المتتاليات ... 2018

• التعريف العلمي... هي مجموعة من الأحداث أو الحروف أو الأغراض المرتبة بنمط خطي حيث يكون ترتيب أعضاء المتتالية محدد "تماماً" و "مميز" هذه الأعضاء تسمى عناصر المتتالية أو حدودها

تصنيفة أخرى

المتتالية هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو أي مجموعة جزئية غير منتهية منها

• نرمز لها ب $(U_n)_{n \geq n_0}$

• نسمي U_n حد المتتالية ذو الدليل n (الحد العام) n_0 قيمة حد البدء وتكون عدد طبيعي

• ملاحظة ...

للمتتالية عدد غير منته من الحدود بغض النظر عن قيمة الحدود

• كيف تعرّف المتتالية؟ تعرّف بثلاث طرق

أولاً:

$\boxed{\text{بتعريف صريح للحد ذو الدليل } n}$

أي المتتالية المعينة بإعطاء الحد العام

توضيح

التعريف الصريح للحد ذو الدليل n أي يعرف الحد ذو الدليل n بصيغة تتبع العدد n تفيد في حسابه مثال

$$U_n = \frac{n+3}{n+1}$$

ثانياً:

$\boxed{\text{بالتدريج ...}}$

أي أن يحسب الحد ذو الدليل n بدلالة الحدود التي سبقته

توضيح

المتتالية المعينة بإعطاء علاقة تدريجية كأن نعرف المتتالية (U_n) بأن نعطي الحد U_0 ثم نعطي علاقة تسمى « علاقة تدريجية » تفيد في حساب كل حد بدلالة الحد أو الحدود التي سبقته

ثالثاً:

$\boxed{\text{المتتالية المعرفة بتابع}}$

إذا كان f تابع معرف على مجال I وتحقق الشرط:

مهما يكن العدد x من I يكن $f(x)$ عنصراً من I أيضاً

أمكننا تعريف متتالية $(U_n)_{n\geq0}$ بإعطاء حد البدء U_0 من المجال I والعلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

• جهة اطراد متتالية

نقول أن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$

متزايدة

إذا وفقط تحقق الشرط

$U_{n+1} \geq U_n \; ; n \geq n_0$

متزايدة تماماً

إذا تحقق الشرط

$U_{n+1} > U_n \; ; n \geq n_0$

متناقصة

إذا تحقق الشرط

$U_{n+1} \leq U_n \; ; n \geq n_0$

متناقصة تماماً

$U_{n+1} < U_n \; ; n \geq n_0$

ثابتة

$U_{n+1} = U_n \; , n \geq n_0$

• تسمى المتتاليات التي تحقق الشروط السابقة بـ:

المتتاليات المطردة

• عندما تكون المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ ذات حدود موجبة تماماً "يمكن أن نقارن بين النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ والعدد (1) وتكون: ركز

متزايدة تماماً $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

متناقصة تماماً $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

ثابتة $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ انتبه

المتتالية الحسابية

هي متتالية من الأعداد حيث يكون الفرق بين أي حدين متتاليين ثابتاً

• نقول أن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r وتحقق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = U_n + r$$

نسمي r أساس المتتالية الحسابية $(U_n)_{n\geq0}$

فائدة

إذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

○ أياً كان العددان الطبيعيان m , p كان

$$U_m = U_p + (m-p)\cdot r$$

○ مجموع متتالية حسابية

a : الحد الأول

ℓ : الحد الأخير

n : عدد الحدود

الدستور:

$$S = \frac{n}{2}\cdot(a+\ell)$$

... المتتالية الهندسية

هي متتالية أعداد كل حد من حدودها بعد الأول نحصل عليه بضرب الحد الذي قبله في عدد ثابت غير منعدم يدعى بالأساس

• العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = q\cdot U_n$$

حيث q أساس المتتالية الهندسية

• إذا كانت a , b , c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن:

$$b^2 = a\cdot c$$

• أياً كان العددين الطبيعيين m , p كان:

$$U_m = U_p \cdot q^{m-p}$$

مجموع متتالية هندسية

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

a : الحد الأول

q : أساس المتتالية

n : عدد الحدود

توضيح

لكي نثبت أن متتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية

$U_{n+1} = U_n + r$

ولنثبت أنها هندسية

$U_{n+1} = q\cdot U_n$

• عدد حدود المتتالية

n = دليل الأخير - دليل الأول + 1

الإثبات بالتدريج

أو ما يعرف بالاستقراء الرياضي ...

الرأي

هو أحد أنواع البرهان الرياضي يستخدم عادة لبرهان أن معادلة ما صحيحة لمجموعة لا نهائية من الأعداد

أولاً

1- نبرهن صحة الخاصة من أجل $n = n_0$ (حد البدء)

2- نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة

3- نبرهن صحة الخاصة من أجل n+1 أي $E(n+1)$

التخمين

الطريقة الرسمية

لتخمين حد عام لمتتالية بأن نوجد الحدود الأولى ونستنتج العلاقة التي تربط كل حد بحد ونثبتها بالتدريج

ويوجد دستور « نستخدمه على المسؤولية » لإيجاد الحد العام ثم نثبت بالتدريج صحته

$$U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

نهاية متتالية ....

نقول أن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ أنها تتقارب من العدد ℓ أو أن العدد ℓ هو نهاية للمتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ إذا كانت أي مجاورة للعدد ℓ تحوي جميع حدود هذه المتتالية باستثناء عدد منته من هذه الحدود

نرمزه

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R}$$

نقول عن متتالية أنها متباعدة:

إذا لم تكن متقاربة

موجهة

$U_n = \frac{1}{n}$ $U_n = n$

$U_n = \frac{1}{n^2}$ $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$U_n = n^2$ $U_n = \sqrt{n}$

Bashar Bakir .. 2018 ..

حالة المتتالية الهندسية

في حالة: $-1 < q < 1$ يكون $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

وفي حالة: $q > 1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$

وفي حالة: $q < -1$ ليس للمتتالية نهاية

وفي حالة: $q = 1$ تكون المتتالية $(q^n)_{n\geq0}$ ثابتة وجميع حدودها 1

متتاليات متجاورة

نقول عن متتاليتي $(S_n)_{n\geq0}$ ، $(t_n)_{n\geq0}$ أنهما متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وتقاربت المتتالية $(S_n - t_n)_{n\geq0}$ من الصفر

• مبرهنة لتكن المتتاليات الثلاث $(W_n)_{n\geq0}$ ، $(V_n)_{n\geq0}$ ، $(U_n)_{n\geq0}$ إذا تحقق الشرطان:

$W_n \leq U_n \leq V_n$

$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} W_n = \ell$

نستنتج أن:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell$$

انتهى .. لا تنسونا من صالح دعائكم ...