
الدرس
3
3
3
3
3
3

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين و الفرق بينهما

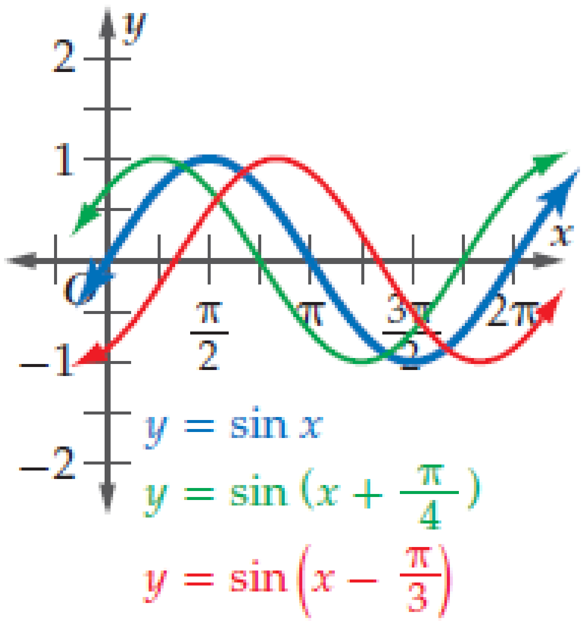
SUM AND DIFFERENCE OF ANGLES IDENTITIES


Welcome

لماذا ؟

هل استعملت مزود الانترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟ تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلاً.

ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.



متطابقات المجموع و الفرق :

لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل المجاور، تتضمّن جميع الزاويتين $x\ ,\ \frac{\pi}{4}$

وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما

في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلاً يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$

من خلال إيجاد $\sin\left(60° - 45°\right)$

مفهوم اساسي

متطابقات المجموع و الفرق

متطابقات المجموع :

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

متطابقات الفرق :

- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1

إيجاد قيم العبارات المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي :

a) $\sin 150^\circ$

استعمل المتطابقة : $\sin(A+B) = \sin A\ \cos B + \cos A \sin B$

$A = 60^\circ, B = 45^\circ$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$

متطابقة المجموع

$$= \sin 60^\circ\ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos(-120°)$ **(b**

استعمل المتطابقة : $\cos(A-B)=\cos A\cos B-\sin A\ \sin B$

$A=60°, B=180°$ $\quad \sin 105° = \sin(60°+45°)$

متطابقة الفرق $\quad = \sin 60°\ \cos 180° + \cos 60° \sin 180°$

بالتعويض $\quad = \frac{1}{2}\bullet(-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\bullet 0$

بالتبسيط $\quad = -\frac{1}{2}$

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$ $\qquad \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1B) $\cos(-15°)$ $\qquad \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة

كهرباء : يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3\ \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين .

$$c = 3\sin 165°t$$ الصيغة الأصلية

$$= 3\sin\left(120°t + 45°t\right)$$ $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$$= 3\sin\left(120°t + 45°t\right)$$ المعادلة حسب الفرع a

$$= 3\sin\left(120° + 45°\right)$$ $t = 1$

$$= 3\left[\sin 120°\ \cos 45° + \cos 120° \sin 45°\right]$$ متطابقة المجموع

بالتعويض
$$=3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

بالضرب
$$=3\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

بالتبسيط
$$=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$$

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$ أمبير .

تحقق من فهمك

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين .

$$2\sin(315°t - 30°t)$$

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة .

$$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

إثبات صحة المتطابقات المثلثية :

تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة :

a) $\cos\left(90^\circ - \theta\right) = \sin\theta$

$\cos\left(90^\circ - \theta\right)$ الطرف الأيسر

$= \cos 90^\circ \cos\theta + \sin 90^\circ \sin\theta$ متطابقة المجموع

$= 0 \bullet \cos\theta + 1 \bullet \sin\theta$ بالتعويض

$= \sin\theta$ بالتبسيط

الناتج وهو الطرف الأيمن من المتطابقة .

(b $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$ الطرف الأيسر

$$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$$ متطابقة المجموع

$$=\sin\theta\bullet 0+\cos\theta\bullet 1$$ بالتعويض

$$=\cos\theta$$ بالتبسيط

الناتج وهو الطرف الأيمن من المتطابقة .

