جامعة الشام الخاصة **مقرر بحوث العمليات**

المحاضرة الرابعة **التاريخ:**

الطريقة البيانية لحل النماذج الخطية

الطريقة البيانية هي عبارة عن رسم بياني لنموذج البرمجة الخطية وتعد الطريقة البيانية من أسهل طرق حل مشاكل البرمجة الخطية إلا أنها غير كافية لمعالجة جميع مسائل البرمجة الخطية لان المسائل العملية تحوي غالبا عددا كبيرا من المتحولات وينحصر استخدام الطريقة البيانية في الحالات التالية

- عدد المجاهيل $n=1$ أو $n=2$ أو $n=3$
- إذا حقق عدد المجاهيل وعدد المعادلات احد الشروط التالية $n-m=1$ أو $n-m=2$ أو $n-m=3$

أي نستطيع تحويل النموذج إلى تابع لمتحول واحد أو متحولين أو ثلاثة متحولات على الترتيب وذلك بالاستفادة من قيود عدم السلبية التي يتمتع بها متحولات النموذج الخطي وتكمن فائدة الطريقة البيانية في إعطاء الدارس معلومات جيدة تساعد على إدراك خصائص البرمجة الخطية وفهمها وتساعد الدارس على استيعاب الطرق الأخرى والوقوف على تفاصيل الحل وكيفية معالجة وتطوير الحل لمسائل البرمجة الخطية التي تحوي أكثر من متحولين

خطوات حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية:

لإيجاد حل نموذج خطي بيانيا نلجأ إلى تمثيل مجموعة النقاط التي تحقق جملة المتراجحات في احد الفضاءات التالية R أو R^2 أو R^3 وذلك حسب عدد المتحولات في هذه الجملة نرسم منطقة الحلول في الفضاء R أو R^2 أو R^3 وذلك بإتباع الخطوات التالية

1- نحدد أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود وذلك برسم (النقاط- المستقيمات- المستويات) الناتجة من تحويل متراجحات القيود إلى مساويات

في الفضاء R^2 ويتم الرسم بتحديد نقطتين محققتين للقيد ثم نصل بين النقطتين نحصل على المستقيم الموافق للقيد هذا المستقيم يقسم المستوي إلى نصفين من اجل تحديد نصف المستوي المحقق للقيد نختار نقطة مثلا $(0,0)$ و نعوض إحداثيات هذه النقطة في المتراجحة فإذا كانت محققة تكون المنطقة التي تقع فيها هذه النقطة هي منطقة الحل أما إذا كانت غير محققة فتكون المنطقة المعاكسة هي منطقة الحل

2- نحدد منطقة إمكانيات الحل وهي المنطقة الناتجة من تقاطع أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود، يجب أن تكون هذه المنطقة غير خالية لكي نستطيع متابعة الحل من اجل تمثيل هذه المعادلة يجب معرفة قيمة لـ Z والتي هي مجهولة لدينا لذلك نفترض قيمة ما ولتكن $Z_1 = 0$ ونرسم معادلة تابع الهدف Z_1 نعطي قيمة أخرى ولتكن Z_2 ونمثل المعادلة نحصل على مستقيم مواز للمستقيم الأول

وبالمتابعة نحصل على مجموعة من الخطوط المتوازية الممثلة لتابع الهدف أو

نرسم الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ حيث c_1 هي أمثال x_1 و c_2 هي أمثال x_2 في تابع الهدف وتكون

جهة تزايده هي اتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ وجهة التناقص عكس اتجاه هذا الشعاع أي يتم السحب حسب نوع تابع الهدف (تعظيم أو تقليل) بتعبير أوضح نقوم بإيجاد نقطة الحل الأمثل وذلك بان نسحب المستقيم الممثل لـ Z_1 بشكل مواز لنفسه باتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ لإيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف(و بعكس هذا الاتجاه لإيجاد القيمة الصغرى) تتم عملية السحب برسم خطوط موازية للمستقيم باستخدام المسطرة ومثلث الرسم حتى يمر بأخر نقطة من نقاط منطقة الإمكانات تكون هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل والتي تقع على حدود منطقة الحلول الممكنة وأي إزاحة أخرى مهما كانت صغيرة تخرجها منها نوضح ما سبق من خلال الأمثلة التالية:

أمثلة محلولة

1-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي التالي

$$Z = 15x_1 + 20x_2 \rightarrow Max$$

والخاضع للشروط التالية

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240 \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 160 \qquad (2)$$
$$x_1 \leq 60 \qquad (3)$$
$$x_1 \ , \ \ x_2 \geq 0$$

الحل:

نحول المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول $3x_1 + 2x_2 = 240$

نفرض

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 2x_2 = 240 \quad \Rightarrow x_2 = 120$$

نحصل على النقطة الأولى $A\,(\,0\,,120\,)$

نفرض

$$x_2 = 0 \quad \Rightarrow 3x_1 = 240 \quad \Rightarrow x_1 = 80$$

نحصل على النقطة الثانية $B\,(80\,,0\,)$

القيد الثاني $x_1 + 2x_2 = 160$

نفرض

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 2x_2 = 160 \quad \Rightarrow x_2 = 80$$

نحصل على النقطة الثالثة $C\,(\,0\,,80\,)$

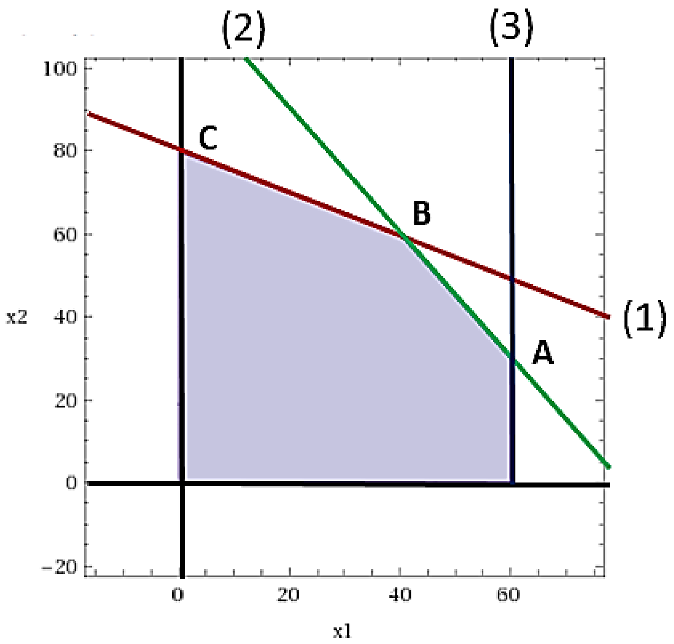
نفرض

$$x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 160$$

نحصل على النقطة الرابعة $D\,(160\,,0\,)$

القيد الثالث $x_1 = 60$

التمثيل البياني



لإيجاد نقطة الحل حسابيا نلاحظ إن منطقة الحلول المقبولة محددة بثلاث نقاط $A(0,120)$ و $C(0,80)$ أما النقطة الثالثة ناتجة من تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني للحصول على إحداثياتها نقوم بإيجاد الحل المشترك لجملة المعادلتين

(مستقيمي القيدين الأول والثاني)

$$3x_1 + 2x_2 = 240 \qquad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 = 160 \qquad (2)$$

الحل المشترك $B\ (40\,,60)$ للحصول على الحل المثالي نقوم بالتعويض بإحداثيات نقاط الرؤوس لمنطقة الحلول المقبولة في دالة الهدف نحصل على القيم التالية

مقابل النقطة $B\ (40\,,60)$ تكون قيمة دالة الهدف 1800

مقابل النقطة $A(0,120)$ تكون قيمة دالة الهدف 2400

مقابل النقطة $C(0,80)$ تكون قيمة دالة الهدف 1600

ويكون أعظم ربح هو 2400 عند النقطة $A(0,120)$

2-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي التالي

$$Z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$$

$$6x_1 + 6x_2 \leq 42 \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (2)$$

$$x_1 \leq 2 \qquad (3)$$

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

الحل:

نحول المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول $6x_1 + 6x_2 = 42$

نفرض

$$x_1 = 0 \Rightarrow 6x_2 = 42 \Rightarrow x_2 = 7$$

نحصل على النقطة الأولى $A(0,7)$

نفرض

$$x_2 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 42 \Rightarrow x_1 = 7$$

