ابحث عن كل نهاية مما يلي :

1	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2x-1}$	**16**	$\lim_{x\to\infty} (lnx-\sqrt{x})$
2	$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$	**17**	$\lim_{x\to3} \lvert 3-x\rvert \left(cos\frac{1}{3-x}\right)^2$
3	$\lim_{x\to0} \frac{2tanx}{e^{5x}-1}$	**18**	$\lim_{x\to1} ln\frac{1-x}{3+x}$
4	$\lim_{x\to0} \frac{2x-tan5x}{sin2x-3x}$	**19**	$\lim_{x\to\infty} \frac{3-2x}{2-3e^x}$
5	$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)$	**20**	$\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$
6	$\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{3-\sqrt{x+10}}$	**21**	$\lim_{x\to0} \frac{x^2}{2+cos\frac{1}{x}}$
7	$\lim_{x\to0} \frac{x^3}{sin3x-3sinx}$	**22**	$\lim_{x\to1} \frac{1-x}{1-\sqrt{2x^3-1}}$
8	$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{5-3x^3}-3\sqrt{3+2x^2}\right)$	**23**	$\lim_{x\to0} \frac{ln(cos5x)}{ln(cos2x)}$
9	$\lim_{x\to0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\,.sinx\right)$	**24**	$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+2x+1}{sin^2(3+3x)}$
10	$\lim_{x\to-\infty} ln(x^2-4x)$	**25**	$\lim_{x\to\infty} e^{cosx-x}$
11	$\lim_{x\to0} \frac{3x}{e^x-e^{3x}}$	**26**	$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}+lnx$
12	$\lim_{x\to\infty} \frac{7-2x^5}{5+8x^5}$	**27**	$\lim_{x\to\infty} e^{2x}-e^x+1$
13	$\lim_{x\to\infty} (5x-\sqrt{3x-2})$	**28**	$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4x}}{1-x}$
14	$\lim_{x\to0} \frac{2sin^23x-4x^2}{3xtan6x}$	**29**	$\lim_{x\to\infty} 2xe^{-x}$
15	$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{2x+1}$	**30**	$\lim_{x\to0} \frac{2tan3x+5x}{3sin7x-3x}$

31	$\lim_{x\to\infty} (lnx - x^2 - ln5)$	**46**	$\lim_{x\overrightarrow{<}1} \frac{1}{xlnx}$
32	$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}(1+\sqrt{x})$	**47**	$\lim_{x\to\infty} e^{x-cosx}$
33	$\lim_{x\to 0} \frac{ln(2x+1)}{5sin3x}$	**48**	$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^7-3x^4+2x-1}{-2x^3+5x-4}$
34	$\lim_{x\to-2} \frac{x^2-x-2}{\lvert x-3\rvert(2x-1)}$	**49**	$\lim_{x\to\infty} (e^x - 3x)$
35	$\lim_{x\to 3} (x-1)\frac{tan(x-3)}{(x-3)^2}$	**50**	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2.cose^x}{x^4+1}$
36	$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+2}+2x-1\right)$	**51**	$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{16x^7-4x^5}{2x^7+1}}$
37	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$	**52**	$\lim_{x\to-\infty} (2x-1+e^{1-x})$
38	$\lim_{x\to\infty} (3e^x - 2x)$	**53**	$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1-x}+2x\right)$
39	$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{5x^2+2}}{4x-1}\right)$	**54**	$\lim_{x\to 0} \left(\frac{sinx}{cosx-1}\right)$
40	$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx-x}{x}$	**55**	$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+ln(x-2)^2}{x-2}$
41	$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x-1}{-7x^2+4x-3}$	**56**	$\lim_{x\to\infty} [x+ln(x+1)-lnx]$
42	$\lim_{x\to 3} (x-3)^2 . sin\frac{1}{x-3}$	**57**	$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-3}$
43	$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{xe^x}$	**58**	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cos2x}$
44	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\left(sin\frac{3x}{2}\right)^2}$	**59**	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{sinx}$
45	$\lim_{x\to\infty} \left(x^2-\sqrt{x^4+3}\right)$	**60**	$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\, sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