تحقق من فهمك

3A) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\sin(90° - \theta)$ الطرف الأيسر

$= \sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta$ متطابقة المجموع

$= 1 \bullet \cos\theta + 0 \bullet \sin\theta$ بالتعويض

$= \cos\theta$ بالتبسيط

(3B

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

بالتبسيط

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) $\cos 105°$ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3) $\cos 75°$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) $\sin(-30°)$ $-\dfrac{1}{2}$

5) $\sin 135°$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin(-210°)$ $\dfrac{1}{2}$

7) $\cos 135°$ $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

8) $\tan 195°$ $2-\sqrt{3}$

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120^\circ\, t)$. **(مثال 2)**

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

$$c = 2\sin(90t + 30t)$$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$\sqrt{3}$ أمبير

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(10 $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

$$\begin{aligned}
\sin(90^\circ + \theta) &\stackrel{?}{=} \cos\theta \\
\sin 90^\circ \cos\theta + \cos 90^\circ \sin\theta &\stackrel{?}{=} \cos\theta \\
1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta &\stackrel{?}{=} \cos\theta \\
\cos\theta &= \cos\theta \checkmark
\end{aligned}$$

(11 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
\cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
0 \cdot \cos\theta - 1 \cdot \sin\theta &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
-\sin\theta &= -\sin\theta \checkmark
\end{aligned}$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta \quad \textbf{(12}$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$\frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$\frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}\cot\theta \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$\frac{(\sin\theta)\cdot 0 + (\cos\theta)\cdot 1}{(\cos\theta)\cdot 0 - (\sin\theta)\cdot 1} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$-\cot\theta = -\cot\theta \checkmark$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \quad \textbf{(13}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\theta + \pi) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
\sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
(\sin\theta)(-1) + (\cos\theta)(0) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
-\sin\theta &= -\sin\theta \checkmark
\end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \quad \textbf{(14}$$

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \stackrel{?}{=} &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
(0)(\cos\theta) - (1)(\sin\theta) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta \\
-\sin\theta &= -\sin\theta \checkmark
\end{aligned}$$

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} \quad \textbf{(15}$$

$$\tan(\theta + 45^\circ) \stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

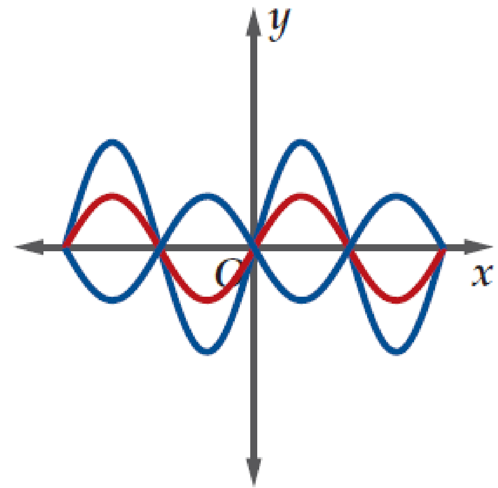
$$\frac{\tan\theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan\theta \tan 45^\circ} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

$$\frac{\tan\theta + 1}{1 - (\tan\theta)(1)} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

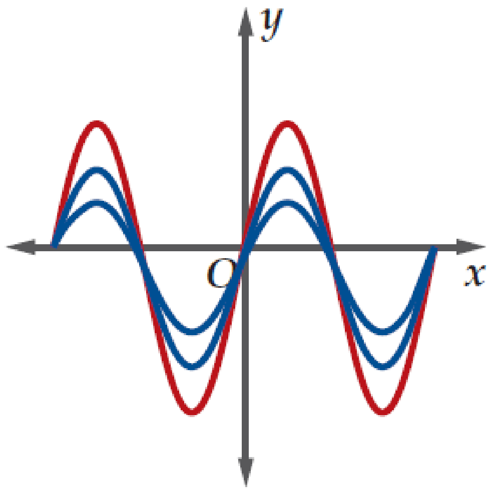
$$\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} \checkmark$$

16) إلكترونيات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدامًا.

تداخل هدام



تداخل بناء



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:

$y_1 = 10 \sin (2t + 210°), y_2 = 10 \sin (2t + 30°)$.

تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسر معناه بالنسبة للموجتين.

