بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصبه أجمعين، وبعد،

بحمد الله تعالى وعونه، فقد تم إعداد هذا الكتاب في الميكانيك التقليدي، الثالث في سلسلة الكتب التي قمت بتأليفها بداية بكتاب مبادئ الفيزياء الجامعية؛ الميكانيك وخواص المادة، لطلبة السنة الجامعية الأولى، وكتاب الاهتزازات والأمواج، مع الزميل د. حسن الغانم، وهذا الكتاب، لطلبة السنوات اللاحقة.

إنه مما لاشك فيه أن مادة الميكانيك التقليدي نظرية بحتة، تعتبر من أصعب مايدرس الطالب الجامعي في الفيزياء والهندسة الميكانيكية. لذا فقد وضعت هذا الكتاب بلغة عربية سليمة، لتوضيح الموضوع، وفتح آفاق القارئ العربي للتركيز على فهم المادة دون الضياع في متاهات لغة أجنبية، لايتحسس مقصودها الأساسي بسبب انشغاله بمعنى كلمة بدلاً من استيعاب مضمون الجملة.

لقد حرصت على طرح المواضيع بتسلسل منطقي محاولاً تغطية معظم الأفكار الأساس في الميكانيك التقليدي، متبعاً كل موضوع بأمثلة توضيحية متعددة، وأرفقت بنهاية كل فصل عدد كبير من المسائل المتنوعة المتسلسلة في درجة الصعوبة.

وقد اتبعت نفس الأسلوب في إعداد الكتاب، وطباعته، وتحضير كافة الرسوم، والمنحنيات، والجداول بجهد شخصي بحت، فلا غرو إذاً أن تقع أخطاء وهفوات، وأكون ممتناً لكل من يتفضل من الزملاء المدرسين، والطلبة الأعزاء، بموافاتي بالنصيحة، والمشورة، أو مايرتأونه مناسباً للتعديل، أو التغيير، أو التصويب.

إنني أدعو الله عزوجل أن يكون هذا العمل المتواضع خالصاً لوجهه الكريم، وخدمة للإسلام والمسلمين على طريق عودة عزهم ومجدهم، بإذنه تعالى، إنه سميع مجيب.

"والله غالب على أمره ولكن أكثر الناس لايعلمون"

صدق الله العظيم

البحرين 1999/6/30

د. محمد قيصرون ميرزا

قسم الفيزياء-جامعة البحرين

ص.ب. 32038 – البحرين

بريد الكتروني

mkmerza@hotmail.com

المحتويات

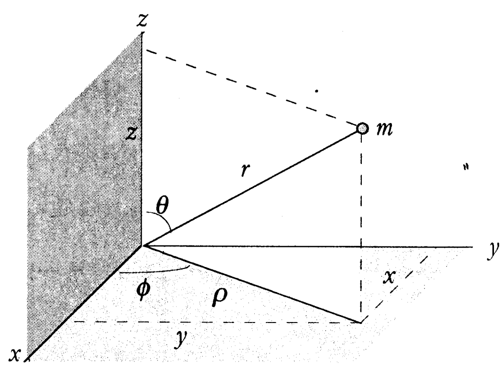
الحركة على خط مستقيم

(Motion on a Straight line)

1 - 1 تمهيد :

يصف الميكانيك حركة الأجسام وأسبابها وما ينتج عنها من شغل وطاقة. وتتلخص دراسة الحركة *(kinematics)* بتحديد موضع الجسم، وسرعته، وتسارعه، في كل لحظة من الزمن، بينما يعني التحريك *(dynamics)* بدراسة أسباب الحركة من قوة وعزم.

عندما ندرس حركة جسم فإننا نتابع موضعه **r** وسرعته **v** وتسارعه **a** في كل لحظة من الزمن. نقوم عادة بتحديد الموضع في الفضاء (بالنسبة لنا) بمتجه **r** له ثلاثة إحداثيات، بحسب منظومة المحاور التي نختارها. فيمكن استخدام الإحداثيات **الديكارتية***(cartesian)*، أو **الكروية** *(spherical)*، أو **الاسطوانية** *(cylindrical)* لتحديد موضع الجسم، كما في الشكل (1-1) ، علماً بأن اختيار نوع واتجاه الإحداثيات عائد إلى المراقب *(observer)* أو **مناط الإسناد** *(frame of reference)* الذي يتابع الحركة.



الشكل (1-1)

إذا حددنا موضع الجسم بالمتجه **r** عندئذ نجد متجه سرعته **v** من العلاقة:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (1-1)$$

ومتجه تسارعه من العلاقة:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (2-1)$$

من الواضح أن تحديد أحد المتجهات $\mathbf{r}$، أو $\mathbf{v}$، أو $\mathbf{a}$، مع معرفة حالة الجسم في لحظة ما (الشروط الابتدائية *(initial conditions)*) كاف لمعرفة المتغيرين الآخرين بشكل تام.

لابأس من الإشارة هنا إلى أنه عندما نقول إننا نحدد موضع جسم فإننا نميز نقطة معينة منه (كمقدمة سيارة أو مركز كرة مثلاً) ونتابع حركتها مع مرور الزمن. هذا مقبول طالما تحرك الجسم على خط مستقيم. أما لو تحرك الجسم بشكل دوراني أو دوراني وانتقالي معاً لوجب علينا عندئذ أن نحدد موضع كل نقطة منه، أو البحث عن نقطة معينة يمكن اعتبارها ممثلة للجسم كله. سنأتي على هذا الموضوع فيمابعد.

1 - 2 قوانين التحريك *(Newton's Laws of Motion)*

تعتبر قوانين التحريك (التي تسمى عادة قوانين نيوتن) المنطلق الأساس في الميكانيك لدراسة حركة وتحريك الأجسام ، ووصف طبيعة الحركة والمسارات الممكنة لها . هذه القوانين هي:

1 - 2 -1 قانون نيوتن الأول *(Newton's First Law)*: العطالة أو القصور الذاتي *(Inertia)*:

يبقى أي جسم على حالته الحركية مالم تؤثر عليه محصلة قوى خارجية غير معدومة.

يفيد هذا القانون في إعطاء الأجسام المادية خاصة هامة هي **العطالة** أو **القصور الذاتي** *(inertia)* بمعنى أن أي جسم قاصر عن تغيير حالته الحركية تلقائياً بل لابد من مؤثر خارجي للقيام بذلك.

من جهة أخرى فإن القانون الأول هو تعريف **للقوة**، كمؤثر خارجي يغير الحالة الحركية للجسم وفي اللحظة التي ينتهي فيها تغير الحالة الحركية تختفي القوة أيضاً.

يحدد **متجه السرعة** الحالة الحركية للجسم *(state of motion)* وعندما يبقى الجسم بنفس الحالة فهذا يعني أن متجه سرعته لم يتغير لاقيمة ولااتجاهاً، ويبقى متحركاً على نفس الخط الذي كان عليه.

لاشك في أن القول بأن حركة جسم تتم على خط مستقيم بسرعة ثابتة يعتمد على المراقب

أو مناط الإسناد الذي يتابعه. فسرعة شخص ينتقل من مكان لآخر في قطار متحرك ليست واحدة بالنسبة لراكب في القطار ولمودع على رصيف المحطة. لذا فإن قانون نيوتن الأول يجبرنا على تحديد **منظومة محاور إحداثية عطالية** ثابتة في الفضاء *(inertial coordinate system)* يكون فيها هذا القانون صحيحاً دوماً، بحيث ننسب إليها السرع كافة لنقرر فيما إذا كان جسم ما يتحرك أم لا. من الواضح أن تحديد منظومة كهذه صعب عملياً لأن منظومة المحاور العطالية الثابتة بشكل مطلق لاتوجد الاّ في مركز الكون، أما أي منظومة أخرى كغرفة المختبر أو سطح الأرض، فهي غير ثابتة نتيجة الحركة المستمرة للأرض. غير أنه يمكن أن نقبل عملياً بمنظومة محاور مرتبطة بغرفة المختبر مثلاً عندما ندرس حركة أجسام فيه بحيث تكون سرعة المختبر نفسه مهملة بالمقارنة مع سرع هذه الأجسام، أو نعتبر منظومة محاور مرتبطة بالأرض عندما ندرس حركة أجسام بالقرب من سطحها إذا كانت سرعة دوران الأرض حول نفسها أو حول الشمس مهملة بالمقارنة مع سرع الأجسام المعتبرة، وهكذا دواليك.

يمكن صياغة قانون نيوتن الأول رياضياً على النحو :

$$\mathbf{F}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{ثابت} \qquad (3-1)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم و $\mathbf{v}$ سرعته.

يستخدم قانون نيوتن الأول لدراسة الاتزان السكوني للأجسام ضد الحركة الانتقالية.

1 - 2 -2 قانون نيوتن الثاني *(Newton's Second Law)*:

"يتناسب تسارع جسم طردياً مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه وعكسياً مع كتلته" "

يفيد هذا "القانون" في تعريف الكتلة. فمن المعروف أن حمل حجر كبير أو محاولة تحريكه أصعب بكثير من حمل أو تحريك قطعة خشب صغيرة. لذا نقول إن الحجريمانع أي تغيير في حالته الحركية أكثر مماتمانع الخشبة. **فالكتلة هي مقدار ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته الحركية الانتقالية**.

