قناة بكالوريات النخبة

تقدم لكم :

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

الشامل في الاحتمالات

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

* أ. عمار الفرج

: محمدنور مدور

بكالوريات ELITE

الإحتمالات

2023/4/3

• فضاء العينة (Ω) : هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لإختبار ما.

• الحدث : هو كل مجموعة جزئية من فضاء العينة ويرمز له بحرف كبير A ، B ، ...

★ القوانين :

• قانون الإحتمال :

★ $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$: $0 \leq P \leq 1$

• احتمال حدثين (AUB) :

▪ ويستخدم عند وقوع احدهما على الأقل

★ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• تقاطع حدثين ($A \cap B$) :

▪ ويستخدم عند وقوع الحدثين معاً

★ $P(A \cap \bar{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

• متتمم الحدث A ، $\bar{A}$:

★ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

• الحدثان المستقلان احتمالياً :

▪ ~~[illegible]~~ ونقول عن حدثان أنهما مستقلان إذا تحقق :

★ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

★ احتمال حدث A :

▪ $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

★ دمورغان :

▪ $A' \cup B' = (A \cap B)'$

▪ $A' \cap B' = (A \cup B)'$

★ الإحتمال الشرطي :

هو احتمال A علماً أن B قد وقع

▪ $P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

التمارين :

⑤ ص 140 / 4 :

①

• $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

س : احسب $P(A \setminus B)$ ، $P(B \setminus A)$

▪ $P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}}$

$= \frac{6}{10} = 0,6$

▪ $P(B \setminus A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{10} = 0,2$

②

• $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ، $P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{3}$

س : احسب $P(B \setminus A)$

الحل ←

Farah Notebook

• $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

* نوحد المقامات :

$P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$

• $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

(3)

• $P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$

$P(B \setminus A') = \frac{4}{5}$

س : احسب $P(B)$

• $P(B \setminus A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\frac{1}{4} = \frac{P(B \cap A)}{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{12}$

• $P(B \setminus A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}$

$P(B \setminus A') = \frac{P(B \cap A')}{1 - P(A)}$ *

$\frac{4}{5} = \frac{P(B \cap A')}{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow P(B \cap A') = \frac{8}{15}$

• $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$

$= \frac{1}{12} + \frac{8}{15}$ (×5 ، ×4)

$= \frac{5}{60} + \frac{32}{60} = \frac{37}{60}$

(4)

• $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

س : احسب كلاً من :

• $P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B)$

* نحسب $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

$= \frac{2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

$= \frac{25}{20} - \frac{8}{20} = \frac{17}{20}$

$\Rightarrow P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$

• $P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15}$

• $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{10}$

• $P(A' \setminus B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}$

$P(B') = 1 - P(B) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A' \setminus B') = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{20}$

Notebook

* التمرين الثاني :

• نلقي حجر نرد متوازن حرة واحدة

A : حدث الوجه الظاهر زوجي

B : حدث الوجه الظاهر أولي

C : حدث الوجه الظاهر أكبر أو يساوي 3

1. حدد $P(C)$ و $P(B)$ و $P(A)$

$P(A \setminus B)$ و $P(A \cap B)$ و $P(A \cap C)$ و

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

• $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

• $B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

• $C = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

• $A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

• $A \cap C = \{4, 6\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{2}{6}$

2. هل A و C مستقلان احتمالياً ؟

علل ذلك

$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P(A \cap C)$

$\Leftarrow$ A و C مستقلان احتمالياً

3. هل A و B مستقلان احتمالياً ؟

علل ذلك

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(A \cap C)$

$\Leftarrow$ A و B غير مستقلان

* التمرين الثالث :

• نتأمل حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة بالأعداد (1, 1, 1, 2, 2, 3)

نلقي هذا الحجر مرتين متتاليتين :

ليكن A : الوجهين يحوي كل منهما عددا أصغر تماما من 4

ليكن B : ظهور وجهين مرقمين بعددين مختلفين .

1. كم عدد عناصر فضاء العينة S

2. احسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(B \setminus A)$

★	1	1	1	2	2	3
1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)
1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)
1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(3,2)	(3,2)	(3,3)

ج 1 :

من الجدول السابق :

• $n(\Omega) = 6^2 = 36$

وهو عدد عناصر فضاء العينة

ج 2 :

• $P(A) = \frac{21}{36}$ • $P(B) = \frac{14}{36}$

• $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{21}{36}}$

$= \frac{9}{21}$

Farah Notebook

* التمرين الرابع :

• كيوك صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء. عند سحب كرة سوداء يحسب اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين.

يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة.

س: ما احتمال أن يحصل اللاعب على نقطة واحدة فقط

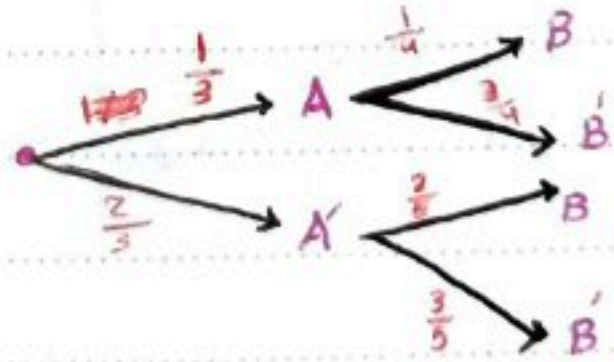
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2P_5^1 \cdot P_3^1}{P_8^2}$$

$$= \frac{30}{56}$$

• كأنه إذا أراد الحصول على نقطة واحدة عليه أن يختار كرة من كل لون.

* التمرين الخامس :

• باكا ستناد إلى الشكل التالي :



★ احسب كلا من :

• $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

• $P(B'/A) = \frac{3}{4}$

• $P(B'/A') = \frac{3}{5}$

★ و استنتج كلا من :

• $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

• $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B'/A)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

• $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B/A')$

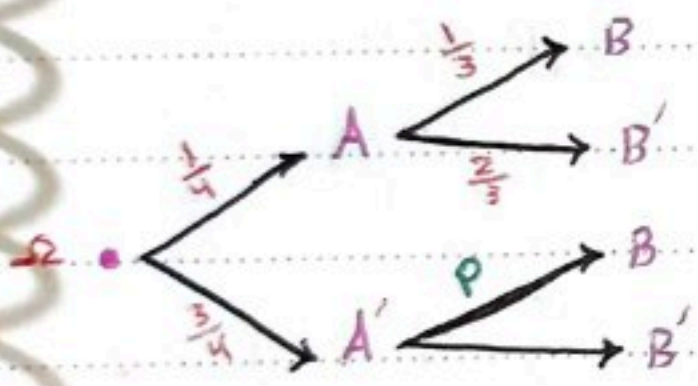
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

• $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B'/A')$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

* التمرين السادس :

• كيف نختار p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً :



• الحل :

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{12} + \frac{3}{4}P)$

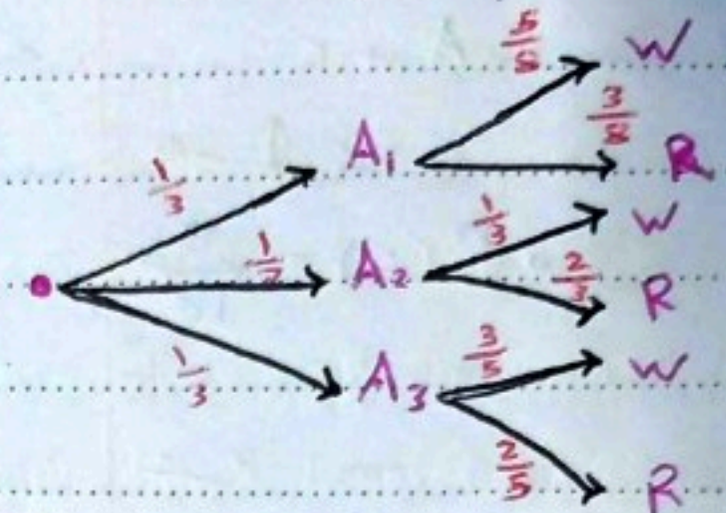
$\frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{3}{4}P$