0 تداخل هدام

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165^\circ$ $\quad -2+\sqrt{3}$

18) $\sec 1275^\circ$ $\quad \sqrt{2}-\sqrt{6}$

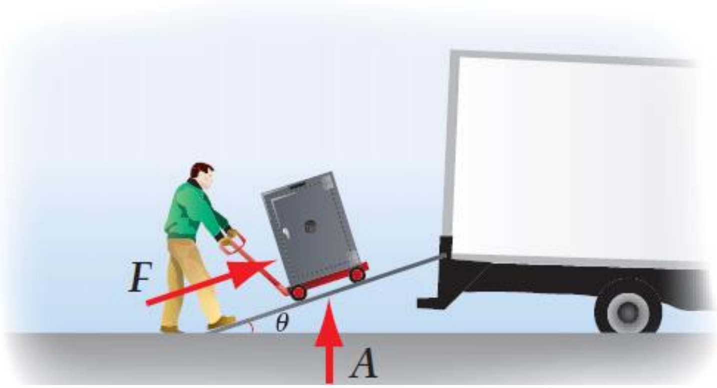
19) $\sin 735^\circ$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

20) $\tan \dfrac{23\pi}{12}$ $\quad -2+\sqrt{3}$

21) $\csc \dfrac{5\pi}{12}$ $\quad \sqrt{6}-\sqrt{2}$

22) $\cot \dfrac{113\pi}{12}$ $\quad 2-\sqrt{3}$

23) قوة: في الشكل أدناه، إذا كان مقدار القوة الكافية F لإبقاء الخزنة ثابتة على المنحدر تعطى بالعلاقة $F = \dfrac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A}$، حيث W هو وزن الخزنة، $\mu = \tan \theta$ ، فبيّن أن $F = W \tan (A + \theta)$.



$$\frac{(\sin A + \tan \theta \cos A)}{\cos A - \tan \theta \sin A}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\tan \theta \cos A}{\cos A}\right)}{\dfrac{\cos A}{\cos A} - \dfrac{\tan \theta \sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{(\tan A + \tan \theta)}{1 - \tan A \tan \theta}$$

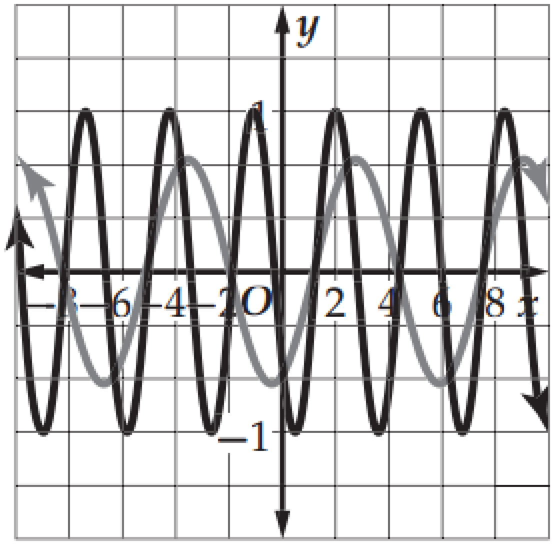
$$= \tan (A + \theta)$$

24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45°	60°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90°	30°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b) **بيانيًّا:** افرض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من: $y = \sin(x + x - 15°)$، $y = \sin x + \sin(x - 15°)$ على الشاشة نفسها.



c) **تحليليًّا:** حدّد إذا كانت $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسر إجابتك.

$$\sin(30° + 45°) = \sin 30° + \sin 45°$$

فالطرف الأيمن يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ ، أو 1.21 تقريبًا. وبما أن قيمة جيب أية زاوية لا يمكن أن تكون أكبر من 1؛ فإن الجملة $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ لا تمثل متطابقة.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(25 $$\sin(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}} \cdot \frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\sin(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{1}$$

$$\sin(A+B) = \sin(A+B) \checkmark$$

$$\cos(A+B) = \frac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B} \quad \textbf{(26}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}{\dfrac{1}{\cos A}\cdot\dfrac{1}{\cos B}}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}{\dfrac{1}{\cos A}\cdot\dfrac{1}{\cos B}}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\cos(A+B) \stackrel{?}{=} \frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{1}$$

$$\cos(A+B) = \cos(A+B)\ \checkmark$$

$$\sec(A - B) = \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B} \qquad \textbf{(27}$$

$$\sec(A - B) \stackrel{?}{=} \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\sec(A - B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\sec(A - B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos B}}{1 + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}} \cdot \frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\sec(A - B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$\sec(A - B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos(A - B)}$$

$$\sec(A - B) = \sec(A - B) \checkmark$$

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B \quad \textbf{(28}$$

$$\sin(A+B)\sin(A-B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$
$$\stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin A \cos B)^2 - (\cos A \sin B)^2 \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B -$$
$$\sin^2 A \sin^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) - \sin^2 B(\sin^2 A + \cos^2 A) \stackrel{?}{=}$$
$$\sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin^2 A)(1) - (\sin^2 B)(1) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B \checkmark$$