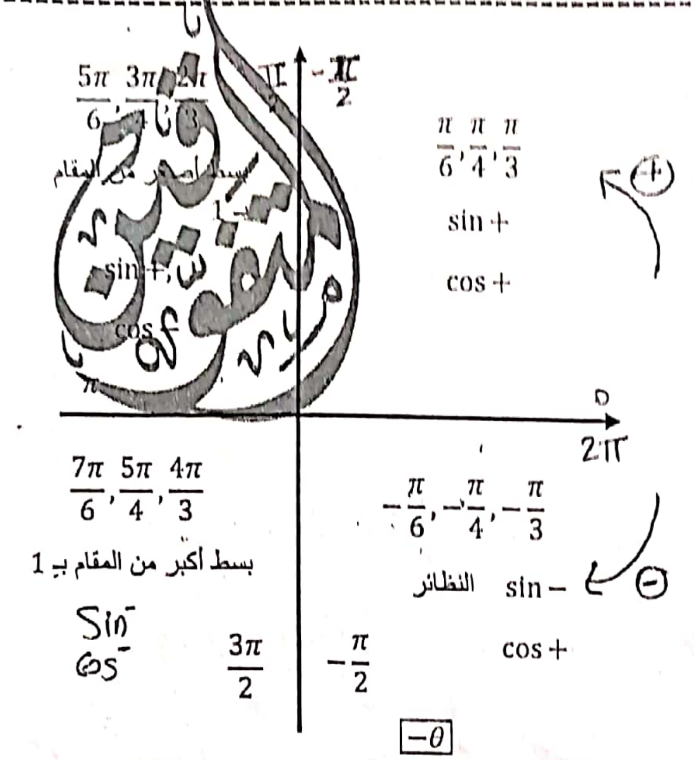
الشكل المثلثي للعدد العقدي:

$$Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

حيث r عدد حقيقي موجب.

$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\sin\theta = \dfrac{b}{r}$	$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$
$b = r.\sin\theta$	$a = r.\cos\theta$



تذكير:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$$

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

الشكل الأسي للعدد المركب:

$Z = r.e^{\theta i}$ حيث r عدد حقيقي موجب

- ملاحظات هامة:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\ \sin\theta$$

$$e^{-\theta i} = \cos\theta - i\ \sin\theta$$

$$e^{0i} = 1, e^{\pi i} = -1, e^{\frac{\pi}{2}i} = i, e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$$

أويلر:

$$e^{i\theta} + e^{-\theta i} = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-\theta i}}{2}$$

$$e^{i\theta} + e^{-\theta i} = 2\,i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-\theta i}}{2i}$$

خواص الشكل الأسي و المثلثي:

$\boxed{1}$ $Z = Z_1 . Z_2 \rightarrow \begin{cases} r = r_1 . r_2 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$

$\boxed{2}$ $Z = \dfrac{Z_1}{Z_2} \rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{r_1}{r_2} \\ \theta = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$

$\boxed{3}$ $Z = [z]^n \rightarrow \begin{cases} r = (r_1)^n \\ \theta = n\theta_1 \end{cases}$

حسب دوموافر: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

$\boxed{4}$ $Z = Z_1^n . Z_2^m \rightarrow \begin{cases} r = r_1^n . r_2^m \\ \theta = n\theta_1 + m\theta_2 \end{cases}$

$\boxed{5}$ $Z = \bar{Z} \rightarrow \begin{cases} r = r_1 \\ \theta = -\theta_1 \end{cases}$

$\boxed{6}$ $Z_1 = \dfrac{Z_1^n}{Z_2^m} \rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{r_1^n}{r_2^m} \\ \theta = n\theta_1 - m\theta_2 \end{cases}$

$\boxed{7}$ $Z = -Z_1 \rightarrow \begin{cases} r = r_1 \\ \theta = \pi + \theta_1 \end{cases}$

قانون دوموافر:

$Z = [\cos\theta + i\sin\theta]^n$

$Z = [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]^n$

اكتب بالشكل الأسي و الشكل المثلثي:

$\boxed{1}$ $Z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

نفرض:

$Z_2 = 1 + i$ $r_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ $\cos\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta_2 = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$	$Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ $r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ $\cos\theta_1 = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{2}$ $\sin\theta_1 = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ $\theta_1 = \dfrac{-\pi}{3}$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \begin{cases} r = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \theta = \theta_1 - \theta_2 = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$

$Z = re^{i\theta} \Rightarrow r = \sqrt{2} . e^{-\frac{7\pi}{12}i}$

$\boxed{2}$ $Z = (1 - i)^2$

نفرض: $Z_1 = 1 - i$

$r = \sqrt{2}$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\theta_1 = \dfrac{-\pi}{4}$

$$Z = [Z_1]^2 \quad \begin{cases} r = (r_1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \\ \theta = 2\theta_1 = 2 \times -\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$Z = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$Z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$\boxed{2}$ $Z = \left[\dfrac{\sqrt{3} - i}{i}\right]^5$

نفرض

$Z_2 = i \begin{cases} r_1 = 1 \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, $\quad Z_1 = \sqrt{3} - i$

$r_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta_1 = -\frac{1}{2}$$

$\theta_1 = \dfrac{-\pi}{6}$

$$Z = \frac{Z_1^5}{Z_2^5} \begin{cases} r = \dfrac{r_1^2}{r_2^5} = \dfrac{32}{1} = 32 \\ \theta = 5\theta_1 - 5\theta_2 \end{cases}$$

$Z_2 = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}$ $r_2 = 1$ $\theta_2 = \frac{\pi}{9}$	$Z_1 = (1+i)$ $r_1 = \sqrt{2}$ $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

$Z = Z_1 . Z_2$ $\quad r = r_1 . r_2 = \sqrt{2}$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{13\pi}{36}$$

$$Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{36}\right)\right]$$

$$Z = \sqrt{2}e^{\frac{13\pi}{36}i}$$

Note: لإثبات أن أحد أشكال العدد العقدي المرفوع لقوة حقيقي او تخيلي نعتمد على الزوايا

أثبت أن $Z = (1+i)^{2016}$ حقيقي؟

$$Z_1 = 1 + i \begin{cases} r_1 = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z = [Z_1]^{2016} \begin{cases} r = (r_1)^{2016} = \left(\sqrt{2}\right)^{2016} = 2^{1008} \\ \theta = 2016\theta_1 = \frac{2016}{4}\pi \end{cases}$$

$$\theta = 504\pi = 0$$

إذاً العدد حقيقي.

ملاحظات:

١) إذا كان العدد الحقيقي موجب $\theta = 0$.

٢) إذا كان العدد حقيقي سالب $\theta = \pi$

٣) إذا كان العدد تخيلي بحت موجب $\theta = \frac{\pi}{2}$

٤) إذا كان العدد تخيلي بحت سالب $\theta = -\frac{\pi}{2}$

٥) إذا كان القسم الحقيقي = القسم التخيلي فتكون الزاوية $\frac{\pi}{4}$ و مشتقاتها.

