مكثفات الاحتمالات :

أولاً قوانين :

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

* فضاء العينة : هو مجموعة نتائج التجربة

ملحوظة : في مسائل رمي قطعة نقود أو قطعتين أو وضع أو جر أو غير ذلك فضاء العينة

* الحدث : مجموعة جزئية من فضاء العينة

أنواعه : الحدث المستحيل : $\emptyset$

الحدث البسيط : يتألف من عنصر واحد من فضاء العينة

الحدث المركب : هو مجموعة الأحداث البسيطة

* اتحاد (اجتماع) حدثين :

هو حدث يقع إذا وقع أحد الحدثين A أو B

أو كلاهما ونرمز له بـ $A \cup B$ (ألة أو)

* تقاطع حدثين :

هو حدث يقع إذا وقع الحدثان A و B معاً ونرمز له بـ $A \cap B$ (ألة و)

* متمم الحدث : $P(A) + P(A') = 1$

$P(A') = 1 - P(A)$

* قانون دمورغان :

$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

الصفة الاحتمالية : جميع المسائل يكون فضاء معلوم الا اذا

* الاحتمال الشرطي :

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

الخطوات : (1) نفرض الاحداث - نعين الحدث المطلوب - نكتب ألة

(2) نكتب حالات ألة وتقاطعاتها حالات حدث الذي وقع ونكتب في المقام

(3) تقاطعات حالات المقام لواو والحالات وضعت في البسط

(4) يكتب الاحتمالات المناسبة وتبسط

* قانون الاحتمال المركب :

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

حالات عرضة لاحتمال والشروط :

(1) على أنه / إذا كان

(2) تم اختيار / صنع

* ما احتمال أن يكون المضغ المختار لا يتبع قطعة

$P(M|A)$

معينة

* مناسبة لإناث يحب 90% منهم الجزائر

$P(R|B) = \frac{90}{100}$

* إن $\frac{50}{100}$ من الذكور لا يحبون كرة السلة

$P(D|B) = \frac{60}{100}$

مسائل الاحتمالات :

إذا كانت الفرضة ... لاحتمال الأحداث تكتم الخطأ الشجري أما إذا كانت المسائل حسب دفعة أو مع إعادة أو صناديق لا نستخدم الخطأ

آلية الحل :

1- في مسائل السحب دفعة أو مع إعادة نستخدم لغة الخطوط ثم نضرب بالتبديل ثم طبيعياً السحب

2- في مسائل السحب معاً نستخدم لغة الخطوط ثم التوافقية

يجب قبل البدء أنه توجد $n(\Omega)$ عدد الاحتمالات وهذا من القانون التوافقي وسنأتي للغوته

والصفة الاحتمالية : جميع المسائل يكون فضاء معلوم الا اذا

(ع ع ب ب ب ب ب) دستور

بتاع ل

B1

2! 3! 1!

4!

(ب ب ب ص ص)

2! . 2! . 1!

مثال متتابعة:

* رمي حجر نرد: اوجد مجرى تجربة رمي قطعة نقود

رمي قطعتي نقود او رمي ثلاث قطع نقود

(رمي حجر النرد مرة واحدة)

1) رمي حجر نرد: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$n(\Omega) = 6$

2) رمي حجري نرد:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(\Omega) = 36$

3) رمي قطعة نقود (غير مغشوشة):

$\Omega = \{H, T\}$ $n(\Omega) = 2$

4) رمي قطعتي نقود (غير مغشوشة):

$\Omega = \{(T,T)(H,H)(H,T)(T,H)\}$

$n(\Omega) = 4$

5) رمي ثلاث قطع نقود (غير مغشوشة)

$\Omega = \{(H,H,H),(T,T,T),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$n(\Omega) = 8$

* قانون: لحساب فضاء عينة تجربة رمي قطعة نقود n مرة أو عدد القطع 2^n

مثال: لتكن تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين:

A: الحدث الدال على ظهور صورة في المرة الأولى.

B: الحدث الدال على الحصول على نتيجة مماثلة في المرتين

A و B أوجد فضاء الاحتمال لهذه التجربة ثم استنتج من A و B

$A = \{(H,H),(T,H)(H,T)(T,T)\}$

$A = \{(H,T)(H,H)\}$

$B = \{(H,H)(T,T)\}$

AUB, A∩B, A', B' جد

A'∩B'

$A \cup B = \{HH, HT, TT\}$

$A \cap B = \{H,H\}$

$A' = \{TH, TT\}$ $B' = \{HT, TH\}$

$A' \cap B' = \{TH\}$

مثال 2 :

نرمي قطعة نقود 3 مرات أو نرمي 3 قطع نقدية لمرة واحدة

احتمال الحصول على الوجه T هو $P(T)=\frac{1}{3}$

واحتمال الحصول على الوجه H هو $P(H)=\frac{2}{3}$

① ما احتمال الحصول على كتابة فقط.