من جهة أخرى لو أعطينا شخصاً جسماً وطلبنا منه التأكد فيما إذا كان له كتله أم لا فإنه يقوم بوزنه لكن الوزن ماهو إلاّ تأثير كتلة أخرى (الأرض) على الجسم. أي أن تحديد كتلة جسم ما يتم بدراسة التأثير المتبادل بينه وبين الكتل الأخرى. فتعريف الكتلة من هذا المنطلق هي مقدار تأثير جسم على غيره من الأجسام نتيجة خاصته الكتلية هذه.

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \qquad (8-1)$$

أطلق نيوتن اسم **كمية الحركة** *(quantity of motion)* على $m\mathbf{v}$ ، الاّ أنه اصطلح على استخدام تعريف **الزخم الخطي** *(linear momentum)* أو زخم فقط ، يرمز له بـ $\mathbf{p}$، أي أن:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (9-1)$$

بذلك نكتب قانون نيوتن الثاني على النحو:

$$\mathbf{F}_T = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (10-1)$$

إن قانون نيوتن الثاني ليس قانوناً فعلاً وإنما تعريف للقصور الذاتي لجسم .

1 - 2 -3 قانون نيوتن الثالث: الفعل ورد الفعل *(Newton's Third Law)*

يمكن كتابة (1-6) على الشكل:

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B \qquad (11-1)$$

تعطي العلاقة السابقة الشكل الرياضي لقانون نيوتن الثالث الذي ينص على أنه :

إذا أثر جسم أول A بقوة $\mathbf{F}_{AB}$ على جسم ثاني B فإن الجسم الثاني B يؤثر بقوة $\mathbf{F}_{BA}$ على الجسم الأول مساوية ومعاكسة لـ $\mathbf{F}_{AB}$ ، أي أن $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$.

كثيراً مايقرأ قانون نيوتن الثالث بالشكل المبسط: **لكل فعل رد فعل يساويه بالقيمة ويعاكسه بالاتجاه**. لكن نوضح هنا أن قوتي الفعل ورد الفعل (كما سماهما نيوتن) تؤثران على جسمين مختلفين دوماً لذلك فإن محصلتهما لاتكون مساوية للصفر إلاّ إذا اعتبرنا حركة الجسمين معاً كمنظومة واحدة. أما إذا درسنا حركة أحدهما فقط فنجد أنه يخضع لتأثير الجسم الآخر عليه دوماً.

يمكن كتابة القانون الثالث بطريقة مختلفة قليلاً بالتعويض عن $\mathbf{F}_{AB}$ و $\mathbf{F}_{BA}$ بدلالة $\mathbf{p}_A$ و $\mathbf{p}_B$ عندها تؤول (1-11) إلى:

$$\frac{d\mathbf{p}_A}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_B}{dt} \qquad (12-1)$$

أو

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A+\mathbf{p}_B)=0 \qquad (13-1)$$

أي أن:

$$\mathbf{p}_A+\mathbf{p}_B=\text{ثابت} \qquad (14-1)$$

فالقانون الثالث يعني أن الزخم الخطي لجسمين يؤثران على بعضهما بقوتي الفعل ورد الفعل ثابت دوماً وهذه النتيجة هي حالة خاصة من مبدأ حفظ الزخم الخطي الذي ينص على أن **الزخم الخطي لمنظومة معزولة** (*isolated system*) **، أي خاضعة لمحصلة قوى معدومة، لايتغير مع الزمن.**

3-1 نظريات الزخم والطاقة لجسم يتحرك على خط مستقيم

عندما يتحرك جسم على خط مستقيم، مثل محور السينات، عندئذ يؤول قانون نيوتن الثاني إلى:

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dt} \qquad (15-1)$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة نجد:

$$p_2-p_1=\int_{t_1}^{t_2}F(x,v,t)\ \ dt \qquad (16-1)$$

حيث وضحنا في العلاقة السابقة أنه يمكن للقوة F أن تعتمد على الموضع x والسرعة v والزمن t.

تمثل العلاقة (1-16) الشكل التكاملي (*integral form*) **لنظرية الزخم**، ويطلق على كل طرف فيها اسم **الدفع** (*impulse*) يرمز له بـ J، أي أن:

$$J=p_2-p_1=\int_{t_1}^{t_2}F(x,v,t)\ \ dt \qquad (17-1)$$

نعرف **الطاقة الحركية** (*kinetic energy*) للجسم بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (18-1)$$

باشتقاق العلاقة الأخيرة، مفترضين أن m ثابتة، نجد:

$$\frac{dT}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = v(m \frac{dv}{dt})$$

أي أن:

$$\frac{dT}{dt} = Fv = P \qquad (19-1)$$

هذا هو الشكل التفاضلي **لنظرية الطاقة** (*differential form*) حيث يمثل الطرف الأيمن $P = Fv$ **القدرة اللحظية** (*instantaneous power*) للقوة F.

نحصل على الشكل التكاملي للنظرية السابقة بمكاملة (1-19) فنجد:

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fv\, dt \qquad (20-1)$$

بتعويض $v = dx/dt$ في (1-20) نجد:

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx \qquad (21-1)$$

بما أن التكامل في الطرف الأيمن من (1-21) هو شغل **F** عندما ينتقل الجسم من x_1 إلى x_2،:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx \qquad (22-1)$$

فنحصل على **نظرية الشغل والطاقة** *(Work - Energy Theorem)*:

$$W = T_2 - T_1 \qquad (23-1)$$

نلاحظ أن هذه النظرية تنص على أن شغل**محصلة** القوى المؤثرة على منظومة عندما تنتقل بين نقطتين يساوي تغير الطاقة الحركية لها بينهما.

أخيراً، نربط العلاقة بين القدرة p والشغل W من (1-19) و (1-21) و (1-22) فنجد:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (24-1)$$

فالقدرة اللحظية لقوة F مؤثرة على جسيم يساوي معدل تغير شغلها بالنسبة للزمن.

ندرس فيما يلي حركة منظومة خاضعة لمحصلة قوى ذات أشكال مختلفة.

1 - 4 حركة جسم خاضع لقوة ثابتة

إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم ثابتة، عندئذ نجد من قانون نيوتن الثاني:

$$a = \frac{F}{m} = \text{ثابت}$$

ومنه :

$$v = \int a\,dt = a\,t + v_0$$

و

$$x = \int v\,dt = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

هذه هي قوانين الحركة بتسارع ثابت، حيث تدل v_0 و x_0 على السرعة والموضع في اللحظة $t = 0$ (لحظة بدء المراقبة وليس بدء الحركة).

❐ مثل 1-1 انزلاق جسم على مستو مائل

لنعتبر انزلاق جسم m على مستو مائل بدون احتكاك، كما في الشكل (1-2أ)،عندئذ نجد أن محصلة القوى المؤثرة عليه هي:

$$F_T = m\,g\,\sin\theta = ma$$

ومنه :

$$a = g\sin\theta$$

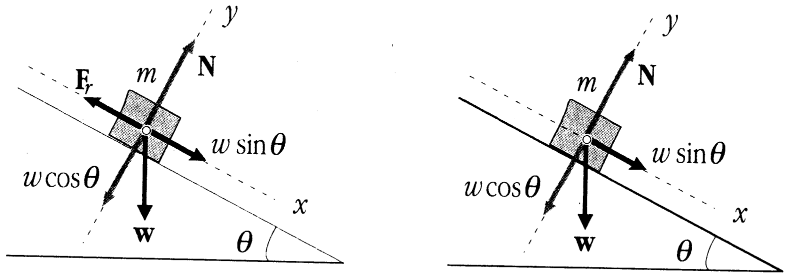
فالتسارع ثابت لايعتمد على كتلة الجسم.

الآن: إذا كان المستوي خشناً فإن محصلة القوى تصير (انظر الشكل (1-2 ب)):

$$F_T = m\,g\sin\theta - F_r$$

حيث F_r قوة الاحتكاك بين الجسم والسطح وتساوي:

$$F_r = \mu N$$



(ب) الشكل (2-1) (أ)

حيث N رد فعل السطح ويساوي في حالتنا هذه:

$$N = m\,g\cos\theta$$

فتصير F_T:

$$F_T = m\,g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = ma$$

ويصير التسارع:

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

فلايزال a مستقل عن كتلة الجسم، وموجب، أي أن سرعة الجسم ستتزايد، طالما أن:

$$\tan\theta > \mu$$

أما إذا كانت θ تساوي قيمة معينة α حيث:

$$\tan\alpha = \mu$$

التي تسمى **زاوية الاحتكاك** (*angle of friction*)، عندئذ يكون $a = 0$. فإما أن يبقى الجسم ساكناً على المستوي أو ينزلق بسرعة ثابتة إذا أُعطي دفعة خفيفة نحو الأسفل في البدء.

أما إذا كانت $\theta < \alpha$ فيصير التسارع سالباً وإذا دفعنا الجسم على المستوي نحو الأسفل فسيتوقف بعد مسافة معينة تعتمد على سرعته الابتدائية.

