الفصل الأول :

الرياضيات الأساسية

التخمين الرياضي : إصدار ادعاء عام (بهدف تعليمي) يرتكز على معطيات ومعلومات معروفة.

التبرير الاستقرائي : العملية التي يتم من خلالها اختبار عدة مواقف محددة للوصول إلى التخمين.

المثال المضاد : هو نفي الادعاء أو التخمين لإثبات خطأ العبارة.

العبارة : كل جملة خبرية يمكن الحكم عليها بأنها صحيحة فقط أو خاطئة فقط وهي نوعان :

- عبارة وصل : وهي العبارة التي تحتوي على أداة وصل " و " وتُكتب $p \wedge q$ وتقرأ p و q.
- عبارة فصل : وهي التي تحتوي على أداة فصل " أو " وتكتب $p \vee q$ و تقرأ p أو q.

جدول الصواب : طريقة مناسبة لتنظيم قيم الصواب للعبارات المنطقة.

ملاحظات هامة :

– يرمز في جدول الصواب ، للعبارة الصائبة (الصحيحة) بالرمز (T) وللعبارة الخاطئة بالرمز (F)

– يرمز في جدول الصواب للنفي بالرمز $\sim p$ أو $\sim q$ أو أي عبارة تشمل رمز نفي (~)

– عبارة الوصل تكون صحيحة إذا كانت مركبتيها صحيحتان أما عبارة الفصل فتكون خاطئة فقط عندما تكون مركبتاها خاطئتين.

س1/ كون جدول الصواب للعبارة $p \wedge q$ ؟

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

1) نفصل كل عبارة على حدة

2) نضع في الجدول الأول (على اليسار) احتمالين (T T) (F F)

3) في الجدول الآخر T F T F

4) إذا كانت الأول صحيحة والثانية صحيح فالكل صحيح ، أما إذا كانت الأولى والثانية خاطئة فالكل خاطئ وكذلك إذا كانت الأولى صحيحة والثانية خاطئة فالكل خاطئ .

س2/ كون جدول الصواب للعبارة المركبة $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

– تحديد الفرض والنتيجة (العبارة الشرطية " إذا كان ... فإن ...") :

– الفرض : الجملة التي تتبع كلمة " إذا   – النتيجة : الجملة التي تتبع كلمة " فإن "

مثل : الزاوية التي قياسها أقل من 90 درجة هي زاوية حادة ..

الفرض : زاوية قياسها أقل من 90   النتيجة : زاوية حادة .

العبارة	مكونة من	بالرموز	مثال توضيحي
الشرطية	فرض مُعطى ونتيجة	$p \rightarrow q$	إذا كانت الزاوية حادة فإن قياسها أقل من 90 درجة.
العكس	تبديل الفرض والنتيجة	$q \rightarrow p$	إذا كان قياس الزاوية أقل من 90 درجة فإنها تكون حادة
المعكوس	نفي كلا من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية	$\sim P \ \rightarrow \sim q$	إذا كانت الزاوية ليست حادة فإن قياسها ليس أقل من 90 درجة
المعاكس الإيجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية	$\sim q \ \rightarrow \sim p$	إذا كان قياس الزاوية ليس أقل من 90 فإنها ليست زاوية حادة .

العبارة الشرطية الثنائية :

– العبارة الشرطية الثنائية : هي ربط عبارة شرطية وعكسها بأداة الربط " و " نعبر عنها رياضياً كما يلي :

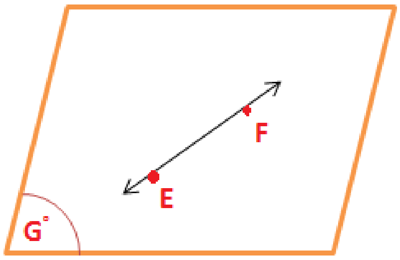
$p \rightarrow q \ \wedge \ p \rightarrow q$ أو $p \leftrightarrow q$ وتقرأ (p إذا وفقط إذا q)

المسلمات والبراهين الحرة :

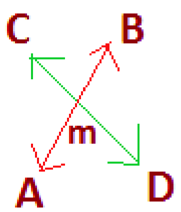
– المسلمة : عبارة صحيحة لا تقبل النقاش ولا البرهان (أي يسلم بصحتها دوماً) .

– النظرية : عبارة قابلة للنقاش ، وهي مستنتجة من المسلمات والتعاريف الرياضية .

مسلمات هامة :

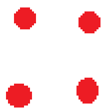


1) كل نقطتين مختلفين يمر بهما مستقيم واحد.
2) كل 3 نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد يمر بها مستوى واحد.
3) كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.
4) كل مستوى يحوي 3 نقاط مختلفة على الأقل وليست على استقامة واحدة.
5) إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بهاتين النقطتين يقع كلياً في ذلك المستوى.
$(E \in G , F \in G , \therefore \overleftrightarrow{EF} \subset G)$



6) إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة. $(\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{m\})$
7) إذا تقاطع مستويان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

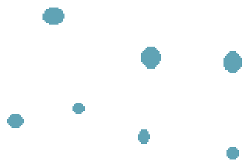
س3/ عدد القطع المستقيمة التي يمكن رسمها لنصل بين كل زوج من النقاط التالية هو :



أ) 4　　ب) 6　　ج) 21　　د) 24

الحل : (6) باستعمال القانون : $\frac{n(n-1)}{2}$ حيث n ; يمثل عدد النقاط.

س4/ عدد القطع المستقيمة التي يمكن رسمها لنصل بين كل زوج من النقاط التالية هو :



أ) 9　　ب) 15　　ج) 21　　د) 28

الحل : (21) باستعمال القانون $\frac{n(n-1)}{2}$ حيث n ; يمثل عدد النقاط.

س4/ المفهوم الذي يختلف عن باقي المفاهيم الأخرى :

أ) النتيجة　　ب) التخمين　　ج) النظرية　　د) المسلمة

الحل : التخمين ، لأن كلا النتيجة والنظرية والمسلمة.

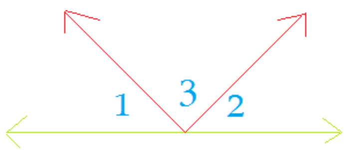
س5/ ما هو أكبر عدد من المستويات التي يتم تحديدها من خمس نقاط لا تقع على استقامة واحدة ؟

أ) 12　　ب) 15　　ج) 6　　د) 10

الحل : 10 بالتعويض بالقانون $\frac{n(n-1)}{2}$ حيث n ; يمثل عدد النقاط.

الزوايا :-

- الزاوية الحادة : هي زاوية قياسها أقل من 90 درجة.
- الزاوية القائمة : زاوية قياسها 90 درجة.
- الزاوية المنفرجة : زاوية قياسها أكبر من 90 درجة وأقل من 180 درجة.
- الزاوية المستقيمة : زاوية قياسها 180 درجة.
- الزوايا المتتامة : تكون الزاويتان متتامتين إذا كان مجموعهما = 90 درجة.
- الزوايا المتكاملة : تكون الزاويتان متكاملتين إذا كان مجموعهما = 180 درجة.



س6/ إذا كانت $\angle 1, \angle 2$ متتامتان، وكان $m\angle 1 = 43$، فإن $m\angle 2$ بالدرجات =

أ) 137　　ب) 133　　ج) 86　　د) 47

الحل : (د) 47 ، لأن الزاوية المتتامة = 90 ، ف (90 − 43) = 47

س7/ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين 2:3 فإن الزاوية الصغرى بالدرجات =

أ) 90　　ب) 54　　ج) 36　　د) 18

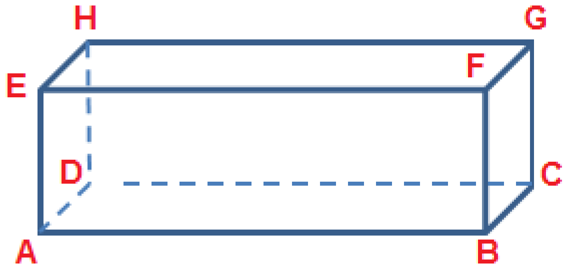
الحل : بجمع النسبتين (2 + 3) = 5 ، وبما أن الزاويتان متتامتان إذاً = 90 ، ولذلك 90/5 = 18 وبالضرب بأصغر نسبة = 18 × 2 = 36 ، في حين أن الزاوية الكبرى = 18 × 3 = 54

المستقيمات والمستويات :–

– المستقيمان المتوازيان : يقال للمستقيمين أنهما متوازيان إذا كانا في مستوى واحد دون تقاطع .

– المستقيمان المتخالفان : يقال للمستقيمين أنهما متخالفان إذا كانا لا يقعان في مستوى واحد بلا توازى .

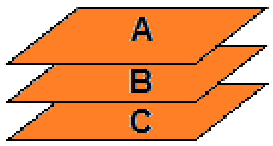
فمثلاً : نقول أن $\overline{AB}$ و $\overline{CG}$ متخالفان وكذلك $\overline{AB}$ و $\overline{HD}$ أنهما متخالفان وذلك لأنهما لا يتقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحد .



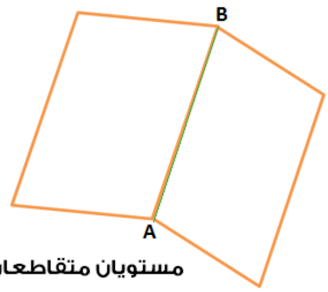
– المستقيم المستعرض : مستقيم يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى في نقاط مختلفة.

– المستويان المتوازيان : يقال للمستويين أنهما متوازيان إذا كانا لا يتقاطعان.

– المستويان المقاطعان : يتقاطع المستويان في خط مستقيم.

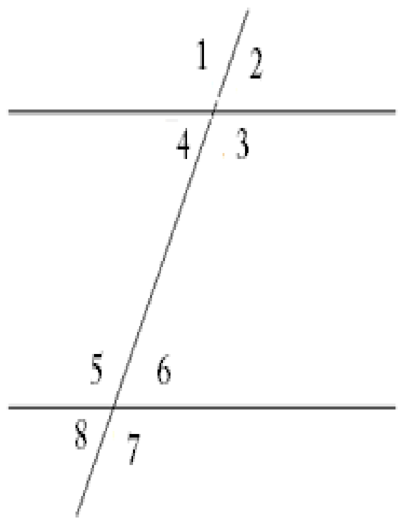


مستويات متوازية

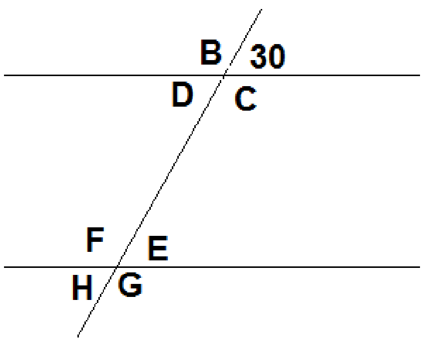


مستويان متقاطعان

علاقات الزوايا :

الزوايا الخارجية	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$	
الزوايا الداخلية	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$	
الزاويتان الداخليتان المتخالفتان	$\angle 6, \angle 3$ $\angle 4, \angle 5$	
الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان	$\angle 1, \angle 7$ $\angle 2, \angle 8$	
الزاويتان الداخليتان المتبادلتان	$\angle 4, \angle 6$ $\angle 3, \angle 5$	
الزاويتان المتناظرتان	$\angle 1, \angle 5$ $\angle 3, \angle 7$ $\angle 2, \angle 6$ $\angle 4, \angle 8$	

س8/ في الشكل التالي حدد قيم الزوايا المجهولة :



الزاوية B = (180 – 30) = 150 درجة.

الزاوية D = (مقابلة للزاوية 30) إذاً = 30 درجة.

الزاوية C = (مقابلة للزاوية B) = 150 درجة.

الزاوية E = (كل زاويتين داخليتين متبادلتين متطابقتان) (C = F , D = E) = 30 درجة.

الزاوية F = زاوية C = 150

الزاوية G = (كل زاويتين خارجيتين متبادلتين متطابقتان) (B = G , A = H) = 150 درجة.

الزاوية H = زاوية A = 30 درجة.

المثلث :-

- يصنف المثلث طبقاً لـ 3 أشياء وهي : 1) زواياه. 2) أضلاعه. 3) رؤوسه.

* **تصنيف المثلث حسب ~~الأضلاع~~ :** (زواياه).

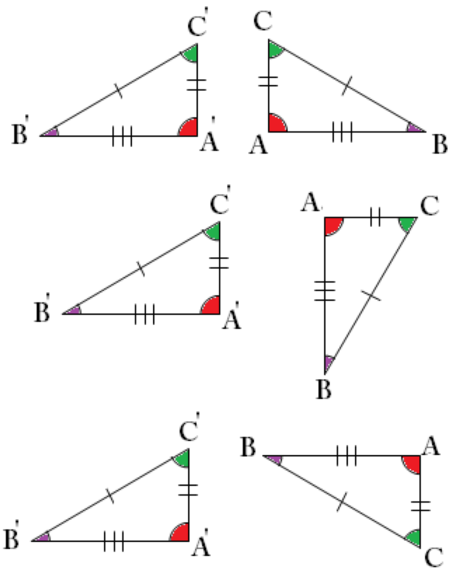
- مثلث قائم الزاوية : به زاوية واحدة قائمة وقياسها = 90 درجة .
- مثلث حاد الزاوية : مثلث جميع زواياه حادة وقياس كل زاوية أقل من 90 درجة .
- مثلث منفرج الزاوية : به زاوية واحدة منفرجة ، وبه زاوية قياسها أكبر من 90 درجة .

* **تصنيف المثلث حسب الأضلاع :**

- مثلث متطابق الأضلاع : جميع أضلاع متطابقة وبالتالي زواياه متطابقة ، وكل زاوية = 60 درجة فيه .
- مثلث متطابق الضلعين : يوجد به ضلعان متطابقان على الأقل . وقياس زاويتيه المتطابقان = 45 درجة ، والأخرى = 90.
- مثلث مختلف الأضلاع : أضلاع غير متطابقة وبالتالي زواياه غير متطابقة .

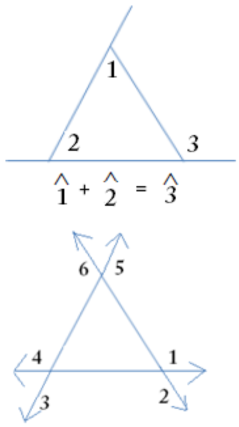
* **تصنيف المثلث حسب الرؤوس :**

- يتطابق المثلثان حسب الرؤوس أيضاً ، فكيفية تحديد الرؤوس هي عن طريق تحديد الوتر والضلعان الأخرين كما في الشكل الأيسر.



ملاحظات على المثلث :

- مجموع زوايا المثلث الداخلية = 180 درجة .
- مجموع زوايا المثلث الخارجية = 360 درجة .
- الزاوية الخارجية في مثلث : مجموع الزوايا الداخليتين عدا الزاوية المجاورة .
- يوجد لأي مثلث 6 زوايا خارجية.
- الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان (مجموعهما 90 درجة).
- أكبر زاويا المثلث في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولاً .



الزوايا الخارجية

مسلمة SSS , SAS ، AAS ، ASA :-

يقصد بمسلمة SSS : هي وجود 3 أضلاع متطابقة . حيث (S : يرمز لضلع .) (side).

يُقصد بمسلمة SAS : هي وجود ضلعان مع زاوية محصورة بينهما . حيث A : (Angle).

يُقصد بمسلمة AAS : هي وجود زاويتان وضلع .

يُقصد بمسلمة ASA : هي وجود زاويتان مع ضلع محصور بينهما.

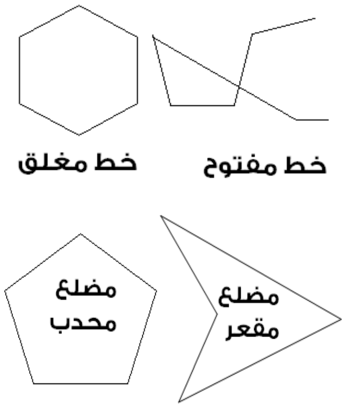
س9/ أي من الخيارات التالية يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث :

أ) 5,7,12 ب) 4,6,11 ج) 7,9,14 د) 1,2,4

الحل : (ج) 7,9,14 لأن 7+9 = 16، وهي > 14 .

هذه الجملة خاطئة ، هذه الجملة تنطبق فعلاً على المتطابق الضلعين ولكن يشترط أن يكون [قآئم الزآوية]

الأشكال الرباعية:



* المضلع : خط مغلق بسيط يتكون من اتحاد عدة قطع مستقيمة ، والمضلع نوعان :

– المضلع المحدب : المضلع الذي لا يحتوي على زاوية منعكسة .

– المضلع المقعر : المضلع الذي يحتوي على زاوية منعكسة .

* المضلع المنتظم : مضلع محدب جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه متطابقة .

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع :–

$S-180\div360$

تُعطى بالعلاقة : $S = 180(n-2)$ ولحساب عدد الأضلاع يُعطى بالعلاقة $\cancel{Sn = 180(n-2)}$

– لحساب زاوية من زواياه المنتظمة نطبق القانون : $\frac{180(n-2)}{n}$ عدد الأضلاع $\cancel{2}$

القانون عدد الكلي للاقطار هو .. n × n-٣ تقسيم ٢ ، يعني ٤×٤-٣ =٤ تقسيم ٢ =٢ .

– عدد المثلثات التي ينقسم إليها المضلع يُعطى بالعلاقة : $(n-2)$

– عدد الأقطار المرسومة من أحد الرؤوس يُعطى بالعلاقة : $(n-3)$

– عدد الأقطار الكلي للمضلع يُعطى بالعلاقة : $\frac{n(n-3)}{2}$

– قياس الزاوية الخارجية في مضلع : $\frac{360}{n}$

س10/ المضلع الذي ليس له أقطار هو :

أ) المربع ب) المثلث ج) المضلع الخماسي د) المضلع السداسي

الحل : المثلث هو الوحيد الذي ليس له أقطار .

س11/ عدد أقطار الشكل الرباعي =

أ) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5

الحل : الإجابة (2) $n-2 = 4-2 = 2$

س12/ قياس زاوية الخماسي المنتظم بالدرجات :

أ) 72 ب) 108 ج) 180 د) 270

الحل : بما أن المطلوب قياس زاوية واحدة فبالتعويض بالقانون = 108.

س13/ مضلع منتظم قياس زاويته الداخلية 144 درجة فإن عدد أضلاعه =

أ) 6 ب) 7 ج) 8 د) 10

الحل : 10 بالتعويض بقانون إيجاد عدد الأضلاع .

– متوازي الأضلاع :

* خصائصه :

1) الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة.
2) الزوايا المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة.
3) الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.
4) قطرا متوازي الأضلاع يُنصف كل منهما الأخر.
5) كلا قطري متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

تحسب مساحة متوازي الأضلاع بالقانون : مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة (b) × الارتفاع (a) .

– المستطيل :

* خصائصه :

1) الأضلاع المتقابلة متطابقة ومتوازية .
2) الزوايا المتقابلة متطابقة.
3) الزوايا المتحالفة متكاملة .
4) القطران متطابقان وينصف كل منهما الآخر.
5) جميع الزوايا الأربع قوائم.

ملاحظة / كل مستطيل يعتبر متوازي أضلاع ، ولكن بعض متوازيات الأضلاع تكون مستطيل .

تحسب مساحة المستطيل بالقانون : مساحة المستطيل = الطول × العرض .

– المربع :

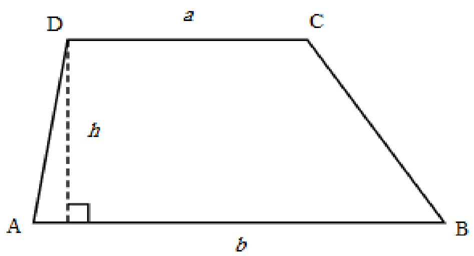
* خصائصه :

1) جميع أضلاعه متطابقة.
2) القطران متعامدان ومتطابقان
3) جميع زواياه قوائم .

ملاحظة / كل مربع معين وليس كل معين مربع .

– تُعطى مساحة المربع بالقانون : (طول الضلع) × (طول الضلع)

– شبه المنحرف :



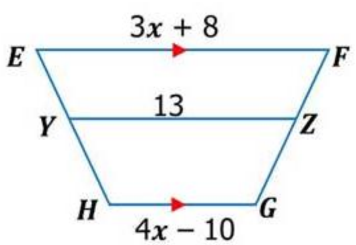
* خصائصه :

1) زاويتا كل قاعدة لشبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان .
2) قطرا شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقان .

– تُعطى مساحة شبه المنحرف بالقانون : 1/2 (مجموع طولي قاعدتيه) × الارتفاع .

– لحساب القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تُعطى بالقانون التالي : 1/2 (مجموع طولي القاعدة).

س14/ في الشكل التالي قيمة x =



أ) 3.5 ب) 4 ج) 5 د) 10

الحل : بالتعويض بالقانون : القطعة المتوسطة = 1/2 × (مجموع طولي القاعدة)

إذاً 13 = 1/2 (3x+8) + (4x−10) = 26 = 7 − 2 = 28/7 = 4 .

