الوحدة الأولى الأعداد والكسور

أولاً: طبيعة الأعداد

❖ **العدد الطبيعي:** هو عدد موجب لا يحتوي على فواصل ولا جذور صماء **مثال:**
$5,10,11,17$

❖ **العدد الصحيح:** هو كل عدد موجب وسالب ولا يحتوي على فاصلة عشرية ولا جذور صماء
مثال: $-10\ ,-6\ ,+3$

❖ **العدد العشري:** هو كل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و b عدد طبيعي لا يساوي الصفر وتتكون قيمته منتهية وغير دورية $a\times 10^n$
مثال: $\frac{9}{2}=4.5/\ -3.22$
$\frac{19}{10}=1.9$

❖ **العدد غير عشري:** هو عدد فاصلته العشرية غير منتهية ودورية ويمكن كتابته بشكل $\frac{a}{b}$
مثال: $\frac{5}{3}=1.666^-$, $\frac{7}{3}=2.3333^-$

❖ **العدد العادي:** هو كل عدد يمكن كتابته بالصيغة $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و b عدد مغاير للصفر فالأعداد الصحيحة والطبيعية والعشرية وغير العشرية هي أعداد عادية
طبيعي← صحيح ← عشري ← غير عشري ← عادي

❖ **الأعداد غير عادية:** هو عدد يكتب بشكل كسر $\frac{a}{b}$ وتكون قسمته غير منتهية وغير دورية **مثال:** $\frac{2\pi}{3}\ ,\pi\ ,\sqrt{2}\ ,\sqrt{3}$
العدد الغير عادي إما جذر صماء
أو العدد π

ملاحظة:
لا نحدد طبيعة أي عدد إلا بعد إجراء العمليات الرياضية

أمثلة على طبيعة الأعداد:

1. العدد 10^3 هو عدد:
   A. عادي
   B. غير صحيح
   C. **صحيح**

2. $\frac{x}{3}$ هو عدد:
   A. **عدد غير عادي**
   B. عدد عادي
   C. عدد عشري

3. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ هو عدد
   A. **عشري**
   B. غير عادي
   C. صحيح

4. العدد $\left(2\sqrt{3}\right)^3$ هو عدد
   A. **صحيح**
   B. عادي غير صحيح
   C. غير عادي

5. $\frac{3\sqrt{4}}{5}$ هو عدد
   A. **عادي**
   B. غير عادي
   C. صحيح

6. $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^4$ هو عدد :
   A. عشري
   B. غير عادي
   C. **صحيح**

7. $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ هو عدد:
   A. عادي
   B. صحيح
   C. **غير عادي**

8. العدد $2\pi-\frac{1}{2}\pi$ هو عدد
   A. عادي
   B. **غير عادي**
   C. صحيح

ثانيًا: القاسم المشترك الأكبر GCD

خواص هامة:

1. لكل عدد طبيعي عدا الواحد له قاسمان طبيعيان هما العدد 1 والعدد نفسه
2. $GCD(a,a)=a$
3. إذا كان b قاسم للعدد a كان $GCD(a,b)=b$
4. العدد الأولي: هو كل عدد طبيعي أكبر من واحد وله قاسمان هما نفسه والعدد واحد
5. القول أن a و b عددان أوليان فيما بينهما يعني القول $GCD(a,b)=1$
   مثل العددان 39 و 55
6. في حالة عددين $a>b$ $GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$

طرق إيجاد GCD

1. خوارزمية الطرح المتتالي

طريقة الحل:

1) نطرح العدد الصغير وليكن b من الكبير وليكن a أي $a-b$

2) نستمر بالطرح معتمدين المبدأ

$$GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$$

3) القاسم المشترك الأكبر هو أخر ناتج طرح غير معدوم

2. طريقة خوارزمية القسمة الإقليدية:

1) نقسم العدد الكبير على الصغير فينتج باقي القسمة

2) نقسم العدد الصغير على باقي فينتج باقي جديد

3) نكرر العملية السابقة حتى يبقى الباقي صفر

4) قاسم المشترك الأكبر هو أخر باقي غير معدوم

أمثلة: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 520 , 130

الحل:

a	b	$a-b$
520	130	390
390	130	260
260	130	130
130	130	0

$$GCD(520,130)=130$$

مثال 2: أوجد القاسم المشترك للعددين 72 , 27

الحل

a	b	$a-b$
72	27	45
45	27	18
27	18	9
18	9	9
9	9	0

$$GCD(72,72)=9$$

مثال3: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 512 , 224

باقي	مقسوم عليه	مقسوم
64	224	512
32	64	224
0	32	64

$$GCD(512,224)=32$$

مثال4: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 231 ، 363

باقي	مقسوم عليه	مقسوم
132	231	363
99	132	231
33	99	132
0	33	99

$$GCD(363\ ,231)=33$$

اختر الإجابة الصحيحة

1. $GCD(3,3)$ يساوي

A. 1 B. 2 C. 3

2. إذا كان b قاسم للعدد a فإن

A. $GCD(a,b)=ab$

B. $GCD(a,b)=b$

C. $GCD(a,b)=a$

3. إذا كان a,b عددين أوليان فيما بينهما فإن $GCD(a,b)$ يساوي

A. b B. 1 C. a

4. العددان الأوليان فيما بينهما

A. 8و42 B. 32 و 11 C. 33و27

5. في حالة $a>b$ يكون

A. $GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$

B. $GCD(a,b)=GCD(a,a-b)$

C. $GCD(a,b)=GCD(a,b-a)$

ثالثاً: الكسور المختزلة:

سؤال الكسور المختزلة بالفحص

1. أوجد الكسر المختزل

2. دلل على الكسر المختزل

اولاً: أوجد الكسر المختزل لإيجاد الكسر المختزل لأي كسر كان نقسم البسط على GCD والمقام على GCD فيظهر الكسر مختزل

أمثلة:

أوجد الكسر المختزل للكسر $\frac{171}{243}$

نوجد $GCD(243,171)$

$$GCD(243,171)=9$$

$$\frac{171\div 9}{243\div 9}=\frac{19}{27}$$

حالة الثانية: دلل على الكسر المختزل الذي يكون بسطه ومقامه عددان أوليان فيما بينهما يكون الكسر كسر مختزلاً

أمثلة: اختر الإجابة الصحيحة

1. دلل على الكسر المختزل
   - A. $\frac{33}{270}$
   - B. $\frac{2574}{1222}$
   - C. $\frac{34}{35}$
2. أحد الكسور الآتية هو كسر مختزل
   - A. $\frac{5}{19}$
   - B. $\frac{14}{35}$
   - C. $\frac{25}{45}$
3. أحد الكسور التالية كسراً مختزلاً هو
   - A. $\frac{11}{33}$
   - B. $\frac{15}{33}$
   - C. $\frac{11}{31}$

رابعاً: الجذر التربيعي للعدد الموجب أولاً خواص الجذور

1. $\sqrt{a^2} = a$
2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
3. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
5. إزالة الجذرين المقام نضرب البسط ومقام بنفس الجذر الموجود بالمقام

$$\frac{\sqrt{\text{عدد}}}{\sqrt{\text{عدد}}} = \frac{\sqrt{}}{\sqrt{}} \times \frac{\sqrt{}}{\sqrt{}}$$

6. قاعدة تحويل من $\sqrt{c}$ إلى $a\sqrt{b}$ نوجد عددين ضربهما يساوي العدد c إحداهما ينجذر وثاني لا نجذره ونخرج إلى خارج الجذر والذي لا ينجذر يبقى داخل الجذر $\rightarrow \sqrt{c}$

$$a\sqrt{b}$$

7. عكس قاعدة تعديل

$$\sqrt{c} \leftarrow a\sqrt{b}$$

نربع العدد a وندخله بعملية جداء مع b فيصبح $\sqrt{a^2 \times b}$ نستخدم قاعدة جمع وطرح الجذور المختلفة

جمع وطرح الجذور: لا يمكن جمع وطرح الجذور إلا بأن تكون جذور متشابهة

مثال: $3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

$$6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

أمثلة إيضاحية على قواعد

1. $\sqrt{9^2} = 9$
2. $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$
3. $\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16}$
   $5 \times 4 = 20$
4. $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$
5. $\frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \rightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
6. $\sqrt{27} \Rightarrow \sqrt{9 \times 3} \Rightarrow 3\sqrt{3}$
7. $2\sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{4 \times 2} \Rightarrow 4\sqrt{2}$
8. $3\sqrt{108} = 3\sqrt{36 \times 3} \Rightarrow 18\sqrt{3}$
9. $2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{4 \times 2} \Rightarrow \sqrt{8}$
10. $3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{9 \times 2} \Rightarrow \sqrt{18}$
11. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - 6\sqrt{18}$

الحل:

$$3\sqrt{2} + 4\sqrt{4 \times 2} - 6\sqrt{9 \times 2}$$
$$3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 18\sqrt{2}$$
$$11\sqrt{2} - 18\sqrt{2}$$
$$= -7\sqrt{2}$$

12. $3 \times \sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$

الحل :

$$18 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 36$$

أمثلة: اختر الإجابة الصحيحة

1. $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ يساوي
   - A. $1 + \sqrt{2}$
   - B. $1 - \sqrt{2}$
   - C. $5\sqrt{2}$
2. إن قيمة العدد $A = \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{9}}}$
   - A. $A = 4$
   - B. $A = 3$
   - C. $A = 2$
3. $\frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ يساوي
   - A. 0
   - B. 3
   - C. $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{75} - \sqrt{48}$ يساوي
   - A. $2\sqrt{3}$
   - B. $\sqrt{3}$
   - C. $3\sqrt{3}$
5. $\sqrt{11^2 \times 7^4}$ يساوي
   - A. $(11 \times 7)^3$
   - B. $\sqrt{11 \times 7^2}$
   - C. 11×7^2
6. العدد $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
   - A. 2
   - B. $\frac{1}{2}$
   - C. $2\sqrt{2}$
7. ثلاثة أمثال العدد $\sqrt{8}$ يساوي
   - A. $3\sqrt{72}$
   - B. $\sqrt{3 \times 8}$
   - C. $\sqrt{72}$
8. ناتج $\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 5^2$ هو العدد
   - A. 25
   - B. 12
   - C. -13
9. نصف العدد $\sqrt{8}$
   - A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   - B. $2\sqrt{2}$
   - C. $\sqrt{2}$

أمثلة شاملة على الوحدة الأولى

حل التمرينات الآتية

التمرين الأول

المستطيل $ABCD$ بعداه

$$AD=\sqrt{12}\quad ,\quad AB=\sqrt{27}+2\sqrt{3}$$

1. اكتب كلاً من بعدي المستطيل بالصيغة $a\sqrt{3}$
2. احسب محيط ومساحة المستطيل

الحل:

❖ $AD=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}$

$$AD=2\sqrt{3}$$

$$AB=\sqrt{9\times3}+2\sqrt{3}$$

$$=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$$

$$AB=5\sqrt{3}$$

❖ $P=2\left(\text{عرض}+\text{طول}\right)$

$$P=2\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{3}\right)$$

$$P=14\sqrt{3}cm$$

$S=$ العرض $\times$ طول

$$S=2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}$$

$$S=30\ cm^2$$

التمرين الثاني:

$ABCD$ متوازي أضلاع فيه

$$AB=\sqrt{125}+\sqrt{112}$$

$$BC=\sqrt{45}-\sqrt{28}+6\sqrt{7}+2\sqrt{5}$$

1. برهن أن الشكل $ABCD$ معين
2. احسب محيط الشكل

الحل:

1. حتى يثبت أن الشكل معين فيجب تساوي ضلعين

$$AB=BC$$

$$AB=\sqrt{25\times5}+\sqrt{16\times7}$$

$$AB=5\sqrt{5}+4\sqrt{7}$$

$$BC=\sqrt{9\times5}-\sqrt{7\times4}+6\sqrt{7}+2\sqrt{5}$$

$$BC=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-2\sqrt{7}+6\sqrt{7}$$

$$BC=5\sqrt{5}+4\sqrt{7}$$

نجد أن $AB=BC$

إذاً الشكل $ABCD$ معين

2. طول الضلع $P=4\times$

$$P=4\times\left(5\sqrt{5}+4\sqrt{7}\right)$$

$$P=20\sqrt{5}+16\sqrt{7}\ cm$$

تمرين الثالث

1. احسب $GCD(80,64)$ بطريقة القسمة الإقليدية
2. أوجد ناتج $\frac{64}{80}+\frac{1}{5}-7$ وحل الناتج الصحيح

الحل:

باقي	مقسوم عليه	مقسوم
16	64	80
0	16	64

$$GCD(80,64)=16$$

2) $\frac{64}{80}+\frac{1}{5}-7$

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{5}-7=\frac{5}{5}-7$$

$$=1-7=-6$$

نعم الناتج عدد صحيح

تمرين الرابع:

$ABCD$ مستطيل فيه

$$AB=\sqrt{32}-\sqrt{18}$$

$$BC=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

1. اكتب كلاً من $AB\ ,BC$ بالصيغة $a\sqrt{2}$ واستنتج أن $ABCD$ مربع
2. احسب محيط ومساحة المربع
3. احسب نصف طول القطر الدائرة المارة برؤوسه

الحل:

$$AB=\sqrt{32}-\sqrt{18}$$

$$AB=\sqrt{16\times2}-\sqrt{9\times2}$$

$$AB=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}$$

$$AB=\sqrt{2}$$

$$BC=\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$BC=\sqrt{2}$$

نستنتج أن $AB=BC$

إذاً الشكل $ABCD$ مربع

2) طول الضلع $P=4\times$

$$P=4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}\ cm$$

$$S=\left(\text{طول الضلع}\right)^2$$

$$S=\left(\sqrt{2}\right)^2=2\ cm$$

3) القطر الدائرة هو قطر المربع وبحسب حسب مبرهنة فيثاغورث

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

$$AC^2=2+2=4$$

$$AC=\sqrt{4}=2\ cm$$

نصف القطر يساوي $\frac{2}{2}$ يساوي

$$r=1$$

تمرين الخامس:

ليكن لدينا عددين $h\ ,m$ حيث

$$h=\left(\sqrt{7}\right)\left(1-\sqrt{7}\right)$$

$m = \sqrt{117} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7} - \sqrt{36}$

1. اكتب كلاً من العددين m , h على الشكل $a\sqrt{7} + b$
2. أثبت أن $m - h$ عدد طبيعي
3. أحصر $\sqrt{112}$ بين عددين صحيحين متتاليين

الحل:

1) $h = \sqrt{7} - 7$

$m = \sqrt{16 \times 7} - 3\sqrt{4 \times 7} + 3\sqrt{7} - 6$

$m = 4\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 6$

$m = \sqrt{7} - 6$

2) $m - h = \sqrt{7} - 6 - (\sqrt{7} - 7)$

$m - h = \sqrt{7} - 6 - \sqrt{7} + 7$

هو عدد طبيعي

$m - h = 1$

3) $\sqrt{121} < \sqrt{122} < \sqrt{144}$

$11 < \sqrt{122} < 12$

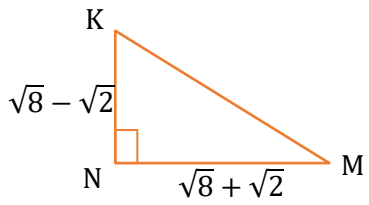
التمرين السادس

MNK مثلث قائم في N و $MN = \sqrt{8} + \sqrt{2}$ و $NK = \sqrt{8} - \sqrt{2}$

المطلوب:

1. اكتب MN و NK بالشكل $a\sqrt{2}$
2. احسب $\tan(\widehat{M})$ واكتبه بأبسط صورة
3. احسب MK

الحل:



1. $MN = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{2}$

$MN = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

$KN = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

2. $\tan(\widehat{m}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan(\widehat{m}) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

$\tan(\widehat{m}) = \frac{1}{3}$

---

3. MK حسب مبرهنة فيثاغورث

في المثلث KNM

$KM^2 = MN^2 + KN^2$

$KM^2 = 18 + 2 = 20$

$KM^2 = 20$

$KM = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$

$KM = 2\sqrt{5}\ cm$

الوحدة الثانية :

قوى ونشر وتحليل

أولاً: قوى العدد العادي خواص القوى:

1) $a^n + a^m = a^{n+m}$
2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3) $((a)^n)^m$
4) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
7) $a^0 = 1$ بحيث $a \neq 0$
8) في حالة $n = 1$ $a^1 = a$

- التمارين التي تأتي على هذا الدرس:

1) حساب قيمة كسر.
2) اختزال كسر بأبسط صورة.
3) اختر الإجابة الصحيحة.

أولاً: عند حساب كسر: نبسط القوى المختلفة ونجعلها متشابهة وأخيراً نفك القوى المتبقية.

أمثلة:

مثال1:

$A = \frac{3^7 \times 2^8}{9^3 \times 2^5}$

فأن قيمة A

$A = \frac{3^7 \times 2^3}{3^6}$

$A = 3 \times 8 = 24$

مثال2:

$A = \frac{3^2 \times 5^2 \times 7^4}{(15)^2 \times 7^2}$

الحل:

$A = \frac{3^2 \times 5^2 \times 7^4}{3^2 \times 5^2 \times 7^2}$

$A = \frac{7^4}{7^2} = 7^2$

$A = 49$

مثال3:

$A = \frac{6^4 \times 7^2 \times 5^3}{35^2 \times 4^2 \times 3^3}$

$A = \frac{3^4 \times 2^4 \times 7^2 \times 5^3}{7^2 \times 5^2 \times 2^4 \times 3^3}$

$A = 3 \times 5 \Rightarrow A = 15$

مثال4: اختزل الكسور التالية:

$A = \frac{2^2 \times 3^8 \times 7^4}{4^2 \times 9^3 \times 7^6}$

$$A=\frac{2^2\times 3^8\times 7^4}{2^4\times 3^6\times 7^6}$$

$$A=\frac{3^2}{2^2\times 7^2}$$

$$A=\frac{3^2}{(14)^2}=\left(\frac{3}{14}\right)^2$$

- **اختر الإجابة الصحيحة:**

1) **المقدار** $A=3^{-3}+3^{-3}+3^{-3}$ **يساوي:**

A. 3^{-4} B. 3^{-2} C. 3^4

2) $((2)^{-2})^2$ **هو عدد:**

A. صحيح.
B. غير عادي.
C. عادي غير صحيح.

3) **ربع العدد** 8^5 **هو:**

A. 2^{13} B. 2^8 C. 2^{15}

4) **العدد 0,0001 هو:**

A. 10^{-5} B. 10^{-4} C. 10^{-2}

5) **الكتابة المعيارية للعدد 450,1 هي:**

A. $0{,}4501\times 10^3$
B. 4501×10^{-1}
C. $4{,}501\times 10^2$

6) **في حالة n عدد صحيح مربع العدد الصحيح التالي للعدد n هو:**

A. $(n+1)^2$
B. $2(n+1)$
C. (n^2+1)

7) $10^3\times 10^{-4}$

A. 0,1
B. -10
C. 10^{-12}

8) **العدد** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$ **هو:**

A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $2\sqrt{3}$

9) $\frac{1}{4}\times(2^5)$

A. 8 B. 1 C. 16

10) **العدد** 3^9+3^7 **يساوي:**

A. 6^{16} B. 3^{16} C. 10×3^7

11) **إذا كان** $3^n=9^4$ **فإن قيمة n تساوي:**

A. 6 B. 8 C. 4

ثانياً وثالثاً: النشر والتحليل:

النشر: توزيع الضرب على الجمع والطرح ذي الحد.

$$k(a+b)=ka+kb$$

ذي الحدين $(a+b)(c+d)$

$$ac+ad+bc+bd$$

- **مطابقات:**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a-b)(a+b)=a^2+b^2$$

أمثلة: إيضاحية فقط:

1) $3x-6=3(x-2)$

---

2) $(x-7)(-3x-6)=-3x^2-6x+21x+42$

---

3) $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$

---

4) $(2x-3)^2=4x^2-12x+9$

---

5) $(x-2)(x+2)=x^2-4$

التحليل: هو تحويل العبارات المعادلة من جمع وطرح الى جداء أقواس وإخراج عامل مشترك

رقم/ مجهول/ قوس

تحليل مطابقات

1+2: لهما شروط أن يكون الشكل ثلاثي الحدود وأن ينجذر الحد الأول وينجذر الحد الثالث ويكون ضعف الأول بالثاني مساوياً للحد الثاني عند ذلك نحلل المطابقة 2 و 1

$\left(\text{جذر الأول اشارت الحد الثاني جذر الثالث}\right)^2$

3: شرط وجود حدين الأول ينجذر والثاني ينجذر وبينهما إشارة (-) نحلل عند ذلك نفتح قوسين.

$$\left(\begin{matrix}\text{جذر}\\\text{ثاني}\end{matrix}-\begin{matrix}\text{جذر}\\\text{الأول}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{جذر}\\\text{ثاني}\end{matrix}+\begin{matrix}\text{جذر}\\\text{الأول}\end{matrix}\right)$$

أمثلة إيضاحية فقط:

1) $3x-9$

$=3(x-3)$

2) $3x^2-2x$

$=(x)(3x-2)$

3) $(3x-2)+(x-2)(3x-2)$

$=(3x-2)(1+x-2)$

$=(3x-2)(x-1)$

4) $(2x-2)^2-3(2x-2)$

$=(2x-2)(2x-2-3)$

$=(2x-2)(2x-5)$

4: x^2-2x+1

ثلاثة حدود الأول ينجذر

الثالث ينجذر

الحد الثاني يساوي ضعف الأول بالثاني

$=>(x-1)^2$

5: x^2+4x+4

$=>(x+2)^2$

6: (x^2-4)

الأول ينجذر والثاني ينجذر وبينهما إشارة (-)

$(x+2)(x-2)$

7: $(x-2)^2-4$

$(x-2-2)(x-2+2)$

$(x-4)(x)$

8: $(x^2-2)^2-(x-1)^2$

$(x-2+x-1)(x-2-(x-1)$

$=(2x-3)(+1)$

$=(2x-3)$

في كل مما يلي أجب بكلمة صح أو خطأ:

1) العدد 5^{-2} هو عدد عشري (صح)

2) قيمة A حيث $A=\frac{2^3\times5^7\times7}{2^3\times5\times7}, A=70$ (خطأ)

3) نصف العدد 6^4 هو 3^4 (خطأ)

4) إن العدد $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-2}$ يساوي 7 (صح).