لابأس من الإشارة إلى أنه لو دفعنا الجسم على المستوي نحو الأعلى لصار تسارعه:

$$a = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$ ❐

1 - 5 حركة جسم خاضع لقوة متغيرة مع الزمن

إذا خضع جسم لقوة متغيرة مع الزمن، عندئذ نكتب (1-16) بالشكل:

$$m(v - v_0) = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt \qquad (25-1)$$

حيث v_0 سرعة الجسم في لحظة ما t_0 بينما v سرعته في اللحظة t. يطلق على v_0 و t_0 اسم الشروط الابتدائية. من ثم نكتب من (1-25):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F(t')\;dt' + v_0 \qquad (26-1)$$

بمكاملة العلاقة الأخيرة نجد موضع الجسم في أي لحظة:

$$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left[\int F(t')\,dt'\right]dt'' \qquad (27-1)$$

❑ مثل 1-2 حركة جسيم مشحون في مجال كهربائي متغير

يتحرك إلكترون في مجال كهربائي متغير على النحو $E = E_0\cos(\omega t + \phi)$ والمطلوب تحديد كيف يتغير موضعه مع الزمن .

الحل: نكتب القوّة المؤثّرة عليه على النحو:

$$F = qE = -\,eE_0\cos(\omega t + \phi)$$

حيث وضعنا شحنة الإلكترون $q = -e$، وأهملنا وزنه بالمقارنة مع القوة الكهربائية، لتصير معادلة الحركة:

$$m\frac{dv}{dt} = -eE_0\cos(\omega t + \phi)$$

بمكاملة هذه المعادلة نجد:

$$v = v_0 + \frac{eE_0 \sin\phi}{m\omega} - \frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t + \phi)$$

حيث افترضنا أن سرعة الجسم في اللحظة $t = 0$ هي v_0.

بالمكاملة مرة أخرى نجد:

$$x = -\frac{eE_0 \cos\phi}{m\omega^2} + v_0 t + \frac{eE_0 \sin\phi}{m\omega} t + \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t + \phi)$$

حيث وضعنا $x_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$. ❐

---

1 - 6 حركة جسم خاضع لقوة متغيرة مع السرعة - قوى التخامد

إذا خضع جسم لقوة متغيرة مع السرعة فقط، أي $F = F(v)$ عندئذ تصير معادلة الحركة:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v)$$

ومنه:

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}dt$$

أي أن:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}t \qquad (28-1)$$

بفرض أنه يمكن إجراء التكامل (1-28) والحصول على كيفية تغير v مع الزمن، عندئذ يمكن الحصول على تغيرات المسافة x مع الزمن بتكامل آخر مباشرة.

❐ مثل 1-3

يسير زورق بسرعة v_0 عندما ينطفئ محركه ليتباطأ نتيجة الاحتكاك مع الماء بقوة متناسبة مع سرعته. كيف تتغير المسافة التي يقطعها مع الزمن؟

الحل: لنكتب قانون نيوتن الثاني:

$$m\frac{dv}{dt}=-bv$$

حيث وضعنا b ثابت تناسب قوة التخامد. من ثم نجد:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{b}{m}dt$$

ومنه:

$$v=v_0\,e^{-\frac{b}{m}t}$$

من الواضح أن الزورق لن يقف إلاّ بعد زمن طويل جداً بالمقارنة مع m/b.

أما المسافة التي يقطعها الزورق فنجدها من العلاقة:

$$x=\int v\,dt=\frac{mv_0}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}t})$$

حيث افترضنا أنه كان عند $x_0=0$ في اللحظة $t=0$.

يمكن نشر v و x بحسب سلسلة تايلور فنجد:

$$v=v_0-\frac{bv_0}{m}t+\ldots$$

و

$$x=v_0\,t-\frac{1}{2}\frac{bv_0}{m}t^2+\ldots$$

حيث نلاحظ أن السرعة والمسافة تتغيران لحظة انطفاء المحرك (عندما يكون الزمن t صغيراً جداً) كما لو كان الجسم خاضعاً لقوة مقاومة ثابتة تساوي $-b\,v_0$. □

---

1 - 7 حركة جسم خاضع لقوة تعتمد على الموضع - القوى المحافظة

تعتبر مسألة جسم خاضع لقوة تعتمد على الموضع فقط من أهم المسائل في الفيزياء لأن القوى الطبيعية كالجاذبية والكهربائية، تعتمد على الموضع.

في هذه الحالة نكتب:

$$F = F(x) \tag{29-1}$$

باستخدام نظرية الشغل والطاقة نكتب:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx \tag{30-1}$$

يمثل التكامل في الطرف الأيمن شغل F عندما ينتقل الجسم من x_0 إلى x .

إذا عرّفنا **طاقة الوضع** (أو الطاقة الكامنة) (*potential energy*) بالعلاقة:

$$U(x) = -\int_{x_s}^{x} F\, dx \tag{31-1}$$

حيث x_s موضع اختياري تكون فيه القوة وطاقة الوضع مساوية للصفر (أي موضع اتزان للجسم)، عندئذ تكون طاقة الوضع الناتجة عن القوة F مساوية لشغلها عندما تنقل الجسم من x إلى الموضع الاختياري x_s .

عندما ينتقل الجسم من x_1 إلى x_2 عندئذ يؤول شغل F إلى:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx &= \int_{x_1}^{x_s} F(x)\, dx + \int_{x_s}^{x_2} F(x)\, dx \\
&= -\int_{x_s}^{x_1} F(x)\, dx - \left(-\int_{x_s}^{x_2} F(x)\, dx\right) \\
&= U(x_1) - U(x_2)
\end{aligned}$$

وتصير نظرية الشغل والطاقة على النحو:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = U(x_1) - U(x_2) \tag{32-1}$$

أو:

$$U(x_1) + \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + U(x_2) \tag{33-1}$$

يسمى المقدار:

$$E=\tfrac{1}{2}mv^2+U(x) \qquad (34-1)$$

الطاقة الميكانيكية الكلية (*total mechanical energy*).

نلاحظ من (33-1) أن E ستبقى ثابتة طالما أن القوة المؤثرة على الجسم تعتمد على الموضع فقط ويمكن إيجاد طاقة وضع للجسم منها، أي أنها محافظة. سنعود إلى تعريف قوى كهذه بعد قليل.

يمكن الاستفادة من (34-1) لمعرفة تغيرات المسافة مع الزمن بكتابتها على النحو:

$$v=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} \qquad (35-1)$$

فنجد:

$$\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\;dt$$

أو :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(E-U(x))}}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\;(t-t_0) \qquad (36-1)$$

بإجراء التكامل السابق يمكن تحديد كيفية تغير الموضع مع الزمن. بذلك نكون قد قمنا بإيجاد الحل الكامل للمسألة (نظرياً على الأقل)!

❐ مثل 1-4

يتحرك جسيم على خط مستقيم بدءاً من السكون عند النقطة $x=a$ خاضعاً لقوة إرجاع $F=-kx$. ماطاقة وضعه وكيف يتغير بعده عن المبدأ $(x=0)$؟

الحل: نحسب أولاً طاقة وضع الجسيم فنستخدم (31-1) فنجد $U(x)=kx^2/2$ إذ أخذنا $x_s=0$ حيث يكون الجسيم متزناً $(U(x)=F(x)=0)$.

بما أن الجسيم كان ساكناً في اللحظة $t=0$ لذلك نجد من (34-1) أن:

$$v^2 = (\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2}{m}(E - \tfrac{1}{2}kx^2)_{x=a} = 0 \;\Rightarrow\; E = \tfrac{1}{2}ka^2$$

بالتعويض في (1-35) نجد:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\; dt$$

بإجراء التكامل نجد :

$$\sin^{-1}(x/a) = \pm\sqrt{k/m}\;\; t \;\;\Rightarrow\;\; x = a\sin(\omega t)$$

حيث وضعنا $\omega = \sqrt{k/m}$.

إن هذا الحل هو ماننتوقعه لجسيم خاضع لقوة إرجاع (مربوط بزنبرك) إلاّ أننا نلاحظ أننا توصلنا له بإجراء تكامل واحد فقط مع العلم أن معادلة الحركة هي تفاضلية من الدرجة الثانية، وذلك نتيجة ثبات الطاقة الميكانيكية الكلية. ❐

---

1 - 8 درجات الحرية وثوابت الحركة

تتحدد حركة جسيم يتحرك على خط مستقيم بمعرفة موضعه x في كل لحظة من الزمن، لذا نقول إن له **درجة حرية** واحدة *(one degree of freedom)*. لو كان الجسم يتحرك في مستو لاحتجنا إلى إحداثيين لتحديد موضعه ونقول إن له درجتين من الحرية وإذا تحرك في الفضاء فإن له ثلاث درجات من الحرية. فدرجة الحرية هي إحدى الإحداثيات اللازمة لتحديد موضع جسم أو منظومة. فمنظومة مؤلفة من كتلتين تتدحرجان على سطح مستو لهما أربع درجات من الحرية، ولو كانت المسافة بينهما ثابتة عندئذ يمكن معرفة إحدى هذه الدرجات من البقية، لذلك نقول إن للمنظومة في هذه الحالة ثلاث درجات من الحرية، وهكذا دواليك.