النسبة والتناسب :

– النسبة: هي مقارنة بين كميتين باستخدام القسمة فنسبة a إلى b بحيث $b \neq 0$ يمكن أن تكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ أو a:b.

– التناسب : هي تساوي نسبتين .

س15/ قيمة " x " إذا علمت أن الأعداد هي : 2 ، 3 ، x ، 6 :

6 , x , 3 , 2

أ) 3 　　ب) 4 　　ج) 6 　　د) 14

الحل : 3x = 12 ، إذاً x = 4

س16/ إذا كان عمر فهد 12 سنة والنسبة بين عمره وعمر والده 1/3 فما عمر والده ؟

أ) 48 　　ب) 36 　　ج) 28 　　د) 25

الحل : عمر فهد / عمر والده = 1/3 إذاً 12/x = 1/3 ، يعني ذلك أن : $x = 12\times3 = 36$

س17/ قطعة من الجبن تحتوي على 9gm، منها 6gm دهون مشبعة فإن نسبة الدهون المشبعة إلى كامل الدهون هي

أ) 2/5 　　ب) 2/3 　　ج) 2/4 　　د) 2/6

الحل : بجمع الأجزاء (كامل الدهن) = 6+9 = 15 ، والدهون المشبعة = 6 يعني ذلك 6/15 = 2/5 .

س18/ مثلث محيطه 52cm والنسبة بين أطوال أضلاعه هي 6 : 4 : 3 فإن طول أقصر أضلاع المثلث =

أ) 24 　　ب) 16 　　ج) 12 　　د) 5

الحل: بجمع الأجزاء (3+4+6)(x) = 13x = 52 ، إذاً 4 = 52/13 ، وطول أقصر ضلع $3 \times 4 = 12$ (ج) .

س19/ أوجد قياسات زاوية المثلث الكبرى ، النسبة بين قياسات زواياه 2:3:5 ؟

أ) 90 　　ب) 54 　　ج) 36 　　د) 18

الحل : بجمع الأجزاء (2 + 3 + 5) (x) = 10 ، إذاً 180/10 = 18 ، وأكبر زاوية $18\times5 = 90$

س20/ اشترك ثلاثة أشخاص في تجارة وكانت النسبة بين ما دفعه الأول والثاني هي 1 : 2 والنسبة بين ما دفعه الثاني والثالث 4 : 3 ، وفي نهاية الشهر كان الربح مساوياً 3400 ريال فكم يكون نصيب الشخص الثاني من الأرباح بالريال ؟

أ) 337.778 　　ب) 800 　　ج) 1200 　　د) 3500

الحل :

النسب ستكون 3 + 6 + 8 = 17x

ولذلك 200 = 3400/17 ونصيب الثاني = $200 \times 6 = 1200$ ريال

الثالث : الثاني : الأول

1 : 2 : .

. : 3 : 4

3 : 6 : 8

الدائرة :-

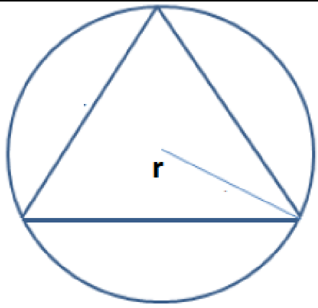
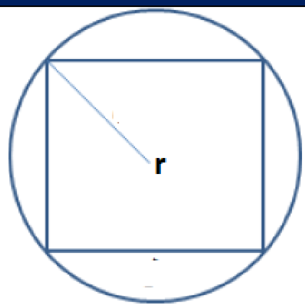
– الدائرة : هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى ، والتي تبعد البعد نفسه من نقطة معطاة (ثابتة).

– مساحة الدائرة تُعطى بالعلاقة : $\pi\ (r)^2$ حيث : $\mathbf{r}$ نصف القطر .

– محيط الدائرة تُعطى بالعلاقة : $C = 2\pi r$ أو $\mathrm{C} = 2\pi r$ حيث C : محيط الدائرة ، r : يمثل نصف القطر .

– π هي النسبة التقريبية وتساوي : 3.14 أو $\frac{22}{7}$.

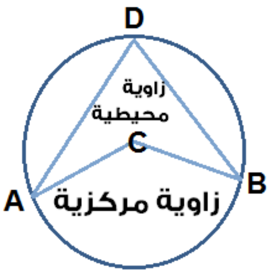
– محور تناظر الدائرة يكون أي قطر مار فيها .

المثلث المتطابق الأضلاع المحصور بداخل دائرة	المربع المحصور بداخل دائرة	السداسي المحصور داخل دائرة
		
طول الضلع = $\sqrt{3} \times \mathbf{r}$	طول الضلع = $\sqrt{2} \times \mathbf{r}$	طول الضلع = $\mathbf{r}$

الزاوية المركزية والزاوية المحيطية :-

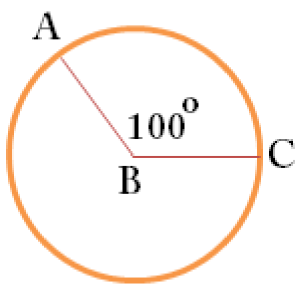
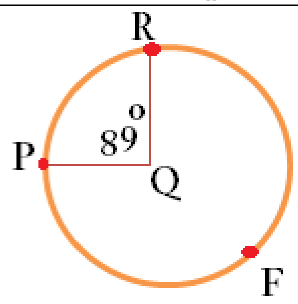
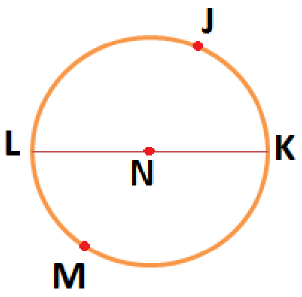
– الزاوية المركزية : هي زاوية يقع رأسها على مركز الدائرة.

– الزاوية المحيطية : هي زاوية ضلعاها وتران في الدائرة ورأسها يقع على المحيط ABC .



* الزاوية المركزية = 2 × الزاوية المحيطية.   * والزاوية المحيطية = 1/2 الزاوية المركزية.

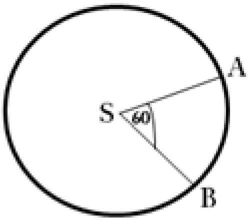
أقواس الدائرة :

القوس الأصغر	القوس الأكبر	نصف الدائرة
القوس الذي قياسه < من 180 درجة.	القوس الذي قياسه > 180 درجة.	القوس الذي قياسه = 180 درجة
		
يسمى بحرفي نهايتيه $\overset{\frown}{AC}$	يُسمى بحرفي في نهايتيه ونقطة أخرى على القوس $\overset{\frown}{PFR}$	يسمى بحرفي في نهايتيه ونقطة أخرى على القوس $\overset{\frown}{LJK}$ ، $\overset{\frown}{LMK}$

يُعطى قانون حساب طول القوس بالعلاقة :

$\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{A}{360}$، حيث A : قياس القوس بالدرجات ، C : محيط الدائرة ، ℓ طول القوس .

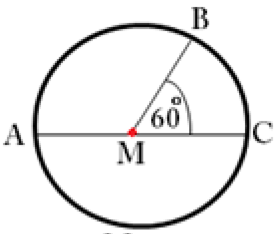
ويمكن كتابتها بالصيغة التالية : $C \times \frac{A}{360} = \ell$.


س21

س21/ في الشكل المقابل مقياس زاوية قوس AB في الشكل التالي هو : مقياس القوس AB في الشكل الثاني هو

أ) 60 ب) 120 ج) 270 د) 300

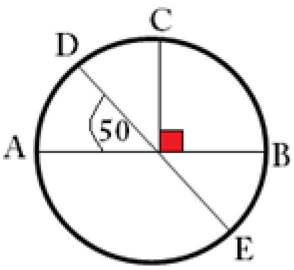
الحل : 60 (لأنه نفس الاستواء).


س22

س22/ في الشكل المقابل مقياس زاوية قوس ACB,AC هو :

أ) 120,180 ب) 180,120 ج) 300,120 د) 300,180

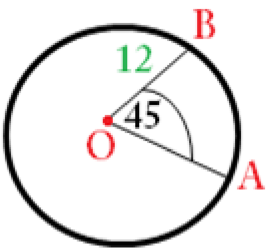
الحل : 240,180 الخيآرآت الموجودة خآطئة قآطبة


س23

س23/ في الشكل التالي مقياس زاوية قوس DC =

أ) 230 ب) 270 ج) 40 د) 30

الحل : (ج) 40 ، لأن AD = 50 و DC مجهول ، و90 = BC ولذلك 40 = 50−90 .


س24

س24/ أوجد طول القوس AB في الشكل التالي :

أ) 9.42 ب) 55.82 ج) 31.4 د) 3.94

الحل : (أ) 9.42 بتطبيق قانون طول القوس.

كثيرات الحدود :

– وحيدة الحد : هي عدداً ، أو متغيراً (حرفياً) ، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة.

– تسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها بـكثيرة حدود أولية.

س25/ درجة وحيدة الحدود للمعادلة : $5x^2 + 2y - 3y$ هي :

أ) 5   ب) 3   ج) 2   د) 0

الحل : الإجابة (ج) حسب قيمة أكبر أس لـ x ، وهي تعتبر من الدرجة الثانية.

تدريب1/ $3x^2$ المعامل الحرفي والعددي لها = ؟

الحل: المعامل الحرفي x^2 والمعامل العددي 3 .

تدريب2/ هل تمثل العبارة التالية كثيرة حدود $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$ ؟

الإجابة 8 قيمة أكبر أس في x ، قيمة أكبر أس في y و = 8 .

تدريب3/ هل تمثل العبارة التالية كثيرة حدود $3x^2 + \frac{x}{y}$ ؟

الحل : لا تمثل كثيرة حدود لأن $\frac{x}{y}$ لا يمثل وحيدة حد.

تدريب4/ هل تمثل العبارة التالية كثيرة حدود $\sqrt{x} + x + 4$ ؟

الحل : لا تمثل كثيرة حدود.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

العمليات على كثيرات الحدود :

الخاصية :	التعريف :	مثال :
ضرب القوى	$x^a \cdot b^a = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^{3+2} = 3^5$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$
الأس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x}, \frac{1}{x^{-1}} = x^a, x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}, \frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوى	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3.2} = 3^6$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$
قوة ناتج القسمة	$(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0$ $(\frac{x}{y})^{-a} = (\frac{y}{x})^a = \frac{y^a}{x^a}$	$(\frac{2}{3})^{-5} = (\frac{3}{2})^5 = \frac{3^5}{2^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$100000^0 = 1$

تدريب5/ بسط العبارة $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$:

الحل : $-5\,\frac{c^3}{d^4}$

تدريب6/ بسط العبارة $(-2x^3y^2)^5$ ؟

الحل : $-32x^{15}y^{10}$

س26/ أي مما يلي يُكافئ العبارة : $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$:

أ) $2x^2 + 8x + 7$ ب) $2x^2 - 8x - 7$

ج) $2x^2 - 8x + 7$ د) $2x^2 + 8x - 7$

الحل : الإجابة (ج) بترتيب الحدود المتشابهة رأسياً ونوجد ناتج الطرح.

س27/ أي مما يلي يُكافئ العبارة : $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$:

أ) $2x^2 + 2x + 3$ ب) $2x^2 - 2x - 3$

ج) $2x^2 - 2x + 3$ د) $2x^2 + 2x - 3$

الحل : الإجابة (أ) بترتيب الحدود المتشابهة رأسياً ونوجد ناتج الجمع.

دوال كثيرات الحدود :

تدريب7/ المعامل الرئيس لكثيرة الحدود التالية $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$ ؟

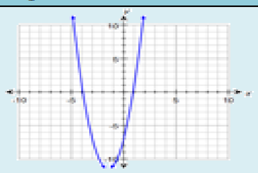
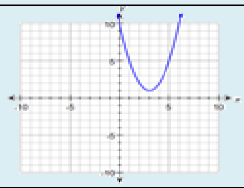
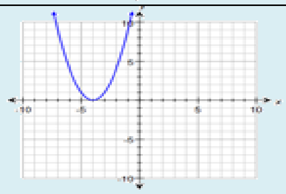
الحل: المعامل الرئيس هو المعامل التابع للمتغير الحرفي ، والذي له قيمة أكبر أس، وهو 8.

القانون العام والمميز :

– يُعطى القانون العالم بالعلاقة : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

– القانون العام يُستعمل لحل المعادلة التربيعية التي على الصورة $ax^2 + bx + c = 0 , a \neq 0$.

– المميز : العبارة $b^2 - 4ac$ تسمى بالمميز، وهو ما يمكن تمييز جذوره وأنواعه من خلاله .

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني لها
$b^2 - 4ac > 0$ و العبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل	جذران حقيقان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$ و العبارة $b^2 - 4ac$ لا تمثل مربع كامل	جذران حقيقان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي واحد	

– إرشاد1 : معنى مربع كامل ، أي مثلاً $\sqrt{4} = 2$ يكون مربع كامل ، بينما $\sqrt{2} = 1.4$ ولا يعتبر مربع كامل.

– إرشاد2 : إذا وجد للمعادلة التربيعية جذران مركبان فهما مترافقان.

تدريب8/ أوجد قيمة المميز وعدد الجذور وأنواعها للمعادلة $-5x^2 + 8x = 1$ ..

الحل :

– الخطوة الأولى / ترتيب المعادلة على الصورة الصفرية : $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

– الخطوة الثانية / استعمال قانون المميز والتعويض به بـ قيم a, b, c فيكون :

$a = -5 \ , \ b = 8 \ , \ c = -1$ وبحله بقانون المميز $b^2 - 4ac$ يكون الحل :

$(8)^2 - 4(-5)(-1) = 44$ ويتضح أن $44 > 0$ وأن جذر 44 عدد غير نسبي $\sqrt{44} = \mathbb{I}$ أي لا يُعطينا مربع كامل ولذلك الحل يكون أن للمعادلة : جذران حقيقان غير نسبيان.

إيجاد قيمة c إذا علم الحد الأوسط وأحد الحدين الآخرين :

– لإيجاد قيمة c فإننا نطبق القانون التالي : **الحد الثالث** $= \left(\dfrac{\text{الحد الأوسط}}{\text{ضعف } \sqrt{\text{الجذر الأول}}}\right)^2$

تدريب9/ قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود في المعادلة التالية مربعاً كاملاً هي : $x^2 + 13x + c$

الحل : بتطبيق قانون : إيجاد قيمة c

الحد الثالث $= \left(\dfrac{\text{الحد الأوسط}}{\text{ضعف } \sqrt{\text{الجذر الأول}}}\right)^2$ ، $\dfrac{169}{4} = \left(\dfrac{13}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{13x}{2x}\right)^2 = \left(\dfrac{13x}{2\sqrt{x^2}}\right)^2$

تكوين معادلة إذا علم جذريها :

– لتكوين معادلة بمعلومية جذريها يتم تطبيق القانون $x^2 - (r_1 + r_2)\ x + (r_1 \ \times r_2)$

تدريب10/ كون المعادلة التي جذريها 3 ، 4 ؟

الحل: بتطبيق القانون : $x^2 - (r_1 + r_2)\ x + (r_1 \ \times r_2)$ يكون الحل : $x^2 - (3 + 4)\ x + (3 \ \times 4)$

ويكون الحل أخيراً $x^2 - 7x + 12 = 0$

الأعداد المركبة :

– العدد التخيلي : هو العدد السالب الذي يوجد بداخل الجذر.

– الوحدة التخيلية : هي الجذر التربيعي للعدد -1 أي بصيغة أخرى : $i = \sqrt{-1}$

– العدد التخيلي البحت : هي الجذر التربيعي لأعداد حقيقة سالبة مثل : $6i \ , -2i \ , i\sqrt{3}$

– الأعداد المركبة : هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة a+ib حيث a,b عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية.

تدريب11/ أي من الخيارات التالية تُكافئ العبارة $\sqrt{-27}$:

أ) $3\sqrt{-3}$ ب) $3i\sqrt{3}$ ج) $3i + \sqrt{3}$ د) $3 + \sqrt{3i}$

الحل : الإجابة (ب) وذلك بالتحليل لعوامل :

3	27
3	9
3	3
	1

يتضح من التحليل أن $27 = 1 \times 3 \times (3)^2$ ويُلاحظ أن العدد بداخل الجذر سالب

لذلك الحل يكون $\sqrt{-1 \times 3^2 \times 3} = i \times 3 \times \sqrt{3} = 3i\sqrt{3}$.

تدريب12/ الجذر التربيعي للعدد السالب ، للمعادلة $6i\sqrt{6}$ هو :

أ) $\sqrt{-216}$ ب) $\sqrt{-125}$ ج) $\sqrt{-81}$ د) $\sqrt{-41}$

الحل: هُنا لا نُحلل لأن الجذر ناطق فيكون الحل $6\sqrt{6i} = \sqrt{6i \cdot 6^2} = \sqrt{6i \cdot 36} = \sqrt{-216}$

– قوى الوحدة التخيلية :

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i^1 = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i^1 = i$
$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$
$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
$i^8 = (i^2)^4 = 1$

تدريب13/ ناتج $3i \times 4i$:

أ) 12i ب) -12 ج) 24 د) -24

الحل : الإجابة (ب) $4 \times 3 \times i^2 = 4 \times 3 \times -1 = -12$

تدريب14/ $4x^2 + 100 = 0$:

أ) -5 ب) -5i ج) $\pm 5i$ د) ± 5

الحل : الإجابة (ج) $\pm 5i$

تدريب14/ ناتج i^{42} :

أ) i ب) $-i$ ج) -1 د) 1

الحل : بسط العبارة بأقل ما يمكن $(i^2)^{21} = i^2 = -1$

تدريب15/ ناتج i^{55} :

أ) i ب) $-i$ ج) -1 د) 1

الحل : بسط العبارة بأقل ما يمكن : $i^{11} \times i^5 = -i = i \times -1$

تدريب16/ i^{20} :

أ) i ب) $-i$ ج) -1 د) 1

الحل : بسط العبارة بأقل ما يمكن : $i^{10} \times i^{10} = -1 \times -1 = 1$

تدريب17/ i^{200} :

أ) i ب) $-i$ ج) -1 د) 1

الحل : الإجابة (د) 1 بالتبسيط $(i^{100} \times i^{100})$ وهي من مضاعفات الـ 10

تدريب18/ أوجد قيمتي x, y اللتين تجعلان المعادلة التالية صحيحة

$5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2x + (y - 6)i$:

$2x-2+(y-6)i$

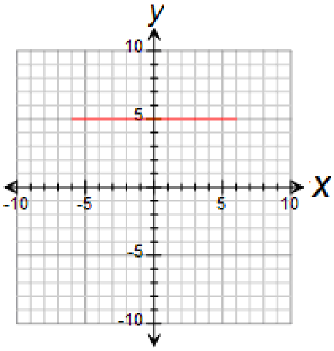
الحل : بمساواة الجزء الحقيقة مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي.

$5x + 1 = 2x - 2$ ، ويصبح الحل $x = -1$ وكذلك y $3 + 2y = y - 6$ ويصبح الحل $y = -9$

– ملاحظة هامة / في حالة قسمة الأعداد المركبة (عدد تخيلي + عدد حقيقي) فإننا نضرب بمرافق المقام.

الفصل الثاني:

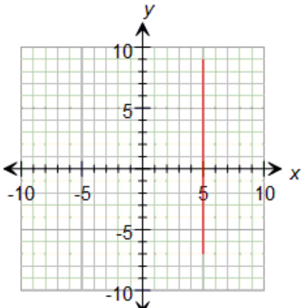
الهندسة الإحداثية



الميل :

– الميل : هو النسبة بين ارتفاع المستقيم العمودي والمسافة الأفقية ، ويُعطى قانون الميل بالعلاقة :

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ أي فرق الصادات / فرق السينات .



ميل المستقيم الرأسي = غير معرف

– إذا كان المستقيم أفقياً (موازياً لمحور السينات) فإن ميله = 0 (m = 0)

– إذا كان المستقيم عمودياً (موازياً لمحور الصادات) فإن ميله غير معرف.

– يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين.

– يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما = (1 −).

– إذا كان $x_1 = x_2$ و $y_1 \neq y_2$ فإن المستقيم يكون رأسياً وميله غير معرف.

– إذا كان $x_1 \neq x_2$ و $y_1 = y_2$ فإن المستقيم يكون أفقياً وميله = 0

س28/ ميل المستقيم التالي : $A = (3, -5)$ ، $B = (6, -2)$

أ) 1− ب) 1 ج) 9/7− د) 9/7−

x y x y

$A = (3, -5)$ ، $B = (6, -2)$

الحل : فرق الصادات / فرق السينات = (−2 − (−5)) / (6 − 3) = 3/3 = 1

س29/ إذا كان ميل AB = 2/5 ، وكان ميل CD = −5/2 فإن المستقيمان يكونان :

أ) متعامدان ب) متوازيان ج) متعامدان ومتوازيان د) غير ذلك

الحل : متعامدان ، لأن مثل قلب للكسر ، وإبدال لإشارة.