$\frac{3}{4}P = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$

$\Rightarrow P = \frac{1}{3}$

* التمرين السابع :

• ليكن المخطط الشجري الآتي :



وفيه :

• الرمز W يدل على الكرات البيضاء

• الرمز R يدل على الكرات الحمراء

• يتم عشوائياً اختيار كرة واحدة

① ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

② إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

ج 1 :

بفرض الحدث B : الكرة المسحوبة حمراء

$$P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$$

$$= \underset{\times 45}{\frac{1}{8}} + \underset{\times 40}{\frac{2}{9}} + \underset{\times 24}{\frac{2}{15}} = \frac{173}{360}$$

ج 2 :

بفرض الحدث A : الكرة المسحوبة من الصندوق الأول يكون عطلوب

حساب :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}}$$

$$= \frac{45}{173}$$

* التمرين الثامن :

• ثلاث كرات سوداء تحمل الأرقام (1, 2, 3)

وكرتان حمراوان تحملان الأرقام (1, 2)

نسحب عشوائياً في آن واحد كرتين

① ما احتمال الحدث A : الكرتين المسحوبتين اللتين مجموع رقميهما زوجي

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

② ما احتمال الحدث B : مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

③ ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1} + \binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}}{\frac{4}{10}}$$

$$= \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{2}$$

$A\cap B$: نفس اللون ومجموعهما 3 : $\binom{2}{2}\binom{1}{1}(\binom{2}{1}\binom{1}{1})$

* التمرين التاسع :

• تتألف عائلة من 6 أطفال :

A : لدى طفلان على الأقل أربعة أجنحة نفسه

B : هناك طفلان ذكران وطفلتان

C : الطفل الثالث أنثى

1) احسب احتمال وقوع كلّ من الحوادث A و B و C

2) احسب $P(A \cap C)$ ثم احسب $P(C/A)$

هل الحدث C و A مستقلين احتمالياً؟

3) احسب $P(B \cap C)$ ثم احسب $P(C/B)$

هل الحدثان B و C مستقلين احتمالياً؟

لا نسى طريقة حل التمرين التالي

الحل :

لمعرفة فضاء العينة :

التكرار هو عدد الأعمدة :

$n(\Omega) = 2^{\text{عدد التكرار}} = 2^6 = 16$

لون أسود : طفلة

لون وردي : طفل

b b b b ... A

b b b b

b b b b ... C

b b b b ... B + C

b b b b

b b b b ... B

b b b b ... B + C

b b b b ... C

b b b b

b b b b ... B

b b b b ... B + C

b b b b ... C

b b b b ... B

1) $P(A) = \frac{2}{16}$ ... $P(C) = \frac{8}{16}$

$P(B) = \frac{6}{16}$

2) $P(A \cap C) = \frac{1}{16}$

$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$

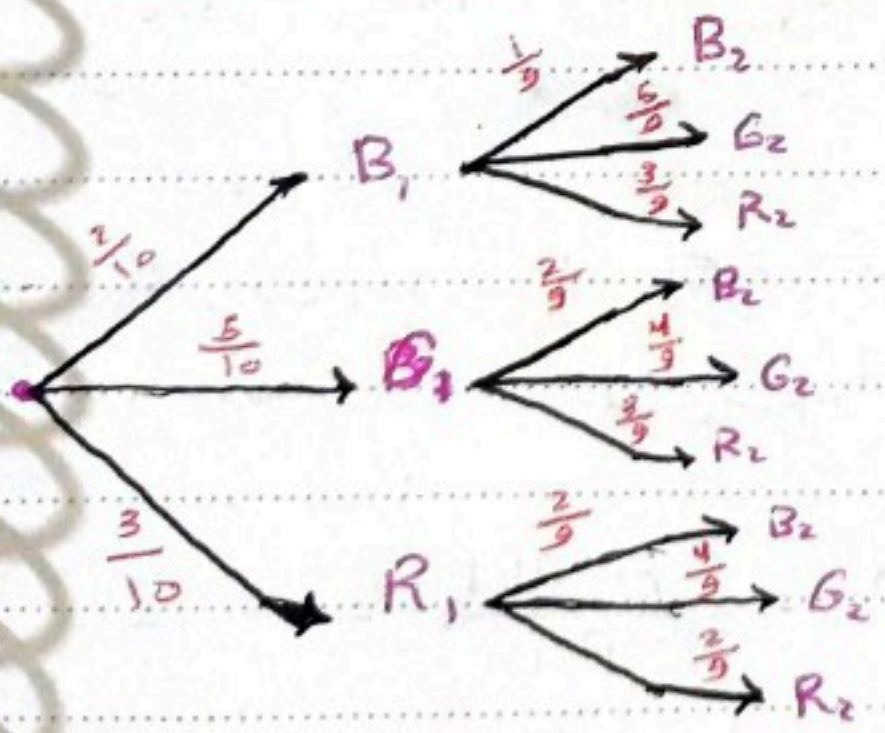
$P_A \cdot P_C = \frac{1}{16} = P(A \cap C)$

C و A مستقلان احتمالياً

* التمرين العاشر :

• صندوق يحوي ست كرات كرتان زرقاوان وخمس كرات خضراء وثلاث كرات حمراء. نسحب كريتين عشوائياً على التتالي دون إعادة.

1) احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء B_2

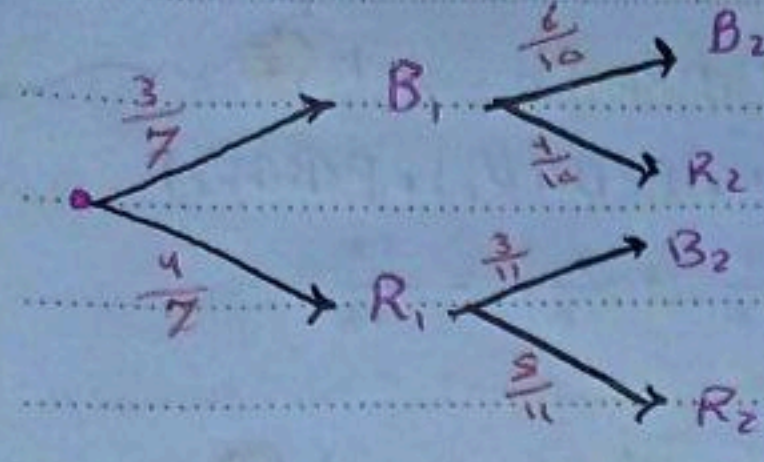


$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap G_1) + P(B_2 \cap R_1)$

$= \frac{2}{90} + \frac{10}{90} + \frac{6}{90} = \frac{18}{90}$

arah Notebook

@Mooi6



1 ج

$$P(R_2) = \frac{12}{70} + \frac{32}{77} = \frac{452}{770}$$

2 ج

3 ج

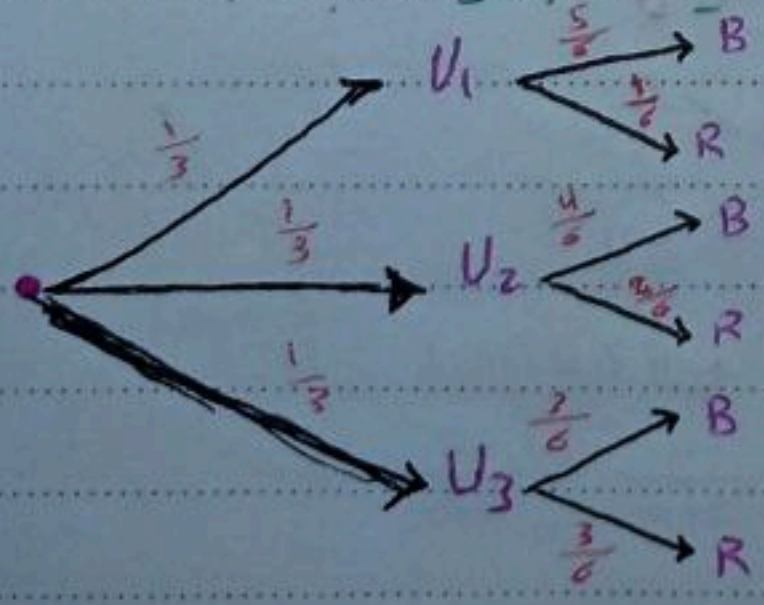
$$P(B_1 / R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{12}{70}}{\frac{452}{770}}$$

$$= \frac{132}{452}$$

* تمرين 13 :