أكتب بالشكل الجبري؟ نحن بحاجة الى a و b

$$Z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5 \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ \theta_1 = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$Z = [Z_1]^5 \begin{cases} r = (r_1)^5 = 32 \\ \theta = 5\theta_1 = -\frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

Note: طريقة ضرب مرافق ضمن الطريقة ← طريقة عامل مربع

$$\theta = \frac{-5\pi}{6} - \frac{5\pi}{2} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}$$

$$\theta = -\frac{10\pi}{3} + 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$$

$$Z = 32\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$Z = 32e^{-\frac{4\pi}{3}i}$$

ملاحظة هامة: اذا كانت الزاوية موجبة نطرح 2π واذا كانت الزاوية سالبة نجمع 2π

لتبسيط الزاوية يجب أن يكون البسط أكبر من المقام بدرجتين على الأقل و نضيف $(\mp 2\pi)$

$\boxed{4}$ $Z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]^6$

$$Z = \cos\left(\frac{6\pi}{8}\right) + i\ \sin\left(\frac{6\pi}{8}\right)$$

$$Z = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$\boxed{5}$ $Z = \left[\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^6$

$$Z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right]^6$$

Note: للقلب بين sin, cos نطرح الزاوية من $\frac{\pi}{2}$

نحول $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta}$

$$Z = \left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\ \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right]^6$$

$$Z = \cos\left(\frac{18\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{18\pi}{10}\right)$$

$$Z = \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$$

$$Z = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$Z = e^{-\frac{\pi}{5}i}$$

$\boxed{5}$ $Z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

نفرض:

$$a = r.\cos\theta = 32\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{32}{2} = 16$$

$$b = r.\sin\theta = 32\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16\sqrt{3}$$

$$Z = 16 + 16\sqrt{3}i$$

$\boxed{2}$ $Z = \dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$

$$Z_1 = 1 + i \begin{cases} r_1 = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z_2 = \sqrt{3} + i \begin{cases} r_2 = 2 \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$Z = \frac{Z_1^4}{Z_2^3} \begin{cases} r = \dfrac{r_1^4}{r_2^3} = \dfrac{1}{2} \\ \theta = 4\theta_1 - 3\theta_2 = \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a = r.\cos\theta = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$b = r.\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{2}i$$

اكتب بالشكل الأسي:

$\boxed{1}$ $Z = (1+i)\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}$ نحن بحاجة الى r و θ

$$Z_1 = 1 + i \begin{cases} r_1 = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Note: للتخلص من اشارة السالبة في R نجمع π بالزاوية

$$Z_2 = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i} \begin{cases} r_2 = \sqrt{3} \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$Z_1.Z_2 = \begin{cases} r = r_1.r_2 = \sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6} \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{6}e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

$\boxed{2}$ $Z = -12\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z = e^{\pi i}.12.e^{\frac{\pi}{4}i} = 12e^{5\frac{\pi}{4}i}$: ط1

: ط2

$$Z_1 = 12 \begin{cases} r_1 = 12 \\ \theta_1 = \pi \end{cases}$$

$$Z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} \begin{cases} r_2 = 1 \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z = Z_1.Z_2 = \begin{cases} r = r_1 \times r_2 = 12 \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z = 12e^{5\frac{\pi}{4}i}$$

2020

$\boxed{3}$ $Z = -\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$Z = \frac{e^{\pi i}\sqrt{2}.e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}.e^{\frac{4\pi}{3}i}}{1+i}$$

بفرض: $Z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i} \begin{cases} r_1 = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$

$$Z_2 = 1 + i \begin{cases} r_2 = \sqrt{2} \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \begin{cases} r = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \\ \theta = \theta_1 - \theta_2 = \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{13\pi}{12} \end{cases}$$

$$Z = 1.e^{\frac{13\pi}{12}i}$$

ملاحظات هامة جداً:

عندما نفرض Z_3, Z_2, Z_1 يجب أن تكون مكتوبة بشكل شهير (جبري و مثلثي و أسي)

مسألة:

ليكن $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ اكتب بالشكل الاسي

$$Z = 1 + e^{2\theta i}$$

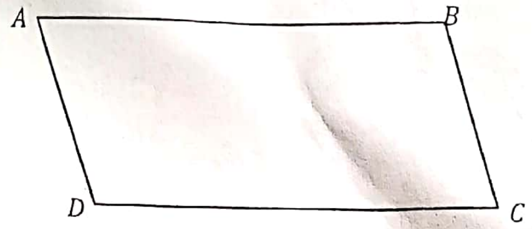
Note: ((ناخذ نصف الزاوية عامل مشترك)) ع اس

$$Z = e^{\theta i}.\left[\frac{1}{e^{\theta i}} + \frac{e^{2\theta i}}{e^{\theta i}}\right] = e^{\theta i}\underbrace{[e^{-\theta i} + e^{\theta i}]}_{\text{اويلر}}$$

$Z = 2\cos\theta.e^{\theta i}$; $\cos\theta > 0$ لأن: $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

كيف نبرهن أن رباعي متوازي أضلاع ؟

ط١:



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

ط٢: قطراه متناصفان لهما نفس نقطة المنتصف بفرض I منتصف $[AC]$

$$I\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$

بفرض I' منتصف $[BD]$

$$I'\left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

و منه $I' = I$ و $[BD], [AC]$ متناصفان.

كيف نبرهن أن الشكل مستطيل ؟

ط١: هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة (الجداء السلمي لشعاعين متجاورين معدوم).

ط٢: قطراه متناصفان و متساويان (لهما نفس الطويلة).

- كيف نبرهن أن الشكل مربع:
- ط١: هو شكل رباعي أضلاعه متساوية و زواياه قائمة.

ط٢: قطراه متناصفان و متساويان و متعامدان.

مسألة:

ليكن لدينا الأعداد العقدية:

$$b = e^{\frac{\pi}{3}i}\ ,\ \ a = 1\ , c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

١- اكتب c بالشكل الأسي و d بالشكل الجبري:

٢- وضع النقاط D, C, B, A.

Note: يجب أن نثبت أن جميع أطوال أضلاعه متساوية

٣- أثبت أن $(OACB)$ معيَّن.

الحل:

١) كتابة c بالشكل الأسي

$$c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\sin\theta_c = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_c = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta_c = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{6}i}$$

كتابة d بالشكل الجبري:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{-\pi}{6}i}$$

$$r_d = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta_d = \frac{-\pi}{6}$$

$$a = r.\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

$$b = r.\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$$

$$d = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

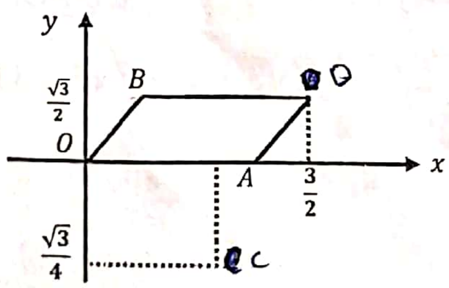
٢) وضع النقاط:

$$a = 1 \Rightarrow A(1,0)$$

$$b = e^{\frac{\pi}{3}i} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$c = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \Rightarrow C\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$d = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



٣) ليكون الشكل $(OACB)$ معيَّن:

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$$

$$BO = \sqrt{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$AC = 1 \,, CB = 1$$

فالشكل معيّن $OA = BO = CB = AC$

مسألة:

ليكن لدينا العددان العقديان

$$Z_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_2 = -1 + i$$

١- اكتب بالشكل الجبري $Z_1 . Z_2 , Z_1$

٢- اكتب بالشكل الأسي: $Z_1 . Z_2 , Z_2 , Z_1$

٣- استنتج $\sin\frac{\pi}{12} , \cos\frac{\pi}{12}$

Note: لاستنتاج sin, cos زاوية غير شهيرة:
١- نبحث عن العدد المستوي الذي يحوي الزاوية بشكله الجبري والشكل أو الأسي
٢- نطبق
$\cos\theta = \frac{a}{r} \to$ جبري
$\sin \frac{b}{r} \to$ جبري
أسي أو مثلثي

$$Z_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1 = 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$r_1 = 2 \quad \theta_1 = \frac{4\pi}{3}$$

$$a_1 = r_1 . \cos\theta_1 = -1$$

$$b_1 = r_1 . \sin\theta_1 = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow Z_1 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$Z_1 . Z_2 = (-1 - \sqrt{3}i)(-1 + i)$$

$$= 1 - i + \sqrt{3}i + \sqrt{3}$$

$$Z_1 . Z_2 = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$$

٢) $$Z_1 = \begin{cases} r_1 = 2 \\ \theta_1 = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$Z_1 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$Z_2 = -1 + i \begin{cases} r_2 = \sqrt{2} \\ \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z_1 . Z_2 \begin{cases} r = r_1 \times r_2 = 2\sqrt{2} \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{25\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$Z_1 . Z_2 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$$

٣) $$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

مسألة:

ليكن لدينا العدد العقدي $Z = \frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}$

١- اكتب بالشكل الأسي.

٢- اكتب $[Z]^{10}$ بالشكل الجبري.

الحل:

لا نضرب بالمرافق

$$Z_1 = -\sqrt{3} + i \to \begin{cases} r_1 = 2 \\ \theta_1 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$Z_2 = 1 - i \begin{cases} r_2 = \sqrt{2} \\ \theta_2 = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \begin{cases} r = \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2} \\ \theta = +\frac{13\pi}{12} \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{2}e^{\frac{13\pi}{12}i}$$

٢) $$[Z]^{10} \begin{cases} r = [r_1]^{10} = 2^5 = 32 \\ \theta = 10\theta_1 = 10\left(+\frac{13\pi}{12}\right) = +\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$a = r . \cos\theta = 32\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -16\sqrt{3}$$

$$b = r.\sin\theta = 32\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right) = 16$$

$$[Z]^{10} = -16\sqrt{3} + 16i$$

ليكن العدد العقدي $Z = 1 + \sqrt{3}i$

١- اكتب Z بالشكل المثلثي و استنتج $\bar{Z}$ بالشكل المثلثي.

مغير اشارة الزاوية

٢- أثبت أن $[Z]^6$ عدد حقيقي.

الحل:

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$Z = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$\bar{Z} \rightarrow \begin{cases} \bar{r} = r = 2 \\ \bar{\theta} = -\theta = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\bar{Z} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$[Z]^6 \rightarrow \begin{cases} r = [2]^6 = 64 \\ \theta = 6.\frac{+\pi}{3} = +2\pi = 0 \end{cases}$$

فالعدد $[Z]^6$ هو حقيقي.

مسألة: هامة:

$$Z_1 = 4 - 3i, \quad Z_2 = 1 + 2i, \quad Z_3 = 3 + i$$

$$\arg(Z_1) = \alpha, \arg(Z_2) = \beta, \arg(Z_2) = \gamma$$

احسب $\alpha + \beta + \gamma$؟

إن حساب $\alpha + \beta + \gamma$ ينتج $Z_1.Z_2.Z_3$

$$Z_1.Z_2.Z_3 = (4 - 3i)(1 + 2i)(3 + i)$$

$$= (4 - 3i)(3 + i + 6i - 2)$$

$$= (4 - 3i)(1 + 7i)$$

$$= 25 + 25i \rightarrow \begin{cases} r = 25\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$Z_1.Z_2.Z_3 = \sqrt{25}\sqrt{5}\sqrt{10}.e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}$$

$$= 25\sqrt{2}.e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}$$

و منه $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$

خواص المرافق

$$Z = a + bi, \quad \bar{Z} = a - bi$$

$$Z + \bar{Z} = 2a$$

$$Z - \bar{Z} = 2bi$$

$$Z.\bar{Z} = |Z|^2$$

$\boxed{2}$ $\overline{\{Z \mp W\}} = \bar{Z} \mp \bar{W}$

$$\overline{\{Z.W\}} = \bar{Z}.\bar{W}$$

$$\overline{\left\{\frac{Z}{W}\right\}} = \frac{\bar{Z}}{\bar{W}}$$

$$\overline{[Z^4]} = [\bar{Z}]^4$$

$\boxed{3}$ إذا كانت طويلة Z هي واحد:

$$\boxed{Z = \frac{1}{\bar{Z}}} \quad \text{أو} \quad \boxed{\bar{Z} = \frac{1}{Z}}$$

$\boxed{4}$ إذا كان Z عدد حقيقي:

$Z = \bar{Z}$ ← مسائل المرافق.

$Im(Z) = 0$ ← مسائل تحديد النقاط.

$arg(Z) = 0, \pi$ ← مسائل الأشكال.

$\boxed{5}$ إذا كان Z عدد تخيلي بحت:

$$Z = -\bar{Z}$$

$$Re(Z) = 0$$

$$arg(Z) = \mp\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{1}$ ليكن (Z) عدد عقدي ما و ليكن (u) عدد عقدي طويلته واحد و ليس واحد أثبت أن

$\left(\frac{Z - u\bar{Z}}{1 - u}\right) \Rightarrow$ هو حقيقي $\quad \bar{z} = \frac{1}{z}$

$\boxed{2}$ نفرض $u \neq 1$ و أن $\left(\frac{Z - u\bar{Z}}{1 - u}\right)$ هو حقيقي أثبت أن (Z) حقيقي أو $|u| = 1$

<u>الفرض:</u> $|u| = 1 \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{u}$

Note: * مجموعة نقاط كان السؤال كم نحذف النقطة الموافقة التي للعدد! التي تعدم المقام

* أما اذا كانت مجموعة اعداد نحذف العدد الذي يعدم المقام

الطلب: أثبت أن $\left(\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}\right)$ هو عدد حقيقي أو أثبت أن

$$\overline{\left(\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}\right)} = \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$$

البرهان:

$$\overline{\left[\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}\right]} = \frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}}$$

$$= \frac{\bar{Z}-\frac{1}{u}Z}{1-\frac{1}{u}} = \frac{u\bar{Z}-Z}{u} \times \frac{u}{u-1} = \frac{u\bar{Z}-Z}{u-1}$$

$$= \frac{-(Z-u\bar{Z})}{-(1-u)} = \frac{(Z-u\bar{Z})}{(1-u)} = l_2$$

ومنه $\frac{(Z-u\bar{Z})}{(1-u)}$ هو حقيقي.

