

# حل المعادلات المثلثية

## Solving Trigonometric Equations

### فيما سبق:

درست المتطابقات المثلثية.  
(الدروس من 3 إلى 4)

### والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

### المفردات:

المعادلات المثلثية

trigonometric equations



## المادة؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد  $t$  دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟



**حل المعادلات المثلثية:** درست نوعاً خاصاً من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرفاً. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محددة للمتغير.



## حل المعادلات على فترة معطاة

.  $0 \leq x \leq 2\pi$ , إذا كانت  $\cos x \sin x = 3 \cos x$  **1A**

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  إذا كانت  $4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta = 0$  **1B**



حل كل معادلة مما يأتي لقيمة  $\theta$  جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال ١)

$$\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0 ; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (1)$$

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1 ; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (2)$$



حل كل معادلة مما يأتي لقيم  $\theta$  جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

$$-2 \sin^2 \theta = 7 - 15 \sin \theta ; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (3)$$

$$\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; 0^\circ \leq \theta \leq 240^\circ \quad (4)$$



معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

٤  $\sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$  ) ٢A) حل المعادلة

) ٢B) حل المعادلة  $2 \sin \theta = -1$  لقيم  $\theta$  جميعها، إذا كان قياس  $\theta$  بالراديان.



## معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم  $\theta$  جميعها إذا كان قياس  $\theta$  بالراديان: (مثال 2)

$$2 \cos^2 \theta = 1 \quad (6)$$

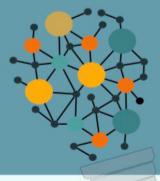
$$4 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad (5)$$



## معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم  $\theta$  جميعها إذا كان قياس  $\theta$  بالراديان: (مثال 2)

$$2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta = -2 \quad (8) \quad \sin \frac{\theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0 \quad (7)$$



## مثال 3 من واقع الحياة

### حل معادلات مثلثية

**مدينة العاب:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعده على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة ، ليكون ارتفاع مقعده 41 متراً فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟



**(13) الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو  $d$ ، ويمكن تمثيلها بالمعادلة  $d = 3 \sin \frac{2\pi}{365}t + 12$  ، حيث  $t$  عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

- a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة  $10\frac{1}{2}$  h تماماً؟
- b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار  $10\frac{1}{2}$  ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريباً يوم 22 يونيو؟ فسر إجابتك.



**الحلول الدخيلة:** بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة  $\cos \theta = 4$  ليس لها حل؛ لأن قيمة  $\cos \theta$  جميعها تقع في الفترة  $[-1, 1]$ . كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تتحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولاً دخيلة.

إذا لم تتمكن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلاً إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التتحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

### حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

$$0^\circ \leq \theta < 360^\circ \text{ إذا كان } \sin \theta = 1 + \cos \theta$$

المعادلة الأصلية

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

ربع

$$\sin^2 \theta = (1 + \cos \theta)^2$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$1 - \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$$

بطرح 1 من الطرفين، وإضافة  $\cos^2 \theta$  لكلا الطرفين

$$0 = 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$$

حل

$$0 = 2 \cos \theta (1 + \cos \theta)$$

خاصية الضرب الصفرية

$$2 \cos \theta = 0$$

$$\text{أو } 1 + \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\text{أو } \cos \theta = -1$$

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ$$

$$\text{أو } \theta = 180^\circ$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

التحقق:

$$\sin 90^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90^\circ$$

$$\sin 180^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180^\circ$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$$

$$1 = 1 \checkmark$$

$$0 = 0 \checkmark$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin 270^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270^\circ$$

$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$-1 \neq 1 \times$$

إذن  $270^\circ$  حلاً دخيلاً

إذن للمعادلة حلان هما  $90^\circ, 180^\circ$ .



## حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُل المعادلة:

$$\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta \quad (4)$$



## حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم  $\theta$  جميعها ، إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات:

$$\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0 \quad (5B)$$

$$\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0 \quad (5A)$$

### تنبيه!

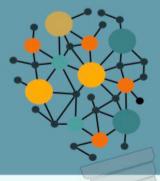
#### دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو  $\pi$ ، وهذا يبرر كتابة

الحلول في الصورة:

$$\theta = 60^\circ + 180^\circ k$$

$$\theta = 120^\circ + 180^\circ k$$



حل كل معادلة مما يأتي: (المثلثان 4, 5)

لجميع قيم  $\theta$  إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات.  $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$  (14)

لجميع قيم  $\theta$  إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات.  $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$  (15)

## تنبيه!

### دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو  $\pi$ ، وهذا يبرر كتابة

الحلول في الصورة:

$$\theta = 60^\circ + 180^\circ k$$

$$\theta = 120^\circ + 180^\circ k$$



لجميع قيم  $\tan \theta = 1$  إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات. **(16)**

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad \textbf{(17)}$$



لجميع قيم  $\theta$  إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات.  $\tan \theta - \sin \theta = 0$  (21)

لجميع قيم  $\theta$  إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات.  $4\sin^2 \theta = 4\sin \theta - 1$  (22)



(31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلي المعادلة  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  ،  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$  إجابتها صحيحة؟ بُرّر إجابتك.

ليلي

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \\ -\sin \theta &= -\sin \theta \\ 2 \cos \theta &= 0 \\ \cos \theta &= 0 \\ \theta &= 90^\circ, 270^\circ \end{aligned}$$

هلا

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \\ \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \\ 2 \cos \theta &= 1 \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= 60^\circ, 300^\circ \end{aligned}$$

(32) تحدّ: حل الممتباينة  $\sin 2x < \sin x$  ،  $0 \leq x \leq 2\pi$  ، بدون استعمال الحاسبة.

(33) اكتب: حدد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول الممتوقة؟

(34) تبرير: اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.



(47) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة  $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$

$\frac{3\pi}{4}$  **D**       $2\pi$  **C**       $\frac{7\pi}{4}$  **B**       $\frac{5\pi}{2}$  **A**

(48) ماحل المعادلة  $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$  حيث  $0^\circ < x < 360^\circ$

$210^\circ$  أو  $330^\circ$  **C**       $30^\circ$  أو  $150^\circ$  **A**

$240^\circ$  أو  $300^\circ$  **D**       $60^\circ$  أو  $120^\circ$  **B**



## الواجب

حل كل معادلة مما يأتي:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (17)$$

$$4\sin^2 \theta = 4 \sin \theta - 1 \quad (22)$$