• ليكن لدينا ثلاث صناديق ، الأول يحوي خمس كرات زرقاء وكرة حمراء والثاني يحوي 6 كرات زرقاء وكرتان حمراء أما الثالث يحوي 4 كرات زرقاء وحمراء نختار عشوائياً واحد من الصناديق ثم نختار منه كرة

① اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة



* تمرين عشر :

• نتأمل صندوق يحتوي على ثلاث كرات سوداء واربع كرات حمراء نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق ، ثم نسحب مجدداً كرة من الصندوق .

R_2 : حدث الكرة الثانية لونها احمر .

① اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة

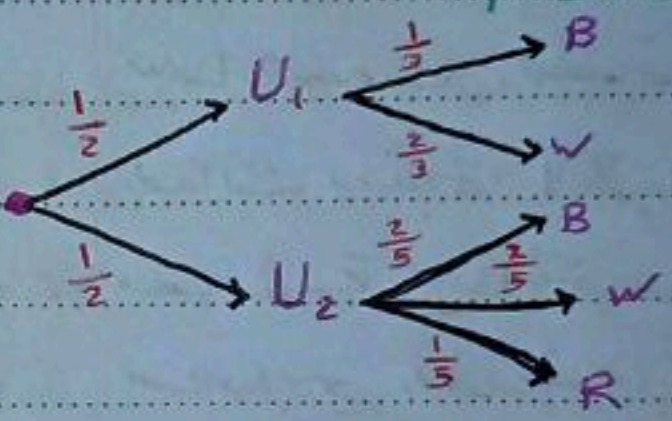
② احسب احتمال الحدث R_2

③ إذا كانت الكرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى سوداء ؟

* لتمرين الحادي عشر :

• نحتوي صندوق U_1 على كرة سوداء وكرتين بيضاوين ونحتوي صندوق U_2 على كرتين سوداوين وكرتين بيضاوين وكرة حمراء واحدة . نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه كرة . ونسمي B الحدث الموافق لسحب كرة سوداء .

① احسب $P(B)$



• $P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{10} = \frac{22}{60} = \frac{11}{30}$$

Farah Notebook

/ / /

② احسب احتمال سحب كرة زرقاء.

$$P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2) + P(B \cap U_3)$$
$$= \frac{5}{18} + \frac{4}{18} + \frac{3}{18} = \frac{12}{18}$$

③ إذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء، فما احتمال أن تكون مسحوبة من المصنع الثاني؟

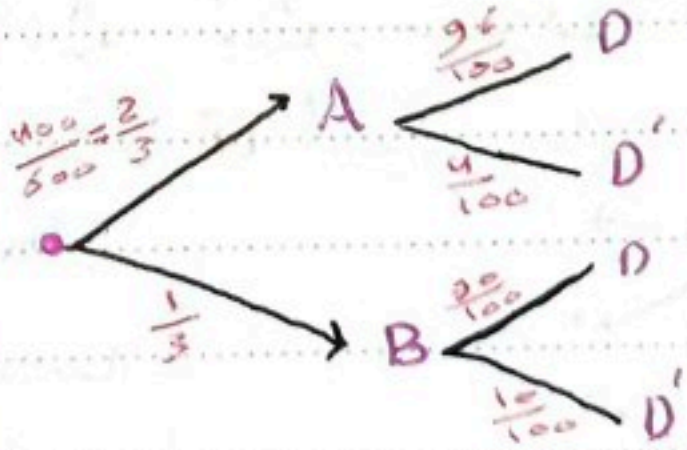
$$P(U_2/B) = \frac{P(U_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{12}{18}} = \frac{4}{12}$$

* تمرين 16:

• يشتري محل للألعاب الكهربائية 40% مصباح من المصنع A و 20% مصباح من المصنع B، ويعلم أن نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج A هي 4%، بينما تكون في انتاج المصنع B نسبة 10%، نسحب مصباح عشوائياً.

① ما احتمال أن يكون المصباح معطوب

D: حدث المصباح سليم



$$P(D') = P(A \cap D') + P(B \cap D')$$
$$= \frac{8}{300} + \frac{10}{300} = \frac{18}{300}$$

② ما احتمال أن يكون المصباح من المصنع B إذا علمت أنه معطوب.

$$P(B/D') = \frac{P(B \cap D')}{P(D')}$$
$$= \frac{\frac{10}{300}}{\frac{18}{300}} = \frac{10}{18}$$

* تمرين 15:

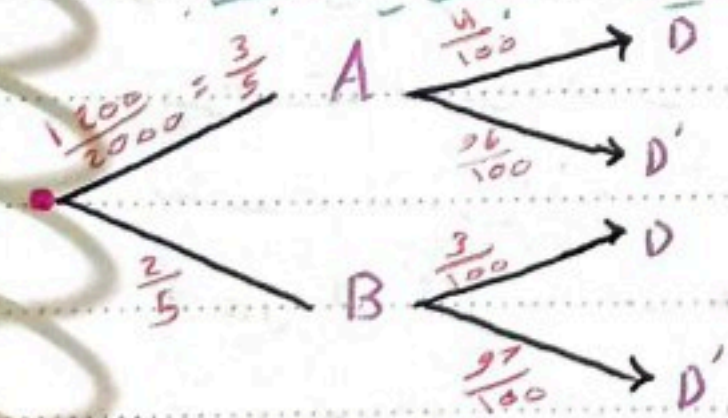
• يضم مصنع ورشتين B & A للمصابيح الكهربائية، عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح صنعت الورشة A (1200) مصباح منها بينما صنعت الورشة B البقية، هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة بينما تكون النسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة سحب عشوائياً مصباحاً من الطلب.

• A: المصباح مصنوع في الورشة A.

• B: المصباح ،، ،، ،، B.

• D: المصباح معطوب.

① اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة



② احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B)$$
$$= \frac{12}{500} + \frac{6}{500} = \frac{18}{500}$$

@Moo:6

3) إذا كان الطبيب مصاباً فما احتمال أن يكون مصاباً من مدرسة A

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{12}{500}}{\frac{18}{500}}$$

$$= \frac{12}{18}$$

* التمرين 16 :

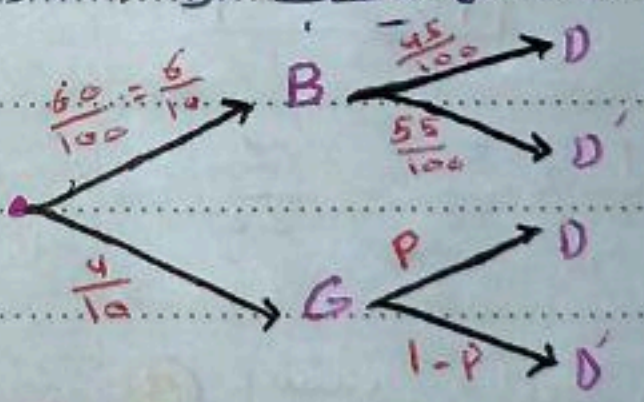
- في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة الطرب، ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور و أن 55% من هؤلاء لا يلعبون كرة الطرب.

س) ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة لا تمارس كرة الطرب ؟

B : " الطالب ذكر

G : " الطالب أنثى

D : " الطالب يلعب كرة الطرب



$$P(D) = P(D \cap B) + P(D \cap G)$$

$$\frac{30}{100} = \frac{270}{100} + \frac{4}{10} p$$

$$\Rightarrow \frac{4}{10} p = \frac{30}{1000}$$

$$p = \frac{30}{400} = \frac{3}{40}$$

$$P(G \cap D') = \frac{4}{10} \cdot \frac{37}{40} = \frac{37}{100}$$

* التمرين 17 :

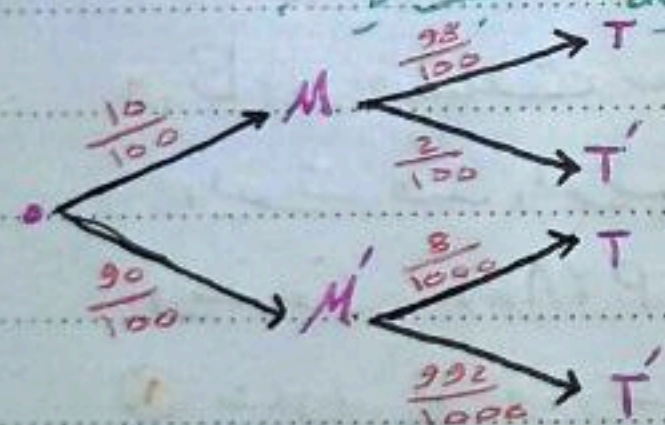
- يصيب مرض سنة 10% من السكان يتم اختبار اكتشاف إذا كان شخص مصاب بهذا المرض، يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض 0,008 ، ما احتمال أن تكون النتيجة سلبية مع كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0,02 .

- M : الشخص مصاب بالمرض

- T : نتيجة الاختبار إيجابية

ونختار شخصاً عشوائياً

1) اعط تمثيلاً شجرياً



2) احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض و نتيجة إيجابية

$$P(M' \cap T) = \frac{720}{100\,000}$$

3) استنتج احتمال أن يكون الاختبار موثوقاً (أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية للمصاب ونتيجة سلبية لغير المصاب)

$$P(A) = P(T \cap M) + P(T' \cap M')$$

$$= \frac{980}{10000} + \frac{8928}{10000} = \frac{9908}{10000}$$

(A : الاختبار موثوقاً)

Farah Notebook

* تمرين 12 :

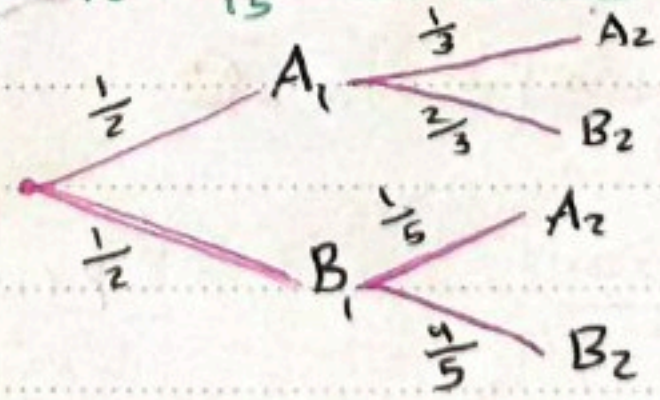
• تحاول سعاد الحصول على إدخال الورد في حلقات تُلصقها، تكرر التجربة عددا من المرات، عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة الموالية $\frac{1}{3}$ وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة الموالية $\frac{4}{5}$، نفترض أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها نتأمل أيا كان العدد الطبيعي غير المعدوم n، نعتبر الحدثين الآتيين :

• A_n : « نجحت سعاد في إدخال الورد عند المرة رقم n »

• B_n : « فشلت سعاد في إدخال الورد عند المرة رقم n »

ونعرف $P_n = P(A_n)$

① عين P_1 و برهن أن $P_2 = \frac{4}{15}$

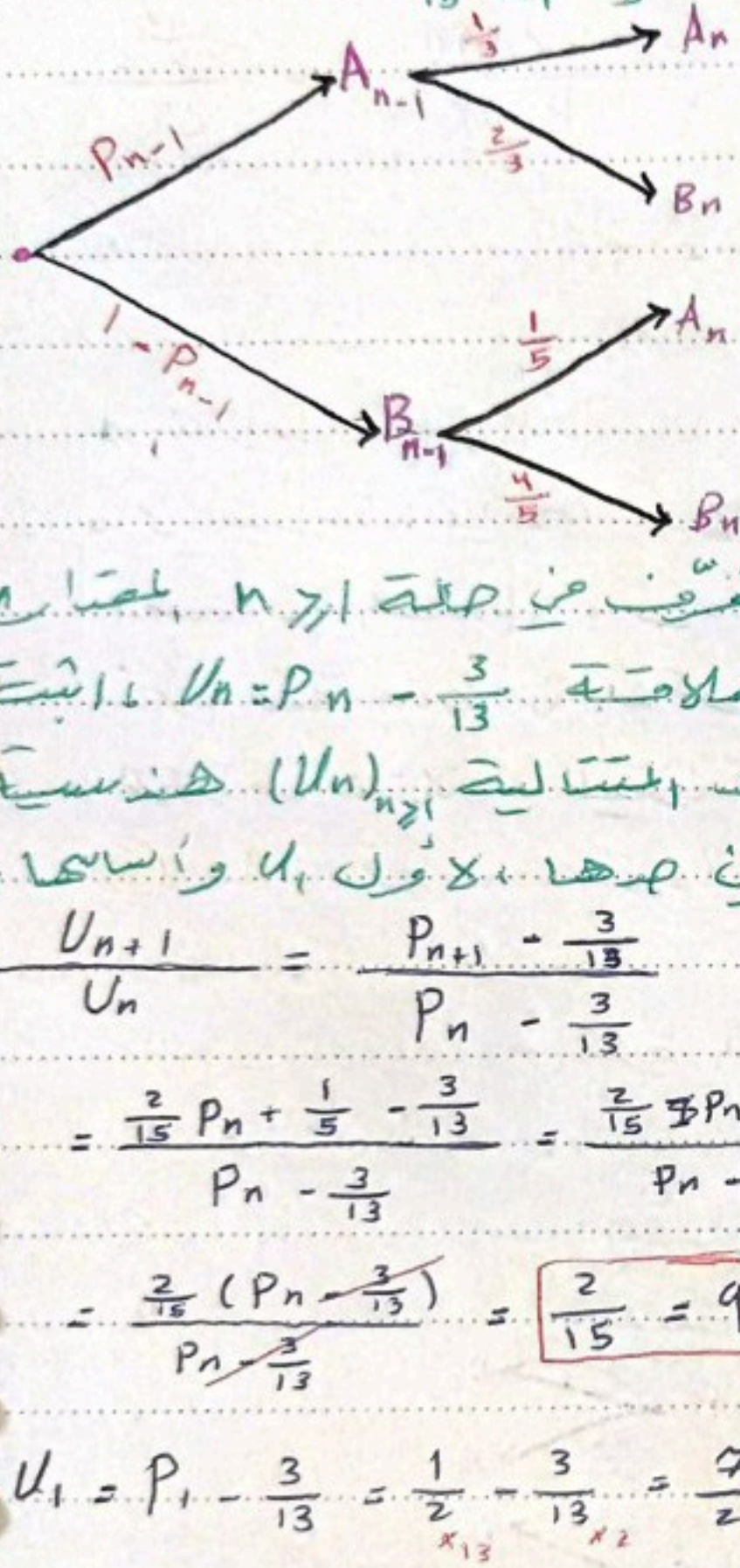


$P_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$

$P_2 = P(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} =$

$= \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{4}{15}$

② اثبت انه من أجل كل $n \geq 2$ كان $P_n = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5}$