الطلب:

أثبت أن Z حقيقي أو $|u| = 1$

البرهان:

انطلاقاً من الفرض: بما أن $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي فإن:

$$\overline{\left[\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}\right]} = \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$$

$$\frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}} = \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u} \Rightarrow$$

$$(\bar{Z}-\bar{u}Z)(1-u) = (1-\bar{u})(Z-u\bar{Z})$$

$$\bar{Z}-u\bar{Z}-\bar{u}Z+u\bar{u}Z = Z-u\bar{Z}-\bar{u}Z+u\bar{u}\bar{Z}$$

$$\bar{Z}+u\bar{u}Z-Z-u\bar{u}\bar{Z} = 0$$

$$(\bar{Z}-Z)+u\bar{u}(Z-\bar{Z}) = 0$$

$$(\bar{Z}-Z)-u\bar{u}(\bar{Z}-Z) = 0$$

$$(\bar{Z}-Z)(1-u\bar{u}) = 0$$

إما $\bar{Z}-Z = 0 \Rightarrow Z = \bar{Z}$

فإن Z هو عدد حقيقي.

$$1-U\bar{u} = 0 \Rightarrow u\bar{u} = 1$$

فإن طويلة u هي $\bar{u} = \frac{1}{u} \Rightarrow (1)$

مسألة:

ليكن العدد العقدي $W = \frac{2+\bar{Z}}{1+\bar{Z}}$

حيث $Z \neq -1$

١- عيّن مجموعة النقاط (Z) التي تحقق $W(Z)$ حقيقي هو مستقيم محذوف منه نقطة

٢- عيّن مجموعة النقاط $W(Z)$ التي تحقق W تخيلي بحت هو دائرة محذوف منها نقطة.

الحل:

$$Z = x+yi \quad \bar{Z} = x-yi$$

$$W = \frac{2+x-yi}{1+x-yi}$$

$$W = \frac{(2+x-yi)(1+x+yi)}{(1+x-yi)(1+x+yi)}$$

$$W = \left(\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2}\right) + \left(\frac{y}{(1+x)^2+y^2}\right)i$$

بما أن W هو حقيقي فيكون $Im(Z) = 0$

$$\frac{y}{(1+x)^2+y^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

مستقيم أفقي منطبق على محور الفواصل محذوف منه النقطة $(-1,0)$

٢- بما أن W هو تخيلي بحت فيكون $Re(Z) = 0$

$$\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2} = 0 \Rightarrow y^2+x^2+3x+2 = 0$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2 = 0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2 = \frac{1}{4}$$

دائرة مركزها $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ و نصف قطرها

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

محذوف منها النقطة $(-1,0)$

* ليكن المقدار $(\bar{Z}+1)(Z-2)$ هو حقيقي عين مجموعة الأعداد العقدية Z؟

$$(\bar{Z}+1)(Z-2)=(Z+1)(\bar{Z}-2)$$

$$(\bar{Z}+1)(Z-2)=(Z+1)(\bar{Z}-2)$$

$$\bar{Z}Z-2\bar{Z}+Z-2=Z\bar{Z}-2Z+\bar{Z}-2$$

$$-2\bar{Z}+Z+2Z-\bar{Z}=0$$

$$-3\bar{Z}+3Z=0$$

$$-\bar{Z}+Z=0$$

$$Z=\bar{Z}$$

مجموعة الأعداد العقدية هي مجموعة الأعداد الحقيقية و التي تمثل محور الفواصل

- ليكن المقدار $\left(\frac{Z+2i}{Z-4i}\right)$ حقيقي حيث: $Z \neq 4i$

عين مجموعة الأعداد العقدية (Z)؟ ← مرافق ← حقيقي أو تخيلي

$$\overline{\left(\frac{Z+2i}{Z-4i}\right)}=\frac{Z+2i}{Z-4i}$$

$$\frac{\bar{Z}-2i}{\bar{Z}+4i}=\frac{Z+2i}{Z-4i}$$

$$(\bar{Z}-2i)(Z-4i)=(\bar{Z}+4i)(Z+2i)$$

$$Z\bar{Z}-4i\bar{Z}-2iZ-8=Z\bar{Z}+2i\bar{Z}+4iZ-8$$

$$-4i\bar{Z}-2iZ-2i\bar{Z}-4iZ=0$$

$$-6iZ-6i\bar{Z}=0$$

$$Z+\bar{Z}=0$$

$$\bar{Z}=-Z$$

مجموعة الأعداد العقدية هو مجموعة الأعداد التخيلية التي محذوف منها العدد $4i$ و يمثل محور التراتيب محذوف منها $(0,4)$

أثبت صحة العلاقة:

$$|Z+Z'|^2+|Z-Z'|^2=2|Z|^2+2|Z'|^2$$

تذكر:

$$Z.\bar{Z}=|Z|^2$$

$$|Z+Z'|^2=(Z+Z')\overline{(Z+Z')}$$

$$=(Z+Z')(\bar{Z}+\bar{Z}')$$

$$Z\bar{Z}+Z\bar{Z}'+Z'\bar{Z}+Z'\bar{Z}' \quad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow |Z-Z'|^2=(Z-Z')\overline{(Z-Z')}$$

$$=(Z-Z')(\bar{Z}-\bar{Z}')$$

$$=Z\bar{Z}-Z\bar{Z}'-Z'\bar{Z}+Z'\bar{Z}' \quad \ldots(2)$$

$$(1)+(2)=2Z\bar{Z}+2Z'\bar{Z}'$$

$$=2|Z|^2+2|Z'|^2$$

حل المعادلات

أولاً حل المعادلات من الدرجة الأولى:

- إذا كانت المعادلة تحوي:
- Z أو $\bar{Z}$ نضع المجاهيل في طرف و المعاليم في الطرف الآخر.
- عند وجود Z, $\bar{Z}$ نفرض أن $Z=x+yi$ ثم نحسب x و y.

معادلتين بمجهولين ← حل مشترك

تمرين:

حل في C المعادلات التالية (أوجد قيمة Z)

1) $2\bar{Z}=i-1$

$$\bar{Z}=\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow \bar{Z}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow Z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

2) $\frac{\bar{Z}-1}{\bar{Z}+1}=\frac{i}{1}$

$$\bar{Z}-1=i\bar{Z}+i\Rightarrow \bar{Z}-i\bar{Z}=1+i$$

$$\Rightarrow \bar{Z}(1-i)=1+i$$

$$\Rightarrow \bar{Z}=\frac{1+i}{1-i}$$

$$\bar{Z}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\Rightarrow \bar{Z}=\frac{1+2i-1}{1+1}=i$$

$$\Rightarrow Z=-i$$

3) $Z-2\bar{Z}=2$

نفرض $Z=x+yi$ فيكون $\bar{Z}=x-yi$

$$\Rightarrow x + yi - 2(x - yi) = 2$$

$$\Rightarrow x + yi - 2x + 2yi = 2$$

$$\Rightarrow -x + 3yi = 2$$

بالمقارنة بين الطرفين:

$$\begin{matrix} -x = 2 \Rightarrow x = -2 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{matrix} \rightarrow \boxed{Z = -2}$$

4) $2iZ + \bar{Z} = 3 + 3i$

نفرض $Z = x + yi$ فيكون $\bar{Z} = x - yi$

$$\Rightarrow 2i(x + yi) + (x - yi) = 3 + 3i$$ بعد الفتح والترتيب

$$\Rightarrow (x - 2y) + (2x - y)i = 3 + 3i$$

بالمقارنة بين الطرفين:

$$\boxed{x - 2y = 3} - - - (1)$$

$$\boxed{2x - y = 3} - - - (2)$$

من (1) نجد: $\boxed{x = 3 + 2y} - - - (3)$

نعوض (3) في (2) :

$$6 + 4y - y = 3$$

$$\Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

نعوض في (3)

$$x = 3 - 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

و منه $Z = 1 - i$

ثانياً: حل معادلة من الدرجة (الثانية)