حل ورقة عمل النهايات

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4+2x-1} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4} = \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4} \times \dfrac{\sqrt{2x+10}+4}{\sqrt{2x+10}+4}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}{2x+10-16}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}{2(x-3)} = \dfrac{8}{2} = 4$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan x}{e^{5x}-1} = \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\,\frac{\tan x}{x}}{5x\,\frac{e^{5x}-1}{5x}} = \dfrac{2}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\tan 5x}{\sin 2x - 3x} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(2-\frac{\tan 5x}{x}\right)}{x\left(\frac{\sin 2x}{x}-3\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-5\,\frac{\tan 5x}{5x}}{2\,\frac{\sin 2x}{2x}-3} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right) = \infty-\infty$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right) \times \dfrac{\sqrt{4x^2-1}-2x}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$

6) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{3-\sqrt{x+10}} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{3-\sqrt{x+10}} \times \dfrac{3+\sqrt{x+10}}{3+\sqrt{x+10}}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(3+\sqrt{x+10})}{9-(x+10)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(3+\sqrt{x+10})}{-x-1}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(3+\sqrt{x+10})}{-(x+1)} = \dfrac{6}{-1} = -6$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin 3x - 3\sin x} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{3\sin x - 4\sin^3 x - 3\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{-4\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{4}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^3$

$= -\dfrac{1}{4}$

حل ورقة عمل النهايات

8) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-3x^3}-3\sqrt{3+2x^2}\right)$

$= \infty - \infty$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-3x^3}-3\sqrt{3+2x^2}\right) =$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\frac{5}{x^2}-3x\right)}-3\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x^2}+2\right)}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{5}{x^2}-3x}+3x\sqrt{\frac{3}{x^2}+2}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\frac{5}{x^2}-3x}+3\sqrt{\frac{3}{x^2}+2}\right)\right]$

$= -\infty\left(-\infty+3\sqrt{2}\right) = +\infty$

9) $\lim_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\cdot\sin x\right) = 0(\infty)$

$\lim_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\cdot\sin x\right) = \lim_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}(1-x^2)}\cdot\sin x\right)$

$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|}\sqrt{1-x^2}\cdot\sin x\right)$ عند اليمين

$\lim_{x\to0^-}\left(-\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = -1$

$\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

$\lim_{x\to0^-} f(x) \neq \lim_{x\to0^+} f(x)$ وبما أن

إذاً ليس للتابع نهاية عند (0)

10) $\lim_{x\to-\infty}\ln(x^2-4x) = \ln(+\infty) = +\infty$

11) $\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^x-e^{3x}} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{3x}(e^{-2x}-1)} = \lim_{x\to0}\frac{3x}{-2xe^{3x}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)}$

$= -\frac{3}{2}$

12) $\lim_{x\to+\infty}\frac{7-2x^5}{5+8x^5} = \frac{-2}{+8} = -\frac{1}{4}$

13) $\lim_{x\to+\infty}\left(5x-\sqrt{3x-2}\right) = \infty-\infty$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(5x-\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(5x-x\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(5-\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)\right] = +\infty$

14) $\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 3x-4x^2}{3x\tan 6x} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to0}\frac{x^2\left[\frac{2\sin^2 3x}{x^2}-4\right]}{x^2\left(18\,\frac{\tan 6x}{6x}\right)} =$

$= \lim_{x\to0}\frac{2\left(3\,\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2-4}{18\,\frac{\tan 6x}{6x}} = \frac{18-4}{18} = \frac{7}{9}$

حل ورقة عمل النهايات

15) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{2x+1} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(4+\frac{3}{x^2})}}{x(2+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})}$

$= \dfrac{-2}{2} = -1$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - \sqrt{x}) = +\infty - \infty$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (2\ln\sqrt{x} - \sqrt{x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x}\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1\right)\right]$

$= +\infty(0-1) = -\infty$

17) $\lim\limits_{x\to3} |3-x|\left(\cos\dfrac{1}{3-x}\right)^2$

$x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ نلاحظ أن $0 \le \left(\cos\dfrac{1}{3-x}\right)^2 \le 1$

$0 \le |3-x|\cos^2\dfrac{1}{3-x} \le |3-x|$

$\lim\limits_{x\to3} |3-x| = 0$

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = 0$ ومنه بالإحاطة

18) $\lim\limits_{x\to1^-} \ln\dfrac{1-x}{3+x} = \ln 0^+ = -\infty$

$D =]-3, 1[$

19) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-2x}{2-3e^x} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(\frac{3}{x}-2)}{e^x(\frac{2}{e^x}-3)} = 0$

20) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{-1}{3}$

21) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}}$

$x \in \mathbb{R}^*$ نلاحظ أن $-1 \le \cos\dfrac{1}{x} \le 1$

$1 \le 2+\cos\dfrac{1}{x} \le 3$

$1 \ge \dfrac{1}{2+\cos\frac{1}{x}} \ge \dfrac{1}{3}$

$x^2 \ge \dfrac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}} \ge \dfrac{x^2}{3}$

$\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ ، $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{3} = 0$

ومنه بالإحاطة فإن:

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}} = 0$

حل ورقة عمل النهايات

22) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{2x^3-1}} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{2x^3-1}} \times \dfrac{1+\sqrt{2x^3-1}}{1+\sqrt{2x^3-1}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)(1+\sqrt{2x^3-1})}{1-2x^3+1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)(1+\sqrt{2x^3-1})}{2(1-x)(x^2+x+1)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 2x)} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 5x - 1 + 1)}{\ln(\cos 2x - 1 + 1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\ln(\cos 5x-1+1)}{\cos 5x - 1}}{\dfrac{\ln(\cos 2x-1+1)}{\cos 2x - 1}} \times \dfrac{\cos 5x - 1}{\cos 2x - 1}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\ln(\cos 5x-1+1)}{\cos 5x - 1}}{\dfrac{\ln(\cos 2x-1+1)}{\cos 2x - 1}} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(1-\cos 5x)}{-(1-\cos 2x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{5}{2}x}{2\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\frac{5}{2}x \cdot \frac{\sin \frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}}{x \cdot \frac{\sin x}{x}} \right)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$

24) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{\sin^2(3+3x)} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2}{\sin^2[3(1+x)]} = \lim\limits_{x\to -1} \left[\dfrac{3(x+1)}{3\sin 3(x+1)}\right]^2$

$= \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

25) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\cos x - x}$

$x \in \mathbb{R}$ ومن أجل $-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1-x \leq \cos x - x \leq 1-x$

$e^{-1-x} \leq e^{\cos x - x} \leq e^{1-x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-1-x} = 0$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{1-x} = 0$

وحسب مبرهنة الإحاطة نجد:

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\cos x - x} = 0$

26) $\lim\limits_{x\geq 0} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) = \infty - \infty$

$= \lim\limits_{x\geq 0} \left[\dfrac{1}{x}(1 + \underbrace{x \cdot \ln x}_{0})\right] = +\infty$

حل ورقة عمل النهايات

27) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^{x} + 1 = \infty - \infty$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = +\infty$

28) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x} - \sqrt{4x}}{1-x} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x} - \sqrt{4x}}{1-x} \times \dfrac{\sqrt{5-x} + \sqrt{4x}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4x}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5 - x - 4x}{(1-x)(\sqrt{5-x} + \sqrt{4x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5(1-x)}{(1-x)(\sqrt{5-x} + \sqrt{4x})} = \dfrac{5}{4}$

29) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x e^{-x} = 0(+\infty)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^{x}} = 2(0) = 0$

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan 3x + 5x}{3\sin 7x - 3x} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(2\times 3\dfrac{\tan 3x}{3x} + 5\right)}{x\left(3\times 7\dfrac{\sin 7x}{7x} - 3\right)} = \dfrac{11}{18}$

31) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x^{2} - \ln 5) = \infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\dfrac{\ln x}{x} - x - \dfrac{\ln 5}{x}\right)\right]$

$= +\infty(0 - \infty - 0) = -\infty$

32) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^{2}+1}(1+\sqrt{x})\right) = 0(+\infty)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(1+\sqrt{x})}{x(x+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}})}$

$= \dfrac{1}{+\infty} = 0$

33) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{5\sin 3x} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\ln(2x+1)}{2x}(2x)}{5\frac{\sin 3x}{3x}(3x)} = \dfrac{2}{15}$

34) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^{2} - x - 2}{|x-3|(2x-1)} = \dfrac{4}{5(-5)} = \dfrac{-4}{25}$

35) $\lim\limits_{x\to 3} (x-1)\dfrac{\tan(x-3)}{(x-3)^{2}}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-1)\tan(x-3)}{(x-3)(x-3)} = \dfrac{2}{0}$

$\lim\limits_{x\leq 3} f(x) = \dfrac{2}{-0} = -\infty$

$\lim\limits_{x\geq 3} f(x) = \dfrac{2}{+0} = +\infty$

$\Big\} \lim\limits_{x\leq 3} f(x) \neq \lim\limits_{x\geq 3} f(x)$

إذاً ليس للتابع نهاية عند (3)

