المحاضرة الثالثة

السنة الثالثة – إحصاء رياضي

نظرية الخدمات

عاشراً: تحويل لابلاس–ستيلجس Laplace-Stieljes Transform:

بفرض X متغير عشـوائي موجب مسـتمر بدالة كثافة $\boldsymbol{f(x)}$، عندئذ يعرف تحويل

لابلاس–ستيلجس لهذا المتغير وفقاً للعلاقة التالية :

$$\tilde{X}(s) = Ee^{-sX} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \; ; s \geq 0$$

خواص تحويل لابلاس–ستيلجس:

$$1 - \qquad \tilde{X}(0) = 1$$

$$2 - \qquad |\tilde{X}(s)| \leq 1$$

$$3 - \qquad \acute{\tilde{X}}(0) = -EX \;, \tilde{X}^{(k)}(0) = (-1)^{(k)} E(X^k)$$

البرهان:

-1

$$\tilde{X}(0) = E(1) = 1$$

-2 لدينا :

$$|\tilde{X}(s)| \leq \left|\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx\right|$$

$$\leq \int_0^\infty |e^{-sx} f(x)|dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \quad \ldots (1)$$

ولكن:

$$s \geq 0 \Rightarrow \ -s \leq 0 \ \Rightarrow -sx \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-sx} \ \leq e^0 = 1 \Rightarrow \ e^{-sx} f(x) \leq \ f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \ \leq \ \int_0^\infty f(x)dx = 1 \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $|\tilde{X}(s)| \leq 1$ محققة.

3- لدينا:

$$\tilde{X}(s) = \int_0^\infty -x\, e^{-sx} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \ \tilde{X}'(0) = -\int_0^\infty x\, f(x)dx = -\ EX$$

$$\tilde{X}^{(k)}(s) = \int_0^\infty (-x)^k\, e^{-sx} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \ \tilde{X}^{(k)}(s) = \int_0^\infty (-1)^k\, x^k\, e^{-sx} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \ \tilde{X}^{(k)}(0) = \int_0^\infty (-1)^k\, x^k\, f(x)dx$$

$$\Rightarrow \ (-1)^{(k)} \int_0^\infty x^k\, f(x)dx = (-1)^{(k)}\ E(X^k)$$

تمرين:

ليكن X متغير عشــوائي مســتمر موجب، وبفرض أن تحويل ســتيلجس–لابلاس لهذا المتغير له الشكل:

$$\tilde{X}(s) = \frac{a}{s+2}$$

والمطلوب أوجد الثابت a و EX و EX^2.

الحل:

لإيجاد a لدينا:

$$\tilde{X}(0) = E(1) = 1 \Longrightarrow 1 = \frac{a}{0+2} \Longrightarrow a = 2$$

لإيجاد EX لدينا :

$$\tilde{X}(s) = \frac{a}{s+2} \Longrightarrow \quad \tilde{X}'(s) = \frac{-2}{(s+2)^2}$$

$$\Longrightarrow EX = -\tilde{X}'(0) = -\frac{-2}{(0+2)^2} = \frac{1}{2}$$

لإيجاد EX^2 لدينا :

$$\tilde{X}''(0) = (-1)^2 EX^2$$

ولكن :

$$\tilde{X}''(s) = \frac{4(s+2)}{(s+2)^4} \Longrightarrow \quad \tilde{X}''(0) = \frac{1}{2} = EX^2$$

★ توزيع ايرلنغ Erlang Distribution:

بفرض X متغير عشـــوائي مســـتمر، عندئذ نقول عن هذا المتغير إنه يخضـــع لتوزيع ايرلنغ من المرتبة k بوسيط $\frac{k}{\lambda}$ إذا كان مجموع لـــ k متحول كل منها يخضع للتوزيع الأسي بوسيط $\frac{1}{\lambda}$، يعطى تابع كثافته بالشكل:

$$f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} ; x > 0, \lambda > 0, k = 1,2, \dots$$

تحويل لابلاس–ستيلجس لتوزيع ايرلنغ–k:

$$\tilde{X}(s) = E e^{-sX}$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^\infty (x)^{k-1} e^{-(s+\lambda)x} dx$$

لإجراء هذا التكامل نفرض أن:

$$(s+\lambda)x = y$$

وبالتالي يكون:

$$x = \frac{y}{s+\lambda} \Longrightarrow dx = \frac{dy}{s+\lambda}$$

نبدل في العلاقة الأخيرة نجد:

$$\tilde{X}(s) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\int_0^\infty \left(\frac{y}{s+\lambda}\right)^{k-1} e^{-(s+\lambda)\frac{y}{s+\lambda}}\ \frac{dy}{s+\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\left(\frac{1}{s+\lambda}\right)^k \int_0^\infty (y)^{k-1}\ e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\left(\frac{1}{s+\lambda}\right)^k . \Gamma(k) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k$$

$$\boxed{\Longrightarrow \tilde{X}(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k}$$

نوجد الآن التوقع لتوزيع ايرلنغ–k:

$$E(X) = -\tilde{X}'(0)$$

$$\tilde{X}'(s) = k\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{k-1}\frac{-\lambda}{(s+\lambda)^2} \Rightarrow \tilde{X}'(0) = k.\frac{-1}{\lambda}$$

$$= \frac{-k}{\lambda}$$

$$\boxed{\Rightarrow E(X) = \frac{k}{\lambda}}$$

إيجاد التباين لتوزيع ايرلنغ–k:

$$EX^2 = \tilde{X}''(0)$$

$$\tilde{X}''(s) = k!\,(k-1)\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{k-2}\frac{(-\lambda)^2}{(s+\lambda)^4}$$

$$+\,k\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{k-1}\frac{2(s+\lambda)\lambda}{(s+\lambda)^4}$$

$$\Longrightarrow \quad X''(0) = k!\,(k-1)\left(\frac{\lambda}{0+\lambda}\right)^{k-2}\frac{(-\lambda)^2}{(0+\lambda)^4}$$

$$+\,k\left(\frac{\lambda}{0+\lambda}\right)^{k-1}\frac{2(0+\lambda)\lambda}{(0+\lambda)^4}$$

$$=\frac{k^2-k}{\lambda^2}+\frac{2k}{\lambda^2}=\frac{k^2+k}{\lambda^2}$$

$$\Longrightarrow var(X)=\frac{k^2+k}{\lambda^2}-\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2=\frac{k}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\Longrightarrow var(X)=\frac{k}{\lambda^2}}$$