من جهة أخرى فإن حل معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم يعني حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، فإن كانت طاقته الكلية ثابتة لأمكن الوصول للحل بتكامل واحد فقط، كما وجدنا من (1-36)، لذلك نقول إن الطاقة هي **تكامل أولي** *(first integral)*، أو **ثابت حركة** *(constant of motion)*، لأنها لاتتغير مع مرور الزمن. كما تسمى المعادلة (1-36) **تكامل الطاقة** *(energy integral)*.

نستنتج مما تقدم أن وجود ثوابت حركة يعفي من إجراء تكامل لمعادلات الحركة، ولو كان هناك ثابت حركة آخر لأمكن تحديد حالة جسم يتحرك على خط مستقيم كلياً دون إجراء أي تكامل بتاتاً. بشكل عام إذا كان لمنظومة ما عدد من ثوابت الحركة فإن عدد درجات الحرية لها تنخفض بمقدار ذلك العدد.

1 - 9 دراسة الحركة من معادلة الطاقة

يمكن الاستفادة من ثبات الطاقة الميكانيكية لدراسة أنواع الحركة الممكنة لجسيم أو منظومة من معادلة الطاقة، إذا نلاحظ من (1-35) أن المقدار الموجود تحت الجذر يجب أن يكون أكبر أو يساوي الصفر على الأقل وهذا هو المفتاح الأساس لدراسة الحركة.

فإذا رسمنا تغيرات طاقة الوضع $U(x)$ لجسم مع بعده عن المبدأ x كما في الشكل (1-3)، الذي يسمى **بئر كمون** (*potential well*)، عندئذ نلاحظ مايلي:

1 - لايمكن أن تكون الطاقة الكلية للجسم أقل من $E_0 = U(x_0)$ حتى لايصير المقدار المجذور $E - U(x)$ سالباً.

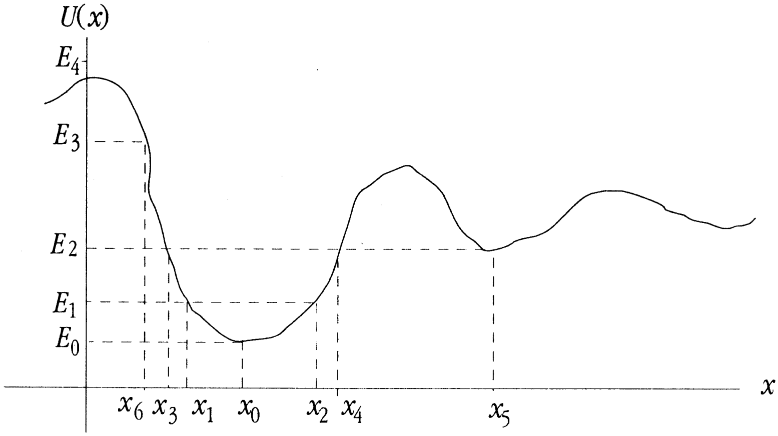
2 - إذا كانت $E = E_0 = U(x_0)$ عندئذ يبقى الجسم ساكناً عند x_0 لأن طاقته الحركية ستكون معدومة دوماً. تسمى x_0 نقطة **اتزان مستقر** (*stable equilibrium*).

3 - إذا كانت $E_0 < E = E_1 < E_2$ عندئذ ستبقى حركة الجسم محصورة بين النقطتين x_1 و x_2 لأن طاقته الحركية تصير معدومة عند كل منهما (لماذا؟)، فيقف عند إحداهما ويعود أدراجه باتجاه الثانية، وهكذا دواليك. لذلك تسمى كل من هاتين النقطتين **نقطة دوران** (*turning point*) وتصير الحركة **دورية** (*periodic*) بينهما. فإذا كانت E أكبر بقليل من E_0 عندئذ تصير الحركة اهتزازية بسيطة حول النقطة x_0. سنرى بعد قليل كيف نحدد دورها وترددها.

4 - إذا كانت $E = E_2$ وكان الجسم أصلاً بين x_3 و x_4 فسيبقى هناك إلى الأبد. كما أنه لايمكن أن يكون عند النقطة $x < x_3$ أو $x_5 > x > x_4$. فإما أن يتحرك اهتزازياً بين x_3 و x_4 أو يبقى ساكناً تماماً عند x_5.

5 - إذا كانت $E = E_3$ وكان الجسم يتحرك بالاتجاه السالب لمحور السينات فإن أقرب نقطة سيصل إليها من المبدأ هي x_6 ليقف عندها لحظياً ثم يعود أدراجه بالاتجاه الموجب إلى الأبد.

6 - إذا كانت $E > E_4$ عندئذ لايوجد نقاط دوران ويتحرك الجسم باتجاه واحد طوال الوقت.



الشكل (3-1)

تردد الاهتزازات الصغيرة حول موضع اتزان مستقر :

نعود الآن إلى الحالة التي تكون فيها الطاقة الميكانيكية للجسم أكبر بقليل من طاقة الوضع الصغرى له (مثل $U(x_0)$ أو $U(x_5)$)، عندئذ يمكن نشر $U(x)$ حول تلك النهاية الصغرى، فنكتب:

$$U(x)=U(x_0)+\frac{1}{1!}\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots \qquad (37-1)$$

بماأنه بإمكاننا إضافة أو طرح حد ثابت من طاقة الوضع بدون أن يؤثر ذلك على حل المسألة (أي أننا نغير موضع الأرض مثلاً في حالة طاقة الوضع للجاذبية)،لذلك نسقط الحد الثابت $U(x_0)$ من (37-1).كما نلاحظ أن $U(x)$ سيكون أصغر مايمكن (نهاية صغرى) عندما:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}=0$$

و

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}>0$$

لذلك نعيد كتابة (37-1) على النحو:

$$U(x)=\frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0} x'^2+O(x'^3) \qquad (38-1)$$

حيث $x'=x-x_0$، بينماتدل $O(x'^3)$ على كثير حدود في x' من الدرجة الثالثة أو أكبر.

فإذا فرضنا أن x ستبقى قريبة بشكل كاف من x_0 (أي أن E ليست أكبر بكثير من $U(x_0)$) عندئذ يمكن إهمال $O(x'^3)$ وتؤول $U(x)$ إلى:

$$U(x')=\frac{1}{2}k\,x'^2 \qquad (39-1)$$

حيث وضعنا

$$k=\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=x_0} \qquad (40-1)$$

من الواضح أن (39-1) تشبه طاقة الوضع لهزاز بسيط (كجسم مربوط بزنبرك) بحيث أن سرعته الزاوية هي:

$$\omega^2=\frac{k}{m}=\frac{1}{m}\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=x_0} \qquad (41-1)$$

ويتغير بعد الجسم عن موضع الاتزان (x_0) وفق العلاقة:

$$x'=a\cos(\omega t+\phi) \qquad (42-1)$$

وتصيرالحركة اهتزازية بسيطة حول x_0 سعتها العظمى a وترددها ω.

يطلق على النقاط التي يكون عندها $U(x)$ أصغر مايمكن نقاط **اتزان مستقر** (*stable equilibrium*)، وعلى النقاط التي يكون عندها أكبر مايمكن نقاط **اتزان قلق** (غير مستقر *unstable*)، بينما تسمى المنطقة التي يكون فيها ثابتاً **المنطقة المحايدة** (*neutral region*).

نشير أخيراً إلى أنه إذا كانت طاقة الوضع لجسم خاضع لقوى محافظة معلومة، عندئذ يمكن إيجاد القوة المؤثرة عليه من العلاقة:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{43-1}$$

❒ مثل 1-5

يتحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير قوة طاقة وضعها $U(x) = (1-\alpha x)e^{-\alpha x}$، حيث α ثابت موجب حدد مواضع الاتزان (إن وجدت)، وأنواعها، وتردد الاهتزازات الصغيرة حول مواضع الاتزان المستقر منها، ثم جد القوة المؤثرة على الجسيم.

الحل : لتحديد مواضع الاتزان نضع:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha x}(\alpha^2 x - 2\alpha) = 0$$

فهناك إذاً نقطة اتزان واحدة عند $x = 2/\alpha$.