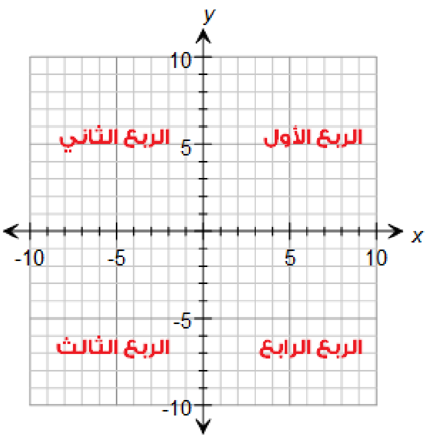
مُعادلة المستقيم :

– يمكن كتابة معادلة المستقيم إذا عُلم :

1) الميل والمقطع الصادي 2) الميل ونقطة على المستقيم 3) نقطتان على المستقيم

– معادلة المستقيم بدلالة الميل والمقطع الصادي تُعطى بالعلاقة :

$y = m\,x + b$، حيث: b : محور الصادات ، m: الميل.



– معادلة المستقيم بصيغة النقطة والميل :

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

– معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

– حالات خاصة لمعادلة المستقيم :

* إذا كان يوازي محور السينات : معادلته هي : $y = y_1$ أو $y = b$

* إذا كان يوازي محور الصادات : معادلته هي : $x = x_1$

* إذا كان يوازي نقطة الأصل ($0,0$) : معادلته هي : $y = mx$

س30/ اكتب معادلة المستقيم الذي ميله -3 والمقطع الصادي 2 بصيغة الميل والمقطع ؟

الحل : $b = 2 , m = -3$

والقانون : $y = m\,x + b$ وبالتعويض $y = -3x + 2$

س31/ اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{1}{3}$ ويمر بالنقطة ($4,-2$) ؟

$\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ (4, & -2) \end{matrix}$

الحل : $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

وبالتعويض بالقانون : $y + 2 = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3}$

نقطة المنتصف (معادلة العمود المنصف) :-

يُعطى قانون نقطة المنتصف بالعلاقة : $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$

المسافة بين نقطتين (طول قطعة مستقيمة) :

يُعطى قانون المسافة بين نُقطتين بالعلاقة : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

– يكونان المستقيمان متوازيان إذا كان البعد بينهما ثابتاً دائماً.

إذا كان [AB] // محور السينات فإن | AB | = | فرق السينات |

إذا كان [AB] // محور الصادات فإن | AB | = | فرق الصادات |

– دائماً طول القطعة المستقيمة يكون موجباً (+) .

– التحويلات الهندسية :

للتحويلات الهندسية أنواع وهي :

1) الانعكاس. 2) الإزاحة (الانسحاب). 3) الدوران. 4) التمدد. 5) التبليط.

أولاً / الانعكاس :

– الانعكاس : تحويل يمثل قلب الشكل في نقطة أو في خط مستقيم أو في مستوى .

الانعكاس	من الأصل للصورة	كيفية إيجاد إحداثيات الصورة
حول محور (x)	$(a,b) \to (a,-b)$	بضرب الإحداثي الصادي (y) في (1 –)
حول محور (y)	$(a,b) \to (-a,b)$	بضرب الإحداثي السيني (x) في (1–)
حول نقطة الأصل (0,0)	$(a,b) \to (-a,-b)$	بضرب كلا الإحداثيين (x ,y) في (1–)
حول المستقيم y = x	$(a,b) \to (b,a)$	بتبديل الإحداثي x مكان الإحداثي y

ثانياً / الإزاحة :

* الإزاحة نوعان رأسية وأفقية :–

– الإزاحة الرأسية (التغير في الإحداثي الصادي) : ⊕ أعلى ⊖ للأسفل

– الإزاحة الأفقية (التغير في الإحداثي السيني) : ⊕ يمين ⊖ يسار

صورة النقطة $P(x,y)$ بإزاحة (a,b) ← $P'(x+a\ ,\ y+b)$

ثالثاً / الدوران :

* الدوران : تحويل تدور به كل نقطة من نقاط الشكل بزاوية معينة واتجاه معين حول نقطة ثابتة تسمى (مركز الدوران).

– الدوران نوعان :

1) دوران موجب (+) : وهو الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة . مثل : الطواف حول الكعبة وحركة إطار السيارة .

2) دوران سالب (–) : وهو الدوران مع اتجاه عقارب الساعة.

* صورة النقطة (x,y) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية 90 درجة :

– إن كان في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة (−y,x) أما إن كان مع اتجاه حركة عقارب الساعة (y,−x).

* صورة النقطة (x,y) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية 180 : (−x,−y) .

– الدوران بزاوية 360 يسمى الدوران المحايد لأنه يعيد الشكل لوضعه الأصلي .

– مقدار رتبة التماثل الدوراني للمضلع المنتظم $\frac{360^o}{n}$ حيث n : عدد الأضلاع .

س33/ تدور شفرات المروحة والتي لها 5 أضلاع في الهواء لتوفير التكييف ، التماثل الدوراني لها هي :

أ) 60 ب) 62 ج) 70 د) 72

الحل : (72) لأن رتبة التماثل الدوراني = 360/5 = 72، بينما رتبة التماثل الدوراني لها هي : 5 (نفس الأضلاع).

رابعاً / التمدد :

– التمدد : نوع من التحويلات الهندسية حيث يحدث تغيير في قياسات الشكل .

– للتمدد عنصرين أساسين وهما : مركز التمدد ومعامل التمدد .

– معامل التمدد يُعطى بالعلاقة : $\frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$ ويرمز له بالرمز **r** .

ومن خلاله نستنتج أن طول الصورة = طول الأصل × معامل التمدد ..

* هُناك 3 حالات لمعامل التمدد وهي :

(1) إذا كان | r | > 1 فالتمدد يكون تكبير.

(2) إذا كان | r | < 1 فالتمدد يكون تصغير.

(3) إذا كان | r | = 1 فالتمدد يكون تحويل تطابق.

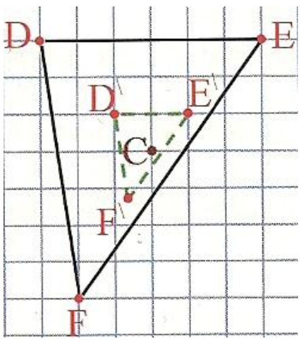
– إذا كان **r>0** فالأصل والصورة في نفس الجهة من مركز التمدد أما **r<0** فالأصل والصورة مختلفتين من مركز التمدد.

س34/ إذا علمت أن معامل التمدد = $\frac{2}{3}$ فإن التمدد يكون :

أ) تمدد تكبير ب) تمدد تصغير ج) تحويل تطابق د) ليس تمدداً

الحل : تمدد تصغير لأن 1> |r| .

س35/ إذا كانت $\overline{A`B`}$ صورة $\overline{AB}$ بمعامل التمدد r = 2 ، وكان AB = 12 فإن A`B` :



أ) 6 ب) 12 ج) 24 د) 36

الحل : (24) حسب قانون معامل التمدد .

س36/ في الشكل التالي ، معامل التمدد (r) =

أ) 1/3 ب) 2/7 ج) 5/6 د) 1/2

الحل : 1/3 لأن طول الصورة = 6 ، وطول الأصل = 2 (حسب المربعات بالنسبة للطول)

لذا 1/3 = 2/6 .

التبليط :

– التبليط 3 أنواع حسب الانتظام : (1) منتظم. (2) شبه منتظم. (3) غير منتظم.

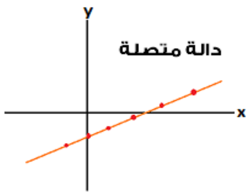
* التبليط المنتظم يتألف من ضلع واحد فقط منتظم أما الشبه منتظم يتألف من مضلعين منتظمين أو أكثر.

– والتبليط حسب الشكل يكون : متسق أو غير متسق .

المتسق يحتوي على الترتيبات نفسها للأشكال والزوايا عند كل رأس أما الغير متسق فيحتوي على ترتيبات مختلفة للأشكال والزوايا عند رؤوس مختلفة.

التبليط للمضلع المنتظم يُعطى بالعلاقة : $\frac{180(n-2)}{n}$

العلاقات والدوال :



– الدالة : علاقة يرتبط فيها كُل عنصر في المجال بعُنصر وحد في المدى .

– الدالة المتباينة : دالة لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى .

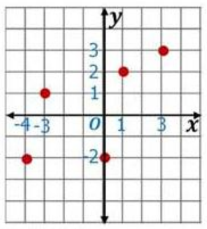
* الدوال من حيث الاتصال ، تنقسم لقسمين :

– دالة متصلة : وهي الدالة التي تكون عناصرها على نفس الاستواء (الخط) .

– دالة منفصلة : الدالة التي تكون عناصرها متفرقة وليست على نفس الخط .

للتعرف على أن الشكل يمثل دالة أو لا نستخدم طريقة – اختبار الخط الرأسي – .

وهي أن نضع خط رأسي على الرسم الديكارتي (البياني) فإن قطع الخط الرأسي نقطة واحدة فالعلاقة دالة ، أما إن قطع بأكثر من نقطة فالعلاقة ليس دالة .



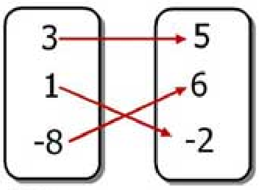
– الدالة تشتمل على مجال ومدى (مجال مقابل) ، دائماً المجال يشمل قيم (x) والمدى يشمل قيم (y)

ولذلك يسمى المجال بالمتغير المستقل ، أما المدى بالمتغير التابع (الذي يتبع المتغير المستقل).

س37/ في الشكل التالي هل العلاقة دالة ؟ وهل الدالة متصلة أو منفصلة ؟ أن العلآقة دآلة وهي متصلة

~~العلاقة ليست دالة لأن ارتبط عنصرين من المجال بالمدى . والدالة منفصلة~~

س38/ حدد كلا من المجال والمدى في العلاقة التالية ، مع بيان هل هي دالة ؟ وإذا كانت دالة فهل ستكون متباينة؟

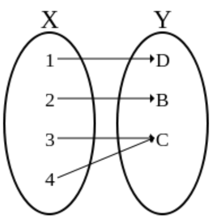


الحل :

المجال ($3 , 1 , -8$) لأنه خارج منه السهم للمدى .   والمدى ($5 , 6 , -2$) .

ولذا تعتبر دالة لأن كل عنصر من المجال ارتبط بعنصر آخر في المدى ولذلك فهي دالة متباينة.

س39/ هل يمثل الشكل التالي دالة ؟



نعم يمثل دالة لأن هذا النوع من الدوال يسمى دالة شاملة (شمولية) .

(المجال = المدى المقابل).

س40/ لتكن $h(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$ فإن قيمة $h(2) =$

أ) 11.5 ب) -4.5 ج) 0 د) لايمكن التعريف بالدالة

الحل : بالتعويض المباشر الإجابة (ب) -4.5

الدوال الأم :

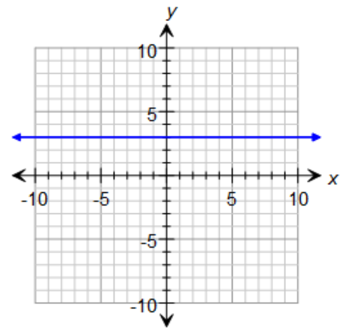
* الدالة الثابتة :

– تُعطى الدالة الثابتة بالعلاقة : $f(x) = c$

– الدالة الثابتة مجالها : $\mathbf{R}$ ومداها : $\{\mathrm{c}\}$.

– منحناها متصل.

– المنحنى متماثل حول محور $\mathbf{y}$ ؛ لذا فهي دالة زوجية.



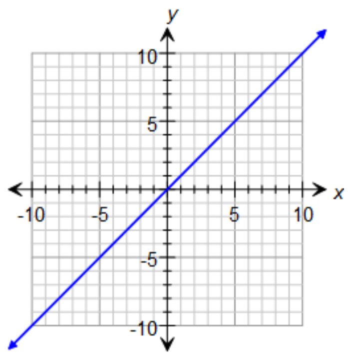
* الدالة المحايدة (الدالة الخطية) :

– تُعطى الدالة المحايدة بالعلاقة $f(x) = x$ ويرمز لها بالرمز $I(x)$

– مجال الدالة المحايدة : $\{\, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \ \in \boldsymbol{R}\}$ ومداها : $\{\, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$

– منحناها متصل.

– المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ؛ لذا فالدالة فردية.



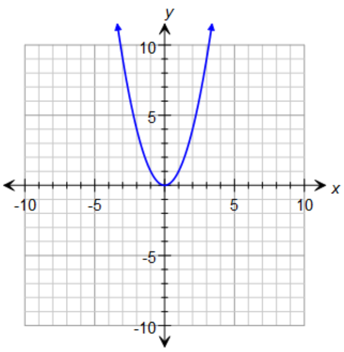
* الدالة التربيعية :

– تُعطى الدالة التربيعية بالعلاقة: $f(x) = x^2$

– مجال الدالة $\{\, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \ \in \boldsymbol{R}\}$ ومداها : $\{\, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$

– المنحنى متصل.

– المنحنى متماثل حول المحور $\mathbf{y}$ ؛ لذا فالدالة زوجية.



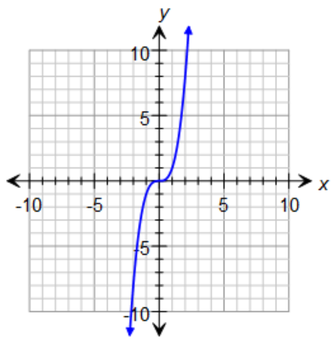
* الدالة التكعيبية :

– تُعطى الدالة التكعيبية بالعلاقة : $f(x) = x^3$

– مجال الدالة التكعيبية : $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \ \in \boldsymbol{R}\}$ ومداها: $\{\, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} \ \in \boldsymbol{R}\}$

– المُنحنى متصل.

– المنحنى متماثل حول نقطة الأصل $(0,0)$ ؛ لذا الدالة فردية.



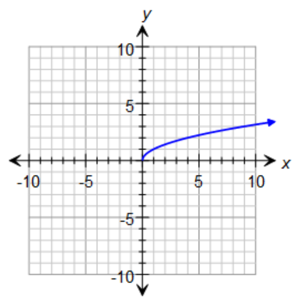
* دالة الجذر التربيعي :

– تُعطى دالة الجذر التربيعي بالعلاقة : $f(x) = \sqrt{x}$

– مجال دالة الجذر التربيعي : $\{\, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ومداها : $\{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}\}$.

– المُنحنى متصل.

– المُنحنى غير متماثل لذا الدالة ليست فردية ولا زوجية.



منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ لذآ فالدالة فردية

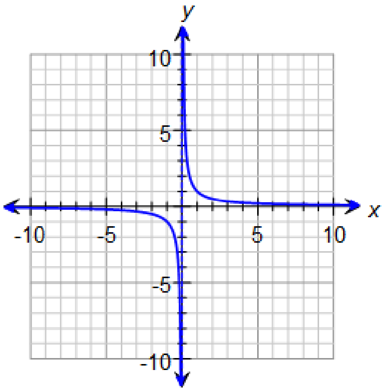
* دالة المقلوب :

– تُعطى دالة المقلوب بالعلاقة : $f(x) = \frac{1}{x}$.

– مجال دالة المقلوب : $\{x|x \neq 0, x \in R\}$ ومداها : $\{y|y \neq 0, y \in R\}$.

– المُنحنى لا يقطع أياً من المحورين.

– منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ لذا الدالة ليست فردية ولا زوجية .



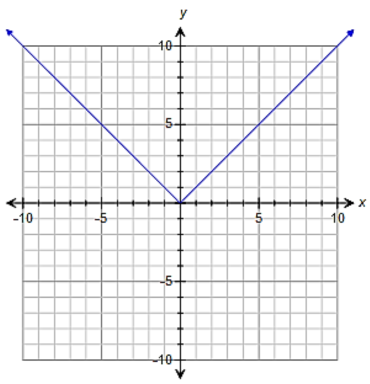
* دالة القيمة المطلقة :

– تُعطى دالة القيمة المطلقة بالعلاقة : $f(x) = |x|$.

– مجال دالة القيمة المطلقة : $\{x|x \in R\}$ومداها : $\{y|y \geq 0, \ y \in R\}$ (R^+)

– المُنحنى متصل.

– منحنى الدالة متماثل حول محور y ؛ لذا فالدالة زوجية.

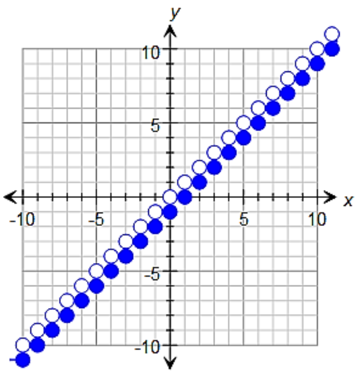


* الدالة الدرجية (دالة أكبر عدد صحيح) :

– تُعطى الدالة الدرجية بالعلاقة : $f(x) = [\![x]\!]$.

– مجال الدالة الدرجية : $\{x|x \in R\}$ ومداها : $\{y|y \in Z\}$.

– منحنى الدالة ليس له تماثل ؛ أي أنه الدالة ليست فردية ولا زوجية.



س41/ إذا كانت $f(x) = [[x]]$ فإن $[[3.32]] =$

أ) 3.32 ب) -3.32 ج) 3 د) 4

الحل : 3 لأن في الدالة الدرجية إذا كان العدد > النصف فالعدد يجبر ، أما في حالة كان $0 <$ فالعدد يبقى دون الكسر.

س42/ إذا كانت $f(x) = [[x]]$ فإن $[[-4.66]] =$

أ) -4.66 ب) 4.66 ج) -5 د) 5

الحل : -5 ، تذكر دائماً الدالة الدرجية ليست دالة قيمة مطلقة ! .

س43/ في الدالة الدرجية التالية $h(x) = [[3x]] - 8$ طول الدرج =

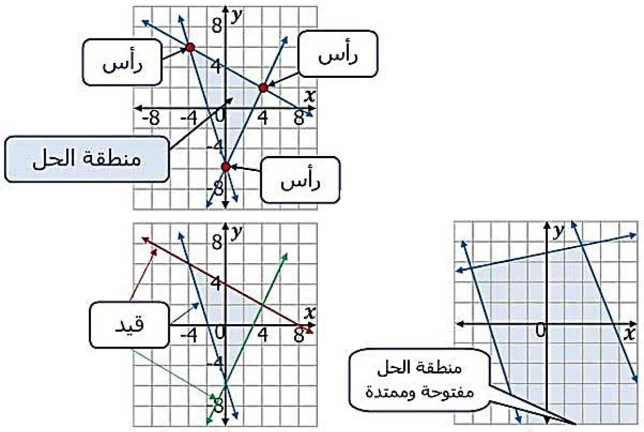
أ) 3 ب) -3 ج) $1/3$ د) $-1/3$

الحل : $1/3$ ، والمطلوب طول الدرجة وليس قيمة العدد ، وقانون إيجاد طول الدرجة في الدالة الدرجية هو : $\left| \frac{1}{\text{معامل } x} \right|$

– البرمجة الخطية والحل الأمثل :

– منطقة الحل في الجزء الأوسط ، والقيود الخطوط البارزة والممتدة.

– ومنطقة الحل نوعان مفتوحة ومغلقة .



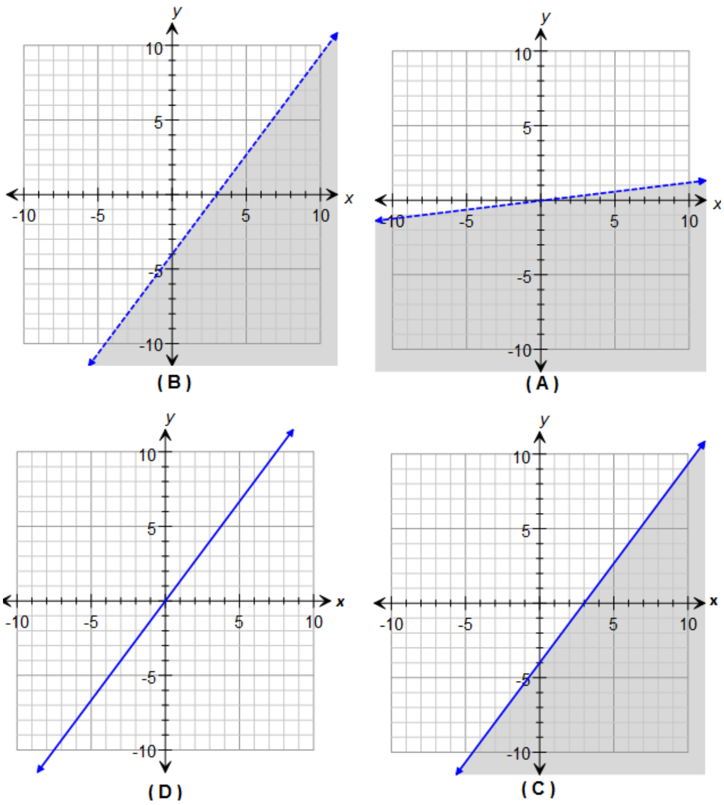
س44/ الدالة التالية : $f(x) = 4x - 3y > 12$ لها التمثيل البياني :

أ) (A)

ب) (B)

ج) (C)

د) (D)



الحل : في التمثيل البياني يكون الخط المتصل إذا كان يحتوي على علاقة مساواة ($\leq , \geq$) أما المنفصل إذا كان لا يحتوي على علاقة مساواة ($< , >$) ولذلك نستبعد كلا من (ج) و (د) ويتبقى لدينا (أ) ، (ب).