② ما احتمال الحصول على شعار على الأكثر.

③ ما احتمال الحصول على كتابة الأول.

$$\Omega=\{(T,T,T)(H,H,H)(T,H,H)(H,T,H)(H,H,T)(T,T,H)(H,T,T)(T,H,T)\}$$

① $P(A)=P(T,T,H)+P(H,T,T)+P(T,H,T)$

$P(A)=\left(\frac{n(A)}{n(\Omega)}\right)$

$P(A)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$

$P(A)=\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{6}{27}$

② $P(A)=P(T,T,H)+P(H,T,T)+P(T,H,T)$

مثال 3

نرمي حجر نرد منتظم ونعتبر الحادثتين التاليتين :

1 ـ الحصول على عدد زوجي (2 أو 4 أو 6)

2 ـ الحصول على عدد فردي أكبر من 3

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

① نفرض A : حادثة الحصول على عدد زوجي

B : حادثة الحصول على عدد أكبر من 3

$A\cap B=\{2\}$

$P(X_1)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(X_1)=P(A\cup B)=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

② نفرض A : حادثة الحصول على عدد زوجي

B : حادثة الحصول على عدد فردي أكبر من 3

$A\cap B=\{5\}$

$P(X_2)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(X_2)=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

الاستقلال الاحتمالي :

A,B مستقلتين احتماليا إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر بوقوع الآخر البرهان في المسائل أن الحادثتين مستقلتين

نبرهن

$P(A\cap B)=P(B).P(A)$

عندها نكون الحادثتين مستقلتين احتماليا

الحادثتان المتنافيتان :

A : {2}

B : {3,5}

$A\cap B=\emptyset$

نبين لرمز الاحتمال الشرطي

مثال 4:

في تجربة القاء زهرة مرة واحدة، ليكن A الحدث
الواقعة الحصول على وجه عدده أولي
وليكن B الحدث الواقعة الحصول على وجه عدده
نقابله مربع العدد الحقيقي، برهن أن الحادثتين A
و B مستقلان احتمالياً.

الحل:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2,4,6\}$ $\quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \{1,4\}$ $\quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{4\}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

نفرض أن $P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \times P(B)$

$\frac{1}{6} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

إذاً الحادثتين A و B مستقلين احتمالياً

مثال 5:

صندوق يحوي ق ع، ق ب، ق س متعب 3 كرات
على التتابع مع الإرجاع

* $n(\Omega) = 6 \times 6 \times 6 = 216$

- احتمال الكرات من لونة واحد

نفرض الحدث X_1:

$3 \times (ع ع ع)$
$3 \times (ب ب ب)$
$3 \times (س س س)$

$P(X_1) = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 1}{216}$

$P(X_1) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$

2- احتمال الكرات ليست من لونة واحد

نفرض الحدث X_2 الكرات ليست من اللونة

$3 \times (ع, ب, س)$
$3 \times (ع, ب, س)$
$3 \times (س, س, ع)$

$P(X_2) = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 \times 4 + 3 \times 1 \times 1 \times 5}{216}$

$P(X_2) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$

3- احتمال الحصول على كرة على الأكثر بيضاء

نفرض الحدث X_3 كرة على الأكثر بيضاء

$3 \times (ل ل ك)$
$* (ك ك ك)$

$P(X_2) = \frac{2 \times 4 \times 4 \times 3 + 4 \times 4 \times 4 \times 1}{216}$

$P(X_2) = \frac{96 + 64}{216} = \frac{160}{216} = \frac{20}{27}$

4- الكرات ليست من لونة واحد

$3(ك, ب, ع)$

$P(X_4) = 1 - P(X_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(لونة واحد)

5- الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة حمراء

$1 \times (ع ث ع)$

$P(X_5) = \frac{3 \times 2 \times 3}{216} = \frac{18}{216}$

6- والكرة الثانية سوداء (كرة بيضاء، كرة سوداء)

$1 \times (ك ك ك)$
$1 \times (ب ب ب)$
$1 \times (س س س)$

$P(X_6) = \frac{6 \times 1 \times 6}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$

A ← $(1,1)$ ، $(0,0)$ ~~(2,0)~~ ← $P(A)$ لنحسب

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{1}\binom{1}{1}}{45} = \frac{14}{45}$$

$A \cap B$ ← $(1,1)$ ~~ou~~ ← $P(A \cap B)$ لنحسب

~~ααα(2,0)~~

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2}}{45} = \frac{1}{45}$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{14}{45}} = \frac{1}{14}$$