$\Delta > 0$ (حقيقي موجب)	$\Delta = 0$ (معدوم)	$\Delta < 0$ (حقيقي سالب)	$\Delta = a + bi$ (عدد مركب)
* يوجد حلان حقيقيان $Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	* يوجد حل وحيد مضاعف $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$	* يوجد حلان عقديان مترافقان شرط أن تكون $a, b, c \in R$ $Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$\sqrt{\Delta} = \sqrt{a + bi}$ نفرض: $\sqrt{\Delta} = x + yi$ نستخدم المعادلات الثلاثة: $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $x^2 - y^2 = a$ $2x.y = b$

Note: ★ كيف نتعامل مع المعادلات الثلاث؟

نجمع أول معادلتين

نطرح أول معادلتين

نحدد الإشارات من المعادلة الثالثة

إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب نستخدم المعادلات الثلاث:

معلوم $W = a + bi$ ، $Z = x + yi$ مجهول.

$$Z^2 = W \Rightarrow Z = \sqrt{W}$$ 2021

$$\Rightarrow Z = \sqrt{a + bi}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - - - (1)$$

$$x^2 - y^2 = a - - - (2)$$

$$2xy = b - - - (3)$$

ملاحظات هامة جداً:

متى نستخدم المعادلات الثلاث: $Z^2 = W$ حيث W عدد مركب

١- عند حل المعادلة (جذور تربيعية لعدد مركب)

٢- عندما يكون جواب Δ عدد مركب

٣- ملاحظة: وجود i تحت الجذر

التمرين الأول:

حل في C المعادلة التالية:

$$iZ^2 + (-3 + 4i)Z + i - 5 = 0$$

الحل:

$$a = i, b = -3 + 4i, c = i - 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3 + 4i)^2 - 4(i)(i - 5)$$

$$= 9 - 24i - 16 + 4 + 20i$$

$$\Delta = -3 - 4i$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3 - 4i} = \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$$

نفرض أن: $\sqrt{\Delta} = x + yi$

$$x^2 - y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5 - -(1)$$

$$x^2 - y^2 = a$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = -3 - -(2)$$

$$2xy = b \Rightarrow 2xy = -4 - -(3)$$

بجمع(1)و(2):

$$2x^2 = 2$$
$$x^2 = 1$$
$$\overbrace{x = 1\ ,\ x = -1}$$

بطرح(2)من(1):

$$2y^2 = 8$$
$$y^2 = 4$$
$$\overbrace{y = 2\ ,\ x = -2}$$

من المعادلة (3) نجد أن الجداء $(x.y)$ هو عدد سالب:

فهما من إشارتين مختلفتين أي:

$$\sqrt{\Delta} = 1 - 2i \quad \text{أو} \quad \sqrt{\Delta} = -1 + 2i$$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 4i + 1 - 2i}{2i}$$

$$= \frac{4 - 6i}{2i} = \frac{(2 - 3i)(-i)}{(i)(-i)}$$

$$\Rightarrow Z_1 = -3 - 2i$$

$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 4i - 1 + 2i}{2i}$$

$$= \frac{2 - 2i}{2}$$

$$\Rightarrow Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

التمرين الثاني:

حل في C المعادلة:

$$Z^2 = W\ ,\ W = -7 + 24i$$

الحل:

$$Z^2 = -7 + 24i$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{-7 + 24i} \quad \begin{cases} a = -7 \\ b = 24 \end{cases}$$

نفرض: $Z = x + yi$

$$x^2 + y^2 = 25 - - - (1)$$
$$x^2 - y^2 = -7 - - - (2)$$
$$2xy = 24 - - - (3)$$

بجمع(1)و(2):

$$2x^2 = 18$$
$$x^2 = 9$$
$$\overbrace{x = 3 \quad x = -3}$$

بطرح(2)من(1):

$$2y^2 = 32$$
$$y^2 = 16$$
$$\overbrace{y = 4\ ,\ x = -4}$$

من (3) نجد أن الجداء $(x.y)$ هو عدد مجب فلهما نفس الإشارة

$$Z_1 = 3 + 4i\ ,\ Z_2 = -3 - 4i$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا كثير الحدود:

$$P(Z) = 2Z^3 - Z^2 - 1$$

١- حلل $P(Z)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

٢- حل المعادلة $P(Z) = 0$ في C

الحل:

١- العدد 1 يعدم $P(Z)$ إذاً نقسم على $Z - 1$

$$P(Z) = (Z-1)(2Z^2 + Z + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} 2Z^3 - Z^2 - 1 & Z-1 \\ \hline \mp 2Z^3 \pm 2Z^2 & 2Z^2 + Z + 1 \\ Z^2 - 1 & \\ \mp Z^2 \pm Z & \\ Z - 1 & \\ Z - 1 & \\ 0 & \end{array}$$

نحل: $2Z^2 + Z + 1 = 0$

$a = 2\ ,\ b = 1\ ,\ c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1 - 4(2)(1) = -7$$

بما أن $\Delta < 0$ يوجد حلان عقديان مترافقان

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$$

$$Z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$$

$$2Z^2 + Z + 1 = 2\left(Z + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i\right)\left(Z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i\right)$$

حتى يكون عدد ما هو جذر المعادلة يجب ان يحقق هذه المعادلة (اي عند تعويضه في المعادلة يجب ان يتساوى طرفي المعادلة)

Note:

2- حل المعادلة من الدرجة الثانية عندما يكون لدينا أحد الحلول وطلب استنتاج الآخر نستخدم أحد القانونين

$Z_1+Z_2=\frac{-b}{a}$, $Z_1 \cdot Z_2=\frac{c}{a}$

$$P(Z)=2(Z-1)\left(Z-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)\left(Z+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)$$

$$P(Z)=0$$

$$2(Z-1)\left(Z+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)\left(Z+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)$$

إما $Z=1$ أو $Z=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$

أو $Z=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i$

ملاحظات هامة: تحل الى جداء عوامل من الدرجة الأولى

حيث Z_1 و Z_2 هما جذري المعادلة

$$1)\ aZ^2+bZ+c=0$$

$$\Rightarrow a(Z-Z_1)(Z-Z_2)=0$$

$\boxed{2}$ عند حل معادلة من الدرجة الثانية و الثالثة ... وكانت الأمثال حقيقية فيوجد حلان مترافقان

التمرين الرابع:

تذكير

حل في C المعادلة: $Z^3-8=0$

الحل:

$$(Z-2)(Z^2+2Z+4)=0$$

إما $\boxed{Z=2}$

أو $Z^2+2Z+4=0$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(4)$$

$$\Delta=-12<0$$

للمعادلة حلان مترافقان.

$$Z_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}=\boxed{-1+\sqrt{3}i}$$

$$Z_2=\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}=\boxed{-1-\sqrt{3}i}$$

حلل المعادلة السابقة إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

$$Z^3-8=(Z-2)(Z^2+2Z+4)$$

$$=(Z-2)(Z+1-\sqrt{3}i)(Z+1+\sqrt{3}i)$$

التمرين الخامس:

لتكن $Z^2+(1+4i)Z-5-i=0$

١- تحقق أن $(1-i)$ هو جذر للمعادلة

٢- استنتج الجذر الآخر.