③ نعرف من أجل $n \geq 1$ المتتالية (U_n) بالعلاقة $U_n = P_n - \frac{3}{13}$

أ) اثبت أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول U_1 وأساسها q

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{P_{n+1} - \frac{3}{13}}{P_n - \frac{3}{13}}$$

$$= \frac{\frac{2}{15} P_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}}{P_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15} P_n - \frac{2}{65}}{P_n - \frac{3}{13}}$$

$$= \frac{\frac{2}{15}(P_n - \frac{3}{13})}{P_n - \frac{3}{13}} = \boxed{\frac{2}{15} = q}$$

$$U_1 = P_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

(×13) (×2)

④ استنتج عبارة P_n ثم U_n بدلالة n

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$$

$$= \frac{7}{26} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$

$$P_n = U_n + \frac{3}{13}$$

$$= \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$$

Farah Notebook

@Mooi6

* تمرين 19 :

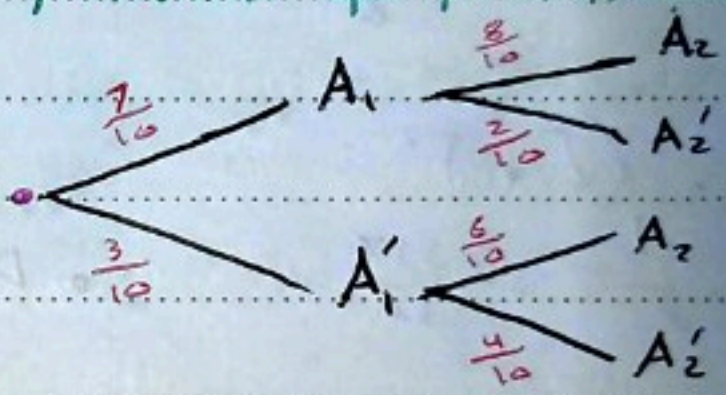
• يواجه حارس مرمى عددا من ضربات الجزاء :

* إذا صدّ ضربة جزاء n فإن احتمال أن يصدّ ضربة جزاء $n+1$ هو 0,8

* وإذا لم يصدّ ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0,6 ، نفترض أن احتمال أن يصدّ أول ضربة جزاء 0,7

A_n : حدث صدّ الحارس لضربة جزاء n

* 1) حساب $P(A_2/\bar{A}_1)$ و $P(A_2/A_1)$



• $P(A_2/A_1) = \frac{8}{10}$

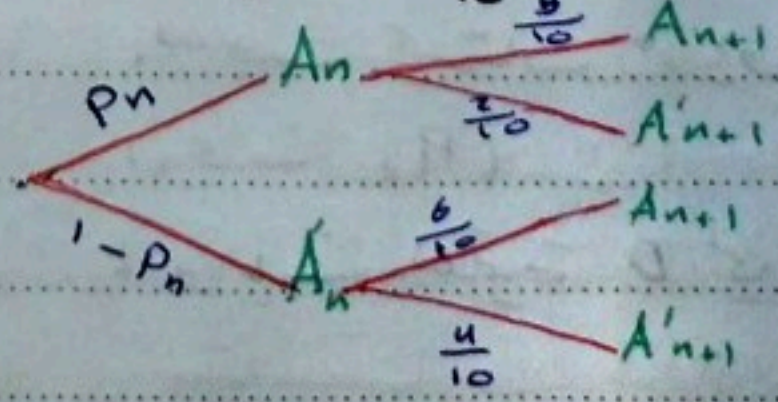
• $P(A_2/\bar{A}_1) = \frac{6}{10}$

2) استنتج أن $P(A_2) = 0,74$

$$P(A_2) = \frac{7}{10}\cdot\frac{8}{10} + \frac{3}{10}\cdot\frac{6}{10}$$
$$= \frac{56}{100} + \frac{18}{100} = \frac{74}{100}$$

3) نعرّف $P_n = P(A_n)$ ؛

4) - برهن أن $P_{n+1} = \frac{2}{10}P_n + \frac{6}{10}$



$$P_{n+1} = \frac{8}{10}(P_n) + \frac{6}{10}(1-P_n)$$

$$P_{n+1} = \left(\frac{8}{10} - \frac{6}{10}\right)P_n + \frac{6}{10}$$
$$= \frac{2}{10}P_n + \frac{6}{10}$$

b- استنتج $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية

بالصيغة $U_n = P_n - \frac{75}{100}$

بيّن أن (U_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{10}$

استنتج عبارة P_n بدلالة n ثم حدد نهاية P_n

Farah Notebook

2023/4/15

المتحولات العشوائية

• وهي الصيغة الإحتمالية لربط الأحداث بأعداد حقيقية تسمى قيم المتحول العشوائي X.

• $I = \{ x_1, x_2, x_3 \dots \}$

• وقانونه الاحتمالي هو حساب:

• $P(X = x_i) = P_i$

• توقعه الرياضي $E(x)$:

• $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

• تباينه $V(x)$:

• $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

• الإنحراف المعياري $\sigma(x)$:

• $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

* تمرين 20:

• نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6، نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه المرقم 6، وخمس درجتين في بقية الحالات.

يكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها.

س1 اكتب بقانون الاحتمالي للمتحول X واكتب كلاً من $E(x)$ و $V(x)$.

• جدول قانونه الاحتمالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	...
P_i	P_1	P_2	P_3	...

قوانين

$I = \{1, 6, -2\}$

• $P(X=1) = \frac{1}{6}$ • $P(X=6) = \frac{1}{6}$

• $P(X=-2) = \frac{4}{6}$

x_i	-2	1	6
P_i	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_i . P_i$	$-\frac{8}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$
$x_i^2 . P_i$	$\frac{16}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{36}{6}$

$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{-1}{6}$

$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$= \frac{53}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36}$

* تمرين 21:

• يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء و4 كرات خضراء، نسحب عشوائياً وفي آن واحد معاً ثلاث كرات.

• نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5، إذا كانت النتيجة ثلاث كرات حمراء R_3.

• يأخذ القيمة 3، إذا كانت النتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء (R_2 بحيث).

• ويأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

الأسئلة ←

@Mooi6

① احسب $P(R_2)$ و $P(R_3)$.

$$P(R_3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(R_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

② عين القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$I = \{0, 3, 5\}$

$P(X=5) = P(R_3) = \frac{1}{12}$

$P(X=3) = P(R_2) = \frac{5}{12}$

$P(X=0) = \frac{6}{12}$

x_i	0	3	5
P_i	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$x_i P_i$	0	$\frac{15}{12}$	$\frac{5}{12}$
$x_i^2 P_i$	0	$\frac{45}{12}$	$\frac{25}{12}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{20}{12}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{70}{12_{\times 12}} - \frac{400}{144} = \frac{440}{144}$$

b) نأخذ الصفة 1 إذا كانت النتيجة "سحب كرتين حمراوين وكرة خضراء" والصفة 0 في بقية الحالات.

① اكتب مجموعة قيم المتغير X واكتب جدوله الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي.