3) إذا كانة مجموع الأرقام الكرتين زوجي ما احتمال الكرتين من

نفرض الحدث A: مجموع زوجي

الكرتين من B:

A ← (زز)

(نفس)

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{45} = \frac{20}{45}$$

$A \cap B$ ← (زز) من

(ف ف) من

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{3}{2} + 0}{45} = \frac{1}{45}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{20}{45}}$$

$$P(B/A) = \frac{1}{20}$$

4) الكرتين مجموعها 2 أو بفي

نفرض الحدث A: مجموع الكرتين = 2

الحدث B: الكرتين بفي B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{(4)(1) + (2)(3)}{45}$$

A ← $(2,0)$ ، $(1,1)$

$$P(A) = \frac{14}{45}$$

من الأقل سوداي

3 × (س س س) ←

3 × (ب ب س) ←

1 × (ب ب ب) ←

$$P(X_7) = 1 \times 5 \times 5 \times 3 + 1 \times 1 \times 5 \times 3 + 1 \times 1 \times 1$$

$$P(X_7) = \frac{91}{216}$$

$$P(X_7) = 1 - P(X'_7) = 1 - \frac{5 \times 5 \times 5}{216}$$

لا يوجد كرة سوداء

8) وكرة الثانية بيضا فقط ← (بكرات ا ك) فقط

ملاحظة: الحالة ولحب معالجوز اثنة نفسة لطلبة

8 – 6 – 5

مثال 6:

صندوق يحوي 3 كرات تحمل الأرقام 1, 0, 0

و 4 كرات تحمل الأرقام 1, 1, 0, 0 و 3 كرات تحمل الأرقام 2, 1, 1

نسحب كرتين معاً ما احتمال: $n(\Omega) = \binom{10}{2} = 45$

1) الكرتين من نفس اللون ← (ززا)

(ببب)

(سسس)

$$P(X_1) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3}}{45} = \frac{3 + 6 + 3}{45} = \frac{12}{45}$$

2) إذا كان مجموع أرقام الكرتين 2 ما احتمال الكرتين

بفي. نفرض الحدث A: المجموع = 2

نفرض الحدث B: الكرتين بفي

$P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{45} = \frac{6}{45}$ (ذ ذ) ∈ B

(ع ذ) ∈ A∩B
(ذ ذ) ∈

$P(A \cap B) = \frac{1}{45}$

$P(A \cup B) = \frac{14}{45} + \frac{6}{45} - \frac{1}{45} = \frac{19}{45}$

حالات خاصة: { مسائل الصيانة لبنات
مسائل الإشارة لـ ±1

نستخدم الرسم الشجري وهو خريطة لتباديل

مسألة (1)
عائلة لديها 4 أطفال ذكور:
① الأطفال وهي بنات

نفرض X_1 : 2 صبي، 2 بنت (ص ص ب ب)

$6 = \frac{4!}{2!.2!}$ (ص ص ب ب)

$P(X_1) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \times 6 = \frac{16}{16}$

② الأطفال لهم جنس واحد ← (ص ص ص ص) أو (ب ب ب ب)

$P(X_2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$

③ الموجود الثالث ذكر (ص ص ص, ص ص ب, ص ب ص, ب ص ص)

$P(X_3) = 1\left(\frac{1}{2}\right)(1)(1) = \frac{1}{2}$

④ 3 صبي، 2 بنت بالتناوب

(ص ب ص ب ص)
(ب ص ب ص ب)

$4! = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \times 3$

$\frac{4!}{3!}$ (ص ص ص ب) ← 3 صبي، 1 بنت ⑤

$P(X_5) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(4) = \frac{4}{16}$

عائلة لديها 4 أطفال

باقي الحدثين +1, -1 اصبح الاحتمال أن يكون المجموع سالباً أو أصغر

X_1 : المجموع سالباً أو صفر.

$6 = \frac{4!}{2!.2!}$ {-1, -1, 1, 1} ←

$P(X_1) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \times 6 = \frac{6}{16}$

X_2 : منع ظهور الصورة في ثلاث رميات

$P(X_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \times 2$ (-1, 1, -1, 1)
(1, -1, 1, -1)

$P(X_2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

مسألة 8:

نرمي ثلاث قطع نقود غير متزنة C_1, C_2, C_3 والصفة H متزنة أما C_2 و C_3 فهما متماثلتان ولكنهما غير متزنتان كل من احتمال ظهور H أو احتمال ظهور T في حالة الصفة C_1 يساوي $\frac{1}{2}$ أما في حالة C_2 و C_3 كما يلي احتمال ظهور H هو $\frac{3}{5}$ واحتمال ظهور T يساوي $\frac{2}{5}$