بعد ذلك نختبر هل 0 تشمل المنطقة المظللة أم لا ؟

نعوض بالقيم جميعها (x,y) بالصفر للاختبار الجزء المظلل .

$4(0) - 3(0) > 12$?

هل $0>12$ الإجابة خاطئة لأن $0 \ngtr 12$ وهذا يعني أن الجزء المظلل لا يشمل منطقة (0) ونظلل ما تحت الصفر

وبالتالي الحل يكون: الإجابة (ب) B .

ملاحظة هامة جداً / متى يكون من الممكن تظليل منطقتين مختلفتين في الرسم البياني ؟

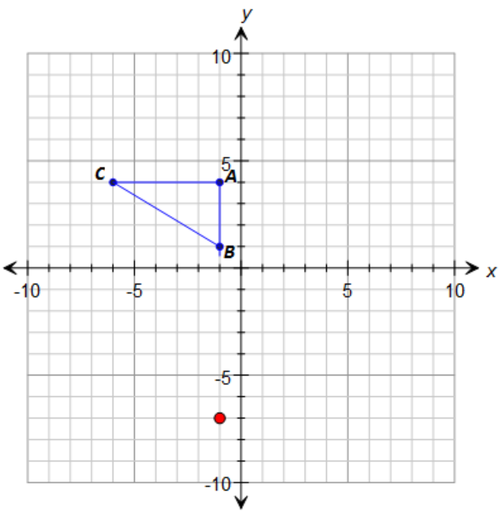
– عندما تكون x,y بداخل القيمة المطلقة $|x| \leq |y|$.

س45/ عدد الأعداد الصحيحة التي تحقق المتباينة $/x/ < \pi$ حيث π هي النسبة التقريبية هو:

أ) 5 ب) 6 ج) 7 د) 8

الحل : 7 ، القيم التي تأخذها النسبة التقريبية هي { 3 , 2 , 1 , 0 , –1 , –2 , –3 } وهي 7.

س46/ ماهي مساحة المثلث ABC ؟



أ) 5   ب) 6   ج) 7   د) 8

الحل : يُلاحظ أن النقاط هي $A(-1,4)$ و $B(-1,1)$ و $C(-6,4)$

لذا طول $AB = |AB|\ |1-(-4)| = |3| = 3$

وطول $AC = |AC| = |-6-(-1)| = |-5| = 5$

ومن ذلك نستطيع أن نقول مساحة المثلث = طول القاعدة × الارتفاع / 2

$= \frac{3\times5}{2} = 7.5$

س47/ أي مما يأتي يُعد وصفاً مناسباً للتمثيل البياني للمعادلتين :

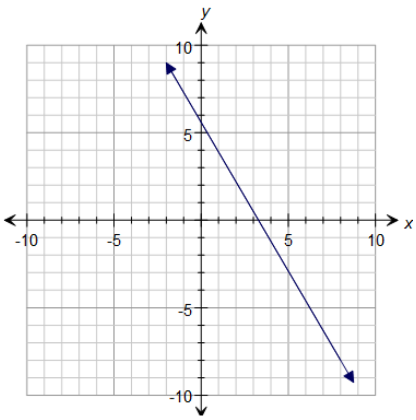
$$y = 3x - 5\ , 4y = 12x + 16$$

أ) مستقيمان لهما المقطع y نفسه   ب) مستقيمان متعامدان

ج) مستقيمان لهما المقطع x نفسه   ج) مستقيمان متوازيان

الحل : بتبسيط المعادلة $4y = 12x + 16$ فإنها = $y = 3x + 4$ وبما أنها متساوية في معامل x فسيكونان المستقيمان متوازيان.

س48/ ميل المستقيم الممثل بيانياً على المستوى الإحداثي الآتي هو :

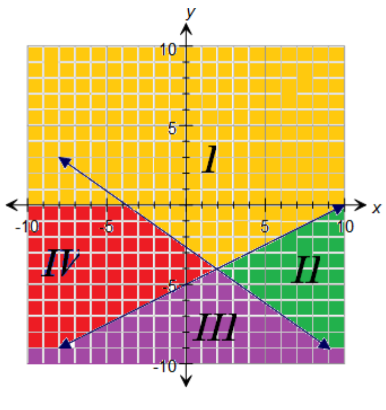


أ) -3 ب) $-\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) 3

الحل : بما أن التمثيل البياني ينحدر من اليسار إلى اليمين فإن الميل سالب ، لذا نستبعد البديلين (أ ، ~~ب~~) ، وبما أن التمثيل البياني نلاحظ أن يقطع المحور x في نقطة (3)

لذلك يكون الحل هو (أ) .   والصحيح هو استبعاد (ج ، د)

س49/ على الشكل يُساره ، منطقة حل النظام :

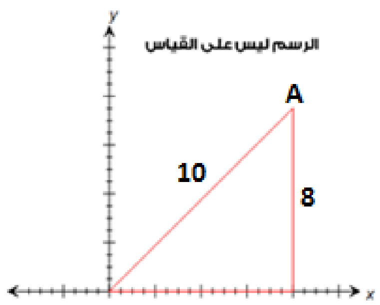


$$y \le \frac{1}{2}x - 2$$
$$y \le -\frac{2}{3}x - 1$$

أ) I ب) II ج) III د) IV

الحل : المنطقة II (بالتعويض بـ 0 في كل القيم) .

س50/ ما إحداثيات النقطة (A) في الشكل التالي :



س50

أ) $A(8,10)$ ب) $A(10,8)$ ج) $A(6,8)$ د) $(6,10)$

الحل : بتطبيق نص نظرية " عكس نظرية فيثاغورس " يتضح

$$10^2 - 8^2 = 100 - 64 = \sqrt{36} = 6$$

وبما أن $A(x,y)$ فإن نقطة A تكون : $A(6,8)$ والإجابة هي (ج).

س51/ في الدالة التالية $f(x) = \frac{2}{x-3}$ تكون الدالة غير معرفة عند :

أ) 3 ب) 3- ج) 2 د) 0

الحل : تكون الدالة غير معرفة عند 3 وذلك لأن $f(3) = \frac{2}{3-3}$ تكون غير معرفة .

س51/ يكون مجال الدالة : $h(x) = \frac{1}{x+2} - 1$ هو :

أ) $h(x) = x|x \neq -1, x \in R$ ب) $h(x) = x|x \neq 2, x \in R$

ج) $h(x) = x \in R$ د) $h(x) = x|x \neq -2, x \in R$

الحل : الإجابة (د) ، وذلك لأن الدالة تكون عند -2 غير معرفة ولذلك نستبعد (2-) ، أما المدى فهو الإجابة (أ).

وهو الجزء المقطوع . الرأسي

س52/ خط التقارب للدالة : $f(x) = \frac{2}{x-6} + 4$ هو :

أ) 6- ب) 6 ج) 4- د) 4

الحل : (ب) 6 وذلك لأن x–6 = 0 فلذلك x = 6 وهو يمثل خط التقارب .

س53/ في الدالة التالية : $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$ يكون خط التقارب الأفقي :

أ) 1- ب) 1 ج) 2 د) 0

الحل : خط التقارب الأفقي = 0 ، ونستطيع إيجاد خط التقارب الأفقي بالعلاقة :

$$\frac{a(x)}{b(x)}$$

فإذا كانت درجة معامل a> معاملb فلا يوجد خط تقارب أفقي

أما إن كانت درجة معامل b < درجة معامل a فخط التقارب الأفقي هو المستقيم y = 0

أما إن كانت درجة معامل a = درجة معامل b فخط التقارب هو $\frac{\text{معامل } a}{\text{معامل } b}$

س54/ نقطة الانفصال للدالة : $d(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$:

أ) تكون 4 على محور x ب) تكون 4 على محور y ج) لا يوجد نقطة انفصال د) نقطة الانفصال y=0

الحل : نقطة الانفصال تكون 4 على محور x.

س55/ في الدالة التالية : $f(x) = \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-9}$ تكون نقطة الانفصال (على محور x) :

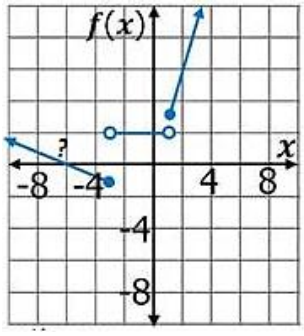
أ) 3 ب) 3- ج) 3 و 3- د) لا يوجد نقطة انفصال

الحل : (ج) 3- و 3 على محور x .

س56/ الدالة $t(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ يكون خط التقارب الرأسي لها هو :

أ) 1 ب) 0 ج) 0,1 د) 1,0-

الحل : الإجابة (ج) 0 و 1 (عوض بفرع الدالة في المقام بالقيم)



س57/ في الشكل التالي دالة متعددة التعريف ، الدالة المحدد عليها (بعلامة الاستفهام) تكون معادلتها :

أ) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2, x \le -3$ ب) $f(x) = 3x, x \ge 1$

ج) $f(x) = -4x - 8, x \ge 0$ د) $f(x) = 2, -3 < x < 1$

الحل : لإيجاد دالة من خلال شكلها بياني نستعمل قانون الميل ونحدد الإحداثيات ،

نُلاحظ أن النقاط هي تقريباً عند $x_1(-3)$, $y_1(-1)$, ولذلك النقطتين $P(x_1, y_1) = (-3, -1)$

والنقطة الأخرى عند : $x_2(-6)$, $y_2(0)$ وبتطبيق قانون الميل ، الحل = $-1/3$ ثم بعد ذلك تطبق معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.

الدالة العكسية :

– الدالة العكسية : هي الدالة الناتجة عن تبديل مجال الدالة ومداها ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(x)$

وفي الرسم البياني لتحديد الدالة عكسية أما لا نستعمل اختبار الخط الأفقي.

ملاحظات هامة على الدالة العكسية :

– ليس لكل دالة ، دالة عكسية. – الدالة العكسية رمزها $f^{-1}(x)$ وليست $\frac{1}{f(x)}$

س58/ الدالة $f(x) = \frac{x-3}{5}$ ، الدالة العكسية لها هي :

أ) $f^{-1}(x) = \frac{5}{x-3}$ ب) $f^{-1}(x) = \frac{15x-15}{5}$ ج) $5x + 3$ د) $3x + 5$

الحل : نُعيد صياغة الدالة كمعادلة بمتغيرين x,y وتكون :

$f(x) = \frac{x-3}{5}$ وضع مكان y ← $y = \frac{x-3}{5}$ تبديل مكان y بـ x ← $x = \frac{y-3}{5}$ الناتج ← $5x + 3$

الدالة الزوجية والدالة الفردية :

– الدالة الزوجية : هي الدالة التي تحتوي على أسس زوجية – الدالة الفردية : هي الدالة التي تحتوي على أسس فردية.

س59/ الدالة : $f(x) = x^3 - 2x$ هي دالة :

أ) زوجية ب) فردية ج) لا زوجية ولا فردية د) غير ذلك.

الحل : الدالة فردية حسب قيمة الأس .

س60/ الدالة $h(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$ هي دالة :

أ) زوجية ب) فردية ج) لا زوجية ولا فردية د) غير ذلك.

الحل : الدالة لا زوجية ولا فردية لاحتوائها على أس فردي وزوجي وبناءًا على ذلك الإجابة (ج) .

س61/ الدالة $g(x) = 4\sqrt{x}$ هي دالة :

أ) زوجية ب) فردية ج) لا زوجية ولا فردية د) غير ذلك.

الحل : لا زوجية ولا فردية .

الفترات ورموزها :

مجموعة الأعداد :

المجموعة العددية	تعريفها
الأعداد الحقيقية R	هي جميع المجموعات والأعداد الرياضية.
الأعداد الصحيحة Z	هي الأعداد التي تحتوي على الأعداد الموجبة والسالبة والصفر.
الأعداد الكلية W	الأعداد الشاملة من الصفر إلى المالانهاية $0,1,2,\ldots$
الأعداد الطبيعية N	الأعداد الشاملة من الواحد إلى المالانهاية $1,2,3,\ldots$
الأعداد التخيلية $\imath$	هي الأعداد السالبة بداخل الجذر مثل : $\sqrt{-3}$
الأعداد المركبة C	الأعداد المركبة من أعداد تخيلية وأي عدد حقيقي آخر مثل: $2i + 5$
الأعداد الأولية P	الأعداد الصحيحة الأكبر من 1 ولا تقبل القسمة إلى على نفسها أو على الواحد مثل : $3,5,7,11\ldots$

* الفترات 3 أنواع وهي :

– فترة مفتوحة، ويرمز لها بالرمز ( ) أو] [

– فترة مغلقة، ويرمز لها بالرمز [ ] أو ( )

– فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة ، ويرمز لها بالرمز ( ] أو [ )

الفترة المغلقة تشتمل على رمز المتباينتين $>,<$ والفترة المفتوحة تشتمل على رمز المتباينتين $\geq,\leq$

– في الرسم البياني النقطة المظللة (المغلقة) ترمز للفترة المغلقة ، والنقطة (الغير مظللة) ترمز للفترة المفتوحة

س61/ رمز الفترة للمجموعة $-8 < x \leq 16$ هي :

أ) [8 ، 16] ب)] 8 ، 16) ج) (8 ، 16] د) (8 ، 16)

الحل :

يُلاحظ أن رمز المتباينة $\leq$ ولذلك تكون مغلقة أي] ، و -8 تكون عندها الفترة مفتوحة أي) ولذلك الفترة هي (-8 , 16]

س62/ رمز الفترة للمجموعة $x < 11$ هي :

أ) [$-\infty$ ، 11] ب) [∞ ، 11] ج) ($-\infty$ ، 11) د) (∞ ، 11)

الحل : (د) (∞ ، 11)

س63/ رمز الفترة للمجموعة $x \leq -16$ أو $x > 5$ هي :

أ) $(-\infty, 16\,)\cup[\,5,\infty\,]$

ب) $[-\infty, 16\,]\cup(\,5,\infty\,)$

ج) $[-\infty, 16\,)\cup(\,5,\infty\,)$

د) $(-\infty, 16\,]\cup(\,5,\infty\,)$

الحل : الإجابة (د) .

س64/ الصفة المميزة لمجموعة الأعداد التالية : $\{\,8,9,10,11,\ldots\,\}$ هي :

أ) $\{\,x|x > 8, x \in R\,\}$

ب) $\{\,x|x \geq 8, x \in R\,\}$

ج) $\{\,x|x > 8, x \in W\,\}$

د) $\{\,x|x \geq 8, x \in W\,\}$

الحل : الإجابة (د) $\{\,x|x \geq 8, x \in W\,\}$.

س65/ مجال الدالة : $f(x) = \frac{2+x}{x^2-7x}$ هو :

أ) $\{ x|x \neq 0, x \neq 7 , x \in R \}$ ب) $\{ x|x \geq 7, x \in R \}$

ج) $\{ x|x \neq -2, x \in R \}$ د) $\{ x|x \geq 7, x \in R \}$

الحل : الإجابة (أ) لأن كلا 7 ، 0 تجعل المقام = 0 وبالتالي المعادلة تكون غير معرفة.

س66/ مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x-5}$ هو :

أ) $\{ x|x \neq 5, x \in R \}$ ب) $\{ x|x \geq 5, x \in R \}$

ج) $\{ x|x \neq 5 , x \neq 0 , x \in R \}$ د) $\{ x|x \geq -5, x \in R \}$

الحل : الإجابة (ب) لأن في الدوال المحتوية على جذور يكون الحل كالتالي :

$x - 5 \geq 0$ إذاً $x \geq 5$ ولذلك المجال هو (ب) .

س67/ مجال الدالة $f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$ هو :

أ) $\{ x|x \neq 3, x \in R \}$ ب) $\{ x|x \geq -3, x \in R \}$

ج) $\{ x|x \neq -3 , x \in R \}$ د) $\{ x|x > -3, x \in R \}$

الحل : الإجابة (د) بالتعويض بفرع الدالة في المقام $2x + 6 > 0$ إذاً $x > -3$

(استبعدنا علاقة التساوي $\geq$ لأن لو أصبح المقام = الصفر ، لأصبحت المعادلة غير معرفة).

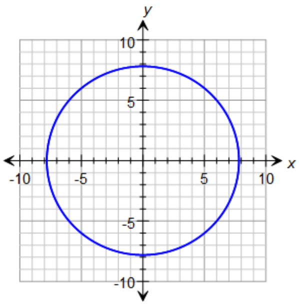
س68/ رمز المجموعة المميزة للمجموعة " المضاعفات الموجبة للعدد 5 " :

أ) $\{ x|x = 5n, x \in N \}$ ب) $\{ x|x = 5n, x \in W \}$

ج) $\{ x|x \geq 5 , x \in R \}$ د) $\{ x|x \geq 5n, x \in W \}$

الحل : الإجابة (أ) وذلك لأنها تحقق المعادلة أعلاه ، استبعدنا مجموعة الأعداد W لأن ال 0 ليس من مضاعفات ال 5 ! .

س69/ يُعتبر الشكل التالي :



أ) دالة شاملة ب) دالة فوقية ج) دالة هندسية د) ليس دالة

الحل : (د) ليس دالة ، وذلك باستعمال خط الاختبار الرأسي.

س70/ مجال الدالة : $b(x) = \sqrt{x+6} + 2$ هو :

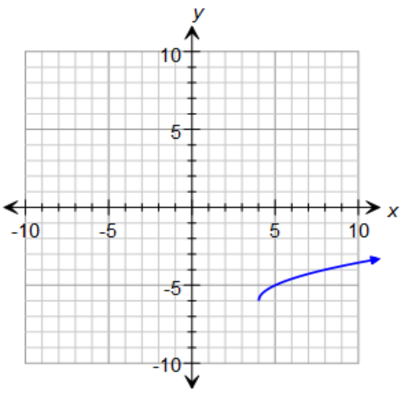
أ) $\{ x|x \geq 8\}$ ب) $\{ x|x \geq -6\}$

ج) $\{ x|x > 8 \}$ د) $\{ x|x > -6 \}$

الحل : بما أن مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط القيم التي تجعل ما تحت الجذر غير سالب فإن ..

$b(x) = \sqrt{x+6} + 2 \Rightarrow x \geq -6$ لذا الإجابة (ب)

س71/ دالة الجذر التربيعي التي لها التمثيل البياني التالي هي :



أ) $f(x) = \sqrt{x-4-6}$ ب) $f(x) = \sqrt{x-4} - 6$

ج) $f(x) = \sqrt{x-6-4}$ د) $f(x) = \sqrt{x+4} - 6$

الحل : الإجابة (ب) نلاحظ أن نقطة (x,y) تكون عند (4,6) الجزء المقطوع يكون لـ y .

س72/ مجال الدالة $f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{x-5}+3$ هو :

أ) $\{x|x\geq 5\}$ ب) $\{x|x>5\}$

ج) $\{x|x\neq 5 , x\in R\}$ د) $\{x|x=5\}$

الحل : (أ) $\{x|x\geq 5\}$.

س73/ مدى الدالة $f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{x-5}+3$ هو :

أ) $\{x|x\geq 5\}$ ب) $\{x|x\geq 3\}$

ج) $\{x|x\neq \frac{1}{4} , x\in R\}$ د) $\{x|x\neq 3\}$

الحل : (ب) $\{x|x\geq 3\}$ ، دائماً في دوال الجذر التربيعي ، المدى يكون نفسه دون تغيير .

س74/ مجال الدالة $f(x)<-\sqrt{x+2}-4$:

أ) $\{x|x\geq 2\}$ ب) $\{x|x\geq -2\}$

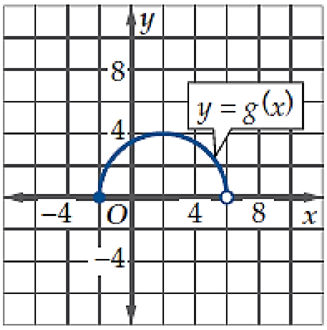
ج) $\{x|x\neq 2 , x\in R\}$ د) $\{x|x<-4\}$

الحل : (ب) $\{x|x\geq -2\}$ ..

س75/ القيمة التقريبية للمقطع y للدالة $f(x)=\frac{-2x^3+4}{3}$:

أ) 3.2 ب) 1.33 ج) 0.75 د) 2.5

الحل : (ب) بالتعويض بقيمة x بـ 0 يكون الحل 1.33

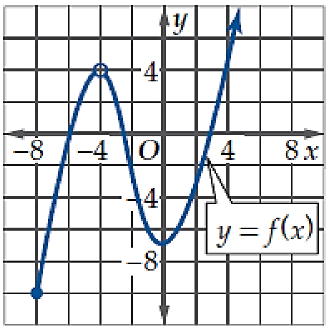


س76/ مجال التمثيل البياني التالي هو :

أ) $(6,4)$ ب) $[6,4)$ ج) $[6,-2)$ د) $[-2,6)$

الحل : (د) $[-2,6)$

س77/ مجال الدالة التالي هو :



أ) $\{x \mid x\geq -8, x\neq -4, x\ \varepsilon\ R\}$ ب) $\{x \mid x\geq -8 , x\ \varepsilon\ R\}$

ج) $\{x \mid x\neq -4 , x\neq -8\ x\ \varepsilon\ R\}$ د) $\{x \mid x\geq -4, x\ \varepsilon\ R\}$

الحل : الإجابة (أ) .