$X = \{0, 3, 5\}$

$P(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{240}{504}$

$= \frac{20}{42}$

$P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{42}$

$P(X=0) = 1 - (P(X=5) + P(X=3))$

$= 1 - \frac{25}{42} = \frac{17}{42}$

x_i	0	3	5
P_i	$\frac{17}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

$E(X) = 0 \times P(X=0) + (3 \times P(X=3)) + (5 \times P(X=5))$

$= 0 + \frac{60}{42} + \frac{25}{24} = \frac{85}{42}$

* دورة 2018 التمرين الثاني 22 نقطة:

• صندوق يحوي 6 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 2 كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً.

نتأمل المتغير العشوائي X الذي يأخذ القيم:

a) 5 إذا كانت النتيجة سحب ثلاث كرات حمراء.

Farah Notebook

* تمرين 23 :

• صندوق يحوي اربع كرات متماثلة (3 كرات سوداء وكرة واحدة بيضاء) نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

① إذا علمت أن الكرات المسحوبة من لون واحد ما احتمال أن تكون من اللون الأبيض.

A : حدث الكرات من لون واحد.

B : حدث الكرات بيضاء.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1^3}{3^3 + 1^3} = \frac{1}{28}$$

② يربح اللاعب n نقطة إذا حصل على 3 كرات من اللون الأبيض ويربح 5 نقاط إذا حصل على كرتين بيضاء فقط.
يخسر نقطة واحدة إذا كانت النتيجة خلاف ذلك.
نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد النقاط التي يناكلها اللاعب:

1. اكتب مجموعة قيم X و اكتب جدوله الاحتمالي واحسب n إذا كان توقعه معدوماً.

$$I = \{5, n, -1\}$$

$$P(X=5) = \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 3^1}{4^3} = \frac{9}{64}$$

$$P(X=n) = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$P(X=-1) = \frac{59}{64}$$

x_i	5	-1	n
p_i	$\frac{9}{64}$	$\frac{54}{64}$	$\frac{1}{64}$
$x_i p_i$	$\frac{45}{64}$	$\frac{-54}{64}$	$\frac{n}{64}$

$$E(X) = 0$$

$$\frac{-9}{64} + \frac{n}{64} = 0 \Rightarrow n = 9$$

* تمرين 24 :

• يحتوي صندوق على كرات حمراء وبيضاء، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.

① نسحب عشوائياً كرة، ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

نفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء 3n.

A : حدث الكرة بيضاء

$$P(A) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

② نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة، ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث، ما القيم الممكنة للمتحول X؟

@Mooi6

$I = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

$P(X=1) = \frac{2\,P_2^1 \cdot P_2^1}{P_5^2} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$

$P(X=3) = \frac{2\,P_2^1 \cdot P_1^1}{P_5^2} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$

$P(X=2) = \frac{3}{10}$: نستنتج

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

$I = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{n^3}{(4n)^3} = \frac{1}{64}$

$P(X=1) = \frac{3\,(3n)^1 \cdot n^2}{(4n)^3} = \frac{9}{64}$

$P(X=2) = \frac{3\,(3n)^2 \cdot n^1}{(4n)^3} = \frac{27}{64}$

$P(X=3) = \frac{(3n)^3}{(4n)^3} = \frac{27}{64}$

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

* تمرين 25 ((دورة 2018 أوك)):

• صندوق يحوي 5 كرات متماثلة
ثلاث كرات حمراء اللون تحمل
الأرقام (0، 1، 2) و كرتان بيضاء
تحمل الأرقام (0، 1)، نسحب
عشوائياً كرتين على التتالي
دون اعادة.

① نعتبر A "الكرتان تحملان
اللون" احسب P(A)

$P(A) = \frac{P_3^2 + P_2^2}{P_5^2} = \frac{8}{20}$

② نعرف متغيراً عشوائياً يدل على
مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين
عين مجموعة قيم X، و اكتب
جدول قانونه الاحتمالي و احسب توقعه
الرياضي وتباينه

مجموعة القيم: 0، 1، 2، 3

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$E(X) = \frac{8}{5}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \frac{36}{10}$

$V(X) = \frac{36}{10} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{36}{10} - \frac{64}{25} = \frac{180 - 128}{50} = \frac{52}{50} = \frac{26}{25}$

* تمرين 26 ((دورة 2017 أوك)):

• نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات
متتالية بحيث يكون احتمال ظهور
الشعار في كل مرة يساوي $\frac{1}{3}$.
نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل
على عدد مرات ظهور الشعار، اكتب
مجموع قيم المتحول X و اكتب جدول
قانونه الاحتمالي و احسب توقعه

Z:

H H H	... 3	عدد الحالات = 3
H H T	... 2	عدد الشعار: $2^3 = 8$
H T H	... 2	H شعار
H T T	... 1	T كتابة
T H H	... 2	
T H T	... 1	
T T H	... 1	
T T T	... 0	

Farah Notebook

$I = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$P(X=1) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^2 = \frac{12}{27}$

$P(X=2) = 3(\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$

$P(X=3) = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$

* تمرين 27 :

• نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رمحي الوجهين الظاهرين ليكن X المتغير العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رمحي الوجهين الظاهرين ، اكتب القانون الاحتمالي للمتغير X واحسب توقعه وتباينه.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$I = \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots 12\}$

$P(X=2) = \frac{1}{36}$, $P(X=3) = \frac{2}{36}$

$P(X=4) = \frac{3}{36}$, ... $P(X=12) = \frac{1}{36}$

ونكمل الجدول وباقي الطلبات

* تمرين 28 دورة عادية ثانية :

• صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء ونكون مجلة سحب عشوائيا بكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب المنجزة .

(س) عين مجموعة قيم X واكتب جدوله الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعاته

$I = \{2, 3, 4\}$

$P(X=2) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{2}{20}$

$P(X=3) = \frac{P_3^3 + P_2^2 \cdot P_3^1 + P_2^2 \cdot P_3^1}{P_5^3}$

$= \frac{18}{60} = \frac{6}{20}$

$P(X=4) = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20}$

x_i	2	3	4
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$
$x_i p_i$	$\frac{4}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{48}{20}$

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = \frac{70}{20}$

* تمرين 29 :

• صندوق يحوي ستة بطاقات مرقمة بالأرقام (1, 2, 3, 4, 5, 6) نسحب منها عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة، ليكن X يمثل العشوائي الذي يدل على: جمع رقمي البطاقتين المسحوبتين.

① عين مجموعة قيم X، واكتب جدول قانونه الاحتمالي.

② احسب توقعه الرياضي $E(X)$ وتباينه $V(X)$.

	1	2	3	4	5	6
1	✕	1	1	1	1	1
2	1	✕	2	2	2	2
3	1	2	✕	3	3	3
4	1	2	3	✕	4	4
5	1	2	3	4	✕	5
6	1	2	3	4	5	✕

1 ـ

$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(X=1) = \frac{10}{30}$ • $P(X=4) = \frac{4}{30}$

$P(X=2) = \frac{8}{30}$ • $P(X=5) = \frac{2}{30}$

$P(X=3) = \frac{6}{30}$

x_i	1	2	3	4	5
P_i	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

2 ـ

$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot P_i = \frac{7}{3}$

$V(X) = \frac{210}{135}$

* تمرين 30 :

• صندوق يحتوي على أربع كرات زرقاء وثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء، نسحب عشوائياً في آن معاً ثلاث كرات من الصندوق ليكن X يمثل العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

1 ـ ما هي مجموعة قيم X.