حل ورقة عمل النهايات

36) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}+2x-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2x-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2-\frac{1}{x}\right)\right]$

$=-\infty(-1+2-0)=-\infty$

37) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$

38) $\lim\limits_{x\to+\infty}3e^x-2x=\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(3-2\frac{x}{ex}\right)=+\infty$

39) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2+2}}{4x-1}=\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(5+\frac{2}{x^2}\right)}}{4x-1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{5+\frac{2}{x^2}}}{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{5}}{4}$

40) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-x}{x}=\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{x}\right)=-1$

41) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x-1}{-7x^2+4x-3}=\frac{-4}{7}$

42) $\lim\limits_{x\to3}(x-3)^2\sin\frac{1}{x-3}$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\quad -1\le\sin\frac{1}{x-3}\le1$

$-(x-3)^2\le(x-3)^2\cdot\sin\frac{1}{x-3}\le(x-3)^2$

$\lim\limits_{x\to3}\left[-(x-3)^2\right]=0,\ \lim\limits_{x\to3}(x-3)^2=0$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=0$ وحسب مرقنة لوبيتال

43) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^x}{xe^x}=\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-(e^x-1)}{e^x\,x}=\frac{-1}{1}=-1$

44) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2\frac{3x}{2}}=\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin\frac{3x}{2}}\right)^2=$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}x}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

حل ورقة عمل النهايات

45) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-\sqrt{x^4+3}) = \infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-\sqrt{x^4+3})(x^2+\sqrt{x^4+3})}{x^2+\sqrt{x^4+3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^4-3}{x^2+\sqrt{x^4+3}}=\frac{-3}{+\infty}=0$$

46) $\lim\limits_{x\to1^{\leq}}\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{0}=-\infty$

47) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-\cos x}$

$x\in R$ ولكن $-1\leq-\cos x\leq1$

$$x-1\leq x-\cos x\leq1+x$$
$$e^{x-1}\leq e^{x-\cos x}\leq e^{1+x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-\cos x}=+\infty$ وهي برهنة إضافية

48) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^7-3x^4+2x-1}{-2x^3+5x-4}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^7}{-2x^3}=-\frac{5}{2}x^4=-\infty$$

49) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-3x)=+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}e^x\left(1-3\frac{x}{e^x}\right)=+\infty$$

50) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos e^x}{x^4+1}$

$x\in R$; $-1\leq\cos e^x\leq1$

$$-x^2\leq x^2\cos e^x\leq x^2$$
$$\frac{-x^2}{x^4+1}\leq\frac{x^2\cos e^x}{x^4+1}\leq\frac{x^2}{x^4+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^4+1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos e^x}{x^4+1}=0$ وهي برهنة إضافية

51) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{16x^7-4x^5}{2x^7+1}}=\sqrt[3]{8}=2$

52) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1+e^{1-x})=-\infty+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}(2xe^x-e^x+e)=+\infty\ (0+e)$$
$$=+\infty$$

53) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-x}+2x)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}+2x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}+2x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}+2\right]=-\infty\right.$$

حل ورقة عمل النهايات

54) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x - 1} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}\cdot \cos \frac{x}{2}}{-2\sin \frac{x}{2}\sin \frac{x}{2}} = \frac{-1}{0}$

غير حالة ~:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\cos x - 1} = \frac{-1}{-0} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x - 1} = \frac{-1}{+0} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \neq \lim_{x\to 0^-}$ بما أن

إذاً ليس للتابع نهاية عند (0)

55) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x + \ln(x-2)^2}{x-2} = \frac{-\infty + \infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-2} - \frac{2\ln(2-x)}{2-x}$

$= 1 - 0 = 1$

56) $\lim_{x\to +\infty} [x + \ln(x-1) - \ln x]$

$= \lim_{x\to +\infty} \left[x + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] = +\infty$

$+\infty + \ln(1) = +\infty$

57) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-3} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}}{2x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x(2-\frac{3}{x})} = \frac{1}{2}$

58) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\sin^2 x} \times \frac{e^x}{e^x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x \sin^2 x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2e^x} \times \left(\frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

59) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sin x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{x+1}}{\sin x}$

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{x+1}}{\sin x} = -1$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x+1}}{\sin x} = +1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

إذاً ليس للتابع نهاية عند (0)

أ. عبد الله عطار
0934800055

مع التمنيات بالتوفيق