س78/ متوسط التغير للدالة $f(x)=-x^3+3x$ عند الفترة $[-2,-1]$:

أ) 4 ب) -4 ج) 1 د) -1

الحل : بتطبيق قانون متوسط التغير (الميل) والذي ينص على :

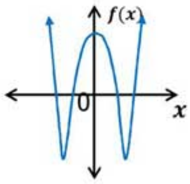
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

وبالتعويض بالقانون ، مع التعويض بصيغة الدالة يكون متوسط التغير للدالة : $\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}=$

$$\frac{[-(-1)^3+3(-1)]-[-(-2)^3+3(-2)]}{-1-(-2)}$$

ولذا يكون الحل = -4

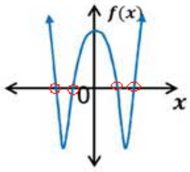
الأعداد النسبية والأصفار :



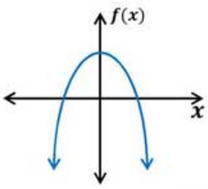
س79/ عدد الأصفار التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقة للدالة التالية :

أ) 7 ب) 5 ج) 4 د) لا يوجد أصفار للدالة

الحل : الإجابة (ج) ، وذلك بتحديد عدد مرات قطع المحور x



س80/ الدالة التالية تُعتبر دالة :



أ) دالة زوجية ب) دالة فردية ج) لا زوجية ولا فردية د) غير ذلك

الحل : الدالة زوجية ، لأن عدد أصفارها = 2 .

قانون دِيكارت :

– يُستخدم قانون ديكارت لتحديد العدد الممكن من الأصفار الحقيقة الموجبة والسالبة لأي دالة كثيرة حدود.

ويُعطى قانون ديكارت بالعلاقة : $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

س81/ العدد الممكن للأصفار الحقيقة الموجبة للدالة $h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$ هو :

أ) 5 ب) 0 ، 2 ج) 3 ، 1 د) 2 ، 4

الحل : عدد الأصفار الكاملة (الحقيقة الموجبة والحقيقة السالبة) هي 5 .

ولكن الأعداد الحقيقة الموجبة ، نطبق عليها قانون ديكارت ويكون الحل هو :

نحسب عدد مرات التغير للإشارات:

$$h(-x) = -2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 9$$

يُلاحظ أن مقدار التغير 1+1+1 = 3، ولذلك = 3 ،ونجد أن الحل (ج) يتوافق مع ما هو مطلوب.

س82/ الدالة $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ عدد الأصفار الحقيقة السالبة هي :

أ) 2 ، 0 ب) 1 ج) 3 د) 5

الحل : لحل الأعداد الحقيقة السالبة ، نعوض بقيمة سالبة في المجاهيل ! ونحدد مقدار التغير :

$P(-x) = 5(-x)^3 - 2(-x^2) + 7(-x) + 1$ فيكون الحل :

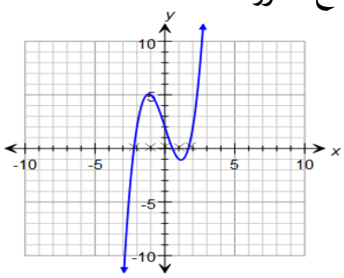
$P(-x) = -5(x)^3 - 2(\,x^2) - 7(x) + 1$ إذاً عدد الأصفار السالبة = 1 وبناءًا على ذلك فإن الإجابة (ب).

س83/ الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقة للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$

أ) [1,2] , [−3,2] , [−4,4] ب) [1,2] , [0,1] , [−3,2]

ج) [1,4] , [0,−3] , [−4,2] د) [4,2] , [−3,1] , [−4,0]

الحل : الإجابة (ب) [1,2] , [0,1] , [−3,2] بالتعويض بقيم في الدالة من (4 إلى −4) وملاحظة هل هي تقطع محور x أم لا،



الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
الضرب	$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ , g(x)\neq 0$

العمليات على الدوال :

– يُقصد بالعمليات على الدوال : هو إجراء العمليات الحسابية المختلفة على الدوال.

س84/ إذا كانت $f(x) = x^2 + 5x - 2\ , g(x) = 3x - 2$ فإن قيمة $= (f+g)(x)$

أ) $(f+g)(x) = x^2 - 8x + 4$

ب) $(f+g)(x) = x^2 + 8x + 4$

ج) $(f+g)(x) = x^2 - 8x - 4$

د) $(f+g)(x) = x^2 + 8x - 4$

الحل :الإجابة (د) حسب قانون جمع الدوال : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ولذلك فإنها =
$(x^2 + 5x - 2) + (3x - 2) = x^2 + 8x - 4$

س85/ إذا كانت الدالتين $f(x), g(x)=$ $f(x) = x - 4\ , g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ فإن حاصل ضربهما =

أ) $x\sqrt{9-x^2} + 4\sqrt{9-x^2}$ ب) $x\sqrt{9+x^2} - 4\sqrt{9+x^2}$

ج) $x\sqrt{9-x^2} - 4\sqrt{9-x^2}$ د) $x\sqrt{9+x^2} + 4\sqrt{9+x^2}$

الحل : الإجابة (ج) حسب قانون ضرب الدوال .

س86/ مجال الدالة $(f-h)(x)$ إذا علمت أن قيمة كلا من $f(x), h(x)$:
$f(x) = x^2 + 4x\ , h(x) = 3x - 5$:

أ) $]\infty, -\infty[$ ب) $[\infty, -\infty)$

ج) $)\infty, -\infty($ د) $[\infty, -\infty]$

الحل : بطرح الدالتين ثم استخراج المجال ، الإجابة (أ) هي الأنسب لأن] هي نفسها ( ) .

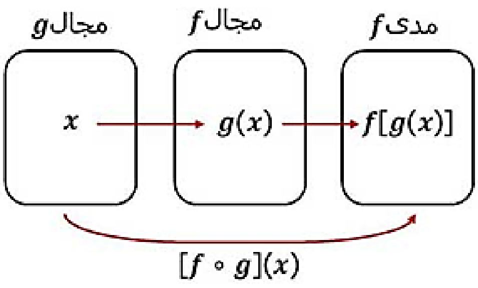
تركيب دالتين :

– تركيب دالتين : هي أحد الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين . وعند تركيب دالتين فإن قيمة منها تستعمل لحساب قيم أخرى.

– يرمز لتركيب دالتين بالرمز $[\,f \circ g\,](\,x\,)$ أو $f[g(x)]$

وتقرأ (f بعد g) أو (f تحصيل g) .

– يُمكن أن يكون تركيب دالتين غير مُعرّف .



س87/ قيمة $[\,f \circ g\,](\,x\,)$ إذا علمت أن : $f(x) = x^2 + 1\ , g(x) = x - 4$ هي:

أ) $x^2 - 8x - 17$ ب) $x^2 + 8x - 17$

ج) $x^2 + 8x + 17$ د) $x^2 - 8x + 17$

الحل : الإجابة " د " بالتعويض $f[g(x)] = [\,f \circ g\,](\,x\,) = f(x-4)$ وبالتعويض بقيمة f يكون الحل : $(x-4)^2 + 1$ وبفك مربعين يكون الحل $x^2 - 8x + 17$.

المتجهات

– يرمز للمتجه بالرمز $\langle x, y \rangle$

– المتجه الصفري : عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه ويرمز له بالرمز $\vec{0}$

– الصورة الإحداثية لمتجه تُعطى بالعلاقة : $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

– الصورة الإحداثية لمتجه بدلالة زاوية معينة ، تُعطى بالعلاقة $\langle |v| \, cos\theta, |v| \, sin\theta \rangle$

– متجه الوحدة يُعطى بالعلاقة : $u = \frac{1}{|v|} v$ ،

– i, j هي عبارة عن تبسيط لصيغة المتجهات ، ويسمى $xi + yj$ بالتوافق الخطي.

وتُعطى الصورة الإحداثي لمتجه توافق خطي بدلالة زاوية معينة بالعلاقة $\langle |v| \, (cos\theta)i, |v| \, (sin\theta)j \rangle$

– مسقط المتجه (القطعة المتوسطة للمتجهات) يُعطى بالعلاقة : $W_1 = \frac{u \times v}{|v|^2} \times v$ و $u = w_1 + w_2$

وأيضاً $W_2 = \frac{v \times u}{|u|^2} \times u$

س88/ الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4,2)$ ونقطة نهايته $B(3,-5)$ هي :

أ) $\langle -7, 7 \rangle$ ب) $\langle 7, -7 \rangle$ ج) $\langle -1, 7 \rangle$ د) $\langle 7, -1 \rangle$

الحل : $\langle 7, -7 \rangle$ بالتعويض بقانون الصورة الإحداثية للمتجه $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.

س89/ متجه الوحدة ، الذي له نفس اتجاه $v\langle -2, 3 \rangle$ هو :

أ) $\left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$ ب) $\left\langle \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$ ج) $\left\langle \frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13} \right\rangle$ د) $\left\langle \frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{-2\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

الحل : الإجابة (أ) بالتعويض في قانون متجه الوحدة.

س90/ إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2,3)$ ، ونقطة نهايته $E(4,5)$ ، فإن $\overrightarrow{DE}$ بدلالة متجهي الوحدة i, j :

أ) $2i + 6j$ ب) $6i + 2j$ ج) $2i - 6j$ د) $6i - 2j$

الحل : الإجابة (ب) ، بالتعويض بقانون الصورة الإحداثية للمتجه ، ثم كتابتها على صيغة $xi + yj$.

س91/ مسقط u على v ، إذا علمت أن $u = \langle 3, 2 \rangle$, $v = \langle 5, -5 \rangle$ هو :

أ) $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ ب) $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ ج) $\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ د) $\langle 7, -1 \rangle$

الحل : الإجابة (ج) $\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ وذلك بالتعويض في قانون مسقط المتجه .

الفصل الثالث:
المصفوفات

المصفوفات :

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$ m = صفوف ، n = أعمدة

– المصفوفة : ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين.

– يرمز للمصفوفة – عادةً – باستعمال الأحرف الكبيرة مثل : A,B,C,… .

– يرمز لعناصر المصفوفة (في الداخل) بالأحرف الصغيرة مثل : a,b,c,… .

– تكون عناصر المصفوفة عبارة عن أعداد أو رموز أو أعداد ورموز معاً.

– للمصفوفات أنواع وهي : – مصفوفة الصف – مصفوفة العمود – المصفوفة المربعة – المصفوفة الصفرية

س92/ في المصفوفة المجاورة رتبة B =

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

أ) 2×3 ب) 3×2 ج) 3×3 د) 2×2

الحل : 3×2 (m×n) وعدد العناصر = 6

س93/ في المصفوفة السابقة قيمة b_{32} :

أ) 8– ب) 10 ج) 1– د) 6

الحل : الإجابة (ج) 1– ، لأن m×n حيث m = 3 و n = 2 (أي في الصف الثالث من العمود الثاني).

س94/ رتبة المصفوفة المجاورة :

$$E = \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$$

أ) 0×3 ب) 0×3 ج) 3×1 د) 1×3

الحل : الإجابة (ج) 1 × 3. أي عدد الأعمدة = 1 ، وعدد الصفوف = 3

س95/ قيمة y في المصفوفة المجاورة :

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

أ) 6 ب) 10

ج) 4 د) 2

الحل : بالتناظر نلاحظ أن x = 6 ولذلك بما فإن 2–(6)2 = 10.

جمع المصفوفات وطرحها :

– يجب عند جمع وطرح المصفوفات أن تكون من نفس الرتبة.

$$\underset{\textbf{A}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \pm \underset{\textbf{B}}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{\textbf{A} \pm \textbf{B}}{\begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm g \end{bmatrix}}$$

س96/ ناتج جمع المصفوفة المجاورة =

$$\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -12 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\begin{bmatrix} (-9)+(-4) & 8+(-3) & 3+6 \\ (-12)+(-9) & 4+(-5) & (-7)+(18) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -13 & 5 & 9 \\ -21 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

س97/ أوجد ناتج المصفوفة المجاورة :

$$-5\left(\begin{bmatrix}4 & -8\\ 8 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & -6\end{bmatrix}\right)$$

الحل :

$$-5\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-5)\cdot 8 & (-5)\cdot(-10)\\ (-5)\cdot 5 & (-5)\cdot(-15)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40 & 50\\ -25 & 75\end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات :

– تضرب المصفوفات إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة الأولى مساوياً لعدد صفوف الثانية .

– في الضرب لا يشترط تساوي العناصر في المصفوفتين ، عكس الجمع والطرح الذي يتطلب تساوي العناصر في المصفوفتين.

س98/ هل عملية الضرب التالية معرفة ؟ $A_{4\cdot 6}\cdot B_{6\cdot 2}$

الحل : عملية الضرب معرفة لأن أعمدة **A** = صفوف **B** ($A_{m\cdot n}\cdot B_{m\cdot n}$)

س99/ هل عملية الضرب التالية معرفّة ؟ $A_{3\cdot 2}\cdot B_{3\cdot 2}$

الحل : عملية الضرب غير معرفّة لأن عدد أعمدة **A** لا تساوي عدد صفوف **B** ($A_{m\cdot n}\cdot B_{m\cdot n}$) .

س100/ أوجد ناتج ضرب المصفوفة المجاورة :

$$U=\begin{bmatrix}5 & 9\\ -3 & -2\end{bmatrix}\cdot V=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -5\end{bmatrix}$$

الحل :

$$U\cdot V=\begin{bmatrix}5(2)+9(6) & 5(-1)+9(-5)\\ (-3)(2)+(-2)(6) & (-3)(-1)+(-2)(-5)\end{bmatrix}$$

$$UV=\begin{bmatrix}64 & -50\\ -18 & 13\end{bmatrix}$$

س101/ أوجد ناتج ضرب المصفوفة المجاورة :

$$\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\ 2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$$

الحل :

$$\begin{bmatrix}(-6)(7)+ & 4(2)+ & (-9)(4)\\ 2(7)+ & 8(2) & 7(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-70\\ 85\end{bmatrix}$$

المحددات وقاعدة كرامر :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - cb$$

المحددة

قيمة المحددة

حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي

حاصل ضرب عنصري القطر الآخر

– المحددة : إذا كانت المصفوفة **A** مربعة فإن لها محددة ويرمز لها بالرمز **| A |**

– مثال : إذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

المُحددات نوعان :

* مُحددة من الدرجة الثانية (ثنائية) وتكون رتبة مصفوفتها : 2×2.

* مُحددة من الدرجة الثالث (ثلاثية) وتكون رتبة مصفوفتها : 3×3.

س102/ قيمة المحددة : $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} =$

أ) 22 ب) -22 ج) 11 د) -11

الحل :

$$\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} = (-6)\cdot(8) - (-7)\cdot(10) = 22$$

قاعدة كرامر :

– تنقسم قاعدة كرامر لقسمين :

1) قاعدة كرامر لحل نظام من معادلتين (ثنائية).

2) قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاثة معادلات (ثلاثية).

ملاحظات /

– يكون للنظام حل وحيد إذا كانت قيمة **| C |** لا تساوي صفراً .

[لا –]يكون للنظام حل وحيد إذا كانت قيمة **| C |** = صفر

– للتحقق من الحل نعوض بالقيم في المعادلات الأصلية .

س103/ حل النظام التالي :

$$7x+3y=37$$

$$\cancel{3y+7x=37}$$

$$-5x-7y=-41$$

أ) (4,3) ب) (3,4) ج) (0 ، 4) د) (2 ، 3)

الحل :

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 7(-7) - 3(-5) = -49 + 15 = -34$$

أو الحل الأفضل / بالتعويض بالخيارات..

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 37 & 3 \\ -41 & -7 \end{vmatrix}}{-34} = \frac{\cancel{37(-7)-37(-5)}}{-34} = \frac{136}{34} = 4 \qquad 37(-7)+41(3)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 37 \\ -5 & -41 \end{vmatrix}}{-34} = \frac{7(-41)-37(-5)}{34} = \frac{102}{34} = 3$$

النظير الضربي للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

س104/ أوجد النظير الضربي للمصفوفة :

الحل :

أولاً / نوجد قيمة مُحددة المصفوفة **A**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = [(2)\cdot(3) - (-4)\cdot(1)] = 10$$

ثانياً / نبدل بين موقعي عنصري القطر الرئيسي ونُغير إشارتي العُنصرين الآخرين

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ثالثاً / نضرب المصفوفة الناتجة في $\frac{1}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

الفصل الرابع:

اللوغاريتمات

اللوغاريتمات :

– التعبير اللفظي : لوغاريتم x للأساس b يُساوي y .

– التعبير الرياضي : $x = b^y \longleftrightarrow log_b x = y$

الخصائص اللوغاريتمية :

الخاصية	التبرير
$log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$log_b b = 1$	$b^1 = b$
$log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{log_b x} = x , x > 0$	$log_b x = log_b x$

تدريب1 / أكتب $log_4 16 = 2$ على الصورة الأسية :

الحل : حسب القانون يكون الحل $4^2 = 16$

تدريب2/ أكتب المعادلة التالية على الصورة اللوغاريتمية :

الحل : حسب القانون يكون: $15^3 = 3375$ $y = 3 , b = 15, x = 3375$

ولذلك يكون الحل $log_{15} 3375 = 3$

س105/ قيمة $log_{16} 4$:

أ) $\frac{1}{2}$ ب) 2 ج) 4 د) 16

الحل : أولاً نضعها على الصورة الأُسية $16^y = 4$ نبسطها: $2^2 = (2^2)^{2y}$ وبعد التبسيط $4y = 2$ إذاً $y = \frac{1}{2}$

س106/ قيمة $log_3 81$:

أ) 9 ب) 3 ج) 4 د) 27

الحل : $81 = 3^y$ ، بالتبسيط : $(3^2)^2 = 3^y$ ، بعد التبسيط : $3^4 = 3^y$ تساوت الأساسات إذاً الأسس متساوية

إذاً الحل (ج) = 4.

س107/ قيمة $log_7 \frac{1}{49} =$

أ) 7 ب) −7 ج) 2 د) −2

الحل : (د) −2 ، بالتبسيط : $\frac{1}{49} = 7^y$ ، $7^{-2} = 7^y$ ولذلك قيمة y = −2 .

س108/ $log (1000)$:

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

الحل : إذا كان العدد 1000 فإننا نعد الأصفار فقط = 3 ، مثلاً $log (10)$ = 1 ، $log (0.01)$ = −2 وهكذا..

خصائص اللوغاريتمات :

خاصية الضرب في اللوغاريتمات	$log_b\, xy = log_b x + log_b y$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$log_b\, \frac{x}{y} = log_b x - log_b y$
خاصية لوغاريتم القوة	$log_b\, x^m = m\, log_b x$
خاصية الجذر في اللوغاريتمات	$log_b \sqrt[m]{x} = \frac{log_b\, x}{m}$

تدريب1/ اكتب العبارة اللوغاريتمية التالية بالصورة المطولة : $log_2\, 12x^5\, y^{-2}$

الحل : حسب خاصية الضرب في اللوغاريتمات $log_2 12 + log_2 x^5 + log_2 y^{-2}$

بعد ذلك نقدم مكان الأس في بداية اللوغاريتم (حسب خصائص اللوغاريتمات)

$log_2 12 + 5log_2 x - 2log_2 y$

تدريب2/ اكتب العبارة اللوغاريتمية التالية بالصورة المطولة : $log_{13}\, 6a^3bc^4$

الحل : نستخدم خاصية الضرب في اللوغاريتمات $log_{13}\, 6 + log_{13} a^3 + log_{13} b + log_{13} c^4$

نُقدم الأس $log_{13}\, 6 + 3log_{13} a + log_{13} b + 4log_{13} c$

تدريب3/ اكتب العبارة اللوغاريتمية التالية بالصورة المطولة : $log_6\, 5x^3y^7z^{0.5}$

الحل : نستخدم خاصية الضرب في اللوغاريتمات $log_6 5 + log_6 x^3 + log_6 y^7 + log\, z^{0.5}$

نُقدم الأس $log_6 5 + 3log_6 x + 7log_6 y + \frac{1}{2} log\, z$.

تدريب4/ اكتب العبارة اللوغاريتمية التالية بالصورة المختصرة : $4log_3 x - \frac{1}{3} log_3 (x + 6)$

الحل : $log_3 x^4 - log_3 \sqrt[3]{(x+6)}$ وبما أن العلاقة طرح فإننا نُبدل العلاقة بالقسمة كما في خصائص اللوغاريتم

$log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$ بإمكانك الإكمال وإنطاق المقام.

س109/ قيمة $log_4 32$ من $log_4 2 = 0.5$ هي :

أ) 32.5 ب) 2.5 ج) 2.75 د) 3.95

الحل : بتحليل قيمة 32 إلى عواملها الأولية (للتخلص من قيمة أساس اللوغريتم الرابع)

فتكون $4^2 \times 2^1$ هذا يعني أنها $= log_4 2^4 \times 2^1$ ، وبذلك تخلصنا من قيمة الأساس

وهذا = $log_4 4 + \log_4 2^1$ = $2 + 0.5 = 2.5$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

?