لمعرفة فيما إذا كان هذا الاتزان مستقراً نحسب:

$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=2/\alpha} = e^{-\alpha x}(3\alpha^2 - \alpha^3 x)\Big|_{x=2/\alpha} = \alpha^2 e^{-2} > 0$$

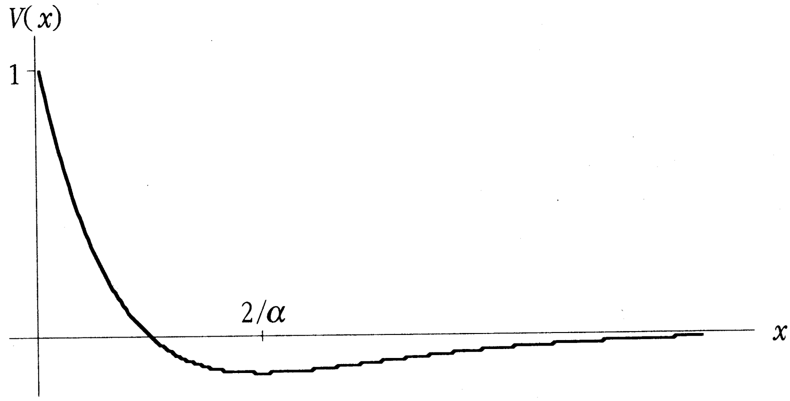
فالاتزان مستقر، ونجد تردد الاهتزازات الصغيرة حوله من (41-1) فنجد:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=2/\alpha} = \frac{\alpha^2}{me^2}$$

أخيراً نجد القوة المؤثرة على الجسيم من (43-1) ونكتب:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} = e^{-\alpha x}(2\alpha - \alpha^2 x)$$

يوضح الشكل (4-1) تغيرات $V(x)$ مع x حيث نلاحظ منه أنه إذا صارت إزاحة الجسيم حول موضع الاتزان المستقر كبيرة فإن اهتزازاته لاتبقى بسيطة بل تصير غير توافقية (*anharmonic*). ❒



الشكل (4-1)

1 - 10 السقوط الحر (Free Fall)

يعتبر السقوط الحر من أشهر وأبسط الأمثلة على حركة الأجسام على خط مستقيم حيث يخضع الجسم لوزنه فقط.

إذا افترضنا أن الحركة تتم على المحور oy المتجه للأسفل عندئذ نكتب معادلة الحركة على النحو :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=+mg \qquad (44-1)$$

وحل هذه المعادلة في غاية السهولة ولاداع لإجرائه في هذا المقام .

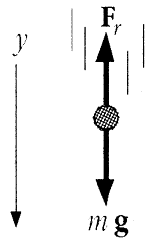
أما إذا خضع الجسم لمقاومة هواء متناسبة مع سرعته على النحو $F_r=-bv$، مثلاً حيث تدل b على ثابت تناسب قوة التخامد، عندئذ تصير معادلة الحركة:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=m\frac{dv}{dt}=+mg-bv \qquad (45-1)$$

حيث افترضنا الاتجاه الموجب للأسفل، كما في الشكل (5-1).

بحل (45-1) بالنسبة للسرعة v نجد:

$$v=\frac{mg}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}t}) \qquad (46-1)$$



الشكل (5-1)

فإذا كان b صغيراً عندئذ يمكن نشر $e^{-\frac{b}{m}t}$ فنجد:

$$v \approx gt + \frac{bg}{2m}t^2 + \ldots \qquad (47-1)$$

حيث نلاحظ أنه عند بداية سقوط الجسم (أي عندما $t << m/b$) تكون سرعته مماثلة لحالة السقوط الحر بدون تخامد إطلاقاً، إذ يكون:

$$v \approx gt \qquad (48-1)$$

بعد مرور فترة زمنية كافية (أي $t >> m/b$ بحيث نهمل $e^{-\frac{b}{m}t}$) تصير سرعة الجسم عملياً ثابتة:

$$v_t \approx \frac{mg}{b} \qquad (49-1)$$

تسمى v_t **السرعة النهائية** (*terminal speed*)، ونعرّفها بشكل عام أنها السرعة التي يصل إليها الجسم عندما تصير محصلة القوى المؤثرة عليه مساوية للصفر.

فإن سقط جسم في وسط تتناسب مقاومته مع مربع السرعة مثلاً عندئذ يمكن إيجاد السرعة النهائية بكتابة:

$$mg = bv_t^2 \qquad (50-1)$$

ومنه:

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}} \qquad (51-1)$$

❐ مثل 1-6

يقذف جسيم كتلته m نحو الأعلى بسرعة ابتدائية v_0 في وسط لزج تتناسب مقاومته مع السرعة الآنية للجسيم. ماأعلى ارتفاع يصل إليه؟

الحل: من الواضح أن كلاً من قوة الجاذبية ومقاومة الوسط تتجهان للأسفل بعكس اتجاه الحركة، لذا نكتب معادلة الحركة مفترضين الاتجاه الموجب نحو الأعلى، فنجد:

$$-(mg + bv) = m\frac{dv}{dt}$$

بملاحظة الشروط الابتدائية $(v(0)=v_0)$ نجد:

$$v = (\frac{mg}{b} + v_0)e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

ثم نحسب الزمن اللازم للوصول إلى أعلى ارتفاع بوضع $v=0$ فنجد:

$$t_{\max} = \frac{m}{b}\ln(\frac{mg + bv_0}{mg})$$

كما نجد ارتفاع الجسيم الآني من السرعة اللحظية v:

$$y = \int vdt = (\frac{m}{b})(\frac{mg}{b} + v_0)(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) - \frac{mg}{b}t$$

حيث وضعنا $y(0)=0$. بتعويض t_{max} في العلاقة السابقة نجد:

$$y_{\max} = \frac{mv_0}{b} - \frac{m^2 g}{b^2}\ln(\frac{mg + bv_0}{mg})$$

❐

1 - 11 سقوط الأجسام من ارتفاعات شاهقة وتغير تسارع الجاذبية

ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة التجاذب بين جسمين m وM، البعد بينهما r كبير بالمقارنة مع أبعاد أي منهما، تعطى بالعلاقة:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (52-1)$$

حيث G ثابت الجاذبية العام ويساوي $6.6\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2$.

بما أن القوة تعتمد على الموضع لذلك نكتب طاقة الوضع على النحو:

$$U(r)=-\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr \qquad (53-1)$$

حيث اعتبرنا الموضع الاختياري $r_s=\infty$ حيث تنعدم القوة المؤثرة على الجسم وطاقة وضعه.

بأجراء التكامل نجد:

$$U(r)=-\frac{GMm}{r} \qquad (54-1)$$

وتصير معادلة تكامل الطاقة:

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r} \qquad (55-1)$$

ومنها :

$$v=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{GMm}{r}\right)} \qquad (56-1)$$

حيث نعتبر الإشارة + عندما يتحرك الجسم للأعلى والإشارة - عندما يتحرك للأسفل.

نعتبر فيمايلي سقوط جسيم m من ارتفاع شاهق بالنسبة لنصف قطر الأرض ونعتبر الاحتمالين التاليين :

(أ) — $E<0$ أي أن الجسم مرتبط بالأرض *(bound)*:

نلاحظ أن ارتفاع الجسم لايمكن أن يتجاوز مقداراً معيناً r_{max} حيث يصير المقدار المجذور في (56-1) مساوياً للصفر، أي عندما :

$$E+\frac{GMm}{r_{max}}=0 \qquad (57-1)$$

ومنه :

$$r_{max}=-\frac{GMm}{E} \qquad (58-1)$$

نلاحظ من (56-1) أنه عندما تصير $r = r_{max}$ فإن سرعة الجسم (نحو الأعلى) تنعدم ويعود أدراجه نحو الأرض.

(ب) – $E > 0$ أي أن الجسم حر الحركة (*unbound*)

إذا كان الجسم يتحرك مبدئياً نحو الأعلى فسيبقى كذلك إلاّ أن سرعته ستتناقص تدريجياً إلى أن تبلغ قيمة تثبت عندها، عندما تصير r كبيرة، بحيث يمكن إهمال الحد GMm/r بالمقارنة مع E في (56-1) وتصير سرعة الجسم النهائية:

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad (59-1)$$

حيث وضعنا $GM = g_e R_e^2$ ، بفرض أن g_e تسارع الجاذبية على سطح الأرض (أو أي كوكبٍ أو نجم آخر).

نعود الآن الى حل المعادلة (57-1) ونكتب:

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GMm}{r}\right)} \qquad (60-1)$$

أو :

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\left(E + \frac{GMm}{r}\right)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\, t \qquad (61-1)$$

بإجراء التكامل السابق نصل لعلاقة تربط تغيرات r مع t .

❑ مثل 7-1

يسقط جسيم من ارتفاع H عن سطح الأرض (كبير بالمقارنة مع نصف قطر الأرض). ماسرعته لحظة ارتطامه بالأرض وكم يستغرق من الزمن للوصول إليها؟

الحل: لنحسب الطاقة الميكانيكية الكلية للجسيم فنلاحظ أنها طاقة وضع لحظة سقوطه، أي :

$$E_1 = -GmM / r = -GmM / (R + H)$$

أما طاقته لحظة وصوله للأرض فهي طاقة وضع وحركة ، أي :

$$E_2 = \tfrac{1}{2} mv^2 - GmM \ / \ r = \tfrac{1}{2} mv^2 - GmM \ / \ R$$

بوضع $GM = gR^2$ ومساواة الطاقتين نجد:

$$v = \sqrt{2gRH \ / \ (R+H)}$$

لحساب الزمن اللازم للجسيم للوصول للأرض نضع $E_1 = E_2$ عند نقطة ما تبعد r عن مركز الأرض ونحل بالنسبة للسرعة v فنجد:

$$v = \sqrt{2gR^2} \ \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R+H}} = \frac{dr}{dt}$$

ومنه:

$$t = \int_0^t dt = \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} \int_{R+H}^{R} \frac{dr}{\sqrt{1 / r - 1 / (R+H)}}$$

بإجراء التكامل السابق (بصعوبة) يمكن تحديد الزمن t. ❐

1 - 12 قوة الإرجاع الخطية والحركة الاهتزازية البسيطة

لعل الحركة الإهتزازية البسيطة هي أهم مثل على الحركة على خط مستقيم، حيث يخضع الجسيم لقوة إرجاع تتناسب مع بُعده عن نقطة اتزان محددة وتتجه نحوها .