احتمال الحصول على H مرة واحدة فقط

$\Omega = \{(TTT)(HHH)(THH)(HTH)(HHT)(HTT)(THT)(TTH)\}$

$P(HTT) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$

$+$

$P(THT) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{25}$

$+$

$P(TTH) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$

مثال 4

و: صندوق يحوي كرات مرقمة بالأرقام 3, 2, 2, 1, 1, 1 نسحب منه الصندوق ثلاث كرات

على التتالي دون إعادة $n(\Omega) = 6 \times 5 \times 4 = 120$

1) احسب احتمال الحصول على مجموع أرقام يساوي 6

نفرض الحدث X_1 ⟵ $3 \times (3, 2, 1)$

$$P(X_1) = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 1}{120}$$

2) احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان الرقم ذاته

نفرض الحدث X_2 ⟵ $3 \times (1, 1, 1)$

أو $3 \times (2, 2, 2)$

$$P(X_2) = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 1 + 3 \times 4 \times 3 \times 3}{120}$$

3) احسب احتمال أن تكون الكرات المسحوبة تحمل الرقم ذاته

نفرض الحدث X_3 ⟵ $3 \times (3, 2, 1)$

$$P(X_3) = \frac{3 \times (3 \times 2 \times 1)}{120}$$

4) احسب احتمال أن تكون الكرة الأولى تحمل الرقم 1 إذا

العلم أن الثالثة تحمل

الرقم 1 ⟵ $(1, 1, 1)$

$$P(X_4) = \frac{3 \times 3 \times 2}{120}$$

تحليل النواقص عند سائق العربة

تجربة إلقاء حجري نرد

A: حدث مجموع نقاط الوجهين الظاهرين أكبر تماما من 7

B: حدث واحد فقط من الوجهين الظاهرين يحمل 5

احسب $P(A|B)$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(4,5) (4,4) (3,6), (3,5) ⟵ A ⟵ $P(X_3) = \frac{3 \times (3 \times 2 \times 1)}{120}$

(5,6), (5,5), (5,4), (5,3), (4,6)

(6,6), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{36}$$

B ⟵

(6,5) (4,5) (3,5), (2,5) (1,5) $P(X_4) = \frac{3 \times 3 \times 2}{120}$

(5,6) (5,4) (5,3) (5,2) (5,1)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36}$$

$A \cap B$ ⟵

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{10}{36}}$$

مثال 11 :

صندوق يحتوي 6 بطاقات متماثلة بالحجم
4, 4, 5, 5, 6, 6 — في صندوق و بطاقات
4) التالي مع إعادة
و لتكن

A : حدث سحب بطاقتين مجموع أرقامها 15
B : حدث سحب بطاقتين أرقامها متماثلة

والمطلوب إيجاد

$P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B),$
$P(A \cap B'), P(A' \cap B')$

مثال 12 :

من صف دراسي فيه 8 بنات و 12 بنين و أحمر اللون و أخضر اللون و لكن

A حدث ظهور العدد 6 و لون أحمر
B : الحدث مجموع العددين الظاهرين مربعاً

حل الحالة ستة حالات

مثال 13 :

لاعب تنس يلعب على حساب مرتين احتمال فوزه
في المرة الأولى $\frac{10}{15}$ وفي المرة الثانية $\frac{8}{10}$ واحتمال
فوزه في اللعبتين $\frac{45}{100}$ ، ما احتمال فوزه في
المرتين

مثال 14 :

صف دراسي فيه 8 طالبات و 12 طالباً فوزية تكون
لجنة مكونة من ثلاثة أشخاص من هذا الصف.
بطريقة عشوائية أوجد احتمال

P - أن تكون اللجنة من الطالبات فقط

ب - أن تكون في اللجنة طالبتان فقط

ج - أن تكون في اللجنة طالبة واحدة على الأكثر

د - أن تكون في اللجنة طالب واحد على الأكثر

P - تكون اللجنة من الطالبات فقط

نفرض حدث X_1 : (ب ب ب)

$$P(X_1) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}}$$

ب - أن تكون في اللجنة طالبتان فقط

نفرض حدث X_2 : (ب ب ع)

$$P(X_2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{1}}{\binom{20}{3}}$$

ج - أن تكون طالبة واحدة على الأكثر

نفرض حدث X_3 : (ب ع ع) أو (ب ب ع) أو (ب ب ب)

$$P(X_3) = \frac{\binom{8}{1}\binom{12}{2} + \binom{8}{1}\binom{8}{2} + \binom{8}{3}}{\binom{20}{3}}$$

د - أن تكون في اللجنة طالب واحد على الأكثر

نفرض الحدث X_4 : (ب ع ع) أو (ب ب ع)

$$P(X_4) = \frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{20}{3}}$$