س110/ حل المعادلة $log_2(x^2-4) = log_2 3x$ هو :

أ) -2 ب) -1 ج) 2 د) 4

الحل : بحذف الـ log_2 من كلا الطرفين ، إذاً $x^2 - 4 = 3x$ ومن ثم بالتعويض بالخيارات ..

أو باستعمال فك مربعين.

س111/ إذا علمت أن $log_2 xy = 5$ ، $log_2 \frac{x}{y} = 3$ فإن قيمة x =

أ) 4 ب) 8 ج) 12 د) 16

الحل : 16 ، وذلك برفع الأس $2^3, 2^5$ = $xy = 32$ ، $\frac{x}{y} = 8$ … وبما أن $\frac{x}{y} = 8$ إذاً $x = 8y$

وبالتعويض بالقيم $8y \times y = 32$ ، = 2 وهذه قيمة y ، إذاً قيمة x = 2 × 8 = 16

س112/ حل المعادلة $2\ log_7 x = log_7 27 + log_7 3$

أ) 30 ب) 9 ج) 3 د) 1.23

الحل : $log_7 x^2 = log_7 (27 \times 3)$ ، فسيكون الحل : $log_7 x^2 = log_7 81$ ، بشطب log_7

يكون الحل $x^2 = 81$ إذاً : $x = \sqrt{81} = 9$

س113/ حل المعادلة $log_6 x + log_6 (x+5) = 2$:

أ) 30 ب) 9 ج) 4 د) 2.25

الحل : بما أن العلاقة جمع فإننا نستعمل خاصية الضرب اللوغاريتمي $log_6 x\ (x+5) = 2$ وبتوزيع الضرب وأخذ

الأساس للوغاريتم وتحويله لأُس $log_6 x^2 + 5x = 2$ ….. $x^2 + 5x = 2^6$ إذاً $x^2 + 5x - 36$

وبفك مربعين سيكون الحل $(x-4)(x+9)$ إذاً أما $x = -9$, $x = 4$ والحل السالب مرفوض لذا الحل $x = 4$

ويُفضل التعويض بالمعادلة لأن بعض المسائل قد يكون الحل السالب مقبول – أحياناً –

المتتابعات والمتسلسلات :

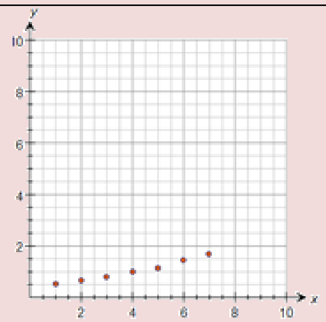
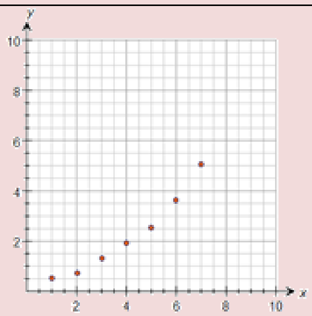
– المتتابعة : مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط محدد أو ترتيب معين ويسمى كل عدد في المتتابعة حداً

وقد تكون المتتابعة منتهية مثل : $1,2,3,4$، وقد تكون غير منتهية مثل : $1,2,3,4,\ldots$.

– المتتابعات نوعان إما متتابعة حسابية أو متتابعة هندسية .

– قد يُطلق على المتتابعات لفظ : متسلسلات ، متتاليات ، متواليات ..

– المتتابعات دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية (**N**) ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقة (**R**)

نوع المتتابعة	المتتابعة الحسابية	المتتابعة الهندسية
المقصود بها	متتابعة يمكن الحصول عليها عن طريق إضافة قيمة ثابتة للحد السابق	متتابعة يمكن الحصول عليها عن طريق ضرب الحد السابق في عدد ثابت.
مثال	$5,-6,-17,-28,\ldots$ الحد ثابت ويساوي -11 ولذا المتتابعة حسابية.	$16,24,36,54,\ldots$ يُلاحظ أن قسمة كل عدد على سابقه يُعطي نفس العدد $54/36 = 36/24 = 16/24$
تمثيلها البياني	 على شكل دالة خطية	 على شكل دالة أسية
قانون الحد النوني	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 r^{n-1}$
قانون المجموع الجزئي	$S_n = n(\frac{a_1 + a_n}{2})$	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}, r \neq 1$
معاني الرموز	$a_1, a_2, a_3,$ نوع الحد (الحد الأول ، الحد الثاني ، الحد الثالث ، ... d : أساس المتتابعة ، n : عدد طبيعي ، a_n الحد النوني ،	

س116/ مجال المتتابعة التالية $3,6,9,12,15$ هو :

أ) $\{0,1,2,3,4,5\}$ ب) $\{1,2,3,4,5\}$ ج) $\{3,6,9,12,15\}$ د) R

الحل : الإجابة (ب) دائماً المجال في المتتابعات هو مجموعة الأعداد الطبيعية (N) أما المدى فهو $\{3,6,9,12,15\}$

س117/ هل تمثل المتتابعة ، متتابعة حسابية أم لا ؟ $5,-6,-17,-28$ ؟

– تمثل دالة حسابية لان الفرق ثابت وهو -11 .

س118/ هل تمثل المتتابعة ، متتابعة حسابية أم لا $-4,12,28,42,\ldots$ ؟

– لا تمثل دالة حسابية لأن الفرق ليس ثابتاً في الحدود.

س119/ الحد المئة في المتتابعة : $9,16,23,30,\dots$:

أ) 756 ب) 702 ج) 1028 د) 6002

الحل: نلاحظ أن الأساس (d) ثابت وهو 7 أي أن المتتابعة حسابية ، ولذلك عوض بالقانون $a_n = a_1 + (n-1)d$

وبالتعويض بالقانون : $a_n = 9 + (100-1)(7)$ وهذا يساوي : 702

س120/ صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية التالية $5,-13,-31,\dots$ هي :

أ) $a_n = 18n + 23$ ب) $a_n = -18n + 23$

ج) $a_n = 18n - 23$ د) $a_n = -18n - 23$

الحل : الإجابة (ب) بالتعويض بالقانون $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، يُلاحظ أن الحد الأول $a_1 = 5$ والأساس d

($-13 - 5 = -18$) لذلك بالتعويض بالقانون $a_n = 5 + (n-1)(-18)$ = $a_n = -18n + 23$

س121/ الوسطين الحسابيين $-8,\dots,\dots,10,\dots$ هما :

أ) −2,8 ب) −2,4 ج) −2,6 د) 2,6

الحل : الإجابة (~~ج~~) بما أن هُناك 4 حدود فإن $n = 4$ ، والحد الرابع (a_4) = 10 ،

وبالتعويض بالقانون $a_n = a_1 + (n-1)d$ يتضح أن : $10 = -8 + (4-1)d$ إذاً $d = 6$ وبذلك

$-8 + 6 = -2$, $-2 + 4 = 6$.

س122/ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية التالية : 12+19+26+...+180 :

أ) ~~2400~~ ب) 2600 ج) 3600 د) 9600

الحل : ~~$n = 5$~~ , $d = (19-12) = 7$, $a_n = 180$, $a_1 = 12$

وبالتعويض بقانون المتتابعة الحسابية لإيجاد قيمة n

تكون قيمة n = 25 ، وبالتعويض بقانون المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية $S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

$S_n = 25\left(\frac{12+180}{2}\right) = 25\left(\frac{192}{2}\right) = 25\left(\frac{192}{2}\right) = 2400$ لذا تكون الإجابة (أ).

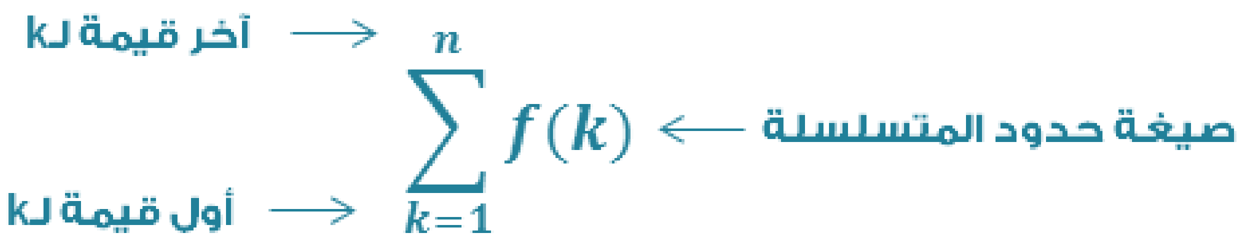
س123/ إذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية 5 ، وأساسها 2 ، ومجموعها 1275 ، فإن عدد حدودها :

أ) 5 ب) 6 ج) 7 د) 8

الحل : بالتعويض بقانون مجموع المتسلسلة ~~الحسابية~~ $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ [بالتعويض بقآنون مجموع التسلسلة الهندسية

وبالتعويض : $a_1 = 5 , r = 2 , S_n = 1275$: $\frac{5-5\times(2^n)}{1-2} = 1275$ = $n = 8$

رمز المجموع :



س124/ قيمة مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=4}^{18} f(6k-1)$

أ) 23 ب) 107 ج) 975 د) 1203

الحل :

– الخطوة الأولى / نعوض بقيم k (الكبرى والصغرى) في الدالة f(x) ..

أقل قيمة 23 = (6 (4) – 1) ، وأكبر قيمة 107 = (6 (18) – 1)

– الخطوة الثانية / إيجاد عدد الحدود (n) ، وذلك عن طريق طرح القيمة الكبرى من الصغرى وإضافة 1

(18 – 4) + 1 = 15

همسة / لماذا أضفنا 1 هُنا ; حسب مبدأ العد (من 4 إلى 18) يكون 15 حد.

– الخطوة الثالثة / نستعمل قانون صيغة المجموع :

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ ، وبالتعويض : $S_{15} = 15\left(\frac{23+107}{2}\right) = 975 = 15\,(65)$

س125/ قيمة المتسلسلة : $\sum_{64}^{31} (4x+1)$:

أ) 6494 ب) 6112 ج) 1203 د) لايمكن الحل

الحل : الإجابة (ج) لايمكن الحل ، لأن لا يمكن أن تكون القيمة الصغرى لـ x > القيمة العليا لـ x .

س126/ قيمة المتسلسلة : $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$

أ) 131072 ب) 2048 ج) 4080 د) –5010

الحل : الإجابة (ج) يُلاحظ أن المتسلسلة هندسية لاشتمالها على الدالة الأسية ..

لذا أقل قيمة لـ k هي : $4(2)^{3-1}$ وهذا = $4(2)^2 = 4(4) = 16$ وأكبر قيمة بالتعويض 2048

وكذلك عدد الحدود (n) = $\cancel{6}$ ، وبتطبيق قانون صيغة المجموع للمتتابعة الهندسية $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$

n=8

يكون الحل : $S_n = \frac{16-16(2)^8}{1-2} = 4080$

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية :

– المتسلسلات الهندسية الغير المنتهية : متسلسلات لها عدد لانهائي من الحدود ، وهي نوعان :

* متسلسلات متقاربة : يقترب المجموع من عدد حقيقي $|r| < 1$.

* متسلسلات متباعدة : يتباعد المجموع من العدد الحقيقي $|r| \geq 1$.

س127/ هل المتسلسلة متقاربة أو متباعدة : ...+24+36+54

الحل : المتتابعة هندسية لذلك نقسم الحد التالي على سابقه $\frac{2}{3} = \frac{36}{54}$ ويلاحظ أن $\frac{2}{3} < 1$ لذا المتسلسلة متقاربة .

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية :

– مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية يرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$ ويُعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

س128/ قيمة المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$:

أ) ∞ | ب) $-\infty$ | ج) 95 | د) 90

الحل : استخدام قانون المتسلسلة الهندسية اللانهائية $S = \frac{a_1}{1-r}$

يُلاحظ أن : $r = \frac{4}{5}$, $a_1 = 18$ وبالتعويض المباشر S = 90 .

قانون مجموع الأعداد:

يُعطى قانون مجموع الأعداد بالعلاقة $x\ \frac{x+1}{2}$

س129/ ~~عدد الأعداد الصحيحة~~ من 1 إلى 100 = مجموع الأعداد الصحيحة من

أ) 200 | ب) 4950 | ج) 5050 | د) N

الحل : الإجابة (ج) $x\ \frac{x+1}{2} = 100\ \frac{101}{2} = 5050$

الفصل الخامس:

الاحتمالات

الاحتمالات :

– فضاء العينة لتجربة : مجموع جميع النواتج الممكنة ،ويمكن تمثيلة باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

– احتمال أي حديث منتظم $= \frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فراغ العينة}}$.

– مبدأ العد الأساسي : $n_1 . n_2 . n_3 ... n_k$

– المضروب : يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب **n** على الصورة **n!** ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي **n** . أي : **1 . 2 . ... . (n−2) . (n−1) . n = n!** ويُعرّف **0! = 1** .

– التباديل : تنظيم لمجموعة من الأعداد ، يكون الترتيب فيه مهماً جداً . وقانونه يُعطى بالعلاقة : $nPr = \frac{n!}{(n-1)!}$

حيث **n**: العناصر المتمايزة ، **r**: عدد المرات .

$$^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

– التباديل مع التكرار: $\frac{n!}{r_1 . r_2 . \dots . r_k!}$.

– التباديل الدائرية : $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

– التوافيق : تنظيم لمجموعة من الأعداد ، يكون الترتيب فيها غير مهم وقانونه يُعطى بالعلاقة : $nCr = \frac{n!}{(n-1)!\,r!}$

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

– الاحتمال الهندسي : $\frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{\text{طول القطعة المستقيمة كاملة}}$

– القيمة المتوقعة $E(X)$.

س130/ في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة ، احتمال ظهور عدد زوجي :

أ) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{2}{6}$ ج) $\frac{3}{6}$ د) 6

الحل : الإجابة (ج) $\frac{3}{6}$ ، حجر النرد يحتوي على { 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } والأعداد الزوجية 3 وهي {2,4,6}

وبالتعويض بقانون الاحتمالات يتضح أن الحل هو (ج) .

س131/ يريد أحمد شراء ثوب من بين البدائل التالية ، عدد الخيارات المتاحة له ليختار ثوباً مناسباً هو :

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

أ) 264 ب) 441 ج) 820 د) 1080

الحل : الإجابة (د) باستعمال مبدأ العد الأساسي.

س132/ اختارت سارة زوج من الأحذية من بين المقاسات : 39,40,41,42,43,44,45 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض ، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي ، وهناك 3 أشكال مختلفة للحذاء ، فما عدد النواتج الممكنة في هذه الحالة ؟

أ) 24 ب) 168 ج) 321 د) 514

الحل : الإجابة (ب) 168 ، 168 = 3 × 2 × 4 × 7

س133/ بكم طريقة يمكن لأربعة أشخاص الجلوس في صف به 8 مقاعد ؟

أ) 161280 ب) 1680 ج) 510 د) 32

الحل : باستعمال نظرية المضروب لـ أربعة أشخاص : 8 × 7 × 6 × 5 ×= 1680 طريقة .

س134/ إذا كانت لدينا 7 قصص مختلفة وأردنا أن نوزع ثلاث منها على 3 أشخاص ، فكم عدد طرق توزيع القصص السبع على الأشخاص الثلاثة ؟

أ) 35 ب) 63 ج) 120 د) 210

الحل : (د) 2010 ، وذلك باستعمال نظرية المضروب : 7 لـ 3 أشخاص أي $7 \times 6 \times 5 = 210$ أو مبدأ العد.

س135/ إذا كان لدينا 5 مقاعد ، فإن عدد الطرق التي يمكن بها إجلاس خمسة أشخاص على هذه المقاعد =

أ) 125 ب) 120 ج) 210 د) 240

الحل : الإجابة (ب) 120 ، باستعمال نظرية المضروب : $(1\times2\times3\times4\times5) = 120$ أو باستعمال قاعدة التباديل.

س136/ بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 أشخاص في صف به 9 كراسي ؟

أ) 126 ب) 12096 ج) 15120 د) 60480

الحل : (ج) 15120 ، وذلك باستعمال قاعدة التباديل ، أو مبدأ العد لـ 5 أشخاص بالنسبة لعدد الكراسي .

$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$ طريقة .

س137/ ما احتمال أن يكون 55652113 رقماً لهاتف مكون من 8 أرقام هي : 5,1,6,5,2,1,5,3 ؟

أ) 3360 ب) $\frac{1}{3360}$ ج) 302010 د) $\frac{1}{302010}$

الحل : الإجابة (ب) ، نُلاحظ أن هُناك تكرار في 5,1,6,5,2,1,5,3 لذلك نستعمل قانون إيجاد التباديل مع التكرار $\frac{n!}{r_1!.r_2!\ \dots\ .r_k!}$ ، وبالتعويض بالقانون : $\frac{8!}{3!.2!} = \frac{8.7.6.5.3.2.1}{3.2.1.2.1}$ وبالاختصار $\frac{8.\ 7.6.\ 5.4}{2} = 3360$ ولكن المطلوب الاحتمال وليس عدد الطرق ويكون الحل $\frac{1}{3360}$.

س138/ إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار دائري عشوائياً ، فما احتمال ظهورها ؟

أ) 120 ب) $\frac{1}{120}$ ج) 360 د) $\frac{1}{360}$

الحل : الإجابة (ب) وبالتعويض بقانون التباديل الدائرية : $\underline{(n-1)! = \frac{n!}{n}}$ يكون الحل $120 = 5! = (6-1)!$

والمطلوب الاحتمال ، لذا يكون الحل : $\frac{1}{120}$.

س139/ أرادت النوادي الأربعة (برشلونة ، ريال مدريد ، فالنسيا ، مالقا) إقامة مباريات كرة القدم فيما بينها بحيث تلعب هذه النوادي مثنى مثنى . فبكم طريقة يمكن إتمام ذلك ؟

أ) 6 ب) 36 ج) 9 د) 81

الحل : (أ) 6 ، بالتعويض بقانون التوافيق.

س140/ اذا كان لدينا كيس غير شفاف يحتوي على 6 كرات حمراوات و5 صفراوات فإذا سحبنا 4 كرات عشوائياً فما احتمال ان تكون 3 حمراوات وكره صفراء ؟

أ) 330 ب) $\frac{10}{33}$ ج) $\frac{33}{10}$ د) 33

الحل : الإجابة (ج) ، عدد الكرات جميعها = 6+5 = 11 ، عدد عناصر فراغ العينة = عدد الكرات الكلية = 11

11C4

عدد الكرات المسحوبة باستعمال قانون التوفيق 330 = ~~4C11~~ ، والمطلوب في صدر السؤال 3 حمراء وكرة واحدة صفراء باستعمال التوافيق أيضاً ~~3C6~~ × 5C1 = 100 إذاً الاحتمال المطلوب $\frac{10}{33} = \frac{100}{330}$.

6C3

احتمالات الحوادث :

– الحادثة المستقلة : هي الحادثة التي تستقل بذاتها أي لا يؤثر احتمال $\mathbf{A}$ في احتمال حدوث $\mathbf{B}$.

– الحادثة الغير مستقلة : هي الحادثة التي لا تستقل بذاتها أي يؤثر احتمال $\mathbf{A}$ في احتمال حدوث $\mathbf{B}$ بطريقة ما .

– الحادثة المتنافية : الحادثة التي تنفي إحداهما الأخرى أي لا يوجد نواتج مشتركة بينهما.

– الحادثة الغير متنافية : الحادثة التي لا تنفي إحداهما الأخرى أي يوجد نواتج مشتركة بينهما.

– الحادثة المتتمة : الحادثة التي تتم إحداهما الأخرى .

* احتمال الحادثتين المستلقتين تُعطى بالعلاقة : $\boldsymbol{P\left(A \text{ و } B\right) = P(A)\,.\,P(B)}$.

* احتمال الحادثتين الغير مستقلتين تُعطى بالعلاقة : $\boldsymbol{P\left(A \text{ و } B\right) = P(A)\,.\,P(B|A)}$.

يُسمى $\boldsymbol{P(B|A)}$ بالاحتمال المشروط .

* الاحتمال المشروط يُعطى بالعلاقة : $\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}}$.

* الحوادث المتنافية تُعطى بالعلاقة : $\boldsymbol{P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A) + P(B)}$.

* الحوادث الغير متنافية تُعطى بالعلاقة : $\boldsymbol{P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A) - P(B)}$.

* الحوادث المتتمة تُعطى بالعلاقة : $\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$.

تدريب1/ حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين :

– إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضاً .

الحل : نلاحظ أن لم تؤثر الحادثة الأولى في الحادثة الثانية لذلك الحادثتان مستقلتين.

– سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات ، ثم أُعيدت للمجموعة ، ثم سحبت بطاقة أخرى.

الحل : نُلاحظ أن البطاقة أثرت في ترتيب البطاقات ، لذلك الحادثتان غير مستقلتان.

– المسؤول طالب من الصف الثاني ثانوي أو من الصف الثالث ثانوي .

الحل : نُلاحظ أن الحادثتان مفصولة بـ أو ، ولا يوجد بينهما نواتج مشتركة ، لذا الحادثتان متنافيتان.