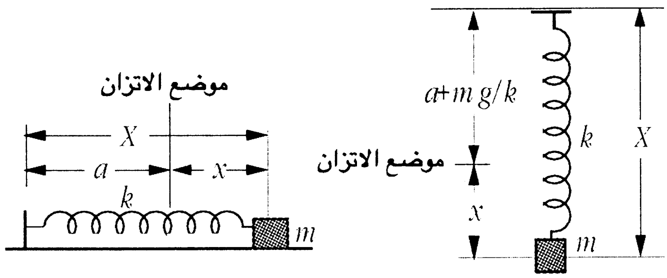
تعطى هذه القوة بقانون هوك *(Hook's Law)* (أنظر الشكل (1-6)):

$$F = -k(X - l_0) = -kx \qquad (1-62)$$

حيث X طول الزنبرك الآني الكلي و l_0 طوله الطبيعي (حمولة معدومة)، بينما $x = X - l_0$ على استطالة، أو انضغاط، الزنبرك بالنسبة لطوله الطبيعي. يدعى ثابت التناسب k **ثابت قوة الزنبرك** *(spring force constant)*.

نلاحظ من الشكل (1-6أ) أنه إذا علُق الجسيم بالزنبرك بوضع شاقولي فإن القوة الكلية المؤثرة عليه هي:

$$F = -k[X - (a + \frac{mg}{k})] = -kx \qquad (63-1)$$



(ب) الشكل (6-1) (أ)

حيث اعتبرنا الاتجاه الموجب نحو الأسفل، وتصير x مساوية الى:

$$x = X - (a + \frac{mg}{k}) \qquad (64-1)$$

إذاً بغض النظر عن طريقة تعليق الجسيم بالزنبرك فإن معادلة الحركة تكتب بالشكل :

$$m\ddot{x} = -kx \qquad (65-1)$$

أو

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (66-1)$$

حيث يعطى **التردد الزاوي الطبيعي** للنظام ω_0 بالعلاقة:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (67-1)$$

ونكتب الحل العام للمعادلة (65-1) بالشكل :

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (68-1)$$

تمثل x **السعة الانية** *(instantaneous amplitude)*، و ϕ **الطور الابتدائي** *(initial phase)* و A **السعة العظمى** *(maximum amplitude)*، أما الزاوية $(\omega_0 t + \phi)$ فتدعى **الطور الآني** **أو الطور** فقط *(instantaneous phase)*.

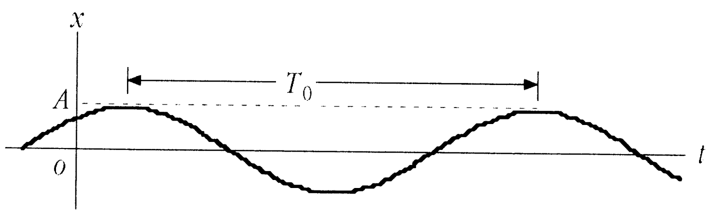
نستنتج من الحل (1-70) أن الحركة اهتزازية بسيطة ، دورها T_0 وترددها ν_0 حيث:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (69-1)$$

و

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (70-1)$$

يعطى الشكل (1-7) تغيرات السعة الآنية (أو السعة *(amplitude)*) x مع الزمن .



الشكل (1-7)

يمكن كتابة الطاقة الكلية للجسيم m مباشرة:

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 + V(x) \qquad (71-1)$$

حيث:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (72-1)$$

و

$$V(x) = \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \qquad (73-1)$$

ثم نكتب الطاقة الكلية:

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} kA^2 \qquad (74-1)$$

نلاحظ من (74-1) أن الطاقة الكلية ثابتة وهذا طبيعي لأن القوة المؤثرة على الجسم محافظة، بالتالي يمكن الاستفادة منها لحساب سرعته في كل لحظة بدلالة بُعده عن وضع الاتزان، x ، حيث أن:

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)} \qquad (75-1)$$

هذا ما وجدناه سابقا بالنسبة لجسيم خاضغ لقوة محافظة.

نلاحظ أن السرعة القصوى التي يصل اليها الجسيم (عند $x=0$) هي:

$$v_{\max} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\ A = \pm\omega_0 A \qquad (76-1)$$

13 - 1 الحركة الاهتزازية البسيطة المتخامدة

أهملنا في الفقرة السابقة قوى الاحتكاك أو التخامد*(damping)* التي يمكن أن تؤثر على الجسيم المهتز خلال حركته. وحيث أن قوى كهذه ستوجد دائما في الطبيعة فإنه من الضروري إدخالها في معادلة الحركة.

إذا افترضنا ان قوى التخامد تتناسب مع السرعة اللحظية للجسيم عندئذ نكتب معادلة حركته بالشكل :

$$F = -k\,x - b\,\dot{x} = m\,\ddot{x} \qquad (77-1)$$

حيث تدل b على ثابت تناسب قوة الاحتكاك، أو ثابت التخامد (*damping factor*).

نكتب معادلة الحركة بالشكل :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (78-1)$$

حيث وضعنا:

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (79-1)$$

حل المعادلة (78-1) هو:

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad (80-1)$$

حيث:

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (81-1)$$

نميز هنا الحالات التالية :

أ ـ تخامد مفرط *(over damping)* أي أن $b^2 >> 4mk \Leftarrow \gamma >> \omega_0$ عندئذ تصير $\delta = -\gamma$ وتعطى x بـ

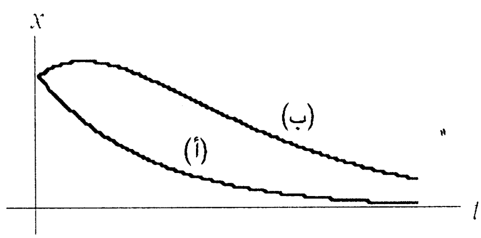
$$x = Ae^{-\gamma t} \qquad (82-1)$$

فتتناقص السعة أُسياً *(exponential decay)* مع الزمن وتموت الحركة تدريجيا وبشكل مباشر، كما في الشكل (8-1أ).

ب ـ تخامد حرج *(critical damping)* $b^2 = 4\,k\,m$ أي أن $\gamma = \omega_0$ عندئذ يصير للمعادلة المميزة (81-1) جذراً مضاعفاً $r_{1,2} = -\gamma$ ويعطى حل المعادلة (80-1) عندئذ بالشكل :

$$x = (A + Bt)e^{-\gamma t} \qquad (83-1)$$

يمثل الشكل (8-1ب) تغيرات x مع الزمن في هذه الحالة.



الشكل (8-1)

جـ ـ تخامد ضعيف *(under damping)* $b^2 < 4\,mk \Leftarrow \gamma < \omega_0$ عندئذ يُصير للمعادلة المميزة (81-1) حلين من الشكل :

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \qquad (84-1)$$

حيث :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{85-1}$$

يُعطى الحل العام للمعادلة (1-80) في هذه الحالة بالعلاقة :

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{86-1}$$

تمثل المعادلة (1-86) حركة اهتزازية بسيطة تتناقص سعتها مع مرور الزمن بمعدل $\exp(-\gamma T)$ (حيث رمزنا لدور الحركة بـ $T = 2\pi/\omega$) في كل دورة .

يمكن تحديد طاقة النظام في هذه الحالة بوضع :

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \tag{87-1}$$

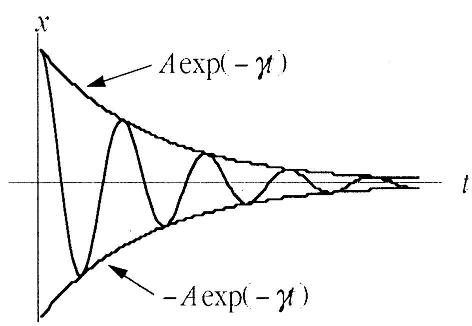
نلاحظ هنا أن :

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \tag{88-1}$$

بحسب المعادلة (1-77) نجد أن :

$$\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2 \tag{89-1}$$

تمثل المعادلة الاخيرة معدل خسارة الطاقة نتيجة الاحتكاك . ويعطي الشكل (1-9) تغيرات x مع t في هذه الحالة .



الشكل (1-9)

الحركة في مستو وفي الفضاء

(Motion in Plane and Space)

2 - 1 تمهيد

درسنا في الفصل الأول حركة جسيم على خط مستقيم . في الفصل الحالي والذي يليه ندرس حركة جسيم في مستو أو في الفضاء. فنخصص الفصل الحالي لدراسة الخواص العامة لحركة الأجسام في بعدين (مستو) أو ثلاثة أبعاد (الفضاء)، ثم نعتبر حركة المقذوفات وحركة الأجسام المشحونة المتحركة في مجال كهرمغناطيسي. بينما نخصص الفصل الثالث لدراسة حركة الأجسام الخاضعة لقوى مركزية لأهمية هذا الموضوع في الميكانيك.