نحصل على النقطة الثانية $B(7,0)$

القيد الثاني

$$x_1 + 2x_2 = 160$$

نفرض

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

نحصل على النقطة الثالثة $C(0,4)$

نفرض

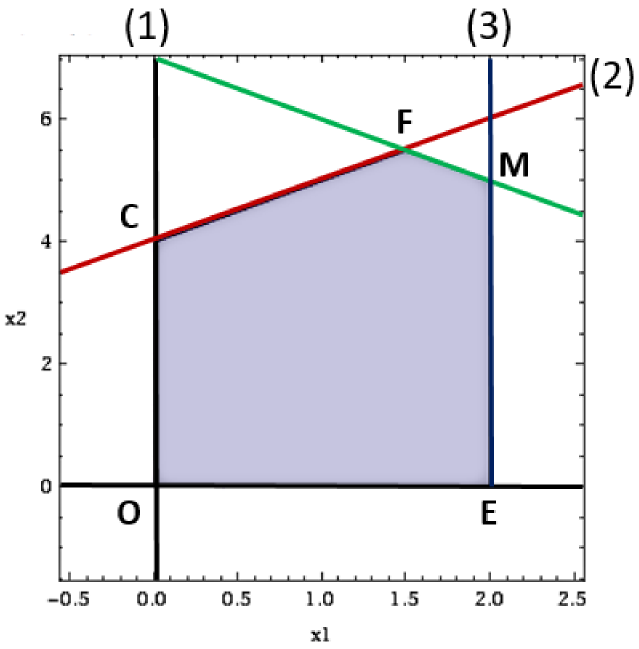
$$x_2 = 0 \Rightarrow -x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -4$$

نحصل على النقطة الرابعة $C(-4,0)$

القيد الثالث $x_1 = 2$

نحصل على النقطة الخامسة $E(2,0)$

التمثيل البياني



لإيجاد نقطة الحل حسابيا نلاحظ إن منطقة الحلول المقبولة محددة بأربعة نقاط $E\,(2\,,0\,)$ و $C\,(\,0\,,4\,)$ و F و O و M

النقطة F ناتجة من تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني للحصول على إحداثياتها نقوم بإيجاد الحل المشترك لجملة المعادلتين

(القيدين الأول والثاني)

$$6x_1 + 6x_2 = 42 \qquad (1)$$
$$-x_1 + x_2 = 4 \qquad (2)$$

الحل المشترك $F\,(1{,}5\,,5{,}5\,)$

أما النقطة ناتجة من تقاطع القيد الأول مع القيد الثالث للحصول على إحداثياتها نقوم بإيجاد الحل المشترك لجملة المعادلتين

(القيدين الأول والثالث)

$$6x_1 + 6x_2 = 42 \qquad (1)$$
$$x_1 = 2 \qquad (3)$$

الحل المشترك $M\,(2\,,5\,)$

للحصول على الحل المثالي نقوم بالتعويض بإحداثيات نقاط الرؤوس لمنطقة الحلول المقبولة في دالة الهدف نحصل على القيم التالية

مقابل النقطة $O(0,0)$ تكون قيمة دالة الهدف 0

مقابل النقطة $A(0,4)$ تكون قيمة دالة الهدف 16

مقابل النقطة $F(1{,}5\,,5{,}5)$ تكون قيمة دالة الهدف 31

مقابل النقطة $M(2,5)$ تكون قيمة دالة الهدف 32

مقابل النقطة $E(2,0)$ تكون قيمة دالة الهدف 12

ويكون أعظم ربح هو 32 عند النقطة $M(2,5)$

3-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي التالي

$$Z = 4x_1 + 4x_2 \to Min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 10 \qquad (1) \\ x_1 + x_2 &\ge 6 \qquad (2) \\ x_1\ ,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

نحول المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول $x_1 + 3x_2 = 10$

نفرض

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 3x_2 = 10 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{10}{3} = 3{,}3$$