الحل:

١- حتى يكون $(1-i)$ حل للمعادلة السابقة يجب أن يحققها

$$(1-i)^2+(1+4i)(1-i)-5-i=0$$

$1-2i-1+1-i+4i+4-5-i=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

٢- $S=Z_1+Z_2=\frac{-b}{a}$

$$1-i+Z_2=-1-4i$$

$$\Rightarrow Z_2=-1-4i-1+i$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_2=-2-3i}$$

أو $P=Z_1.Z_2=\frac{c}{a}$.

$$(1-i)Z_2=-5-i$$

$$Z_2=\frac{(-5-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{-5-5i-i+1}{1+1}$$

$$=\frac{-4-6i}{2}=\boxed{-2-3i}$$

التمرين السادس:

احسب $(2+i)^2$ ثم استنتج حلول المعادلة ،

$$iZ^2+\sqrt{7}Z-i-1=0$$

الحل:

$$(2+i)^2 = 4+4i-1 = 3+4i$$

$$iZ^2 + \sqrt{7}Z - i - 1 = 0$$

$$a = i, b = \sqrt{7}, c = -i-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7 - 4(i)(-i-1)$$

$$= 7 - 4 + 4i = 3 + 4i = (2+i)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 + i$$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{(-\sqrt{7}+2+i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}i - 4i + 2}{4} \Rightarrow Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}-2}{2}i$$

$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{(-\sqrt{7}-2-i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}i + 4i - 2}{4}$$

$$\Rightarrow Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}+2}{2}i$$

H.w

لتكن المعادلة:

$$(Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9)(Z^2 - 3\sqrt{3}Z + 9) = 0$$

١- حل في C المعادلة السابقة.

٢- تمثل الحلول السابقة النقاط D, C, B, A

أثبت أن الشكل ($\cancel{ABCD}$) (AB DC) مستطيل.

$\boxed{1}$ $Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 27 - 4 \times 9 = -9$$

$\Delta < 0$ حلان عقديان مترافقان.

$$A: Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3}+3i}{2}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$B: Z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3}-3i}{2}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

أو

$$Z^2 - 3\sqrt{3}Z + 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -9$$

$\Delta < 0$ حلان عقديان مترافقان.

$$C: Z_3 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{+3\sqrt{3}+3i}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$D: Z_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$\boxed{2}$ $B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \quad A\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

* إثبات أن الشكل متوازي أضلاع.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(0,-3)\\ \overrightarrow{CD}(0,-3)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

فالشكل متوازي أضلاع

* إثبات أن فيه زاوية قائمة: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \stackrel{?}{=} 0$

$$(3\sqrt{3}, 0) \cdot (0, -3) = 0$$

$$(3\sqrt{3})(0) + (0)(-3) = 0$$

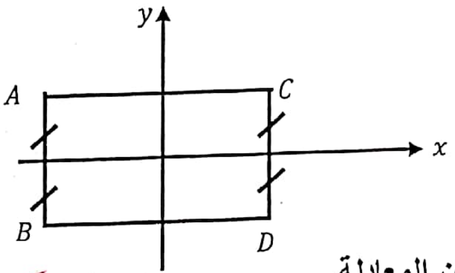
$0 = 0$ محققة

$$AC \perp AB$$

فالشكل (ABDC) مستطيل.

ط٢: بما أن $Z_2 = Z_1$ مترافقان ⇐ النقطتان B, A متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل

- بما أن Z_4, Z_3 مترافقان ⇐ النقطتان D, C متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل.



لتكن المعادلة

تحضير

$$Z^3 - 2(2+i)Z^2 + (5+8i)Z - 10i = 0$$

١- حل في C المعادلة إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

٢- لتكن النقاط C, B, A تمثل حلول المعادلة السابقة ، أثبت أن C, B, A, O تشكل رؤوس متوازي الأضلاع.

الحل:

بما أن المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً $Z = ai$

فتكون شكل المعادلة:

$$(Z - ai)(Z^2 + bZ + q) = 0$$

$Z^3 + bZ^2 + qZ - aiZ^2 - abiZ - aqi = 0$

$Z^3 + (b-ai)Z^2 + (q-abi) - aqi = 0$ بالمطابقة مع المعادلة الأصلية

ثانية: $b - ai = 4 - 2i \Rightarrow a = 2$

$b = -4$

أولى: $q - abi = 5 + 8i \Rightarrow q = 5$

$-a \cdot b = 8$

$8 = 8$ محققة

فتكون المعادلة:

$$(Z - 2i)(Z^2 - 4Z + 5) = 0$$

إما $Z - 2i = 0$

$A: Z = 2i$

$A(0,2)$

أو $Z^2 - 4Z + 5 = 0$

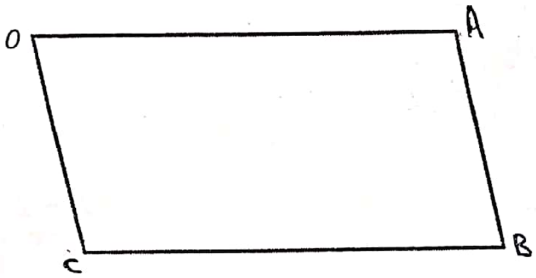
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1).(5) = -4$

$\Delta < 0$ حلان عقديان مترافقان

$B: Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 2 + i$

$C: Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 2 - i$

٢- $O(0,0), A(0,2), B(2,1), C(2,-1)$



ليكن الشكل $OABC$ متوازي أضلاع.

يجب إثبات أن $\overrightarrow{OA} = \cancel{\overrightarrow{BC}}\ \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{OA}(0,2)$

$\overrightarrow{CB}(0,2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

فالشكل $OABC$ متوازي أضلاع.

الصيغة التفصيلية للتحويلات الهندسية:

١- الانسحاب: نحن بحاجة إلى عدد عقدي لشعاع الانسحاب

نحتاج إلى شعاع $\vec{w}$ بالشكل العقدي $M'(Z')$ صورته $M(Z)$ وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}$

جديدة ، قديمة ، شعاع الانسحاب

$$Z' = Z + W$$

٢- التحاكي: نحن بحاجة إلى المركز للتحاكي ونسبة تحاكي

نحتاج إلى مركز A و نسبته k حيث $k \in R$

$M'(Z')$ صورة $M(Z)$ وفق تحاكي مركزه A و نسبته k.