5) إن العدد $A=\frac{2^3\times3}{8\times3^{-2}}$ والعدد $B=3^3$ فإن $A=B$

6) قيمة العدد $\left(\sqrt{3}\right)^{-5}$ تساوي 9 (صح)

7) نصف العدد 4^6 هو 2^3 (خطأ)

8) ناتج نشر $\left(\sqrt{2x}+3\right)^2$ يساوي $2x^2+9$ (خطأ)

اختر الإجابة الصحيحة:

1) إن العدد $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

A. غير عادي

B. عادي

C. صحيح

2) ناتج $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ النشر :

A. $x^2+\sqrt{3}$

B. $x^2-\sqrt{3}$

C. x^2-3

3) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

A. 2 B. 4 C. $\sqrt{2}$

حل التمرينات التالية:

- **التمرين الأول:**

1) حل المقدار $A=4x^2-9$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

2) انشر مستفيداً من المطابقات الشهيرة $B=4x^2-12+9$

3) حلل المقدار $(A-B)$

الحل:

1) $A=(2x-3)(2x+3)$

2) $B=4x^2-12x+9$

3) $A-B=$

$(2x-3)(2x+3)-(2x-3)^2$

$=2x-3[2x+3-2x+3]$

$A-B=[2x-3](6)$

$A-B=(6)(2x-3)$

- **التمرين الثاني: لدينا الأعداد التالية:**

$A=3\sqrt{50}\ , B=2\sqrt{24}$

$C = 5\sqrt{3}\,, E = \dfrac{4^3 \times 9^5 \times 25}{2^4 \times 3^8}$

1) احسب $A \times B \times C$ مبيناً طبيعة الناتج.

2) أوجد قيمة E.

3) استنتج قيمة $\frac{E}{A\times B\times C} = \frac{1}{2}$

الحل:

1) $A \times B \times C$

$=3\sqrt{50} \times 2\sqrt{24} \times 5\sqrt{3}$

$A \times B \times C = 1800$

2) $E = \frac{4^3\times 9^5\times 25}{2^4\times 3^8}$

$E = \dfrac{2^6 \times 3^{10} \times 25}{2^4 \times 3^8}$

$E = 2^2 \times 3^2 \times 25$

$E = 900$

3) نستنتج أن $\frac{E}{A\times B\times C} = \frac{1}{2}$

لأن: $\frac{900}{1800} = \frac{1}{2}$

- **التمرين الثالث:**

لدينا المربع $ABCD$ طول ضلعه $3 + \sqrt{3}$ ومساحته S_1 ولدينا مستطيل $EFGH$ بعداه $EF = \sqrt{72} + 3\sqrt{6}$ و $EH = \sqrt{2}$ مساحته S_2.

1) احسب S_2 واختزل الناتج.

2) أثبت أن $S_1 = S_2$.

الحل:

1) العرض × الطول $= S_2$

$S_2 = \left(\sqrt{72} + 3\sqrt{6}\right) \times \sqrt{2}$

$S_2 = \sqrt{144} + 3\sqrt{12}$

$S_2 = 12 + 3\sqrt{4 + 2}$

$S_2 = 12 + 6\sqrt{2}\ cm^2$

$S_1 = \left(\text{طول الضلع}\right)^2$

$S_1 = \left(3 + \sqrt{3}\right)^2$

$S_1 = 9 + 6\sqrt{3} + 3$

$S_1 = 12 + 6\sqrt{3}\ cm^2$

نستنتج أن: $S_1 = S_2$

- **التمرين الرابع:**

لنتأمل المقدار: $A = (x-5)^2$

1) انشر المقدار A ثم اختزله.

2) حلل A إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

3) احسب قيمة $B = \frac{4^5\times 3^2\times 15}{2^6\times 3^3}$

الحل:

1) $A = x^2 - 10x + 25 - 9$

$A = x^2 - 10x + 16$

2) $A = (x - 5 + 3)(x - 5 - 3)$

$A = (x-2)(x-8)$

3) $B = \dfrac{2^{10}\times 3^2\times 15}{2^6\times 3^3}$

$B = \dfrac{2^4 \times 15}{3}$

$B = 16 \times 5 = 80$

$B = 80$

الوحدة الثالثة:

أولاً: حل المعادلات

المعادلة هي عبارة عن طرفين مساواة

درجة أولى $ax + b = c$

حيث a و b و c أعداد عادية و غير عادية.

لحل المعادلة: ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى طرف ونقسم على أمثال المجهول فنحصل على قيمة المجهول.

سؤال حل المعادلة => أوجد جذر المعادلة أو حل المعادلة.

نقول عن المعادلتين المتكافئتين هما معادلتين لهما نفس الحلول.

أمثلة إيضاحية:

مثال1: $5y - 4 = 3y + 2$

$5y - 3y = 4 + 2$

$2y = 6\,, y = 3$

مثال2:

$6(x-3) = 2(3x-2) - 3x$

$6x - 18 = 6x - 4 - 3x$

$6x - 6x + 3x = +18 - 4$

$3x = 14$

$x = \dfrac{14}{3}$

مثال3: $\frac{y}{2} - \frac{3}{2} = \frac{y}{3} - \frac{1}{2}$

$\dfrac{y}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}$

(3) (2)

$\dfrac{3y - 2y}{6} = 1$

$\dfrac{y}{6} = 1 => y = 6$

معادلات من الدرجة الثانية

معادلات على شكل حدود جبرية.

نجعل أحد طرفي المعادلات صفر

نحلل وفق طرق تحليل المعروفة حتى نحولها إلى جداء أقواس يساوي الصفر

نطبق خاصية الجداء الصفري.

$(ax + b)(cx + d) = 0$

إما $ax + b = 0$

$cx + d = 0$ أو

ونحل معادلة من الدرجة الأولى

$x^2 = a$

إذا كان لدينا حلان $a > 0$

اما $x = +\sqrt{a}$ او $x = -\sqrt{a}$

إذا كان لدينا حل $a = 0$

$x = 0$

إذا كان $a < 0$ ليس لدينا حلول مستحيلة الحل.

خطوات حل معادلة من الدرجة الثانية

1) أحد الأطراف يساوي الصفر
2) جعل طرف الأيسر من المعادلة جداء أقواس.
3) نستخدم خاصية الجداء الصفري.

أمثلة:

مثال1:

$(x-3)^2 - 3(x-3) = 0$

$[x-3][x-3-3] = 0$

$[x-3][x-6] = 0$

اما $x - 3 = 0 => x = 3$

او $x - 6 = 0 => x = 6$

مثال2: $x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16 =>$ اما $x = +\sqrt{16}$

او$x = -\sqrt{16}$

اما$x = 4$, او $x = -4$

مثال3:

$x(x-3)(3x+9) = 0$

اما $x = 0$ او $x - 3 = 0$

$x = 3$

او $3x + 9 = 0 => 3x = 9$

$x = -\frac{9}{3} => x = -3$

مثال4: $2y^2 + 12^2 + 18 = 0$

$y^2 + 6y + 9 = 0$

$(y+3)^2 = 0$

$y + 3 = 0 => y = -3$

مثال5: $16 - (2x-1)^2 = 0$

$(4 + 2x - 1)[4 - (2x-1)] = 0$

$(3 + 2x)(2x + 5) = 0$

اما $3 + 2x = 0 => x = -\frac{3}{2}$

او $2x + 5 = 0 => x = \frac{5}{2}$

مثال6:

$(4x-1)(x+3) = 11x + 13$

$4x^2 + 12x - x - 3 = 11x + 13$

$4x^2 = 16$

$x^2 = 4 =>$ اما$x = +2$

او $x = -2$

ثانياً: المسائل الكلامية:

1) نرمز للمجهول بالرمزx.
2) نعين الفرض من المسألة.
3) نشكل معادلة عن طريق ربط بين المجهول والفرض
4) نحل المشكلة ونناقش قيم الحل.

أمثلة:

1) في أحد المجالس عدد الأشخاص ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20سنة و30 سنة وثلثهم تنقص أعمارهم عن 20سنة ومنهم 20شخص تزيد أعمارهم عن 30سنة ما عدد الأشخاص في هذا المجلس.

الحل:

نفرض عدد الأشخاص x

$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 20$

$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 20$

$\frac{12}{12}x - \frac{4}{12}x - \frac{3}{12}x = 20$

$\frac{5}{12}x = 20$

$x = \frac{20}{\frac{5}{12}} \Rightarrow x = \frac{20 \times 12}{5}$

$x = 48$شخص

مسألة2: قبل خمس سنوات كان عمر أحمد نصف ما سيصبح عليه بعد خمس سنوات

ما هو عمر أحمد الأن.

نفرض عمر أحمد x .

قبل خمسة سنوات $x - 5$

بعد خمس سنوات $x + 5$

$x - 5 = \frac{1}{2}(x + 5)$

$2x - 10 = x + 5$

$2x - x = 10 + 5$

$x = 15$ وهو عمر أحمد

مسألة3: ما هو العدد الذي إذا طرحنا خمسه من ثلاثة أمثاله كان الناتج 26.

الحل:

نفرض العدد x .

$$3x - \frac{2}{5}x = 26$$
$$\frac{15}{5}x - \frac{2}{5}x = 26$$
$$\frac{13}{5}x = 26$$
$$x = \frac{26}{\frac{13}{5}}$$
$$x = \frac{26}{1} \times \frac{5}{13} \Rightarrow x = 10$$

المتراجحات من الدرجة الأولى

شكل العام للمتراجحة هي:

$$ax + b \begin{cases} \leq c \\ \geq c \\ < c \\ > c \end{cases}$$

خطوات حل المتراجحة:

ننقل المجاهيل إلى طرف أخر ثم نقسم على أمثال المجهول ننتبه إلى أن تقسيم الطرفين أو ضرب الطرفين بعدد إذا كان سالب=> نغير جهة المتراجحة

إذا كان العدد موجب=> لا نغير جهة المتراجحة.

تمثل الحلول على مستقيم الأعداد

=> أولاً نحدد اتجاه الحل إذا كان

$<$	$>$
$\leq$	$\geq$
اتجاه الحل	اتجاه الحل
يسار	يمين

فتحة المجال: تكون مع اتجاه الحل إذا كان في المتراجحة او يساوي.

تكون عكس اتجاه الحل إذا لم يوجد في المتراجحة او يساوي.

نأخذ الحل من مستقيم الأعداد والباقي نشطب عليه

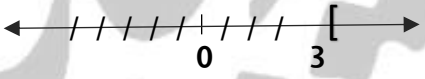
أمثلة: حل المتراجحات ومثل حلولها على مستقيم الأعداد:

1) $3x + 2 \leq 6x - 7$

الحل: $3x - 6x \leq -9$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-9}{-3}$$
$$x \geq 3$$

تمثيل الحلول:



2) $\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \leq \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$

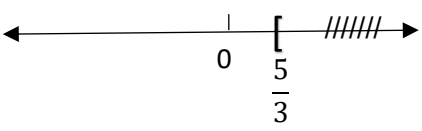
نضرب طرفين المتراجحة ب 4

$$6x - 7 \leq 2x + 9$$
$$6x - 2x \leq 7 + 9$$
$$4x \leq 16$$
$$x \leq 4$$

3) $\sqrt{2}x - \sqrt{8} < -2\sqrt{2}x + \sqrt{18}$

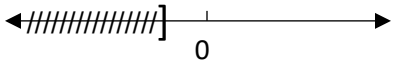
الحل:

$$\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} < -2\sqrt{2}x + \sqrt{9 \times 2}$$
$$\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x < 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{2}x < 5\sqrt{2}$$
$$x < \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow x < \frac{5}{3}$$



مثال4: $2x - 3 > -6$

$$2x > -6 + 3$$
$$2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$



مسائل كلامية:

مثال:

هنالك عرضان في محل تأجير أفلام فيديو اشتراك واستئجار:

يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره استئجار يدفع المستأجر 800 ليرة عن كل فلم يستأجره بدأ من كل فلم يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول أوفر له.