$I = \{1, 2, 3\}$

2 ـ احسب $P(X=1)$ ثم $P(X=2)$ ثم استنتج $P(X=3)$

$P(X=1) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$

$P(X=3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$

$P(X=2) = \frac{39}{56}$

3 ـ احسب توقع X وتباينه

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{17}{8}$

$V(X) = \frac{129}{448}$

Farah Notebook

تمرين 31 :

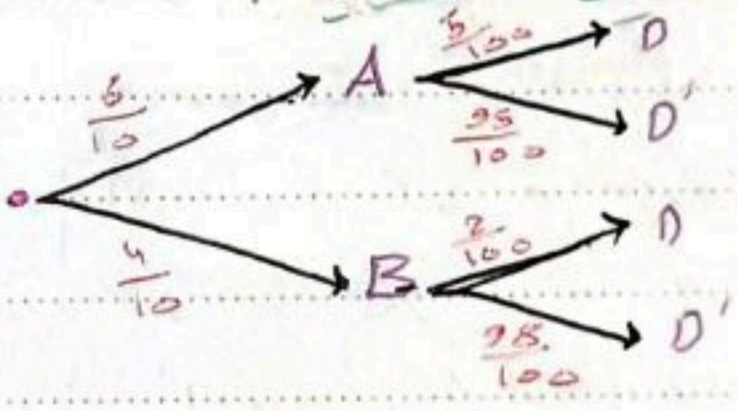
- مصنع يضم ورشتين A & B لتصنيع الأقلام ، ورد طلب قدره 1000 قلم صنعت الورشة A منها 600 قلم ، و البقية من الورشة B هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة و 2% " " " B سحب عشوائياً قلم من الطلب

A : القلم مصنوع في الورشة A

B : " " " B

D : " غير صالح .

① أعط شجرة السحب .



② احسب احتمال أن يكون القلم صالح

$$P(D') = \frac{570}{1000} + \frac{392}{1000} = \frac{962}{1000}$$

③ إذا كان القلم صالح ما احتمال أن يكون مصنوع من A .

$$P(A/D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{\frac{570}{1000}}{\frac{962}{1000}}$$

$$= \frac{570}{962}$$

④ سحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً ، وليكن X يحقق العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام الصالحة . المطلوب احسب $P(X=0)$

$$P(X=0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{29}{11980}$$

تمرين 32 :

- صندوق يحوي ثلاث كرات حمراء و أربع كرات سوداء ، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً و ليكن A يحصل على كرة حمراء على الأقل .

و ليكن B يحصول على كرتين سوداوين على الأقل .

1- احسب احتمال كل من $P(A)$ & $P(B)$

$P(A/B)$ &

$$P(A') = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{35}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{35}$$

$$= \frac{22}{35}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{18}{22}$$

2- إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة اكتب جدوله التوزيعي و احسب توقعه و تباينه .

$$I = \{0, 1, 2, 3\}$$

Notebook

2 ـ لتكن A، B حادثتان التاليتان:

A: "الحصول على كرتين تحملان عددين أقل تماما من 3"

B: "مجموع عددي الكرتين يساوي 5"

هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

- $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ • $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$

$\Leftarrow$ A و B مستقلان احتماليا

$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$

$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{35} = \frac{18}{35}$

$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{35} = \frac{12}{35}$

$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{35} = \frac{1}{35}$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$
$x_i p_i$	0	$\frac{18}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{3}{35}$
$x_i^2 p_i$	0	$\frac{18}{35}$	$\frac{48}{35}$	$\frac{9}{35}$

$E(X) = \frac{0+18+24+3}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$

$V(X) = \frac{0+18+48+9}{35} - \frac{81}{49}$

$= \frac{75}{35} - \frac{81}{49}$

$= \frac{840}{1715} = \frac{168}{343} = \frac{24}{49}$

* تمرين محلول:

• نتأمل صندوقين كيفيين الصندوق الأول على 3 كرات مرقمة بـ (1,2,2) وكيفيون الصندوق الثاني على 4 كرات مرقمة بـ (2,3,4,5)

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الأول ثم كرة من الصندوق الثاني و نطرب

1 ـ اكتب فضاء العينة

$\Omega = \{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(2,2)$

$(2,3)(2,4)(2,5)(3,2)(3,3)$

$(3,4)(3,5)\}$

« المتحولات العشوائية الحدانية »

• نقول عن متحول عشوائي أنه
صدائي بوسيطين n و p «ونرمز»

• عند الاهتمام بدراسة عدد مرات
تحديد ترتيبه .

• $P(X=K) = \binom{n}{K} p^K . q^{n-K}$

n : عدد مرات تكرار التجربة .
K : " " " الحدث المطلوب
P : احتمال الحدث المطلوب دون تكرار .
" $q = 1 - p$ "

• انتبه : $\binom{n}{K}$ هي عدد الحالات
الممكنة لوقوع الحدث .

• اشهر مسائله « السحب - السحب
مع إعادة »

• توقعه :

★ $E(x) = n . p$

• تباينه :

★ $V(x) = n . p . q$

* تمرين 34 «دورة 2022 ؛ ورقي» :

• نملأ كل خانة من الخانات الستة
الآتية بالعددين (1 ، 1-)

1- بكم طريقة يمكن ملأ الخانات
الستة ؟

$n(\Omega) = (\text{عدد})^{\text{تكرار}} = 2^6 = 64$

2- X متحول عشوائي يرفق بكل مجموع
الأعداد في الخانات الستة حين
نرمي X .

$\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

3- بكم طريقة يمكن ملأ الخانات
ليكون مجموع الأرقام في
عند ملأ ثلاث خانات بالرقم 1-

$\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$

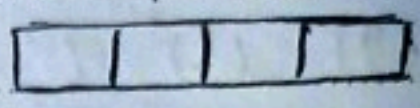
4- بكم طريقة يمكن ملأ الخانات
ليكون مجموع الأعداد 2 .
عند ملأ أربع خانات بالعدد 1

$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

أو ملأ خانتين بالعدد 1-

* تمرين 5 ص :

- نملأ كل خانة من الخانات الأربعة الأولى بالعددين (3, 0)



1- بكم طريقة يمكن ملأ الخانات؟

الحل :

$n(\Omega) = 2^4 = 16$

2- بكم طريقة يمكن ملأ الخانات ليكون المجموع 0 ؟

عند ملأ خانة بالعدد 0

$\binom{4}{1} = 4$

3- بكم طريقة يمكن ملأ الخانات ليكون المجموع 6 ؟

عند ملأ خانتين بالعدد 0

$\binom{4}{2} = 6$

4- X متحول عشوائي يدل على مجموع الأعداد من الخانات الأربعة الأولى حيث X .

$\{0, 3, 6, 9, 12\}$

* تمرين 6 ص 36 دورة 2017 دولي :

- نلقي قطعة نقود غير متوازنة 3 مرات بحيث يكون احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$ ، X يدل على عدد مرات ظهور الشعار ، والمطلوب

عين قيم X وقانونه وتوقعه وتباينه

$K = \{0, 1, 2, 3\}$

$n = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$

$P(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$

$P(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$

$E(x) = n.p = 3.\frac{1}{3} = 1$

$V(x) = n.p.q = 1.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

* تمرين 7 ص :

- يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء عددها أكبر من الحمراء بثلاثة أضعاف البيضاء ، نسحب كرة

1- ما احتمال أن تكون بيضاء ؟

نفرض عدد البيضاء n فيكون عدد الحمراء $3n$

$P(W) = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$

2- نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة ، X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء ، عين قيم X وقانونه وتوقعه وتباينه

$K = \{0, 1, 2, 3\}$

$n = 3$, $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$

$P(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$

$P(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{64}$

$E(X) = \frac{3}{4}$, $V(X) = \frac{9}{16}$

* تمرين 38 الدورة 2018 أوت 11

• X متغير عشوائي يمثل عدد النجاحات من تجربة برنولية.

K	0	1	2	3
P(X=K)	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

احتمال النجاح هو $\frac{2}{3}$.