2 - 2 تعاريف أساسية في جبر وتحليل المتجهات (اختياري)

2 - 2 - 1 تساوي المتجهات :

نقول إن المتجهين **B** و **A** متساويان إذا كان لهما نفس الطول والاتجاه، ونكتب:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

عندئذ يكون :

$$A_z = B_z \quad , \quad A_y = B_y \quad , \quad A_x = B_x$$

2 - 2 - 2 جمع وطرح المتجهات:

نجمع أو نطرح المتجهين **A** و **B** بالشكل:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\mathbf{i} + (A_y \pm B_y)\mathbf{j} + (A_z \pm B_z)\mathbf{k} \qquad (1-2)$$

حيث **i** و **j** و **k** متجهات وحدة على المحاور ox، و oy ، و oz ، على الترتيب.

2 - 2 - 3 ضرب متجه بعدد:

حاصل ضرب متجه **A** بعدد n هو متجه جديد طوله n **A** ، اتجاهه باتجاه **A** إذا كان n موجباً، أو بعكس **A** إذا كان n سالباً، ونكتب:

$$n\mathbf{A} = (nA_x, nA_y, nA_z)$$

2 - 2 - 4 ضرب متجه بمتجه : الضرب العددي *(Scalar Product)*:

نعرف الضرب العددي لمتجهين **A** و **B** بالعلاقة :

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=c=AB\cos\theta_{AB}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (2-2)$$

حيث ترمز Θ_{AB} للزاوية بين **A** و **B** ، بينما c عدد قيمته هي حاصل ضرب **A** بـ **B** .

نستفيد من هذا التعريف لإيجاد طول متجه فنكتب:

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{A}=A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

أي أن :

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

2 - 2 - 5 ضرب متجه بمتجه: الضرب المتجه (التقاطعي) *(Vector Product)*

نعرف الضرب المتجه لمتجهين **A** و **B** بالعلاقة:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\mathbf{C} \qquad (3-2)$$

حيث **i** و **j** و **k** متجهات وحدة على المحاور ox و oy و oz ، على الترتيب و **C** متجه يُعطى طوله بالعلاقة:

$$C=AB\sin\theta_{AB}$$

حيث θ_{AB} الزاوية بين **A** و **B** .

2 - 2 - 6 الضرب الثلاثي العددي والمتجه *(Triple Product)* :

نطلق على **A•(B×C)** اسم الضرب الثلاثي (أو المختلط) العددي للمتجهات **A** و**B** و**C**، تعطي نتيجته بالمعين (أو المحدد) *(Determinent)* التالي:

$$\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \qquad (4-2)$$

يمكن البرهان بسهولة أن:

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} \qquad (5-2)$$

من جهة أخرى، نطلق على $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ اسم الضرب الثلاثي المتجه للمتجهات $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$.
يمكن البرهان بسهولة أن:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) \qquad (6-2)$$

2 - 2 - 6 اشتقاق المتجهات *(Vector Differentiation)* :

إذا كان المتجه $\mathbf{A}$ معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

عندئذ نكتب مشتقه بالنسبة لمنظومة المحاور $oxyz$ (أي معدل تغيره بدلالة الزمن بالنسبة لمراقب موجود في هذه المنظومة) بالشكل :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} \qquad (7-2)$$

بفرض أن متجهات الوحدة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ تبقى ثابتة بالنسبة لمنظومة المحاور $oxyz$.

أما إذا كتبنا $\mathbf{A}$ بدلالة متجهات وحدة $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ متغيرة الاتجاه بالنسبة لمنظومة المحاور $oxyz$، عندئذ يكون :

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 \qquad (8-2)$$

و

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{e}_3 + (A_1\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} A_3\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}) \qquad (9-2)$$

للعلاقة (9-2) أهمية كبيرة في حالة دراسة حركة جسيم بالنسبة لمنظومة محاور متحركة، مثل حركة جسم على سطح الأرض التي تدور حول الشمس. سندرس هذا الموضوع بالتفصيل في الفصل السابع.

نفترض فيما يلي أن منظومة المحاور الإحداثية ساكنة، ونوجد سرعة وتسارع جسيم عندما نكتب متجه موضعه بالاحداثيات **الديكارتية** *(cartesian)*، أو **القطبية** *(polar)*، أو **الكروية** *(spherical)*، أو **الاسطوانية** *(cylindrical)*.

2 - 3 سرعة وتسارع جسيم يتحرك في الفضاء

2 - 3 -1 الاحداثيات الديكارتية *(cartesian coordinats)*:

لنفترض أن لدينا جسيما m محدداً بالمتجه $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة $oxyz$، عندئذ نكتب متجه سرعة الجسيم بدلالة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بالشكل:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \qquad (10-2)$$

ونكتب تسارعه بالشكل :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (11-2)$$

أو :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (12-2)$$

2 - 3 -2 مؤثر التدرج *(gradient operator)* :

نعرف **تدرج** *(gradient)* أيّ دالة عددية $u = u(x,y,z)$ بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقة:

$$du = d\mathbf{r} \bullet \nabla u \qquad (13-2)$$

حيث نضع :

$$d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \qquad (14-2)$$

ونعرّف تدرج الدالة العددية u بالعلاقة :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k} \qquad (15-2)$$

يُسمى∇ **مؤثر التدرج** *(gradient operator)* ويعطى بـ:

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x})\mathbf{i} + (\frac{\partial}{\partial y})\mathbf{j} + (\frac{\partial}{\partial z})\mathbf{k} \qquad (16-2)$$

نلاحظ أن (2-15) تنتج من تطبيق المؤثر∇ على الدالة العددية u.

2 - 3 -3 دوّار متجه *(curl of a vector)* :

نعرف **دوّار** *(curl)* متجه **A** بالعلاقة :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (17-2)$$

حيث يدل الرمز$\partial/\partial x$مثلاً على الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتحول x.

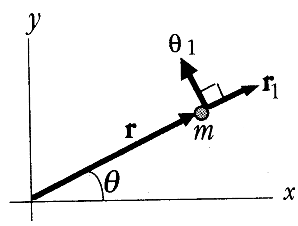
نلاحظ أننا نحصل على دوّار متجه بضربه بشكل متجه بمؤثر التدرج ∇. سنرى بعد قليل كيف نستفيد من تدرج دالة ودوّار متجه عند حساب الشغل والعزم وغيرها من الكميات الفيزيائية.

2 - 3 -4 الاحداثيات القطبية *(polar coordinates)* :

عندما يتحرك جسيم في مستو فإن موضعه يتحدد بالمتجه:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r\mathbf{r}_1 \qquad (18-2)$$

حيث **i** و **j** متجهي وحدة على امتداد ox وoy ، على الترتيب، بينما $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة على امتداد **r** ، كما في الشكل (2-1) .



الشكل (2-1)

نفترض فيما يلي أن منظومة المحاور الإحداثية ساكنة، ونوجد سرعة وتسارع جسيم عندما نكتب متجه موضعه بالاحداثيات **الديكارتية** *(cartesian)*، أو **القطبية** *(polar)*، أو **الكروية** *(spherical)*، أو **الاسطوانية** *(cylindrical)*.

2 - 3 سرعة وتسارع جسيم يتحرك في الفضاء

2 - 3 -1 الاحداثيات الديكارتية *(cartesian coordinats)*:

لنفترض أن لدينا جسيما m محدداً بالمتجه $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة $oxyz$، عندئذ نكتب متجه سرعة الجسيم بدلالة $\mathbf{i}$ و$\mathbf{j}$ و$\mathbf{k}$ بالشكل:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \qquad (10-2)$$

ونكتب تسارعه بالشكل :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (11-2)$$

أو :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (12-2)$$

2 - 3 -2 مؤثر التدرج *(gradient operator)* :

نعرف **تدرج** *(gradient)* أيّ دالة عددية $u = u(x,y,z)$ بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقة:

$$du = d\mathbf{r} \bullet \nabla u \qquad (13-2)$$

حيث نضع :

$$d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \qquad (14-2)$$

ونعرّف تدرج الدالة العددية u بالعلاقة :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k} \qquad (15-2)$$

في حالة الحركة في مستو، يمكن أن نحدد موضع الجسيم بالاحداثيات الديكارتية (x,y) أو بالإحداثيات القطبية (r,θ)، ونربط بين هذه الإحداثيات، من الشكل (2-1)، بالعلاقات:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (19-2)$$

و

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (20-2)$$

الآن: نعرّف متجه الوحدة لأي محور ليكون باتجاه ازدياد إحداثي ذلك المحور. لذلك نعتبر متجهي الوحدة $\mathbf{r}_1$ و θ_1 ليكونا باتجاه ازدياد كل من r و θ، على الترتيب، كما في الشكل (2-1). يمكن عندئذ الربط بين متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ من جهة وبين $\mathbf{r}_1$ و θ_1، من جهة أخرى، بالعلاقات الآتية:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \cos\theta\ \ \mathbf{i} + \sin\theta\ \ \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\theta}_1 = -\sin\theta\ \ \mathbf{i} + \cos\theta\ \ \mathbf{j} \end{cases} \qquad (21-2)$$