الحل:

$$550x + 6000 < 800x$$

عدد الأفلام x

$$550x - 800x < -6000$$
$$\frac{-250x}{-250} < \frac{-6000}{-250}$$
$$x = 24$$

بدء من أكثر 24 فيلم يشاهد يكون العرض الأول أوفر.

مثال2: هنالك عرضان في أحد المسابح.

☆ دفع نقدي: يدفع الشخص 340 ليرة عن كل زيارة مسبح.

☆ **اشتراك**: يشترك ببطاقة سنوية تصلح لعشرة زيارات للمسبح سعرها 1700 ليرة.

بدأ من كم زيارة للمسبح سنوياً يكون العرض الثاني أوفر للشخص.

الحل: نعرف عدد الزيارات x

$$\frac{340x}{340} > \frac{1700}{340}$$
$$x > 5$$

بدأ من أكثر من خمسة زيارات يكون العرض الثاني أوفر للشخص.

اختر الإجابة الصحيحة:

1) المعادلة التي تقبل $x = -2$ حلاً لها هي:

A. $x^2 + 4 = 0$
B. $5x + 2 = 3x - 2$
C. $3x + 1 = 2x$

2) حلول المتراجحة $4x \leq 3$

A. $x \geq 3$ B. $x \leq 4$ C. $x \leq 3$

3) أحد حلول المتراجحة

$$2x - 1 \leq 3x + 1$$

A. -1 B. -3 C. -5

4) للمعادلة $x^2 - 3 = 0$ حلان لها

A. $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$
B. $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$
C. $(-3, +3)$

5) حلول المعادلة $(x-1)^2 = 4$

A. $(3, -1)$
B. $(-3, +1)$
C. $(3,1)$

ضع كلمة صح او كلمة خطأ:

1) العدد الوحيد الذي مربعه يساويه هو العدد 0. خطأ

2) العدد الوحيد الذي ضعفيه يساوي مربعه هو 0. خطأ

3) إذا كانت $x < 3$ فإن $-x < -3$. خطأ

4) المعادلة $x^2 = -3$ مستحيلة الحل. صح

5) أي عدد موجب ليس حلاً للمتراجحة $-3x + 1 > 0$ خطأ.

6) كل عدد أكبر من 2 يكون مقلوبه أكبر من $\frac{1}{2}$. خطأ

حل التمرينات الأتية:

التمرين الأول: لدين المقداران:

$$A = 2x^2 - x - 1$$
$$B = (2x+1)(x-1)$$

1) أثبت أن $A = B$

2) استنتج حلول المعادلة

$$A = 0$$

الحل:

1)
$$A = 2x^2 - x - 1$$
$$B = 2x^2 - 2x + x - 1$$
$$B = 2x^2 - x - 1$$

إذا $A = B$

2) بما أن $A = B$ نحل معادلة

$$B = 0$$

لان A مقدار درجة ثانية نأخذ B بالشكل المحلل

$$(2x+1)(x-1) = 0$$

اما $2x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

او $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

التمرين الثاني: لدينا المقدار:

$$E = (x-1)^2 - 4$$

1) انشر E ثم اختزله.

2) حلل E إلى جداء عاملين.

3) حل المعادلة $E = -3$

الحل:

1)
$$E = x^2 - 2x + 1 - 4$$
$$E = x^2 - 2x - 3$$

2)
$$E = (x - 1 - 2)(x - 1 + 2)$$
$$E = (x-3)(x+1)$$

3) حل المعادلة $E = -3$

$$(x-1)^2 - 4 = -3$$
$$(x-1)^2 = -3 + 4$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1$$

اما $x - 1 = +1 \Rightarrow x = 2$

او $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

التمرين الثالث: لتكن العبارة:

$$E = (4x-3)^2 - (2x+2)^2$$

1) انشر ثم اختزل العبارة E.

2) حلل E إلى جداء عوامل.

3) حل المعادلة $E = 0$.

الحل:

1)
$$E = 16x^2 - 24x + 9$$
$$-[4x^2 + 8x + 4]$$
$$E = 16x^2 - 4x^2 - 24x$$
$$-8x + 9 - 4$$
$$E = 12x^2 - 32x + 5$$

2)
$$E = (4x - 3 + 2x + 2)$$
$$[4x - 3 - (2x+2)]$$
$$E = (6x-1)(2x-5)$$

3) $E = 0$

$$(6x-1)(2x-5) = 0$$

اما $6x - 1 = 0$

$$6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

او $2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

التمرين الرابع: إذا كان:

$$A = x^2(x-3) - 4(x-3)$$

1) انشر A ثم اختزل.
2) حلل A إلى جداء عوامل.
3) احسب A عندما $x = \frac{1}{2}$
4) حل المعادلة $A = 0$

الحل:

1) $A = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
$A = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

2) حلل A

$$A = x - 3[x^2 - 4]$$

$$A = (x-3)(x-2)(x+2)$$

3) حساب A

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 12$$

$$A = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} - 2 + 12$$

(2)

$$A = \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + 10$$

$$A = -\frac{5}{8} + \frac{80}{8} = +\frac{75}{8}$$

4) $(x-3)(x-2)(x+2) = 0$

اما $x - 3 = 0 \quad x = 3$

او $x - 2 = 0 \quad x = 2$

او $x + 2 = 0 \quad x = -2$

التمرين الخامس: ليكن لدينا المقدار

$$F = x^2(x-3) - 2x + 6$$

1) حلل المقدار F الى جداء عوامل.
2) احسب قيمة F عندما $x = 0$.
3) حل المعادلة $F = 0$

الحل:

1) $F = x^2(x-3) - 2[x-3]$

$$F = [x-3][x^2 - 2]$$

$$F = (x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

2) قيمة F عندما $x = 0$

$$F = 6$$

3) $(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

اما $x - 3 = 0 \, , x = 3$

او $x - \sqrt{2} = 0 \, , x = \sqrt{2}$

او $x + \sqrt{2} = 0 \, , x = -\sqrt{2}$

التمرين السادس: إذا كان $A = \frac{2x-1}{3}$

1) أوجد قيمة A عندما $x = \frac{1}{2}$
2) هل العدد $\frac{9}{2}$ حل للمتراجحة $\frac{2x-1}{3} > 5$
3) حل المتراجحة $\frac{2x-1}{3} > 5$ ومثل حلولها على مستقيم الأعداد

الحل:

1) $A = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{3} = 0$

2) نعوض

$$\frac{2\left(\frac{9}{2}\right)-1}{3} \overset{?}{>} 5$$

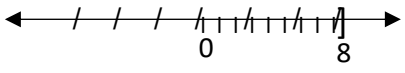
$\frac{8}{3} \overset{?}{>} 5 \Rightarrow \frac{8}{3} > \frac{15}{3}$

غير محققة.

3) $2x - 1 > 15$

$2x > 15 + 1 \Rightarrow 2x > 16$

$x > 8$



التمرين السابع:

$$2x - \frac{5}{2} \leq x + \frac{1}{2}$$

1) تحقق فيما إذا كان العدد 1 يحقق المتراجحة السابقة.
2) حل المتراجحة ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.
3) هل العدد $\sqrt{3}$ يمثل حلاً للمتراجحة برر اجابتك.

الحل:

1) نعوض بدل $x = 1$

$$2(1) - \frac{5}{2} \overset{?}{\leq} 1 + \frac{1}{2}$$

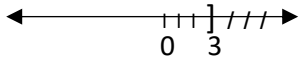
$$\frac{2}{1} - \frac{5}{2} \overset{?}{\leq} \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{2} - \frac{5}{2} \overset{?}{\leq} \frac{3}{2}$$

$-\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ محققة

2) نضرب طرفين المتراجحة بالعدد 2.

$4x - 5 \leq 2x + 1$
$4x - 2x \leq 1 + 5$
$2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 3$



3) $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$

$1 < \sqrt{3} < 2$

حل المتراجحة هو جميع قيم x التي تكون اصغر من 3 او تساويها. $\sqrt{3} < 3$

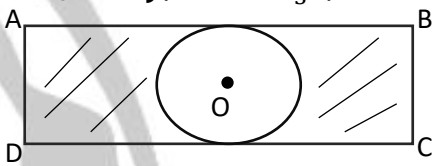
إذاً $\sqrt{3}$ هو حل للمتراجحة.

التمرين الثامن:

في الشكل المجاور $ABCD$ مستطيل فيه AB وDC مماسان للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

$AB = \sqrt{27}$

1) احسب S_1 مساحة مستطيل.
2) احسب S_2 مساحة الدائرة.
3) احسب S_3 مساحة جزء مظلل.



الحل:

1) $S_1 =$ عرض $\times$ طول

$S_1 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{27}$

$S_1 = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}$

$S_1 = 18cm^2$

2) $S_2 = \pi r^2$

$S_2 = \pi.\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi\ cm^2$

3) $S_3 = S_1 - S_2$

$S_3 = 18 - 3\pi\ cm^2$

التمرين التاسع:

أولاً: ليكن لدينا المقدار

$E = (x-1)^2 - 2(x-1) + 1$

1) انشر E ثم اختزله.
2) حلل E إلى جداء عوامل.
3) حل المعادلة $E = 0$

ثانياً: حل المتراجحة

$(x-1)^2 \leq x^2 + 3x$

ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل:

1)

$E = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 + 1$

$E = x^2 - 4x + 4$

2) $E = (x - 1 - 1)^2$

$E = (x-2)^2$

3) $(x-2)^2 = 0$

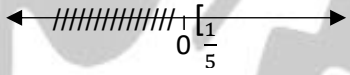
$x - 2 = 0 => x = 2$

ثانياً: $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 3x$

$x^2 - x^2 - 2x - 3x \leq -1$

$-5x \leq -1$

$x \geq \frac{1}{5}$



رابعاً: الوحدة الرابعة:

جمل المعادلات

شكل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\grave{x} + b\grave{y} = \grave{c} \end{cases}$$

حل جملة المعادلتين جبرياً أي إيجاد الحل المشترك

لدينا طريقتين

***1b*: حذف بالجمع:**

1) نوحد أمثال x أو أمثال y مع معاكسه بالإشارة
2) نجمع المعادلة(1)مع المعادلة(2)
3) يظهر قيمة المجهول الأول نعوضه في المعادلة إما (1) أو (2) ونظهر قيمة مجهول الثاني ويكون الحل المشترك ثنائية الحل (x, y)

***2b*: حذف بالتعويض**

1) نكتب نجمة ✯ أي مجهول بدلالة الآخر
2) نعوض ✯ في المعادلة التي لم يصنع منها نجمة
3) نحل معادلة بمجهول واحد و نحسب قيمته و نعوضه في ✯ فيظهر قيمة المجهول الآخر فتظهر ثنائية الحل (x, y)

أمثلة: حل جمل المعادلات الآتية:

$4x + y = -14 \ldots (1)$

$3x + 2y = -8 \ldots (2)$

الحل: نوحد أمثال y بضرب المعادلة رقم (1) بالعدد (-2)

$-8x - 2y = +28 \ldots (1)$

$3x + 2y = -8 \ldots (2)$

بجمع المعادلة رقم (1) مع المعادلة رقم (2)