جديد ، مركز ، النسبة ، قديم ، مركز

$$Z' - Z_A = k(Z - Z_A)$$

٣- الدوران: نحن بحاجة إلى المركز الدوران زاوية الدوران

نحتاج إلى المركز A و الزاوية θ

$$Z' - Z_A = e^{\theta i}(Z - Z_A)$$

٢- التناظر بالنسبة للنقطة A:

$$Z' = 2Z_A - Z$$

٣- التناظر بالنسبة لمحور الفواصل:

$$Z = a + bi \Rightarrow Z' = a - bi$$

أو:

$$Z' = \bar{Z}$$

٤- التناظر بالنسبة لمحور التراتيب:

$$Z = a + bi \Rightarrow Z' = -a + bi$$

أو:

$$Z' = -\bar{Z}$$

٥- التناظر بالنسبة لمحور الإحداثيات:

$$Z = a + bi \Rightarrow Z' = -a - bi$$

أو:

$$Z' = -Z$$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة:

أولاً: قوانين الحساب:

١- النقطة الممثلة للعدد العقدي $Z = x + yi$

$$\Rightarrow M(x,y)$$

٢- العدد العقدي الممثل لشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = b - a$$

٣- طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$|Z_{\overrightarrow{AB}}| = |Z_B - Z_A| = |b - a|$$

٤- العدد العقدي الممثل للنقطة I منتصف [AB]:

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{a + b}{2}$$

٥- العدد العقدي الممثل للنقطة M مركز ثقل المثلث ABC:

$$Z_M = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{a + b + c}{3}$$

٦- العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,\gamma),(B,\beta),(A,\alpha)$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

ملاحظات هامة:

$\boxed{1}$ إذا طلب وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة : يجب أن نثبت وجود شعاعين متشكلين من النقاط مرتبطين خطياً.

$\boxed{2}$ إذا طُلب وقوع نقاط C, B, A على دائرة واحدة مركزها O و نصف قطرها R يجب ان نثبت أن:

$$|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = R$$

ثانياً:

تمثيل بعض مجموعات النقاط الخاصة:

$\lvert Z - W\rvert = r$	$\lvert Z - b\rvert = \lvert Z - a\rvert$
مجموعة النقاط تمثل دائرة مركزها النقطة الموافقة للعدد العقدي W و نصف قطرها يساوي r.	مجموعة النقاط تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

$\Leftarrow$ إذا طُلب إيجاد معادلة للمجموعات نعوض $Z = x + yi$ و نحسب المطلوب

ثالثاً:

النسبة بين عددين عقديين ممثلين لشعاعين:

نسبة ← زاوية ، طويلة ، تفسير

$$\frac{Z\vec{u}}{Z\vec{v}} = \text{عدد حقيقي} \begin{cases} (\vec{v},\vec{u}) = \arg\left(\frac{Z\vec{u}}{Z\vec{v}}\right) = 0 \text{ أو } \pi \\ \frac{|Z\vec{u}|}{|Z\vec{v}|} = |\text{العدد}| \end{cases}$$

الشعاعين $\vec{v},\vec{u}$ مرتبطين خطياً.

$$\frac{Z\overrightarrow{AB}}{Z\overrightarrow{AC}} = \text{عدد حقيقي} \begin{cases} (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0 \text{ أو } \pi \\ \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = |\text{العدد}| \end{cases}$$

النقاط C, B, A على استقامة واحدة.

$$\frac{Z\overrightarrow{AB}}{Z\overrightarrow{CD}} = \pm 1 \begin{cases} (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0 \text{ أو } \pi \\ \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = 1 \end{cases}$$

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

$$\frac{Z\vec{u}}{Z\vec{v}} = \text{عدد تخيلي بحت} \begin{cases} (\vec{v},\vec{u}) = \arg\left(\frac{Z\vec{u}}{Z\vec{v}}\right) = \mp\frac{\pi}{2} \\ \frac{|Z\vec{u}|}{|Z\vec{v}|} = |\text{العدد}| \end{cases}$$

أمثال / ادلا

الشعاعين $\vec{v},\vec{u}$ متعامدين.

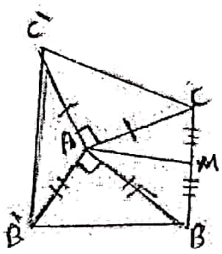
$$\frac{Z\overrightarrow{AB}}{Z\overrightarrow{AC}} = \pm i \begin{cases} (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC \end{cases}$$

المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

$$\frac{Z\vec{u}}{Z\vec{v}} = a + bi \begin{cases} \frac{|Z\vec{u}|}{|Z\vec{v}|} = r = \sqrt{a^2+b^2} \\ (\vec{v},\vec{u}) = \theta \begin{cases} \cos\theta = a/r \\ \sin\theta = b/r \end{cases} \end{cases}$$

التفسير يكون حسب الطويلة و الزاوية.

المسألة الأولى:



نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشراً التوجيه كيفي ،

لتكن M منتصف [AC] و لتكن $AB'B$ و ACC' مثلثين قائمين في A و متساويا الساقين مباشرين أثبت أن المتوسط (AM) في المثلث ABC هو ارتفاع في المثلث $AB'C'$ و أن $B'C' = 2AM$

الحل:

نختار معلم متجانس مباشر مبدؤه A : $a=0$

- C' هي صورة C وفق دوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول A أي: $c' = ic$
- B هي صورة B' وفق دوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول A أي $b = ib'$ ومنه

$$b' = -ib$$

لنحسب $\frac{c'-b'}{m-a}$

$$\frac{c'-b'}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = \frac{i(c+b)}{\frac{1}{2}(c+b)} = 2i$$

$$AM \perp B'C' \Leftarrow (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}) = \frac{\pi}{2}$$

$$B'C' = 2AM \Leftarrow \frac{B'C'}{AM} = 2$$

المسألة الثانية:

40 علامة

في المستوي معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ لدينا النقطتين C, B حيث $Z_C = 4i, Z_B = 2-2i$

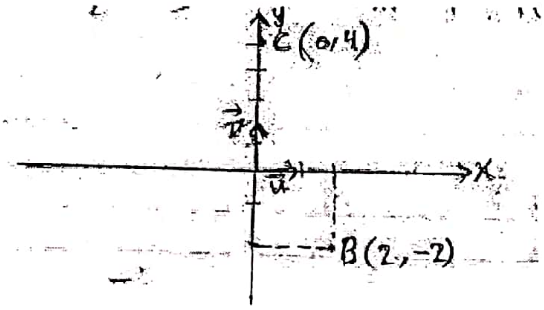
١- مثل هذه الأعداد في المستوي العقدي. (إحداثيات)

٢- جد العدد العقدي Z_A الممثل للنقطة A صورة B وفق دوران مركزه O و زاوية $-\frac{\pi}{2}$ ← مترية

٣- جد العدد العقدي Z_D الممثل للنقطة D هي صورة C وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ← مترية

٤- جد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M منتصف (AD)

٥- أثبت أن $(BC) \perp (OM)$ و أن $OM = \frac{1}{2}BC$ ← زاوية وطويلة (نسبة)



٢- $Z_A = e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot Z_B \Rightarrow$

$$Z_A = -i(2-2i) = -2-2i$$

٣- $Z_D = e^{\frac{\pi}{2}i}\ Z_C \Rightarrow$

$$Z_D = i(4i) = -4$$

$$Z_M = \frac{Z_A + Z_D}{2} = \frac{-2-2i-4}{2} = -3-i$$

$$\frac{Z_M - Z_0}{Z_C - Z_B} = \frac{-3-i}{4i-2+2i}$$

$$= \frac{(-3-i)(-2-6i)}{(-2+6i)(-2-6i)}$$

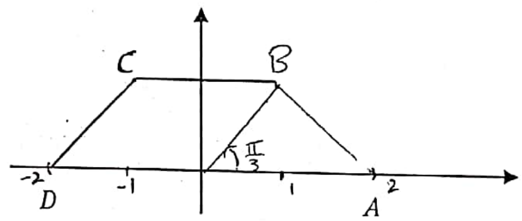
$$= \frac{6+18i+2i-6}{4+36} = \frac{20i}{40} = \frac{1}{2}i$$

$$BC \perp OM \Leftarrow (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2}$$

$$OM = \frac{1}{2}BC \Leftarrow \frac{OM}{BC} = \frac{1}{2}$$

المسألة الثالثة :

في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس نصف مسدس منتظم $ABCD$



١- أوجد الأعداد العقدية للنقاط A و B و C و D .