1) $P(X=3)$ و $P(X=2)$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}$

$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$

2) $E(X)$ و $V(X)$

$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$

$V(X) = n \cdot p \cdot q = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

* تمرين حول المتغير الجداري (أول):

• ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية المكونة من 4 محاولات المستقلة. والمطلوب: القانون الاحتمالي لـ X:

K	0	1	2	3	4
P(X=K)					$\frac{16}{81}$

1- عدد الاحتمالات في التجربة

عددها $n = 4$

2- اكمل الجدول السابق.

نستنتج $n = 4$, $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$

$P(X=K) = \binom{4}{K} p^K q^{n-K}$

$P(X=0) = \binom{4}{0}\binom{2}{3}^0\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

$P(X=1) = \binom{4}{1}\binom{2}{3}^1\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$

$P(X=2) = \binom{4}{2}\binom{2}{3}^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$

$P(X=3) = \binom{4}{3}\binom{2}{3}^3\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}$

$P(X=4) = \binom{4}{4}\binom{2}{3}^4\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{16}{81}$

K	0	1	2	3	4
P(X=K)	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

3- احسب الوسط الرياضي والتباين.

$E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$V(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

* تمرين 40 :

• نلقي حجر نرد ستة مرات متتالية.

1- ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط وهرات؟

$n = 6$, $K = 3$

$p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

$P(X=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3$

$= \frac{625}{11664}$

2- ما احتمال الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل؟

نوجه الاحتمال الحدث العكسي

$P(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$= \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$\therefore \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64}$

محفظة فيها اثنان بيضاء وثلاثة سوداء

$1 - \frac{2^2}{6^4} = \frac{4^2}{6^4}$

* تمرين 41 :

• نكرر عشر مرات تجربة القاء قطعتي نقد متوازنتين ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين

احسب احتمال كل من الاحداث

A : الحصول على ثلاث مرات على الوجه H

B : الحصول على وجه H مرة على الاقل

① $n = 10$, $K = 3$, $P = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$

$P(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7$

② نأخذ المتمم

$P(X=0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

* تمرين 42 :

• نتأمل مجموعة صفائح فيها اربع وجوه ملونة باللون الاسود ووجهان ملونة باللون الاحمر ، نلقي هذا المجسم خمس مرات على التوالي

X متغير عشوائي يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها

1 - اكتب قيم X واحسب $P(X=0)$

$K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$n = 5$, $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$

2 - احسب الوسط الرياضي للمتغير X

ومتباينة

$E(X) = np = \frac{10}{3}$, $V(X) = \frac{10}{9}$

* تمرين 43 :

• طائرات ذات محركين واخرى ذات اربع محركات يمكن تمييزها بالنوع ذاته من المحركات ، إن احتمال حدوث عطل في احد المحركات يساوي $\frac{1}{4}$.

* X متغير عشوائي يدل على عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين .

* Y متغير عشوائي يدل على عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات اربع محركات .

1 - عين قيم X وقانونه الاحتمالي

$K = \{0, 1, 2\}$, $n = 2$

$P = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$

$P(X=0) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$P(X=1) = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{6}{16}$

$P(X=2) = \frac{1}{16}$

2 - عين قيم Y وقانونه الاحتمالي

Farah Notebook

$J = \{0,1,2,3,4\}$ ... $n = 4$

$p = \frac{1}{4}$ ، $q = \frac{3}{4}$

$P(Y=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$

$P(Y=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$

$P(Y=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

$P(Y=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1 =$

$P(Y=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0 =$

ج- يمكن للطائرة اتباع طيران
اي نقطة للوصول اذا كان
عدد تحركات على الاقل بين
نقطتين هو :

P_2 : احتمال متابعة طائرة ثابتة
طيرانها

P_4 : احتمال تتابع طائرة رباعية
طيرانها

$P_2 = P(X=0) + P(X=1) = \frac{15}{16}$

$P_4 = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

$= \frac{81}{256} + \cdots$

* تمرين 44 :

• يحوي صندوق ثلاث بطاقات
مرقمة من 1 الى 3 نسحب عشوائيا
وبطاقتان تحملان رقم (2)
و (1) .

نسحب بطاقتان على التتالي دون
اعادة ونعرف المتحول العشوائي
$Y \neq X$.

X : يدل على عدد البطاقات
الحمراء المسحوبة .

Y : يدل على مجموع رقمي البطاقتين .

1) اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي .

$J = \{1,2\}$

$P(X=1) = \frac{2P_2^1 \cdot P_1^1}{P_3^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(X=2) = \frac{P_2^2}{P_3^2} = \frac{1}{3}$

2) اكتب قيم Y وقانونه الاحتمالي .

$J = \{1,2,3\}$

$P(Y=1) = \frac{2P_1^1 \cdot P_1^1}{P_3^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(Y=2) = \frac{2P_1^1 \cdot P_1^1}{P_3^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(Y=3) = \frac{2P_1^1 \cdot P_1^1}{P_3^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3) اكتب في جدول القانون الاحتمالي
للمزوج (X, Y) ، ماذا تكون
مستقلين ولماذا ؟

Parah Notebook

★ تمرين حل:

• لدينا صندوق يحوي على كرة سوداء واحدة تحمل رقم 1 وثلاث كرات سوداء تحمل رقم (2، 1، 1) نسحب عشوائياً كرتين معاً

X: متحول عشوائي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة

Y: يمثل مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين

• أكمل الجدول الآتي الذي يمثل القانون المشترك لكل من (X, Y) علماً أنهما مستقلان

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0,12	0,2	0,18	0,4
1	0,06	0,1	0,04	0,2
2	0,12	0,2	0,08	0,4
قانون Y	0,3	0,5	0,2	

Farah Notebook

★ تمرين حل:

• أكمل الجدول الآتي الذي يمثل القانون المشترك لكل من (X, Y) علماً أنهما مستقلان

Y \ X	0	1	قانون Y
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
3	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
قانون X	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	

$I = \{0, 1\}$ ، $J = \{2, 3\}$

(1) (1) (2) سوداء

(1) بيضاء

• $P(X=0 \cap Y=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$

• $P(X=1 \cap Y=2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{6}$

• $P(X=0 \cap Y=3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{6} = \frac{2}{6}$

• $P(X=1 \cap Y=3) = \frac{1}{6}$

★ $P(X=0) \cdot P(Y=2) = \frac{9}{36} \neq \frac{1}{6}$

$\Leftarrow$ غير مستقلان

X \ Y	1	2	قانون Y
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
قانون X	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

• $P(X=1 \cap Y=1) = 0$

• $P(X=2 \cap Y=1) = \frac{2P_1' P_1'}{P_3^2} = \frac{1}{3}$

• $P(X=1 \cap Y=2) = \frac{2P_1' \cdot P_2'}{P_3^2} = \frac{1}{3}$

• $P(X=2 \cap Y=2) = 0$

• $P(X=1 \cap Y=3) = \frac{2P_1' \cdot P_1'}{P_3^2} = \frac{1}{3}$

• $P(X=2 \cap Y=3) = 0$

• $P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq 0$

$\Leftarrow$ X و Y غير مستقلان

★ تمرين حل:

★ تمرين 67 :

يتطلب انجاز مهمة مرحلتين A & B على التوالي .

• تستغرق المرحلة الأولى عدد عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3
$P(X_A=x)$	0,2	0,5	0,3

• وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3	4
$P(X_B=x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

المتحولات مستقلان احتمالياً .

نرمز بالرمز E إلى الحدث

" تستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل " .

س احسب الاحتمال E .

$$P(E) = P(X_A=1 \cap X_B=1) + P(X_A=1 \cap X_B=2) + P(X_A=2 \cap X_B=1)$$

$$= 0,04 + 0,06 + 0,10 = 0,2$$

arah Notebook

ملاحظة :
النوطة شاملة لأفكار البحث
وتغنيك عن الكتاب واسئلة
الدورات لأنها تحتوي على
جميع التمارين

لا تنسونا من صالح دعائكم ،
بالتوفيق للجميع .