$-5x = 20$

$x = -4$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$4(-4) + y = -14$

$-16 + y = -14$

$y = -14 + 16 => y = 2$

ثنائية الحل $(-4,2)$

للتحقق من الحل نعوض في الجملة

مثال2:

$x - 11 = y + 11 \dots (1)$
$x - y = 2(y + 19) \dots (2)$

الحل: نكتب ✯ من المعادلة رقم (1)

$x = y + 11 + 11$
$x = y + 22 \dots ✯$

نعوض ✯ في المعادلة رقم (2)

$y + 22 - y = 2y + 38$
$22 - 38 = 2y$
$\frac{-16}{2} = \frac{2y}{2}$
$y = -8$

نعوض y في ✯

$x = -8 + 22$
$x = 14$

ثنائية الحل $(14, -8)$

مثال3:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \dots (1)$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 8 \dots (2)$

الحل: نضرب طرفين المعادلات بالعدد (6) للتخلص من الكسور

$3x + 2y = 42 \dots (1)$
$2x + 3y = 48 \dots (2)$

نضرب المعادلة رقم (1) بالعدد (-2) نضرب المعادلة رقم (2) بالعدد (3)

$-6x - 4y = -84 \dots (1)$
$6x + 9y = 144 \dots (2)$

نجمع المعادلتين (1) مع (2)

$5y = +60 => y = 12$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$3x + 2(12) = 42$
$3x + 24 = 42$
$3x = 42 - 24 => 3x = 18$
$x = 6 \quad (6,12)$

مثال4: $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} \dots (1)$
$5x + 4y = 80 \dots (2)$

الحل: $5x - 4y = 0 \dots (1)$
$5x + 4y = 80 \dots (2)$

نجمع المعادلتين (1) مع (2)

$10x = 80 => x = 8$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$5(8) - 4y = 0$
$40 - 4y = 0 => -4y = -40$
$y = 10$

مثال5: $\sqrt{2}x + y = 5 \dots (1)$
$x - \sqrt{2}y = 0 \dots (2)$

الحل: نكتب ✯ في المعادلة (1)

$y = 5 - \sqrt{2}x \dots . ✯$

نعوض ✯ في المعادلة رقم (2)

$x - \sqrt{2}(5 - \sqrt{2}x) = 0$
$x - 5\sqrt{2} + 2x = 0$
$3x = 5\sqrt{2} => x = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

نعوض قيمة x في ✯

$y = 5 - \sqrt{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$
$y = \frac{5}{1} - \frac{10}{3}$
$y = \frac{15 - 10}{3} => y = \frac{5}{3}$

جمل معادلات كلامية:

1) نفرض مجاهيل المسألة xy
2) نؤلف جملة عن طريق ربط بين المجاهيل وفرض المسألة
3) نحل جملة معادلتين.
4) نفي الفرض المسألة.

مثال: زار مجد وسلوى معرضاً للكتب، اشترى مجد ستة قصص وخمسة روايات بمبلغ 1900 واشترت سلوى ثلاثة كتب وروايتان بمبلغ 850.

لذا رمزنا لسعر القصص x وسعر الرواية y.

1) اكتب جملة معادلتين تعبران عما اشتراه مجد وسلوى من المعرض
2) بحل جملة المعادلتين أوجد سعر القصة ورواية.
3) استنتج سعر 30 قصة و25 رواية.

الحل: 1)

$6x + 5y = 1900 \dots (1)$
$3x + 2y = 850 \dots (2)$

2) نضرب المعادلة رقم (2) بالعدد (-2)

$6x + 5y = 1900$
$-6x - 6y = -1700$

نجمع المعادلتين

سعر الرواية $y = 200$

$3x + 2(200) = 850$
$3x + 400 = 850$
$3x = 450 => x = 150$

سعر القصة

3) $30 \times 150 + 25 \times 200 = 9500$

مثال2: جد عددين صحيحين موجبين مجموعهما (123) وإذا قسمنا أكبرهما على مثلي

أصغرهما كان خارج القسمة (4) وباقيها (6).

الحل: نفرض العددين xوy

$$x + y = 123 \dots (1)$$
$$8y + 6 = x \dots (2)$$

من المعادلة رقم (2) نعوض في المعادلة رقم (1)

$$8y + y + 6 = 123$$
$$9y = 117$$
$$y = 13$$
$$x = 110$$

مثال3: قبل ثلاث سنوات كان عمر خالد خمسة أمثال عمر محمد وبعد ست سنوات من الآن سيصبح عمر خالد ثلاثة أمثال عمر محمد أوجد عمر خالد ومحمد.

الحل: نفرض عمر خالد x

نفرض عمر محمد y

$y - 3$	$x - 3$
محمد قبل ثلاثة سنوات	خالد قبل ثلاثة سنوات
$y + 6$	$x + 6$
بعد ستة سنوات	

$$x - 3 = 5(y - 3) \dots (1)$$
$$x + 6 = 3(y + 6) \dots (2)$$

$$x - 5y = -12 \dots (1)$$
$$x - 3y = 12 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد (-1)

$$x - 5y = -12$$
$$-x + 3y = -12$$

بجمع المعادلتين $-2y = -24$

$$y = 12$$
$$x - 5(12) = -12$$
$$x - 60 = -12 \Rightarrow x = 48$$

ملاحظات:

1) إذا كان أمثال x أو أمثال y تساوي الواحد في جملة معادلتين نحل حذف بالتعويض أما العكس نحل حذف بالجمع.
2) للتحقق من الثنائية أنها حل لجملة أو ليس حلاً نعوض ثنائي في كل من جملتين. الأولى يجب ان تكون محققة والثانية يجب ان تكون محققة ايضاً.

معادلة المستقيم.....

أشكال معادلة المستقيم:

1) $y = mx + b$ مستقيم لا يمر من بدأ الاحداثيات.
2) $y = mx$ المستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات.

d_2	x	y
A	0	0
B	1	2

3) $x =$ عدد مستقيم عامودي يوازي محور تراتيب
4) $y =$ عدد مستقيم أفقي يوازي محور الفواصل.

ملاحظة:

لأثبات نقطة تنتمي إلى مستقيم أو لا تنتمي نعوض في معادلة المستقيم yوx من نقطة إذا تحققت المعادلة تكون النقطة تنتمي وإذا لم تتحقق المعادلةإذاً النقطة لا تنتمي إلى المستقيم.

لرسم المستقيم من الشكل

$$y = mx + b$$
$$y = mx$$

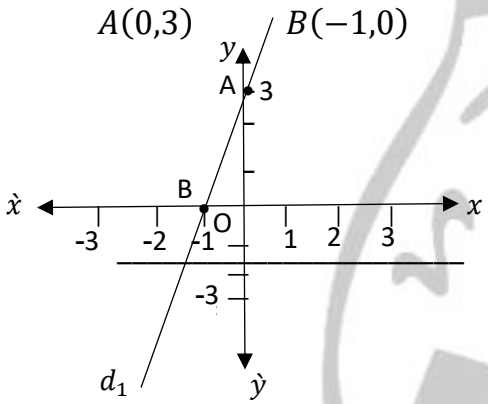
يلزم نقطتان، نعرف أحد النقاط فواصل صفر ونعوض في معادلة المستقيم فيظهر ترتيبها.

ونعوض في النقطة الثانية تراتيب صفر ونحسب فواصلها ونصل بين النقطتين.

مثال: ارسم المستقيم

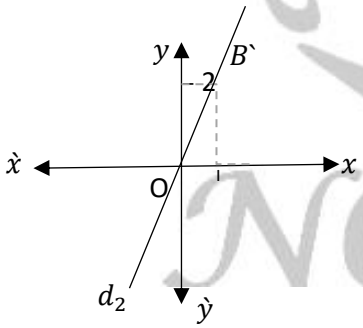
$$d_1: y = 3x + 3$$

الحل: نوجد نقطتان



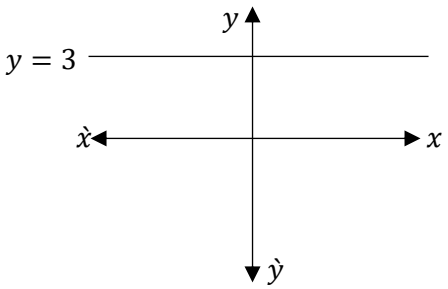
ارسم المستقيم الذي معادلته

$$d_2: y - 2x = 0$$



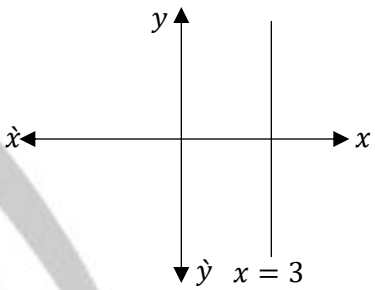
ارسم المستقيم الذي معادلته

$2y = 6 => y = 3$



ارسم المستقيم: $x - 3 = 0$

$x = 3$



ملاحظة: عندما يقول المستقيم يقطع محور الاحداثيات الفواصل نضع $y = 0$ ونحسب x من خلال معادلة المستقيم الذي قطع.

عندما يقول المستقيم يقطع محور احداثيات تراتيب نضع $x = 0$ ونحسب y.

حل جملة معادلتين بيانياً

خطوات الحل:

1) نرسم المستقيم الذي ممثل بالمعادلة الأولى ونرسم المستقيم الممثل بالمعادلة الثانية.

2) يتقاطع المستقيمان في نقطة نسقط هذه النقطة على محور الاحداثيات الفواصل والتراتيب وتكون ثنائية الحل هي نقطة التقاطع.

مثال: ليكن لدينا المستقيمان Δ و d الممثلان بالمعادلتان.

$d_1: x + 2y = 4$

$d_2: x - 2y = 0$

1) ارسم المستقيمان d_1 و d_2

2) حل جملة المعادلتين بيانياً

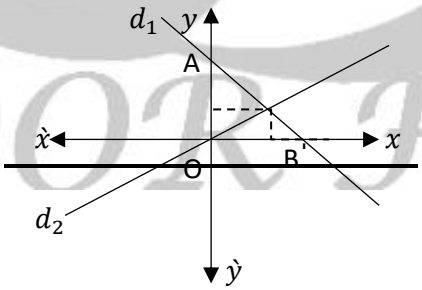
3) تأكد من الحل بالتعويض بالمعادلتين.

الحل: لرسم d_1 يلزمنا نقاط مساعدة

d_1	x	y
A	0	2
B	4	0

لرسم d_2 يلزمنا نقاط مساعدة

d_2	x	y
O	0	0
$\grave{B}$	+2	1



2) حل جملة هي نقطة تقاطع (2,1) ثنائية الحل.

3) نعوض في جملة معادلتين

$x + 2y = 4$

$x - 2y = 0$

$2 + 2(1) = 4$

$2 + 2 = 4$

$4 = 4$ محققة

$2 - 2(1) = 0$

$2 - 2 = 0$ محققة

مسائل 100 علامة:

لدينا في معلم متجانس الاتي

لدينا Δ و d متعامدان ولدينا Nc يعامد ox والمطلوب:

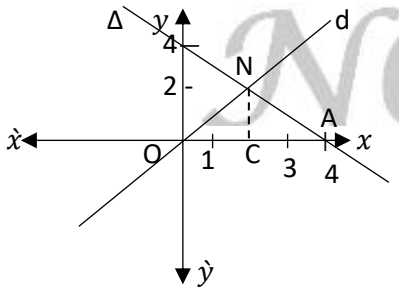
1) ماهي العبارة y بدلالة x بالمستقيم d .