٢- احسب $\arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right)$ ثم استنتج نوع المثلث ACD

الحل:

$$A(2,0) \Rightarrow a = 2$$

$$B\left(2,\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow b = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i$$

$$C\left(2,2\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow C = 2e^{2\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+\sqrt{3}i$$

$$D(2,\pi) \Rightarrow d = 2e^{\pi i} = 2(-1) = -2$$

$$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2+1-\sqrt{3}\,i}{2+1-\sqrt{3}\,i}$$

$$= \frac{(-1-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}{(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}i}{12} = \frac{-\sqrt{3}i}{3}$$

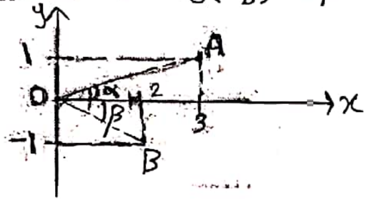
$$(CA)\perp(CD) \Leftarrow (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2}$$

المثلث ACD قائم في C.

المسألة الرابعة:

في المستوي العقدي المنسوب لمعلم متجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ لدينا:

$$\arg(Z_A) = \alpha \quad , \quad \arg(Z_B) = \beta$$



١- اكتب كلاً من Z_A , Z_B بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي.

٢- اكتب $\frac{Z_A}{Z_B}$ بالشكل الجبري و الأسي ثمّ استنتج قيمة $(\alpha-\beta)$

الحل:

$$Z_A = 3+i \,, Z_B = 2-i$$

$$|Z_A| = \sqrt{10} \Rightarrow Z_A = \sqrt{10}e^{\alpha i}$$

$$|Z_B| = \sqrt{5} \Rightarrow Z_B = \sqrt{5}e^{\beta i}$$

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\sqrt{10}e^{\alpha i}}{\sqrt{5}e^{\beta i}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}e^{(\alpha-\beta)i}$$

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \sqrt{2}e^{(\alpha-\beta)i}$$

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{6+3i+2i-1}{4+1} = \frac{5+5i}{5}$$

$$\frac{Z_A}{Z_B} = 1+i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow \alpha-\beta = \frac{\pi}{4}$$

المسألة الخامسة:

نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ منسوب لمستوي عقدي النقاط B, C, D التي تمثلها الأعداد العقدية

$$d = 1-3i, c = -1+i, b = 2$$

١- احسب $\frac{c-b}{d-b}$ و استنتج نوع المثلث BCD

٢- أوجد العدد العقدي a الممثل للنقطة A بحيث يكون $ACBD$ مربعاً

٣- اكتب العدد العقدي C بالشكل الأسي.

الحل: ١)

$$\frac{c-b}{d-b} = \frac{-1+i-2}{1-3i-2}$$

$$= \frac{(-3+i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)}$$

$$= \frac{3-9i-i-3}{1+9} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (BD) \perp (BC)$$

$$\frac{BC}{BD} = 1 \Rightarrow BC = BD$$

المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

٢) حتى يكون $ACBD$ مربعاً يجب أن يكون

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$$

$$\Rightarrow c - a = b - d$$

$$\Rightarrow -1 + i - a = 2 - 1 + 3i$$

$$a = -2 - 2i$$

٣) $c = -1 + i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow Z_C = \sqrt{2}.e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

المسألة السادسة:

ليكن النقطتان B, A اللتان تمثلان الأعداد العقدية 1 و $3 + 2i$ بالترتيب مثل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق:

① $|Z - 1| = |Z - 3 - 2i|$

② $|Z - 3 - 2i| = 1$

الحل:

$$|Z - 1| = |Z - 3 - 2i| \Rightarrow |Z - a| = |Z - b|$$

مجموعة النقاط تمثل محور القطعة المستقيمة [AB]

② $|Z - 3 - 2i| = 1 \Rightarrow |Z - a| = 1$

مجموعة النقاط تمثل دائرة مركزها A و نصف قطرها 1.

Note:

١- مجموعة النقاط تكون عبارة عن مستقيم او دائرة

وفي حال كان العدد العقدي عبارة عن الكسر نحذف المشكلة الموافقة للعدد الذي يعدم المقام

٢- إن مجموعة الأعداد تكون عبارة عن مجموعة الأعداد الحقيقية او التخيلية البحتة

وفي حال كان العدد الحقيقي عبارة عن كسر نحذف العدد الذي يعدم المقام

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}} = \text{عدد تخيلي} \begin{cases} \rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \mp\frac{\pi}{2} \\ \rightarrow \frac{AB}{AC} = 1 \quad \text{البعد} \\ \rightarrow \text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \end{cases}$$

٢- أوجد العدد العقدي a الممثل للنقطة A بحيث يكون $ACBD$ مربعاً

٣- اكتب العدد العقدي C بالشكل الأسي.

الحل: ١)

$$\frac{c-b}{d-b}=\frac{-1+i-2}{1-3i-2}$$

$$=\frac{(-3+i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)}$$

$$=\frac{3-9i-i-3}{1+9}=\frac{-10i}{10}=-i$$

$$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow (BD)\perp(BC)$$

$$\frac{BC}{BD}=1\Rightarrow BC=BD$$

المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

٢) حتى يكون $ACBD$ مربعاً يجب أن يكون

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$$

$$\Rightarrow c-a=b-d$$

$$\Rightarrow -1+i-a=2-1+3i$$

$$a=-2-2i$$

٣) $c=-1+i\rightarrow\begin{cases} r=\sqrt{2}\\ \theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$

$$\Rightarrow Z_C=\sqrt{2}.e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

المسألة السادسة:

ليكن النقطتان B,A اللتان تمثلان الأعداد العقدية 1 و $3+2i$ بالترتيب مثل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق:

① $|Z-1|=|Z-3-2i|$

② $|Z-3-2i|=1$

الحل:

$$|Z-1|=|Z-3-2i|\Rightarrow |Z-a|=|Z-b|$$

مجموعة النقاط تمثل محور القطعة المستقيمة [AB]

② $|Z-3-2i|=1\Rightarrow |Z-a|=1$

مجموعة النقاط تمثل دائرة مركزها A و نصف قطرها 1.

Note:

مجموعة النقاط تكون عبارة عن مستقيم او دائرة

1- وفي حال كان العدد العقدي عبارة عن الكسر نحذف المقابلة الموافقة للعدد الذي يعدم المقام

2- إن مجموعة الأعداد تكون عبارة عن مجموعة الأعداد الحقيقية او الداخلية البحتة

وفي حال كان العدد العقدي عبارة عن كسر نحذف العدد الذي يعدم المقام

$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}=$ عدد تخيلي

→ $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=\mp\frac{\pi}{2}$

→ $\frac{AB}{AC}=|$العدد$|$

→ المثلث ABC قائم في A

Raneem

دعواتكم ... ♥ :)