الدراسات الاحتمالية :

– الدراسة التجريبية : دراسة تتطلب تجربة ما لعينة من المجتمع ، لحل مشكلة ما .

– الدراسات بالملاحظة : دراسة لا تتطلب تجربة ، ولكن تتطلب ملاحظة لاستقصاء النتيجة.

– الدراسة المسحية : دراسة تتطلب جمع البيانات والحقائق لحل مشكلة ما .

– الدراسة المسحية المنحازة : دراسة جزء معين من المجتمع الكلي ، لهم رأي أو إجابة منحازة عن المجتمع .

– الدراسة المسحية الغير منحازة : دراسة جزء معين من المجتمع الكلي ، لهم رأي أو إجابة تمثل رأي المجتمع.

تدريب2/ حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية منحازة أو غير منحازة فيما يأتي :

– استطلاع آراء أفراد في سوق الماشية ; لمعرفة ما إذا كان سكان المدينة يحبون تربية الماشية أو لا ؟

الحل : دراسة مسحية منحازة ، لأنها تمثل جزء من المجتمع الكلي ، ورأيهم منحاز عن المجتمع.

– سؤال كل عاشر شخص يخرج من قاعة الندوات عن عدد مرات حضوره ندوات ثقافية ; لتحديد مدى دعم سكان المدينة للندوات الثقافية ؟

الحل : دراسة مسحية منحازة ; لأنها تمثل جزء من المجتمع الكلي ، ورأيهم منحاز لأنهم من الطبقة المثقفة في المجتمع.

مقاييس النزعة المركزية :

– أبرز مقياس النزعة المركزية هي : المتوسط ، الوسيط ، المنوال ، المدى .

* المتوسط الحسابي يُعطى بالعلاقة : $\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$.

* الوسيط : ترتيب للقيم إما تصاعدياً أو تنازلياً ، وهو قيمة تتوسط مجموعة من القيم.

* المنوال: القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً.

* المدى : أكبر قيمة – أصغر قيمة.

تدريب3/ المتوسط الحسابي للأعداد : 5,6,7,8,9 ؟

الحل : $\frac{5+6+7+8+9}{5} = \frac{35}{5} = 7$

تدريب4/ الوسط الحسابي للأعداد 7,9, 3,5,2 ؟

بترتيب الأعداد تنازلياً أو تصاعدياً : 9,7,5,3,2 ويُلاحظ أن عدد القيم = عدد فردي لذلك القيمة التي تقطع في الوسط أو المنتصف = 5 .

تدريب5/ الوسط الحسابي للأعداد 9,8,6,4,3,2 ؟

– يُلاحظ أن الأعداد مرتبة ، ويُلاحظ أيضاً أن عدد القيم = عدد زوجي ، وبالتالي نقوم بجمع القيمتين 6+4/2 أي = 5 .

هامش الخطأ :

– عند سحب عينة n ، من مجتمع كلي ، فإن هناك خطورة وجود خطأ في المعاينة وكلما زاد حجم العينة قل هامش الخطأ

ويُعطى قانون هامش الخطأ بالعلاقة : $\pm = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

مقاييس التشتت :

– مقاييس التشتت : هي مقدار تباعد البيانات أو تقاربها ، ويوجد مقياسان للتشتت هما :

* التباين * الانحراف المعياري

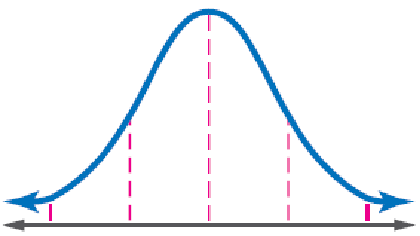
قانون الانحراف المعياري لعينة :

$$s = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}\,)^2}}{n-1}$$

قانون الانحراف المعياري لمجتمع

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu\,)^2}}{n}$$

التوزيعات الطبيعية والملتوية :



× خصائص التوزيع الطبيعي :

– التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس ، ومتماثل بالنسبة للمتوسط.

– يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال وتقع في المركز.

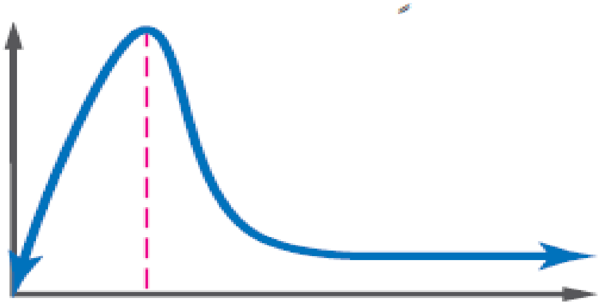
– المنحنى متصل.

– يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب ، ولكنه لا يمسه.

× التوزيعات الملتوية :

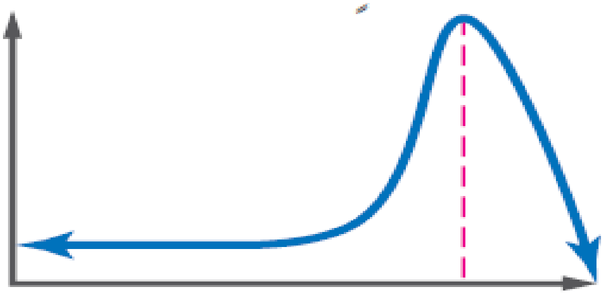
التواء موجب

(ملتوٍ إلى اليمين)



التواء سالب

(ملتوٍ إلى اليسار)



الفصل السادس:
الدوال المثلثية
والزوايا

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية :

– حساب المثلثات : دراسة العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث القائم الزاوية .

– الدوال المثلثية هي : $Sin\theta, Cos\theta, Tan\theta, Csc\theta, Sec\theta, Cot\theta$.

يُعرف الـ Sin : بـ الجيب أو (جا الزاوية) ، ويُعرّف الـ Cos : بـ جيب تمام الزاوية) أو جتا الزاوية) ،

ويُعرف Tan : بـ ظل الزاوية أو (ظا الزاوية) ، وأما Csc فيُعرّف على أنه قاطع تمام الزاوية (أو قتا)

وكذلك Sec : بـ قاطع أو (قا الزاوية) ، وأخيراً Cot : بـ ظل التمام (ظتا) .

– قوانين الدوال المثلثية (المتطابقات المثلثية) :

$$tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \qquad csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

وكذلك :

$$tan\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta} \qquad tan\theta = \frac{1}{cot\theta} \qquad cos\theta = \frac{1}{sec\theta} \qquad sin\theta = \frac{1}{csc\theta}$$

tan=sin÷cos

– ملاحظة / Csc هو معكوس Sin ، و Sec معكوس Cos و Cot معكوس Tan ..

– متطابقات فيثاغورس :

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta \qquad cot^2\theta + 1 = csc^2\theta \qquad cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

– متطابقات الدوال الزوجية والفردية : Cos(– 0)= cos

$$tan(-\theta) = -tan \qquad \cancel{cos(-\theta)} = -cos \qquad sin(-\theta) = -sin$$

– متطابقات الزاويتين المتتامتين :

$$tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cot\theta \qquad cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta \qquad sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$$

س141/ العبارة $\frac{sin\theta\ csc\theta}{tan\theta}$ تُكافِئ : Cot لسؤآل هذا صحيح ولكن جميع الخيآرآت خآطئة لحل هذا السؤآل

أ) $\frac{1}{cot\theta}$ ب) $\frac{1}{sec\theta}$ ج) $\frac{1}{csc\theta\ sec\theta}$ د) 1

الحل : الإجابة (أ) $\frac{sin\theta \times \frac{1}{sin\theta}}{cot\theta}$ أي $\frac{1}{cot\theta}$

س142/ $sin - \theta =$

أ) θ ب) $-\theta$ ج) $-sin$ د) $-sec$

الحل : الإجابة (ج) ، بتطبيق متطابقة الدوال الزوجية والفردية.

– الزوايا الشهيرة لبعض قيم الدوال المثلثية :

	$\theta=0$	$\theta=30$	$\theta=45$	$\theta=60$	$\theta=90$	$\theta=180$	$\theta=360$
$sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1−	1
$tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	0	0

– المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما :

*** متطابقات المجموع :**

$$sin(A+B)=sinAcosB+cosA\,sinB$$
$$cos(A+B)=cosA\cdot\,cosB-sinA\,\cdot sinB$$
$$tan(A+B)=\frac{tanA+tanB}{1-tanA\cdot\,tanB}$$

*** متطابقات الفرق :**

$$sin(A-B)=sinAcosB-cosAsinB$$
$$cos(A-B)=cosA\cdot\,cosB+sinA\,\cdot sinB$$
$$\cancel{tan(A+B)=\frac{tanA+tanB}{1+tanA\cdot\,tanB}}$$
$$tan(A-B)=\frac{tanA-tanB}{1+tanA\,tanB}$$

– المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$tan2\theta=\frac{2tan\theta}{1-tan^2\theta}$$
$$Cos2\theta=1-sin^2\theta$$
$$sin2\theta=2sin\theta\,\cdot cos\theta$$

– المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية :

$$tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}}\,,cos\theta\neq1$$
$$cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\theta}{2}}$$
$$sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}}$$

Cos15

س143/ $sin45\,\cancel{cos45} + sin15\,cos45 =$

أ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل : بتطبيق قانون متطابقات المجموع

$$sin(A+B) = sinAcosB + cosA\,sinB$$

يتضح أن الحل : $sin45 + 15 = sin60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

س144/ العبارة $\frac{cos\theta}{1-sin^2\theta}$ تُكافئ :

أ) $cos\theta$ ب) $sec\theta$ ج) $sec\theta$ د) $tan\theta$

الحل : الإجابة (ب) $sec\theta$ .. قم بالتفكير بحل هذه المسألة..

س145/ $sin15\,cos15 =$

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) 1 د) 0

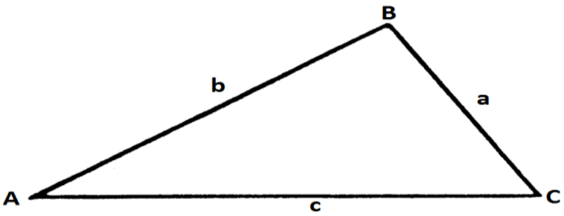
الحل :

$$sin(A+B) = sinAcosB + cosA\,sinB$$

$$\frac{1}{2}(sin\,(15+15) + sin(15-15) = \frac{1}{2}(sin\,30\ + sin\,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{1}{4}$$

قوانين المثلثات :

– قانون الجيوب :



* مساحة المثلث :

المساحة = $\frac{1}{2}bc\sin A$ المساحة = $\frac{1}{2}ac\sin B$ المساحة = $\frac{1}{2}ab\sin C$

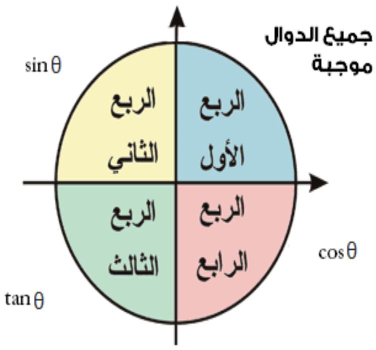
* مساحة المثلث بمعلومية قياس زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه :

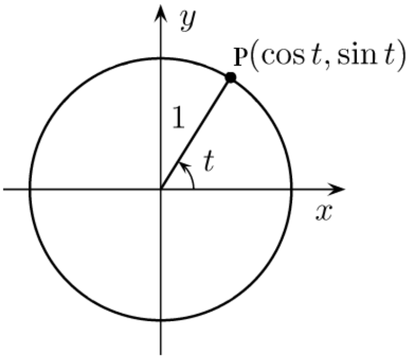
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

– قانون جيوب التمام :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قيم الدوال المثلثية :





– دائرة الوحدة : هي دائرة نصف قطرها يساوي 1 .

س145/ إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ فإن قيمة $sin\theta$ =

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $-\frac{1}{2}$ د) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل : الإجابة (د) $P(cos\theta, sin\theta)$ ولذلك قيمة $sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

س146/ زاوية 130^o تُكافئ :

أ) 490 ب) −490 ج) 560 د) −560

الحل : 490 ، وذلك لأن (130 + 360 = 490) أما الزاوية بالسالب فتكون (130−360 = −230)

س147/ القيمة الدقيقة لـ $cos240$:

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل : الإجابة (ب) وذلك لأن (240−180 = 60) ، ولأن 240 تقع في الربع الثالث فإن cos تكون قيمتها سالبة و $cos\ 60 = \frac{1}{2}$ ولأن قيمتها سالبة فإن القيمة الدقيقة تكون $-\frac{1}{2}$.

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس :

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
$\frac{\pi \text{ راديان}}{180}$	$\frac{180}{\pi \text{ راديان}}$

س148/ إذا علمت أن قياس الزاوية بالراديان = $\frac{5\pi}{2}$ ، فإن قياسها بالدرجات =

أ) 72 ب) 450 ج) −72 د) −450

الحل : الإجابة (ب) 450 بالتعويض بقانون التحويل من راديان للدرجات .

س149/ قيمة الزاوية 120 بالراديان :

أ) $\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi}{216}$ ج) $-\frac{\pi}{6}$ د) $-\frac{\pi}{216}$

الحل : الإجابة (أ) بالتعويض بقانون الراديان.

عدد الدورات :

– يُعطى قانون عدد الدورات بالعلاقة : عدد الدورات = $\frac{\text{المسافة}}{\text{محيط العجلة}}$.

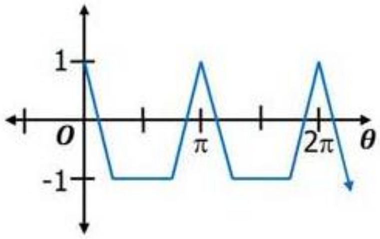
س150/ طول نصف قطر إطارات شاحنة 33in. المسافة التي تقطعها الشاحنة بعد أن تدور إطاراتها ثلاثة أرباع دورة هي :

أ) 24.75π ب) 44π ج) 49π د) 55π

الحل : $\frac{3}{4} = \frac{x}{66\pi} = 49\pi$. (66 من محيط العجلة وهي محيط الدائرة : 2rπ).

الدوال الدورية :

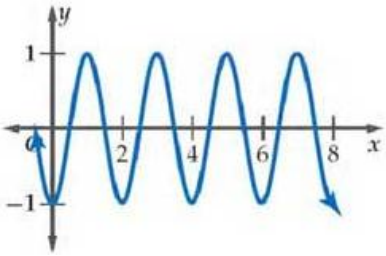
– يكون شكل الدالة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية ، ويسمى النمط الواحد الكامل منها دورة والمسافة الأفقية في الدورة بطول الدورة.



س151/ طول الدورة في الشكل التالي :

أ) -1 ب) π ج) 2π د) $\frac{\pi}{2}$

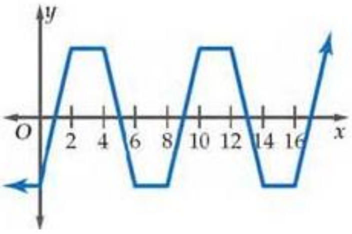
الحل : الإجابة (ب) π ، وذلك لأن $\pi - 0 = \pi$ وكذلك $2\pi - \pi = \pi$



س152/ طول الدورة في الشكل التالي :

أ) 1 ب) 2 ج) 4 د) -1

الحل : طول الدورة = 2 ، وذلك لأن ... , $6-4 = 2$, $4-2 = 2$

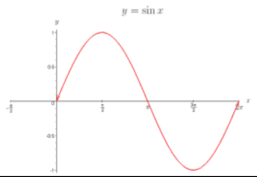
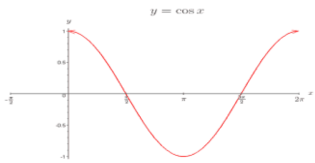


س153/ طول الدورة في الشكل التالي :

أ) 6 ب) 8 ج) 4 د) 10

الحل : الإجابة (ب) 8 ، وذلك لأن ($4+2 = 6$) ، ($8+6 = 14$) إذاً ($14-6 = 8$) ...

تمثيل الدوال المثلثية بيانياً :

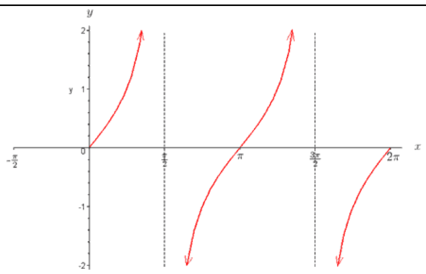
دالة الجيب وجيب التمام		
الدالة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	R	R
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة (a)	1	1
طول الدورة	360^o	360^o

$y = a\cos b\,\theta$, $y = a\sin b\theta$ ، السعة تكون | a | وطول الدورة $\frac{360^o}{|b|}$

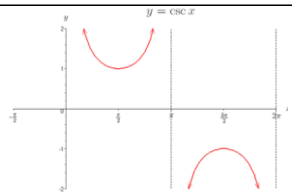
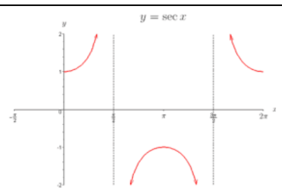
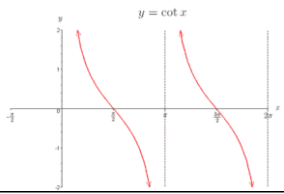
س154/ أحسب سعة الدورة وطول الدورة للدالة $y = 4\cos 3\theta$ ،

الحل : سعة الدورة 4 = | 4 | = | a | ، طول الدورة $120^o = \frac{360^o}{|3|} = \frac{360^o}{|b|}$.

دالة الظل :

دالة الظل	
الدالة المولدة (الأم)	$y = \tan \theta$
التمثيل البياني	
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n , n \in Z \}$
المدى	R
السعة (a)	غير معرفة (U)
طول الدورة	180^{o}

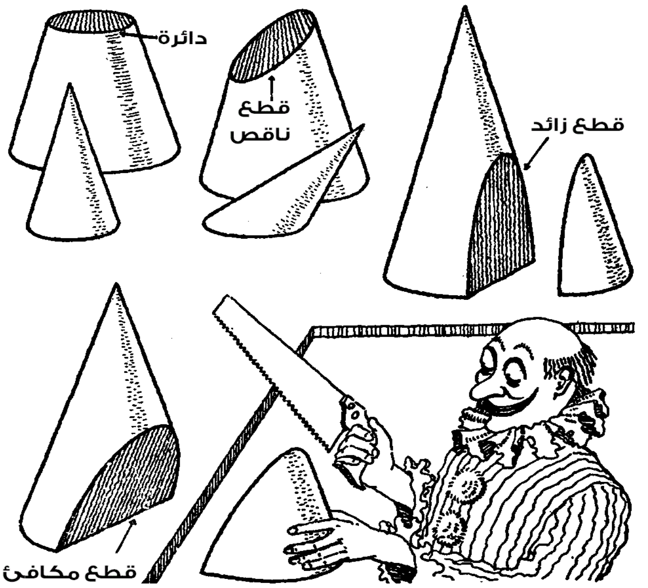
دالة قاطع التمام والقاطع وظل التمام :

دوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام			
الدالة المولدة (الأم)	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n , n \in Z \}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n$ $n \in Z \}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n , n \in Z \}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	R
السعة (a)	غير معرفة (U)	غير معرفة (U)	غير معرفة (U)
طول الدورة	360^{o}	360^{o}	180^{o}

الفصل السابع:

القطوع المخروطية والنهايات وحساب التكامل والتفاضل

* القطوع المخروطية :



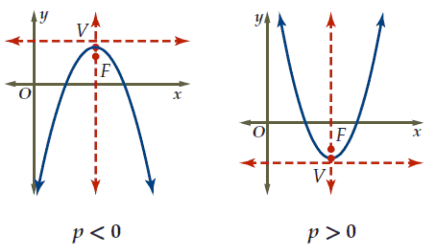
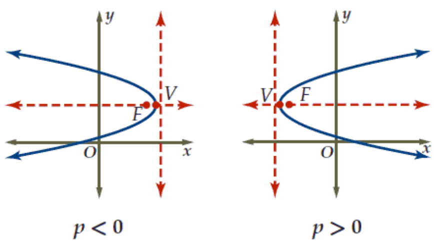
– القطوع المخروطية : هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو إحداهما.

– القطع المكافئ : هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى والتي تبعد عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة وبعد ثابت ويسمى الدليل.

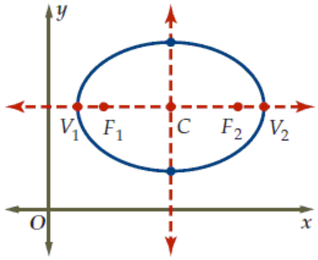
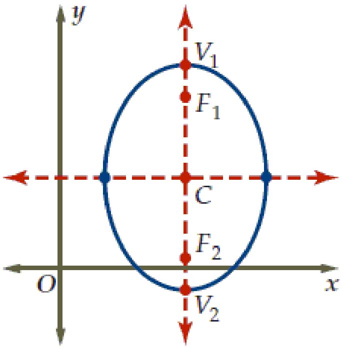
– القطع الناقص : المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين يساوي مقداراً ثابتاً.