نحصل على النقطة الأولى $A(0\,,3{,}3)$

نفرض

$$x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 10$$

نحصل على النقطة الثانية $B(10\,,0)$

القيد الثاني $x_1 + x_2 = 6$

نفرض

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 6$$

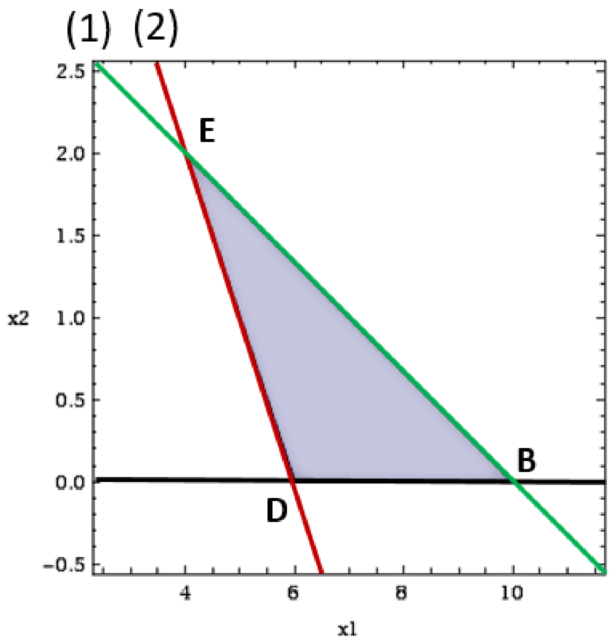
نحصل على النقطة الثالثة $C\,(0\,,6)$

نفرض

$$x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 6$$

نحصل على النقطة الرابعة $D\,(6\,,0)$

التمثيل البياني



لإيجاد نقطة الحل حسابيا نلاحظ إن منطقة الحلول المقبولة محددة بثلاثة نقاط $B\,(10\,,0)$ و $D\,(6\,,0)$ و E

النقطة E ناتجة من تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني للحصول على إحداثياتها نقوم بإيجاد الحل المشترك لجملة المعادلتين (القيدين الأول والثاني)

$$x_1 + 3x_2 = 10 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 6 \qquad (2)$$

الحل المشترك $E\,(4\,,2)$

للحصول على الحل المثالي نقوم بالتعويض بإحداثيات نقاط الرؤوس لمنطقة الحلول المقبولة في دالة الهدف نحصل على القيم التالية

مقابل النقطة $D(6,0)$ تكون قيمة دالة الهدف 24

مقابل النقطة $B(10,0)$ تكون قيمة دالة الهدف 40

مقابل النقطة $E(4,2)$ تكون قيمة دالة الهدف 24

ويكون اقل تكلفة هو 24 عند النقطتين $D(6,0)$ و $E(4,2)$

4-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow Max$$

والخاضع للشروط

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 &\le 30 \\
4x_1 + 3x_2 &\le 20 \\
0x_1 + 5x_2 &\le 25 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

الحل:

نعتمد المحور الأفقي x_1 والمحور العمودي x_2

ثم نمثل القيود وذلك عن طريق رسم المستقيمات التالية

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 &= 30 \\
4x_1 + 3x_2 &= 20 \\
0x_1 + 5x_2 &= 25
\end{aligned}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أن $x_1, x_2 \ge 0$

ومن اجل تمثيل كل من هذه المستقيمات نحدد نقطتين من كل منها ثم نصل بين النقطتين ونحدد المنطقة التي تحقق المتراجحة الموافقة وذلك باختيار نقطة مثلا $(0,0)$ ثم نعوض إحداثيات هذه النقطة في المتراجحة فإذا كانت محققة تكون المنطقة التي تقع فيها هذه النقطة هي منطقة الحل أما إذا كانت غير محققة فتكون المنطقة المعاكسة هي منطقة الحل

فمن اجل رسم المستقيم الأول الذي معادلته $4x_1 + 8x_2 = 30$

الإحداثيات \ النقطة	A	B
x_1	0	$\frac{30}{4}$
x_2	$\frac{30}{8}$	0

$$\Rightarrow \quad A(\ 0\ ,\frac{30}{8}\ ) \quad , \quad B(\ \frac{30}{4},\ 0\ )$$