2) استنتج الحل البياني لجملة معادلتين المتمثلتين بالمستقيم d و Δ

3) احسب مساحة المثلثين ONA و OCA

4) احسب $\sin(A)$ وما نوع المثلث ONA.

5) ما مساحة الدائرة ومحيطها التي نصف قطرها OC.



الحل:

1) المستقيم d معادلته $y = mx$

حتى نحسب $m = \frac{y}{x}$

$$m = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = x$$

2) الحل البياني لجملة معادلتين

$N(2,2)$

3) حساب مساحة

$$S_{ONA} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدة}}{2}$$

$$S_{ONA} = \frac{4 \times 2}{2} = 4cm^2$$

S_{OCN}

$$= \frac{\text{جداء ضلعين القائمين}}{2}$$

$$S_{OCN} = \frac{2 \times 2}{2} = 2cm^2$$

4) $\sin(A) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

لحساب ON: $ON =$ المقابل

حسب مبرهنة فيثاغورث

بالمثلث ONC.

$$ON^2 = OC^2 + CN^2$$

$$ON^2 = (2)^2 + (2)^2$$

$$ON^2 = 8 => ON = 2\sqrt{2}$$

$$\sin(\widehat{A}) = \frac{ON}{OA} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(\widehat{A}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{A} = 45°$$

والمثلث ONA قائم ومتساوي

الساقين.

5) $S = \pi.r^2$

$$S = \pi.4 = 4\pi\ cm^2$$

$$P = 2\pi.r => 2\pi(2)$$

$$P = 4\pi\ cm$$

مسألة 100 علامة:

لدينا المستقيمان d و Δ

$$d: y = \frac{1}{2}x$$

$$\Delta: y + 2x = 5$$

أولاً:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً.

2) هل النقطة $l(2,3)$ تنتمي

الى المستقيم Δ أم لا.

3) هل الثنائية (1,3) هي حل

للمعادلة.

4) ارسم المستقيمان d و Δ في

معلم متجانس وعين N نقطة

تقاطع المستقيمين.

5) جد احداثيات النقطة A نقطة

تقاطع Δ مع محور فواصل

واحداثيات النقطة M نقطة

تقاطع Δ مع محور التراتيب

6) احسب $\tan(\widehat{A})$ في المثلث

MOA واحسب مساحة المثلث

NOA.

الحل:

$$d: y = \frac{1}{2}x \ldots (1)$$

$$\Delta: y + 2x = 5 \ldots (2)$$

1) الحل حذف بالتعويض من

المعادلة رقم (1)

نكتب☆ نجمة ونعوضها في

المعادلة رقم (2).

$$\frac{1}{2}x + \frac{2x}{1} = 5$$

(1) (2)

$$\frac{5}{2}x = 5$$

$$x = \frac{5}{\frac{5}{2}}$$

$$x = \frac{5}{1} \times \frac{2}{5} => x = 2$$

من ☆ $y = \frac{1}{2}x$

$$y = \frac{1}{2}(2) => y = 1$$

ثنائية الحل $(2,1)$

---

2) نعوض في معادلة

المستقيمΔ

(2,3)

$$3 + 2(2) \stackrel{?}{=} 5$$

$$3 + 4 = 5$$

$$7 \neq 5$$

النقطة l لا تنتمي الى

المستقيمΔ

---

3) نعوض في المعادلتين

- $y = \frac{1}{2}x => 3 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(1)$
- $y + 2x = 5 => \stackrel{?}{}$

$$3 + 2(1) = 5$$

معادلة الأولى غير محققة

المعاجلة الثانية محققة وبما أن

المعادلة الأولى غير محققة إذاً

الثنائية (1,3) ليست حل للجملة.

---

4) لرسم المستقيمd نفرض نقاط

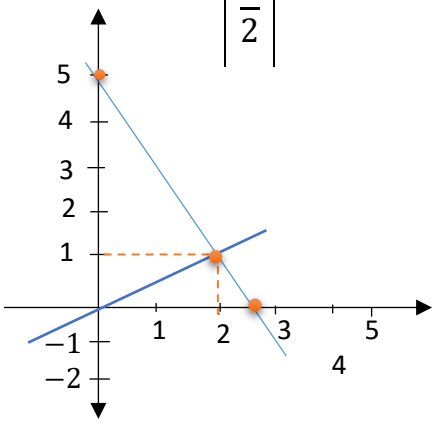
مساعدة

d	x	y
O	0	0
A	2	1

لرسم المستقيم Δ نفرض نقاط

مساعدة

Δ	x	y
M	0	5
A	$\frac{5}{2}$	0



5) A نقطة تقاطع Δ مع محور الفواصل نضع $y = 0$

$$0 + 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

M نقطة تقاطع محور التراتيب مع المستقيم Δ نضع $x = 0$

$$M(0,5) \quad y = 5$$

6) $\tan(\widehat{MA0}) = \frac{5}{2.5} = 2$

$$S_{NOA} = \frac{2.5 \times 1}{2} = 1.25\ cm^2$$

مسألة 100 علامة:

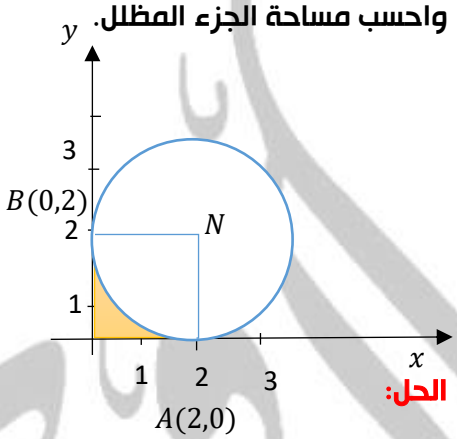
في معلم متجانس مرسوم فيه دائرة مركزها N ويمسها محور الفواصل من النقطة $A(2,0)$ ويمسها محور التراتيب في النقطة $B(0,2)$ المطلوب:

1) تحقق أن النقطتين $A(2,0)$ و$B(0,2)$ تنتميان للمستقيم d الذي معادلته $d: y + x = 2$

2) من معلم متجانس ارسم المستقيم Δ الذي معادلته $y - x = 0$

3) جد احداثيتين نقطة تقاطع المستقيمين d و Δ

4) احسب قياس القوس $\widehat{AB}$ واحسب مساحة المربع $OANB$ واحسب مساحة الجزء المظلل.



الحل:

1) نعوض في معادلة المستقيم $d: y + x = 2 \quad A(2,0)$

$$0 + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

$A \in d$ محققة إذاً النقطة تنتمي

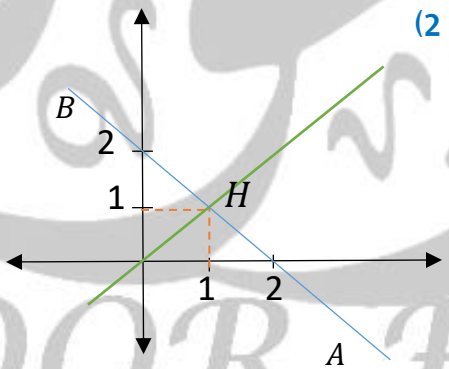
$$B(0,2)$$

$$2 + 0 = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

محققة , النقطة B تنتمي الى المستقيم d . $B \in d$

---

2)



نقاط مساعدة لرسم المستقيم Δ

Δ	x	y
A	1	1
O	0	0

3) نقطة التقاطع هي $H(1,1)$ ثنائية الحل.

4) قياس الزاوية $\widehat{AB} = A\hat{N}B$ لأن زاوية المركزية تساوي قياس القوس المقابل لها

$$A\hat{N}B = 90° \quad \widehat{AB} = 90°$$

$$S_{ONAD} = (\text{طول الضلع})^2$$

$$S_{ONAD} = (2)^2 = 4\ cm^2$$

$$S_{\text{مظلل}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{ربع دائرة}}$$

$$S_{\text{مظلل}} = 4 - \frac{1}{4}\pi.4$$

$$S_{\text{مظلل}} = 4 - \pi\ cm^2$$

الوحدة الخامسة: (التابع)

1) التابع هو إجرائية تربط بكل قيمة للمتحول x عدداً واحداً $f(x)$

2) يسمى $f(x)$ صورة x ويسمى x سلف $f(x)$.

3) يمكن لرمز التابع أن يكون $g \quad h \quad f$

4) تدعى $f(x) = y$ بقاعدة ربط التابع (الصيغة).

طرق تعريف التابع:

1) بإعطاء صيغة

يطلب طلبين مع تغير صيغة السؤال

1. ما صورة عدد □ أو أوجد $f(\text{عدد})$

2. • ما اسلاف العدد □.

• حل المعادلة عدد $f(x) =$

• ما أعداد التي صورتها .

أولاً: عند إيجاد صورة نعوض بدل كل x عدد المعطى ومن ثم نحسب $F(x) =$ لأن المعطى x والمراد حسابه هو $F(x) = y$,y

أم عند إيجاد اسلاف نضع بدل $f(x)$ العدد المعطى ونحسب قيم x عن طريق حل معادلة.

لأن المعطى y والمطلوب x

أمثلة:

ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

1) أحسب صورة العدد 1 و $f(0)$.

2) أوجد صورة العدد $x = -1$

3) عين اسلاف العدد 4 أي حل المعادلة $f(x) = 4$

الحل:

1) $f(1) = 3(1)^2 - 5(1) + 4$

$f(1) = 2$

$f(0) = 3(0)^2 - 5(0) + 4$

$f(0) = 4$

2) $f(-1) = 3(-1)^2 - 5(-1) + 4$

$f(-1) = 3 + 5 + 4 = 12$

3) $f(x) = 4 => 3x^2 - 5x + 4 = 4$

$3x^2 - 5x = 0 => x[3x - 5] = 0$

اما $x = 0$

او $3x - 5 = 0 => 3x = 5 => x = \frac{5}{3}$

مثال2: ليكن لدينا التابع $h(x)$ معرف بالصيغة

$$h(x) = x^2 - 6x + 9$$

1) اكتب $h(x) = (x - a)^2$

2) أوجد $h(1)$ و$h(-2)$

3) أوجد اسلاف العدد 9.

4) أوجد قيم x التي تجعل قيمة التابع معدومة.

الحل:

1) $h(x) = x^2 - 6x + 9 => (x - 3)^2$

$h(x) = (x - 3)^2$

2) $h(1) = (1 - 3)^2 = 4$

$h(-2) = (-2 - 3)^2 = 25$

3) $(x - 3)^2 = 9 =>$ اما $x - 3 = 3$

او $x - 3 = -3$

أخر نقطة

اما $x = 6$ او $x = 0$

4) $h(x) = 0 => (x - 3)^2 = 0$

$x - 3 = 0 => x = 3$

ثانياً: يعرف التابع بإعطاء رسمة:

1) أوجد مجموعة تعريف التابع

نسقط أول نقطة وآخر نقطة على محور الفواصل ونكتب.

$$D_f = [x_1 \ , x_2]$$

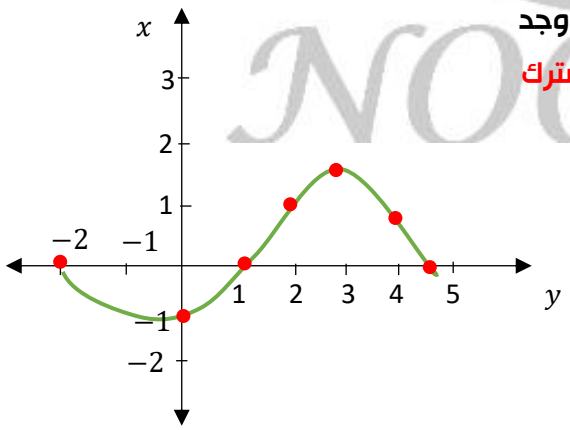
2) إيجاد صورة عدد أو (العدد) f نرسم مستقيم معادلته عدد معطى $x =$ ومن ثم نقطة تقاطع المستقيم مع الخط البياني المرسوم نسقطها على محور التراتيب.