– القطع الزائد : المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن بؤرتين مقداراً ثابتاً .

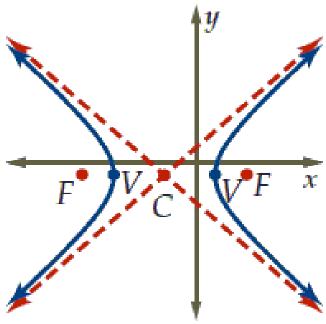
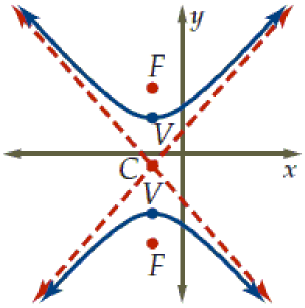
خصائص القطع المكافئ :

الصورة القياسية :	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	الصورة القياسية :	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
الشكل البياني :		الشكل البياني :	
الاتجاه :	المنحنى مفتوح رأسيًا	الاتجاه :	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس :	(h, k)	الرأس :	(h, k)
البؤرة :	$(h, k+p)$	البؤرة :	$(h+p, k)$
معادلة محور التماثل :	$x = h$	معادلة محور التماثل :	$y = k$
معادلة الدليل :	$y = k - p$	معادلة الدليل :	$x = h - p$
طول الوتر البؤري :	$\|4p\|$	طول الوتر البؤري :	$\|4p\|$

خصائص القطع الناقص :

الصورة القياسية :	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	الصورة القياسية :	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
الشكل البياني :		الشكل البياني :	
الاتجاه :	المحور الأكبر أفقي	الاتجاه :	المحور الأكبر رأسي
المركز :	(h, k)	المركز :	(h, k)
البؤرتان :	$(h \pm c, k)$	البؤرتان :	$(h, k \pm c)$
الرأسان	$(h \pm a, k)$	الرأسان :	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان :	$(h, k \pm b)$	الرأسان المرافقان	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر :	$y = k$	المحور الأكبر :	$x = h$
المحور الأصغر:	$x = h$	المحور الأصغر:	$y = k$
العلاقة بين a,b,c	$c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	العلاقة بين a,b,c	$c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

خصائص القطع الزائد :

الصورة القياسية :	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	الصورة القياسية :	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
الشكل البياني :		الشكل البياني :	
الاتجاه :	المحور القاطع أفقي	الاتجاه :	المحور القاطع رأسي
المركز :	(h, k)	المركز :	(h, k)
الرأسان :	$(h \pm a, k)$	الرأسان :	$(h, k \pm a)$
البؤرتان :	$(h \pm c, k)$	البؤرتان :	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$y = k$	المحور القاطع:	$x = h$
المحور المرافق:	$x = h$	المحور المرافق:	$y = k$
خط التقارب :	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$	خط التقارب :	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a,b,c	$c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2-b^2}$	العلاقة بين a,b,c	$c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2-b^2}$

الدائرة وخصائصها :

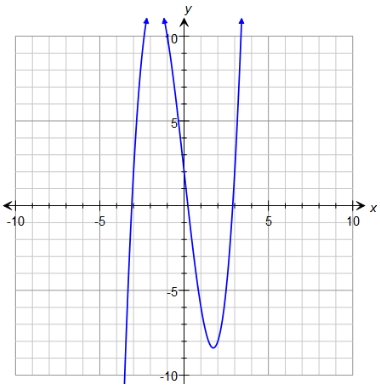
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة تُعطى بالعلاقة :

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

– النهايات (Limits) :

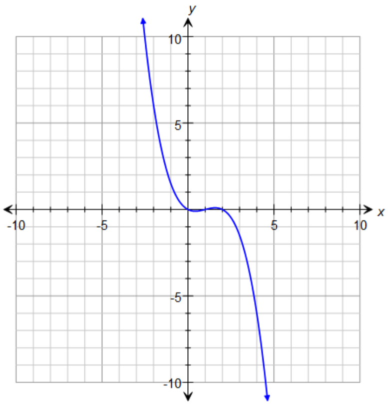
س155/ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ في الشكل التالي :



أ) 0   ب) ∞ ج) $-\infty$ د) i

الحل : الإجابة (ب) ∞ ، يكون المحور ممتد إلى موجب المالانهاية في محور **x** ، ولذلك يكون محور الـ **y** أو **f(x)** ممتد إلى موجب المالانهاية أيضاً .

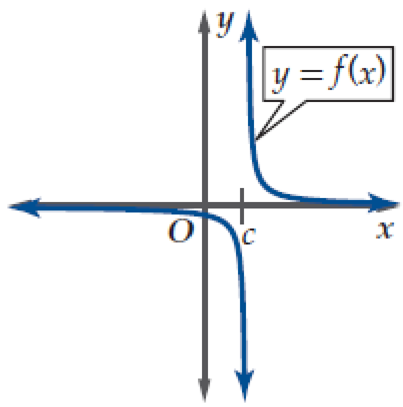
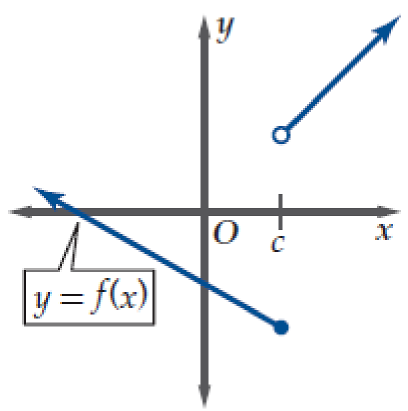
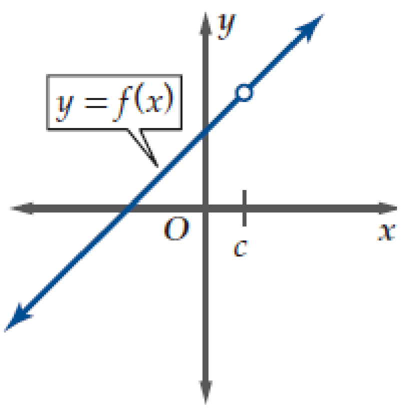
س156/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ في الشكل التالي :



أ) 0   ب) ∞ ج) $-\infty$ د) i

الحل : الإجابة (ب) ∞ ، وذلك عندما تؤول أو تقترب **x** من $-\infty$ ، تكون الدالة **f(x)** تقترب من موجب المالانهاية $+\infty$

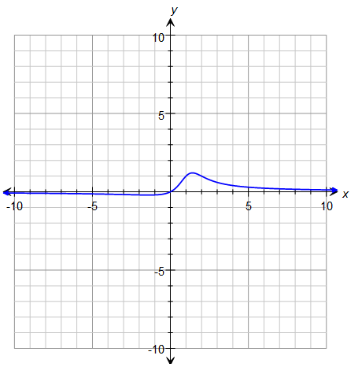
أنواع عدم الاتصال :

عدم اتصال لانهائي	عدم اتصال قفزي	عدم اتصال نقطي
		
سميت بعدم الاتصال اللانهائية ، لأن الدالتين غير متصلتين وتمتد للمالانهاية من الطرفين.	سميت بعدم الاتصال القفزي لأن الدالة تكون على شكل قفزة .	سميت بعدم الاتصال النقطي ، لأن هُناك نقطة غير متصلة بالدالة.

- الدوال
  - معرّفة
    - النهاية موجودة
      - في حالة التساوي
        - الدالة متصلة
      - في حالة عدم التساوي
        - عدم اتصال نقطي
    - النهاية غير موجودة
      - عدم اتصال قفزي
  - غير معرّفة
    - النهاية موجودة
      - عدم اتصال نقطي
    - النهاية غير موجودة
      - عدم اتصال لانهائي

– يُسمى عدم الاتصال النقطي : عدم اتصال قابل للإزالة.

– يُسمى عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي : عدم اتصال غير قابل للإزالة.



س157/ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ في الشكل التالي :

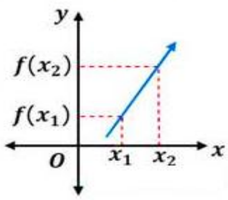
أ) 0 ب) ∞ ج) $-\infty$ د) غير معرف

الحل : الإجابة (أ) 0 ، لأنه لا يوجد امتداد للمالانهاية وسالب المالانهاية على أو حول محور y.

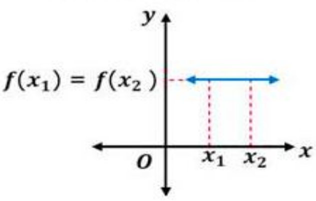
دوال التزايد والتناقص والثابتة :

في الدالة

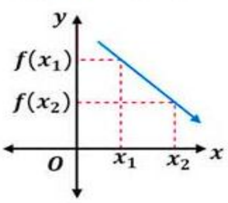
المتزايدة: إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$



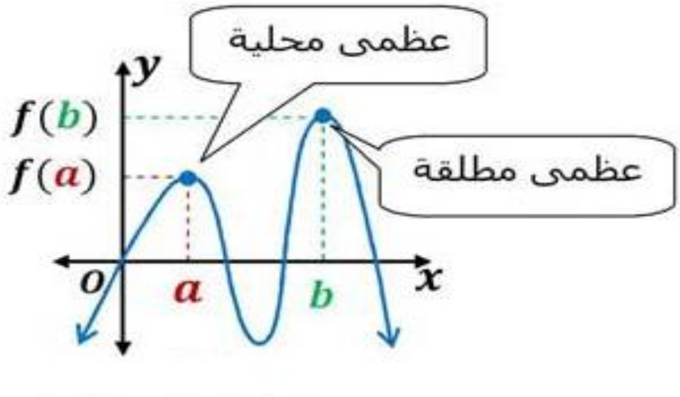
الثابتة: إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) = f(x_2)$

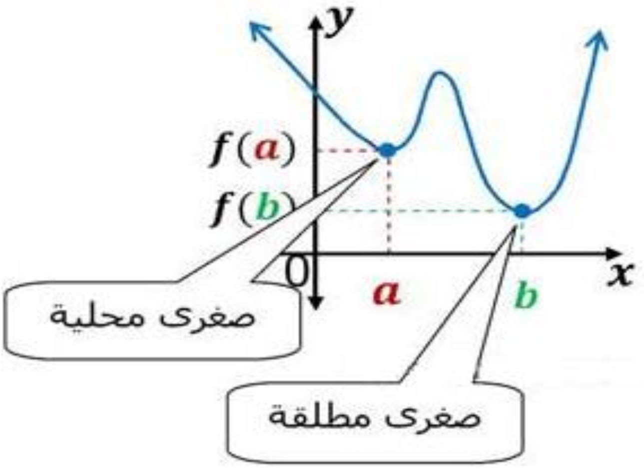


المتناقصة: إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$



– القيم القصوى المحلية والمطلقة :





– القيمة الصغرى المطلقة : أقل قيمة ممكنة للدالة في مجالها .

– القيمة الصغرى المحلية : أقل قيمة ممكنة للدالة من جميع القيم أو الفترات الأخرى.

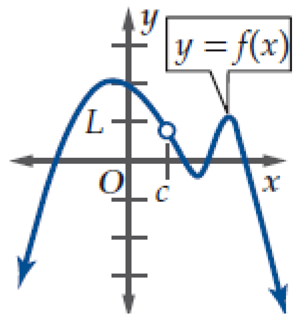
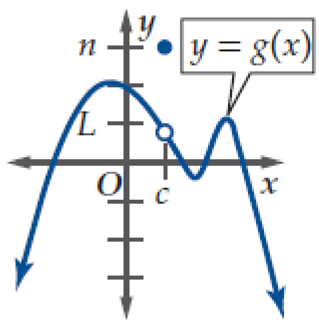
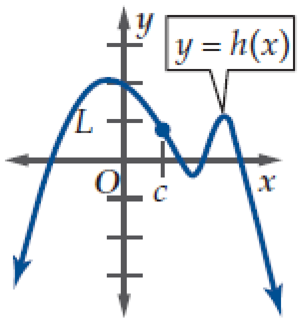
– القيمة العظمى المطلقة : أكبر قيمة ممكنة للدالة في مجالها.

– القيمة العظمى المحلية : أكبر قيمة ممكنة للدالة من جميع القيم أو الفترات الأخرى.

عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة :

– التعبير اللفظي : لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

أمثلة :

		
$\lim_{x \to c} f(x) = L$ $f(c)$ غير معرفة	$\lim_{x \to c} g(x) = L$ $g(c) = n$	$\lim_{x \to c} h(x) = L$ $h(c) = L$

النهاية من جهة واحدة :

النهاية من اليمين	النهاية من اليسار
إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين ، فإن : $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L_1$ وتقرأ : نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي : L_1.	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار فإن : $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L_2$ وتقرأ : نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار ، هي : L_1

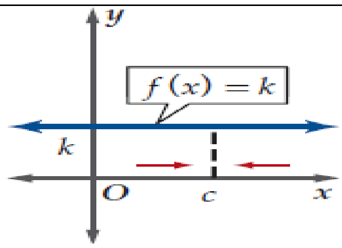
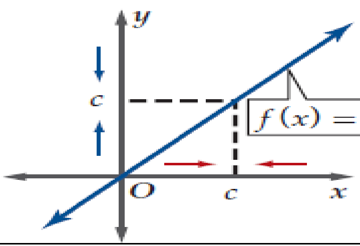
النهاية عند نقطة :

– تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين ، أي أنه إذا كانت :

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$ ،

فإن $$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

نهايات الدوال :

نهايات الدوال الثابتة	نهاية الدوال المحايدة
	
نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة ، ويرمز لها بالرمز : $\lim\limits_{x \to c} k = k$	نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c ويرمز لها بالرمز : $\lim\limits_{x \to c} x = c$

حساب النهايات جبرياً :

خاصية المجموع	$\lim\limits_{x \to c} [\, f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
خاصية الفرق	$\lim\limits_{x \to c} [\, f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
خاصية الضرب في ثابت	$\lim\limits_{x \to c} [\, k\, f(x)] = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
خاصية القسمة	$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ ، حيث $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
خاصية القوة	$\lim\limits_{x \to c} [f(x)^n] = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$
خاصية الجذر النوني	$\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$

الصيغة الغير المحددة :

– يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بالصيغة الغير محددة ؛ لأنه لا يمكن تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر ، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقة ، أو غير موجودة أو متباعدة نحو $\infty, -\infty$.

س158/ $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$:

أ) غير معرفة　　ب) 0　　ج) -9　　د) ∞

الحل : الإجابة (ج) وذلك بأخذ العامل المشترك الأكبر ثم التعويض بتأول x

$$\lim_{x \to -4} \frac{(x-5)(x+4)}{x+4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = \lim_{x \to -4} (x-5) = (-4) - 5 = -9$$

س159/ $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$:

أ) غير معرفة　　ب) 0　　ج) $\frac{1}{6}$　　د) $-\frac{1}{6}$

الحل : الإجابة (ج) ، كما نُلاحظ أن بالتعويض بقيمة 9 الحل = $0/0$ ، وبعد ذلك يتم إنطاق المقام ومن ثم اختصار العوامل المشتركة

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$$

س160/ $\lim_{x \to 2} (\sqrt{x - 3})$:

أ) 0　　ب) 1　　ج) $\sqrt{6}$　　د) غير موجودة

الحل : الإجابة (د) غير موجودة. وذلك لأن بالتعويض بقيمة 2 يتضح أنها تُعطي عدد بجذر سالب أي غير موجود.

نهايات دوال القوى عند المالانهاية :

– لأي عدد صحيح موجب n :

- $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًا.

نهاية دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية :

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \ , \ \lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

س161/ $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$:

أ) 0 ب) **1** ج) $-\infty$ د) غير موجودة

الحل :

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

نهاية دالة المقلوب عند المالانهاية :

– إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب المالانهاية هي : صفر .

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مُعدل التغير اللحظي :

– مُعدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة : $(x, f(x))$ هو ميل المماس عند النقطة $(x, f(x))$.

ويُعطى بالصيغة $\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$ $m = \lim_{h \to h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

المشتقات وطريقة الاشتقاق :

– تُسمى عملية إيجاد المشتقات بالتفاضل.

* مشتقة دالة عند نقطة :

– لإيجاد مشتقة دالة عند نقطة يتم تطبيق القانون :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

– لإيجاد مشتقة القوة ، يتم تطبيق قاعدة مشتقة القوة :

إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

– قواعد أخرى للاشتقاق :

نوع المشتقة	قانونها الرياضي
مشتقة الثابت	مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا. أي أنه إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.
مشتقة مضاعفات القوى	إذا كان $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.
مشتقة المجموع أو الفرق	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

– قاعدة مشتقة الضرب والقسمة :

* قاعدة مشتقة الضرب :

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f، g موجودة عند x ، فإن $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

* قاعدة مشتقة القسمة :

إذا كانت مشتقة كلّ من الدالتين f, g موجودة عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مُلاحظة هامة : يرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضاً بالرموز $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y ، وإذا سبق الدالة $\frac{d}{dx}$ (المؤثر التفاضلي) فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

س162/ مشتقة الدالة $f(x) = x^9$:

أ) x^9 ب) $9x^9$ ج) $8x^9$ د) $9x^8$

الحل : الإجابة (د) $f(x) = x^9, \quad f'(x) = 9x^{9-1} = 9x^8$

س163/ مشتقة الدالة $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$:

أ) $\frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$ ب) $\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^2}$ ج) $\frac{x^7}{5}$ د) $\frac{x^5}{7}$

الحل : الإجابة (أ) $g(x) = \sqrt[5]{x^7}, \quad g(x) = x^{\frac{7}{5}}, \quad g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1} = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$

س164/ مشتقة الدالة $t(x) = \frac{1}{x^8}$:

أ) $\frac{8}{x^9}$ ب) $-\frac{8}{x^9}$ ج) $8x^8$ د) $9x^7$

الحل : الإجابة (ب) $t(x) = \frac{1}{x^8}, \quad t(x) = x^{-8}, \quad t(x) = -8x^{-8-1} = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$

س165/ مشتقة الدالة $f(x) = 5x^3 + 4$:

أ) $\sqrt[3]{15} + 4$ ب) $15x^2$ ج) $\sqrt[3]{19x}$ د) $2x^{15}$

الحل : الإجابة (ب) $f(x) = 5x^3 + 4, \quad f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0 = 15x^2$.

س166/ مشتقة الدالة $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$:

أ) $-14x$ ب) $14x$

ج) $-21x^2 - 28x + 4$ د) $21x^2 - 28x - 4$

الحل : فكر بالإجابة ..

التكامل :

– التكامل : هو عبارة عن عملية عكسية عن التفاضل ، وهو عملية إيجاد دول أصلية ، والتكامل نوعان وهما :

* تكامل محدد * تكامل غير محدد (التكامل بالتعويض) .

– التكامل المحدد : يُستخدم لحساب المساحة تحت المُنحنيات وكذلك الحجوم والسطوح، أي كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر ، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية ، $\int_b^a f(x)dx$ لاحظ وجود (a,b)

– التكامل غير المحدد : يُستخدم لحساب الدوال الجبرية والمثلثية ، ولقد سمي التكامل الغير محدد بهذا الاسم نظرا لاحتوائه علي ثابت للتكامل غير محدد القيمة مما يدل علي عدد لانهائي من الدوال

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى دالة والمحور x في الفترة $[\,a, b\,]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \,, \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

حيثُ a : الحد الأدنى ، b : الحد الأعلى ، وتسمى هذه الطريقة مجموع ريمان الأيمن .

التكامل غير المحدد :

– يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة :

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

حيث $F(x)$: دالة أصلية لـ $f(x)$ و C : ثابت.

الدوال الأصلية :

– قواعد الدالة الأصلية :

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت	إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.
قاعدة المجموع والفرق	إذا كان لـ $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب ، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل :

– هي نظرية تربط التكامل بالتفاضل ، أي تربط التكاملات والمشتقات ببعضهما البعض ، وهي تنص على أن :

– إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

س167/ احسب التكامل :

$$\int (9x - x^3)\,dx \text{ ؟}$$

الحل : يُعتبر تكامل غير محدد لأنه لم يحدد أرقام بجانب رمز التكامل إذ أن الحل يكون

$$\int (9x - x^3)\,dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$
$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$$

س168/ احسب التكامل

$$\int_2^3 (9x - x^3)\,dx \text{ ؟}$$

الحل : يُعتبر تكامل مُحدد لأنه حدد أرقام ما بجانب رمز التكامل ..

$$\int_2^3 (9x - x^3)\,dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$$
$$= \left(\frac{9}{2}3^2 - \frac{3^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{2^4}{4}\right]$$
$$= 20.25 - 14 = 6.25$$

إيجاد المساحة تحت المُنحنى :

س169/ مساحة تحت المنحنى للدالة $f(x) = x^2$ في الفترة $[\ 0\ ,\ 3\ ]$:

أ) **4**   ب) **9**   ج) **12**   د) **55**

الحل : التكامل يُعتبر تكامل مُحدد ، النقاط هي : $x = 0\ , x = 3$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx$$

بالاشتقاق :

$$\frac{x^3}{3}\ ,0 \to 3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 3^2 = \text{وحدات مربعة } 9$$