ثم نحدد منطقة الحل كما ذكرنا سابقا

من اجل رسم المستقيم الثاني

الذي معادلته $4x_1 + 3x_2 = 20$

الإحداثيات \ النقطة	C	D
x_1	0	5
x_2	$\frac{20}{3}$	0

$$\Rightarrow \quad C(\ 0\ ,\frac{20}{3}\ ) \quad , \quad D(\ 5\ ,\ 0\ )$$

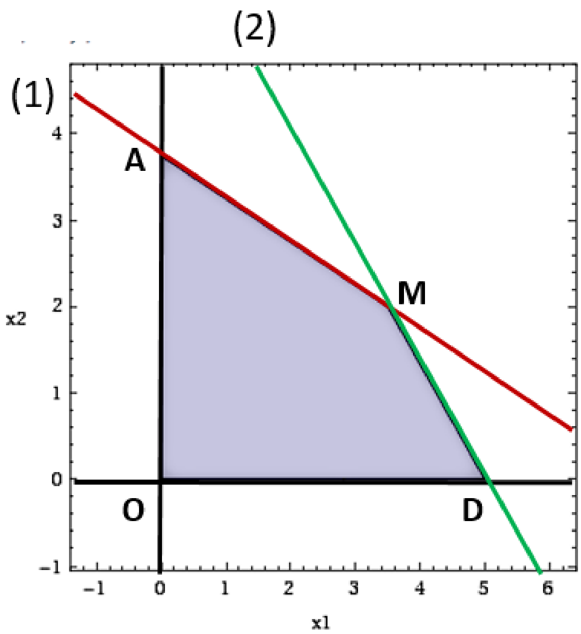
ثم نحدد منطقة الحل كما ذكرنا سابقا

ومن اجل المستقيم الثالث

نلاحظ انه يوازي المحور الممثل لـ x_1 حيث أن $x_2 = \frac{25}{5} = 5$

ثم نحدد منطقة الحل كما ذكرنا سابقا

التمثيل البياني



نلاحظ أن منطقة الحلول المقبولة هي المنطقة المحددة بالمضلع $oAMD$ وهنا يجب البحث عن الحل المثالي الذي يجعل التابع z اكبر ما يمكن.

بالنظر إلى منطقة الحلول نجد الأقرب إلى الحل الأمثل هو إحدى النقاط A, D, M ومن اجل تحديد المثلى نعوض إحداثيات هذه النقاط بتابع الهدف وهنا يجب تعين إحداثيات النقطة M من اجل ذلك ندرس تقاطع المستقيمين (1) و (2) فنجد أن إحداثيات النقطة M هي $(3.5, 2)$

ثم نحسب قيمة التابع عند كل نقطة من هذه النقاط نجد

$$Z_A = 150$$
$$Z_D = 150$$
$$Z_M = 185$$

إذا يحقق التابع قيمة عظمى عند النقطة M حيث يكون فيها

$x_2 = 2$ و $x_1 = 3.5$

هذه الطريقة تكون ممكنة عندما يكون عدد النقاط قليل حيث نتمكن بسهولة من تعويضها في تابع الهدف والنقطة التي تعطي أفضل قيمة لتابع الهدف هي التي تمثل الحل الأمثل

أما عندما يوجد شـــــروط متعددة وأعداد لا باس بها من النقاط الراســـية الواقعة على محيط منطقة الحلول المقبولة في هذه الحالة تصـــــبح طريقة إيجاد إحداثيات كل هذه النقاط وتعويضـــها في تابع الهدف غير عملية لذلك نلجأ إلى تمثيل تابع الهدف وتحديد نقطة الحل الأمثل كما ذكرنا سابقا

(في المثال التالي نوضـح كيفية حل نموذج خطي يحوي أكثر من متحولين ويحقق الشـرط $n-m=2$ بيانيا وكيفية تحديد الحل الأمثل عن طريق سحب الخط البياني لتابع الهدف)

5-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

$$Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 + 2x_7 - 15 \to Max$$

الخاضع للشروط

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + x_3 = 4\\
&2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3\\
&x_1 + x_2 - x_5 = -4\\
&x_2 + x_6 = 5\\
&2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7
\end{aligned}$$

وشروط عدم السلبية $x_1, x_2, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

الحل:

نلاحظ أن عدد المعادلات $m=5$ وعدد المتحولات $n=7$ وعليه يمكننا أن نحسـب من هذه المعادلات خمسـة متحولات بدلالة الاثنين الآخرين حيث نحسـب هنا x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 بدلالة x_1, x_2 نحصل على

$$\begin{aligned}
&x_3 = -x_1 + x_2 - 4\\
&x_5 = x_1 + x_2 + 4\\
&x_6 = -x_2 + 5
\end{aligned}$$

نعوض في المعادلتين الثانية والخامسة

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 - 1$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6$$

ثم نعوض في تابع الهدف

$$Z = 5x_1 - 2x_2 - 5 \rightarrow Max$$

بالاستفادة من شروط عدم السلبية نكتب

$$x_3 = -x_1 + x_2 - 4 \geq 0$$

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4 \geq 0$$

$$x_6 = -x_2 + 5 \geq 0$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6 \geq 0$$

من اجل إيجاد الحل المثالي بطريقة بيانية نرسم المستقيمات التالية

$$x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 + x_2 - 4 = 0$$

$$x_5 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 4 = 0$$

$$x_6 = 0 \Rightarrow -x_2 + 5 = 0$$

$$x_4 = 0 \Rightarrow 3x_1 - 2x_2 - 1 = 0$$

$$x_7 = 0 \Rightarrow -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6 = 0$$

ثم نقوم بتحديد جهة تحقق كل متراجحة من المتراجحات الســـابقة بنفس الطريقة الواردة في المثال السابق

ومن اجل تحديد الحل الأمثل يمكن أن نتبع أيضا نفس الطريقة الواردة في المثال السابق كما يمكن الوصــــول إلى الحل الأمثل وبعد ملاحظة أن معادلة تابع الهدف هي معادلة مستوي في الفراغ حيث أن هذا المســتوي يقطع المستوي x_1ox_2 عندما تكون $Z = 0$ لذلك نرسم المستقيم الذي معادلته

$$5x_1 - 2x_2 - 5 = 0$$

ثم نقوم بسحب هذا المستقيم بنفس الطريقة السابقة

ملاحظة:

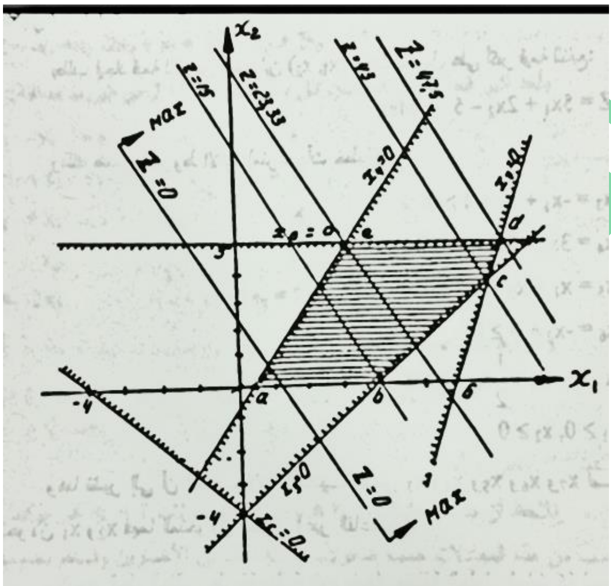
يمكن تحديد جهة تزايد التابع Z برسم الشعاع $\vec{v}(5,2)$ حيث 5 هي أمثال x_1 و 2 أمثال x_2 وعندها تكون جهة الشعاع هي جهة تزايد التابع Z

إذا نقوم بسحب المستقيم $Z=0$ بجهة تزايد التابع Z حتى يلامس أخر نقطة في منطقة الحل المقبول نحدد إحداثيات هذه النقطة فنحصل على x_1 و x_2 نعوض في المعادلات السابقة نحصل على x_3, x_4, x_5, x_6, x_7

في مثالنا القيم هي $(5.8,5,0.5,14.5,17.5,0,0)$

نعوض في تابع الهدف نحصل على القيمة العظمى

ويكون الحل في مثالنا $Z = 45.5$



ملاحظات حول الحل البياني:

1-إن الحل البياني ينطبق على نقطة راسية في الفضاء R^n

2- إن عددا من مركبات الحل المثالي يكون معدوما وذلك لان الحل المثالي ينطبق على نقطة راســية والنقطة الراســية هي نتيجة تقاطع عدد من المســتقيمات أو المســتويات وان عدد المركبات المعدومة هي $n-m$ مركبة على الأقل

3- قد يتضمن النموذج بعض الشروط التي لا تلعب دورا في عملية الحل مثل الشرط الثالث في المثال الســـابق حيث نلاحظ أن $x_5=0$ لا يدخل في تحديد منطقة الحلول المشـــتركة (الشروط الأخرى حلت محله)

4- قد يكون الحل المثالي نقطة وحيدة وقد يكون عدد لانهائي من النقاط وذلك عندما يكون احد أضـلاع منطقة الحل المشـتركة والمار بنقطة الحل المثالي موازيا للمستقيم $Z=0$ وعليه عند سحب المستقيم الممثل لتابع الهدف سينطبق هذا المستقيم على الضلع الموازي تكون جميع نقاط ذلك الضلع والتي عددها لانهائي هي حلول مثالية

5- إذا كانت منطقة الحلول المقبولة مفتوحة من جهة تزايد التابع z فإننا لا نســـتطيع التوقف عند حل مثالي محدد عندها نقول إن لتابع الهدف عدد لانهائي من الحلول المقبولة التي تعطينا قيما لـ z اكبر فاكبر

6- حالة عدم وجود حل مثالي (حل مقبول) وذلك عندما تكون الشـروط متناقضـة بعضـها مع بعض عندها تكون منطقة الإمكانيات مجموعة خالية

الأمثلة التالية توضح الحالات الثلاثة

مثال:

أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

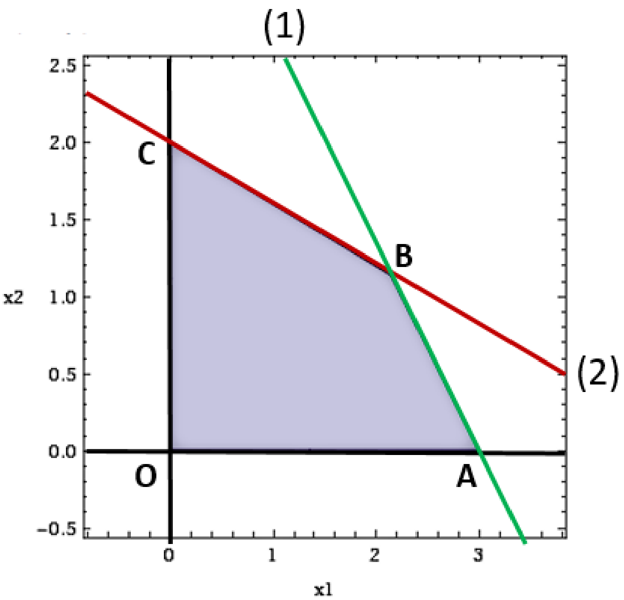
$$Z = 4x_1 + 10x_2 \to Max$$

وذلك ضمن الشروط

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 10 \\ x_1 \ge 0 \quad &, x_2 \ge o \end{aligned}$$

(حالة عدد لانهائي من الحلول)

التمثيل البياني



مثال:

أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

$$Z = -2x_1 + 6x_2 \to Max$$

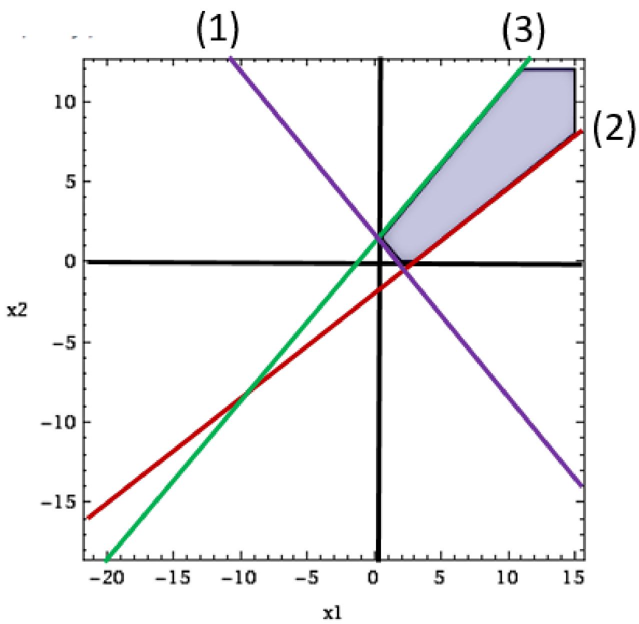
وذلك ضمن الشروط

$$2x_1 - 3x_2 \le 6$$

$$-x_1 - x_2 \leq -2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

(حالة عدم وجود حل مثالي محدد)