3) إيجاد أسلاف أو حل المعادلة عدد $f(x) =$ او ما الاعداد التي صورتها (عدد), نرسم مستقيم معادلته عدد معطى $y =$ وعند تقاطع الخط البياني نسقط على محور الفواصل و نأخذ الأسلاف أي الأكسات.

4) تعين أكبر قيمة وأصغر قيمة للتابع المعرف بالرسمة التالية

1. أوجد مجموعة تعريف التابع
2. أوجد $f(3)$ و$f(0)$
3. جد أسلاف العدد (1)
4. عين أكبر قيمة أصغر قيمة
5. ارسم مستقيم معادلته $y = 2$ وأوجد

الحل المشترك



الحل:

1. $D_f = [-2,4.5]$
2. $f(0) = 1 \quad f(3) = 2$
3. $f(x) = 1 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 4$
4. أكبر قيمة $f(3) = 2$

أصغر قيمة $f(0) = -1$

5. الحل المشترك $x = 3 \ , \ y = 2$

ثالثاً: تعريف التابع بالجدول

في هذه الطريقة نتعرف على تابع من خلال جدول يربط عدد الاسطر الأول عدداً من السطر الثاني.

مثال: ليكن لدينا الجدول المرفق يمثل تابعاً F يربط عدد المقالات بعدد اسطرها في إحدى المجلات.

عدد الأسطر	6	5	4	3	2	1	x
عدد المقالات	15	24	38	24	6	3	$F(x)$

1) ماذا تعني $F(6) = 15$ و $F(1) = 3$

2) كم عدد المقالات المؤلفة من 4 أسطر عبر عن ذلك برموز رياضية باستعمال F.

3) ما صورة العدد 5 وما الأعداد التي صورتها العدد 15

4) أوجد مجموعة تعريف التابع F.

5) ارسم بيانياً التابع F .

الحل:

1) تعني كتابة $F(6) = 15$ صورة العدد 6 هي 15 وتعني أن عدد المقالات المؤلفة من ستة أسطر هي 15 مقالة وتعني كتابة $F(1) = 3$ صورة العدد (1)

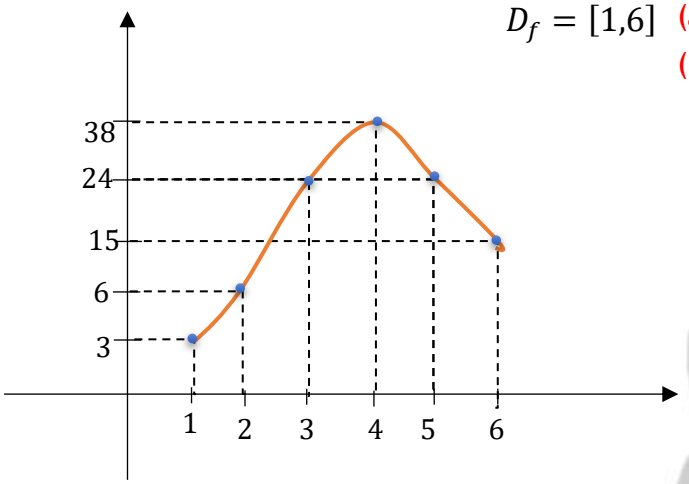
هي (3) وعدد المقالات المؤلفة من سطر واحد هي ثلاثة مقالات.

2) عدد المقالات المؤلفة (38) مقالة $F(4) = 38$

3) $F(5) = 24 \quad F(x) = 15 \Rightarrow x = 6$

4) $D_f = [1,6]$

5)



مثال: (هام) ليكن لدينا التابعان $F(x)$ و $g(x)$

$$F(x) = (x-1)^2 + 1$$
$$g(x) = (x-1)^2$$

1) انسخ وأكمل الجدول

x	1	2	3	4
$F(x)$				
$g(x)$				

2) ماذا تتوقع؟ عزز توقعك باختيار قيم أخرى من x.

3) أثبت ما توقعت.

الحل: يوجد ضمن دورة المكثفة.

اختر الإجابة الصحيحة:

1) ليكن h هو التابع المعطى وفق $h(x) = x^2 + 2x$

أحد اسلاف العدد (0) هو:

A. (0) B.(3) C. (2)

2) إذا كان F المعرف بالصيغة $F(x) = 2x - \sqrt{8}$

A. $(\sqrt{2})$ B. $(4\sqrt{2})$ C. (0)

3) التابع المعرف بالصيغة $F(x) = \frac{1}{x}$ فإن $F\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ يساوي.

A. $(2\sqrt{2})$ B.(8) C. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

4) F تابع معرف بالعلاقة $F(x)=(x-1)^2$ فإن $F(\sqrt{3}+1)$ يساوي:

A. (3) B.$(\sqrt{3}+1)$ C. (2)

ضع كلمة صح أو كلمة غلط:

1) إذا كان $F(x)=x^2+4$ فإن للمعادلة $F(x)=0$ لها حلان.

2) ليكن التابع $F(x)=(x-2)(x-5)$ فإن للمعادلة لها حلان.

3) k هو تابع المعرف وفق $k(x)=(x-1)^2$ يوجد عددان صورة كل منهما 9 وفق هذا التابع.

4) r تابع الذي يربط بكل عدد موجب جذر تربيعي موجب يوجد عددان صورة كل منهما تساوي (1).

5) نقرن بكل عدد x بعدد y يحقق $(y-x)(y-2x)(y-3x)=0$ إذا نعرف العلاقة هذه بالتابع.

حل التمرينات الآتية:

1) ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة:

$$F(x)=(x-2)^2-4x+8$$

والتابع المعرف وفق $h(x)=(x-2)(x-6)$

1) أثبت أن $F(x)=h(x)$

2) حل المعادلة $F(x)=0$

الحل:

1) $F(x)=x^2-4x+4-4x+8$

$F(x)=x^2-8x+12$

$h(x)=x^2-6x-2x+12$

$h(x)=x^2-8x+12$

إذاً $F(x)=h(x)$

2) بما أن $F(x)=h(x)$ نحل المعادلة $h(x)=0$

$(x-2)(x-6)=0$

اما $x-2=0 \Rightarrow x=2$

او $x-6=0 \Rightarrow x=6$

---

2) ليكن التابع المعرف $F(x)=2x+1$

والمطلوب: أولاً:

1) احسب $F(1)$ و$F(0)$ و $F\left(\frac{1}{2}\right)$

2) جد اسلاف العدد 5.

ثانياً: حل المتراجحة $2x+1\leq 5$ ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل: أولاً:

1) $F(1)=2(1)+1=3$

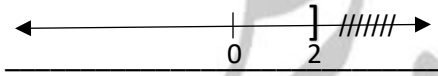
$F(0)=1$

$F\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2$

2) $F(x)=5$

$2x+1=5 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

ثانياً: $2x+1\leq 5 \Rightarrow 2x\leq 4 \Rightarrow x\leq 2$



الوحدة السادسة:

مبادئ الاحتمال والإحصاء

أولاً: مفهوم الاحتمالات.

1) تجربة العشوائية: نقول عن التجربة عشوائية هي مجموعة نتائج لا نعلم بالبداية أي منها سوف يحدث مثل إلقاء حجر نرد أو إلقاء قطعة نقود.

2) فضاء العينة: هي عبارة عن مجموعة نتائج الممكنة في التجربة العشوائية.

3) الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

4) رمز الحدث اما A أو B أو C وقانون الاحتمال العام

$$P(\text{رمز حدث})=\frac{\text{عدد حالات عشوائية}}{\text{عدد حالات الكلية}}$$

5) مجموع الاحتمالات أحداث بسيطة من تجربة يساوي 1 وأن أي احتمال $0\leq P(A)\leq 1$

6) الحدث الغير قابل للتحقق من حدوثه نسميه حدث مستحيل واحتماله $P(\emptyset)=0$

7) الحدث المؤكد حدوثه هو حدث أكيد واحتماله $P(\Omega)=1$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد متوازن مرة واحدة

1) أكتب فضاء العينة
2) احسب احتمال الحدث A ظهور عدد زوجي.
3) احسب احتمال الحدث B ظهور عدد فردي.
4) احسب احتمال C ظهور عدد أولي.
5) احسب احتمال الحدث D ظهور عدد h يحقق $1 \leq h \leq 6$ ماذا نسمي الحدث D.
6) احسب احتمال الحدث E ظهور عدد h يحقق $h > 6$ ماذا نسمي الحدث.

الحل:

1) $\Omega = [1,2,3,4,5,6]$
2) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
3) $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
4) $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
5) حدث مؤكد $P(D) = 1$
6) حدث مستحيل $P(E) = 0$

ثانياً: العمليات على المجموعات...

التقاطع رمزه $\cap$ التقاطع بين مجموعتين أو حدثين A وB نأخذ منها العناصر المشتركة فقط الدلالة المعبرة عن تقاطع وقوع حدثين في آنٍ معاً أو حرف (و).

الاجتماع رمزه $\cup$ اجتماع مجموعتين او حدثين A و B نأخذ العناصر المشتركة وغير مشتركة دلالة المعبرة من الاجتماع هو وقوع الحدثين أحدهما على الأقل أو الحرف (أو).

مثال: نتأمل المجموعة $\Omega = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]$

وليكن الحدث A الحدث الموافق للأعداد الزوجية.

وليكن الحدث B الحدث الموافق للأعداد الفردية.

وليكن الحدث C موافق لمضاعفات العدد 4

وليكن D موافق للأعداد الأولية

وليكن E حدث موافق للأعداد الأولية أو الأعداد الزوجية والحدث F الموافق للأعداد الأولية ومضاعفات العدد 4.

---

1) اكتب عناصر المجموعات A, B, C, D, E, F
2) اكتب بصيغة القائمة $A \cap B, A \cup B, A \cap C, A \cup C,$ $B \cup C, B \cap C, D \cap C$.

الحل:

1) $A = [0,2,4,6,8] \quad B = [1,3,5,7,9]$
$C = [4,8,0] \quad E = D \cup A[0,2,3,4,5,6,7,8,]$
$F = D \cap C = [\emptyset]$

---

2) $A \cap B = \emptyset => A \cup B = \Omega$
$A \cap C = [0,4,8] \quad A \cup C = [0,2,4,6,8]$
$B \cup C = [1,3,4,5,7,8,9]$
$B \cap C = \emptyset \quad D \cap F = [\emptyset]$

الحدثين المتنافيين: نقول عن حدثين أنهما متنافيان إذا استحال تحققهما في آن معاً أي أن $A \cap B = \emptyset \quad A \cup B \neq \Omega$

$P(A) + P(B) \neq 1$
$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

الحدثين المتعاكسين: هما حدثين إذا لم يقع الحدث A يقع حصراً الحدث $\grave{A}$ المعاكس له.