التمثيل البياني



مثال:

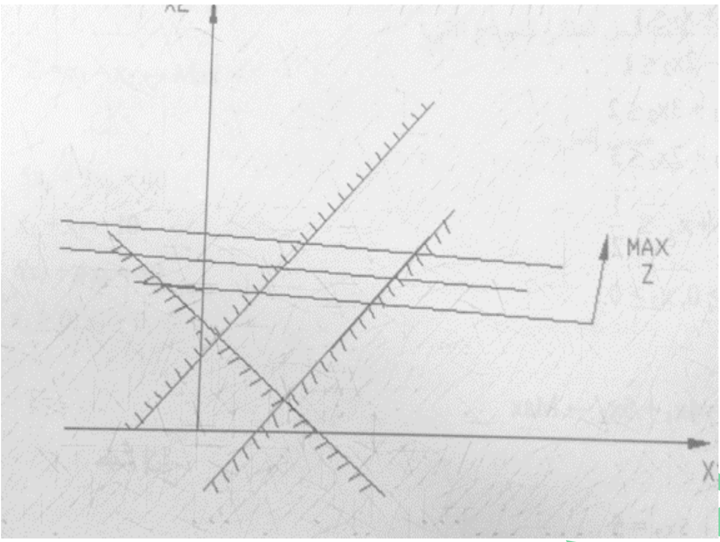
أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

$$Z = x_1 + 50x_2 \rightarrow Max$$

وذلك ضمن الشروط

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$-x_1 + x_2 \leq -1$$
$$x_1 - x_2 \leq -1$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

التمثيل البياني



أمثلة غير محلولة

1-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

$$Z = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$$

ضمن الشروط

$$6x_1 + 9x_2 \le 54$$
$$7x_1 + 6x_2 \le 42$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2 \ge 0$$

2-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

$$Z = x_1 + 50x_2 \rightarrow Max$$

ضمن الشروط

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$-x_1 + x_2 \le -1$$
$$x_1 + x_2 \le -1$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

3-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي التالي

$$Z = 5x_1 + 9x_2 \to Max$$

ضمن الشروط

$$\begin{aligned}
2x_1 + 6x_2 &\leq 24000 \qquad (1)\\
8x_1 + 4x_2 &\leq 40000 \qquad (2)\\
5x_1 + 6x_2 &\leq 30000 \qquad (3)\\
x_1 \,,\; x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

4-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to Max$$

ضمن الشروط

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 8\\
3x_1 + x_2 &\leq 6\\
x_1 + x_2 &\leq 4\\
x_1 \geq 0 \quad &, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

5-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي التالي

$$Z = 4x_1 + x_2 \to Max$$

ضمن الشروط

$$x_1 + 3x_2 \le 9 \qquad (1)$$
$$x_2 \le 4 \qquad (2)$$
$$x_1 \le 6 \qquad (3)$$
$$x_1 + x_2 \le 2 \qquad (4)$$
$$x_1 \ , \ x_2 \ge 0$$

6-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي التالي

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$$

ضمن الشروط

$$x_1 + 2x_2 \ge 2 \qquad (1)$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 12 \qquad (2)$$
$$x_1 + x_2 \ge 6 \qquad (3)$$
$$x_1 \ , \ x_2 \ge 0$$

7-أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي التالي

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow Min$$

ضمن الشروط

$$x_1 + 2x_2 \ge 5 \qquad (1)$$
$$2x_1 - x_2 \ge 12 \qquad (2)$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 4 \qquad (3)$$
$$x_1 \ , \ x_2 \ge 0$$

انتهـــت المحاضرة

مدرس المقرر

د. ميسم احمد جديد