$A \cap B = \emptyset \quad A \cup B = \Omega$
$P(A) + P(B) = 1$

مثال شامل: نلقي حجر نرد متجانس محمل بالأرقام

$\Omega = [1,2,3,4,5,6]$

A حدث ظهور عدداً أصغر من او يساوي 2

Bظهور عدد أكبر تماماً من 4.

I ظهور أعداد فردية

J ظهور اعداد زوجية

1) هل الحدثين A و B متنافيان ولماذا ثم احسب احتمال $P(A), P(B)$

2) احسب احتمال الحدث E ظهور عدد n يحقق $n \leq 2$ أو $n > 4$.

3) هل الحدثين I و J متعاكسان ولماذا احسب احتمال الحدث I

4) احسب احتمال J بطريقتين مختلفتين

الحل: $A = [1,2] \quad B = [5,6]$

1) نلاحظ ان الحدثين A و B متنافيان لأن يستحال تحققهما في آن معاً.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2) $P(E) = P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

3) I ظهور الأعداد فردية.

$$I = [1,3,5] \quad J = [2,4,6]$$

نعم هذين الحدثين متعاكسين لإن إن لم يظهر الأعداد الفردية تظهر الاعداد الزوجية $P(I) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4) ط$_1$: $P(J) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ط$_2$: $P(I) + P(J) = 1$

$$P(J) = 1 - P(I) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$P(J) = \frac{1}{2}$$

المخطط الشجري وتجارب بسيطة ومركبة..

ملاحظات:

1. المخطط الشجري يستخدم اما عند طلب او عندما تكون التجربة مركبة.
2. عدد أفرع المخطط الشجري يساوي عدد نتائج المختلفة
3. احتمال حدث مؤلف من أكثر من فرع يساوي مجموع احتمالات الأفرع المؤدية إليه.
4. مجموع الأفرع الصادرة عن عقدة واحدة دوماً تساوي 1
5. نسمي فرعين متتالين في تجارب المركبة مسار.
6. احتمال مسار هو جداء ضرب احتمالات الفرعين المتتالين المؤلف منه المسار.

يحوي صندوق عشر كرات متماثلة مرقمة بالأرقام التالية

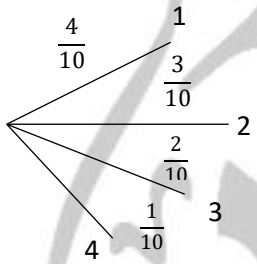
$$1,1,1,1,2,2,2,3,3,4$$

نسحب عشوائياً كرة ونقرأ رقمها

1) ارسم مخطط شجرة الإمكانيات وزود فروعها بالاحتمالات ونتائج الممكنة
2) احسب احتمال الحدث A سحب كرة تحمل رقم 2
3) احسب احتمال الحدث B سحب كرة رقمها على الأقل 2
4) احسب احتمال C سحب كرة رقمها 2 على الأكثر.

الحل:

1)



2) $P(A) = \frac{3}{10}$

3) $P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$

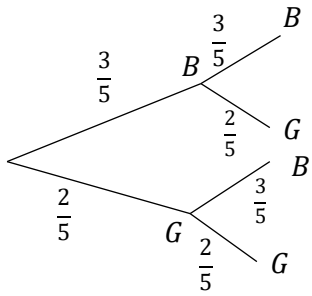
4) $P(C) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

يحوي مغلف خمسة بطاقات متماثلة ثلاث منها زرقاء B واثنتان خضراوان G نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة ثم نعيدها إلى المغلف لنسحب منه عشوائياً بطاقة للمرة الثانية ونسجل لوني البطاقتين المسحوبتين.

1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات النتائج.
2) احسب احتمال سحب بطاقتين زرقاوتين
3) احسب احتمال سحب بطاقتين من نفس اللون
4) احسب احتمال الحدث بطاقتين من لونين مختلفين

الحل:

1) L



2) (B,B)

$$P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

3) (G,G) **أو** (B,B)

$$P(A)+P(B)$$
$$\frac{9}{25}+\frac{4}{25}=\frac{13}{25}$$

4) **اما** (G,B) **أو** (B,G)

$$P(C)=\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{25}$$

في صف يحوي على 40 طالب من الذكور والإناث لدينا10 طلاب ذكور يتعلمون اللغة الإنكليزية وخمسة طلاب لا يتعلمونها ويوجد 20 طالبة تتعلم اللغة الإنكليزية من أصل 25 نختار عشوائياً.

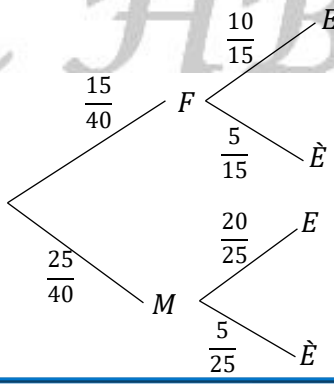
1) ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات النتائج بعد ترميز التجربة.
2) ما احتمال أن يكون الطالب ذكر
3) ما احتمال أن يكون الطالب انثى
4) ما احتمال أن يكون ذكر ويتعلم اللغة الإنكليزية
5) ما احتمال ان يكون انثى لا تتعلم اللغة الإنكليزية

الحل: نرمز بالرموز: F طالب ذكر لا يتعلم

M طالبة انثى E يتعلم اللغة الإنكليزية

$\grave{E}$ لا يتعلم اللغة الإنكليزية

1)



2) $P(F)=\frac{15}{40}$

3) $P(M)=\frac{25}{40}$

4) (F,E)

$$P(C)=\frac{15}{40}\times\frac{10}{15}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

5) $(M,\grave{E})$ $P(D)=\frac{25}{40}\times\frac{5}{25}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$

مقاييس الإحصائية والربيعات

- **متوسط الحسابي**

$$\bar{x}=\frac{\text{مجموع مفردات العينة}}{\text{عدد مفردات العينة}}$$

- **المدى** E: $E=x_{max}-x_{min}$
- **المنوال** الأكثر فئة تكراراً Mميو
- **وسيط** Q_2 <=M<= ربيع ثاني
- ربيع اول Q_1 ربيع ثالثQ_3 الوسيط =>عينة

فردية: عدد المفردات $2n+1=$

نسحب قيمة n => يكون وسيط المفردات التي ترتيبها درجتها $n+1$

عدد المفرادات العينة الزوجية عدد المفردات $2n=$

نسحب قيمة n => يكون وسيط للمفردتين التين ترتيبهما n و$n+1$

$$m=\frac{\blacksquare+\blacksquare}{2}$$

ربيع اول هو الوسيط للمفردات الأصغر من Q_2

ربيع ثالث Q_3 هو وسيط المفردات الأكبر من Q_3

مثال: ليكن لدينا العينة التالية:

$[6,7,9,9,9,10,12,12,14,15,]$

1) أوجد المتوسط الحسابي.
2) احسب المدى
3) اوجد المنوال.
4) ماقيمة الوسيط.
5) أوجد Q_1 و Q_2 .

الحل :

$$[6,7,9,9,9,10,12,12,14,15,]$$

$$\bar{x} = \frac{6+7+9+9+9+10+12+12+14+15}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{103}{10} = 10,3$$

2) $E = x_{max} - x_{min}$

$$E = 15 - 6 = 9$$

3) المنوال $M = 9$

4) عينة زوجية $M => 2n = 10$

$$n = 5 => n + 1 = 6$$

$$M = \frac{9+10}{2} = \frac{19}{2} = 9,5$$

5)

$$\underbrace{6,7,9,9,9,}_{Q_1} \uparrow \underbrace{,10,12,12,14,15}_{Q_3}$$

نستخرج منها $[6,7,9,9,9,]$

Q_1 عينة فردية

$$2n + 1 = 5 => 2n = 5 => n = 2$$

$$n + 1 = 3$$

$$Q_1 = 9$$

$[10,12,12,14,15]$

عينة فردية $2n + 1 = 5 \quad n = 2$

$$n + 1 = 3$$

$$Q_3 = 12$$

اختر الإجابة الصحيحة:

1) وسيط عينة الإحصائية $9,3,,1,12,8,6,5,3$

A. (9) B. (6) C. (3)

2) احتمال حدث بسيط هو

A. (1) B. (0) C. عدد محصور بين(0) والعدد1

3) إذا كان احتمال الحدث $P(A) = \frac{2}{3}$ فان احتمال $P(\grave{A})$ المعاكس هو

A. $\left(\frac{1}{3}\right)$ B. $\left(\frac{2}{3}\right)$ C. (1)

4) تحتوي جرة على كرة حمراء R و كرة خضراء V وأخرى بيضاء B نعلم ان $P(R) = \frac{3}{8}$ و $P(V) = \frac{1}{8}$ فان احتمال $P(B) = ?$ هو

A. $\left(\frac{7}{8}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{3}{8}\right)$

سؤال ضع كلمة صح او كلكة غلط

1) احتمال الحدث E يساوي مجموع احتمالات فروع الشجرة التي تؤدي ال الحدث E (صح)

2) احتمال أي حدث Ω هو $P(\Omega) = 1$ (غلط)

3) نقول عن حدثين متنافيان اذا كان مجموع احتمالهما يساوي العدد واحد (غلط)

4) تجربة احتمالية لها نتيجتان احتمال النتيجة الأولى 0,18 اذا احتمال النتيجة الثانية هي 0,18 (غلط)

تمرين: صندوق يحوي 5 بطاقات متماثلة كتب عليها الأرقام $2,2,3,,4,4$ نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقة واحدة ونقرأ رقمها و المطلوب

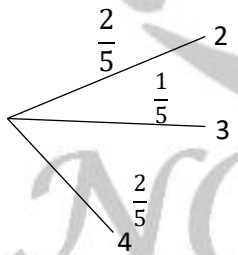
1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات ونتائج الممكنة

2) اذا كان الحدث A حدث سحب بطاقة تحمل رقماً أصغر تماماً من 4 احسب احتمال كل من الحدثين A و $\grave{A}$ المعاكس للحدث .

3) احسب وسيط العينة $[[2,2,3,4,4]$

الحل:

1)



2) $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$$P(\grave{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5}$$

$$P(\grave{A}) = \frac{2}{5}$$

3) العينة فردية $2n + 1 = 5$

$$2n = 4 \quad n = 2 \quad n + 1 = 3$$
$$M = 3$$

في الشكل المجاور دولاب مقسم الى ثمانية اقسام متساوية كتب عليها الأرقام $1,1,2,3,3,4,4,4$

ندور الدولاب مرة واحدة ونقرأ الرقم الذي يستقر على المؤشر لنعرف الحدثين

الحدث A ان يستقر المؤشر عند العدد3

الحدث B ان يستقر المؤشر عند عدد أكبر تماماً من 2 والمطلوب.

1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات ونتائج الممكنة

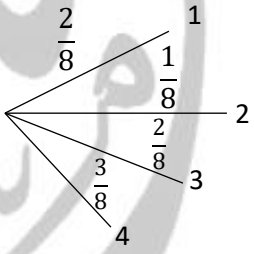
2) احسب احتمال الحدث A واحتمال الحدث B

3) هل الحدثين A و B متنافيان ولماذا؟

4) احسب مدى العينة $[1,1,2,3,3,4,4,4]$

الحل:

1.



2. $P(A) = \frac{2}{8}$

$$P(B) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

3. نعم، الحدثين متنافيين لأن استحال تحققهما في آنٍ معاً

4. $P(A) + P(B) \neq 1$

$$E = 4 - 1 = 3$$