و

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos\theta\ \ \mathbf{r}_1 + \sin\theta\ \ \boldsymbol{\theta}_1 \\ \mathbf{j} = \sin\theta\ \ \mathbf{r}_1 + \cos\theta\ \ \boldsymbol{\theta}_1 \end{cases} \qquad (22-2)$$

الآن: لحساب سرعة وتسارع جسيم بالإحداثيات القطبية، نكتب متجه الموضع له بالشكل:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1 \qquad (23-2)$$

باشتقاق طرفي هذه العلاقة نجد :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1 + r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \qquad (24-2)$$

أو

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\ \ \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

حيث نجد من العلاقات (2-21) أن:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{d\theta} = -\sin\theta \ \ \mathbf{i} + \cos\theta \ \ \mathbf{j} = \boldsymbol{\theta}_1 \qquad (25-2)$$

و

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}_1}{d\theta} = -\cos\theta \ \ \mathbf{i} + \sin\theta \ \ \mathbf{j} = \mathbf{r}_1 \qquad (26-2)$$

لذلك تؤول (2-24) إلى:

$$\mathbf{v} = (\dot{r})\mathbf{r}_1 + (r\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1 \qquad (27-2)$$

أو :

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{r}_1 + v_\theta \boldsymbol{\theta}_1 \qquad (28-2)$$

حيث نعرف **السرعة القطرية** *(radial velocity)* v_r :

$$v_r = \dot{r} \qquad (29-2)$$

والسرعة المماسية *(tangential velocity)* v_θ :

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (30-2)$$

بنفس الطريقة، يمكن البرهان أن تسارع الجسيم يعطي بالعلاقة:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1 = a_r \mathbf{r}_1 + a_\theta \boldsymbol{\theta}_1 \qquad (31-2)$$

حيث نعرف **التسارع القطري** a_r ، و**التسارع المماسي** a_θ بالعلاقتين:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \qquad (32-2)$$

نلاحظ من العلاقة (2-31) أنه اذا تحرك الجسم بحيث بقي بُعده r عن المركز ثابتاً، أي أن:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

عندئذ يصير التسارع القطري مساوياً إلى :

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \qquad (33-2)$$

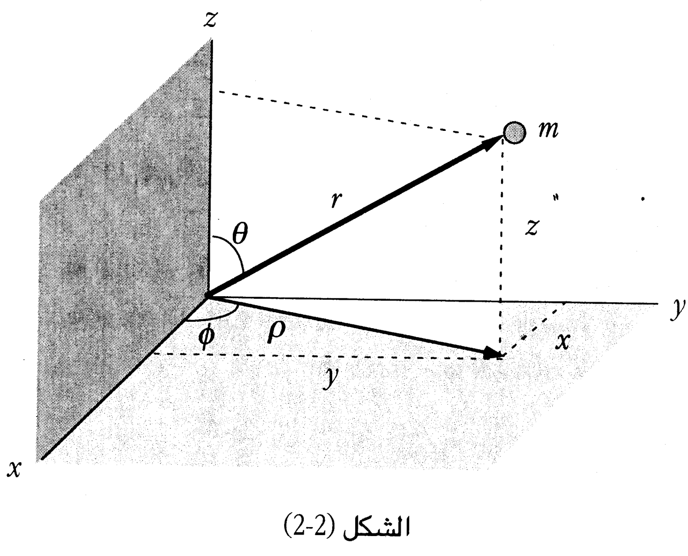
يُطلق على a_r اسم **التسارع المركزي** *(central or centripetal acceleration)*، ويتجه نحو المركز (لاحظ الإشارة السالبة أمام $-r\dot{\theta}^2$) ، بحيث يتحرك الجسم على دائرة نصف قطرها r بسرعة مماسية ثابتة v_θ معطاة بالعلاقة (2-30) .

2 - 3 -3 الإحداثيات الكروية والاسطوانية *(spherial and cylindrical coordinates)*:

عندما يتحرك جسيم في الفضاء فاننا نحدد موضعه بالاحداثيات الديكارتية (x,y,z)، أو الكروية (r,θ,ϕ)، أو الاسطوانية (ρ,ϕ,z) ، الموضحة في الشكل (2-2).

نربط بين مختلف الاحداثيات، من الشكل (2-3) ، بالعلاقات التالية:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi = r\sin s\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi \\ z = \quad z \quad = r\cos\theta \end{cases} \qquad (34-2)$$



الشكل (2-2)

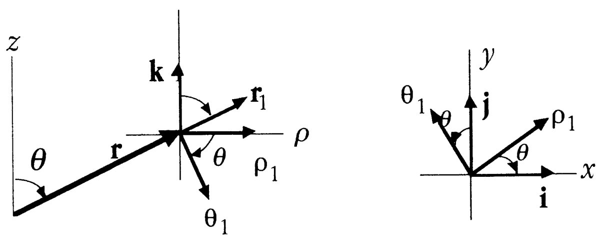
و

$$
\begin{cases}
r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = (\rho^2+z^2)^{1/2} \\
\theta = \cos^{-1}(\frac{z}{r}) = \sin^{-1}(\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{r}) = \tan^{-1}(\frac{\rho}{z}) \\
\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \cos^{-1}(\frac{x}{\rho}) = \sin^{-1}(\frac{y}{\rho})
\end{cases}
\tag{35-2}
$$

و

$$
\begin{cases}
\rho = (x^2+y^2)^{1/2} = r\sin\phi \\
\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \cos^{-1}(\frac{x}{\rho}) = \sin^{-1}(\frac{y}{\rho}) \\
z = \quad z \quad = r\cos\theta
\end{cases}
\tag{36-2}
$$

من جهة أخرى، يمكن الربط بين مختلف متجهات الوحدة$(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ و$(\mathbf{r}_1,\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\phi}_1)$ و$(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\phi}_1,\mathbf{k})$، كما هو موضح في الشكلين (2-4أ و ب):



(ب) الشكل (4-2) (أ)

(أ) الربط بين $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ و$(\mathbf{r}_1,\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\phi}_1)$:

$$
\begin{cases}
\mathbf{i} = (\sin\theta\cos\phi)\mathbf{r}_1 + (\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{\theta}_1 - (\sin\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\
\mathbf{j} = (\sin\theta\sin\phi)\mathbf{r}_1 + (\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{\theta}_1 + (\cos\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\
\mathbf{k} = (\cos\theta)\mathbf{r}_1 - (\sin\theta)\boldsymbol{\theta}_1
\end{cases}
\tag{37-2}
$$

و

$$
\begin{cases}
\mathbf{r}_1 = (\sin\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (\sin\theta\sin\phi)\mathbf{j} + (\cos\theta)\mathbf{k} \\
\boldsymbol{\theta}_1 = (\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (\cos\theta\sin\phi)\mathbf{j} - (\sin\theta)\mathbf{k} \\
\boldsymbol{\phi}_1 = (-\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}
\end{cases}
\tag{38-2}
$$

ب) الربط بين $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ و$(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\phi}_1,\mathbf{k})$:

$$(39-2)\qquad \begin{cases} \mathbf{i}=(\cos\phi)\boldsymbol{\rho}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{j}=(\sin\phi)\boldsymbol{\rho}_1+(\cos\phi)\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{k}=\mathbf{k} \end{cases}$$

و

$$(40-2)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1=(\cos\phi)\mathbf{i}+(\sin\phi)\mathbf{j} \\ \boldsymbol{\phi}_1=(-\sin\phi)\mathbf{i}+(\cos\phi)\mathbf{j} \\ \mathbf{k}=\mathbf{k} \end{cases}$$

(جـ) الربط بين $(\mathbf{r}_1,\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\phi}_1)$ و$(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\phi}_1,\mathbf{k})$:

$$(41-2)\qquad \begin{cases} \mathbf{r}_1=(\sin\theta)\boldsymbol{\rho}_1+(\cos\theta)\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\theta}_1=(\cos\theta)\boldsymbol{\rho}_1-(\sin\theta)\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\phi}_1=\boldsymbol{\phi}_1 \end{cases}$$

و

$$(42-2)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1=(\cos\theta)\boldsymbol{\theta}_1+(\sin\theta)\mathbf{r}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_1=\boldsymbol{\phi}_1 \\ \mathbf{k}=(\cos\theta)\mathbf{r}_1-(\sin\theta)\boldsymbol{\theta}_1 \end{cases}$$

نستفيد من العلاقات بين متجهات الوحدة أعلاه لاشتقاق مركبات سرعة وتسارع جسيم في الإحداثيات الكروية والاسطوانية، كما فعلنا في حالة الإحداثيات القطبية.

يترك للقارئ أن يبرهن أن:

$$(42-2)\qquad \mathbf{v}=\begin{cases} \dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k} \\ \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}_1+\rho\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_1+\dot{z}\mathbf{k} \\ \dot{r}\mathbf{r}_1+r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1+r\sin\phi\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_1 \end{cases}$$

و

$$(43-2)\qquad \mathbf{a}=\begin{cases} \ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k} \\ (\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)\boldsymbol{\rho}_1+(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})\boldsymbol{\phi}_1+\ddot{z}\mathbf{k} \\ (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{r}_1+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{\theta}_1+ \\ (r\ddot{\phi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\boldsymbol{\phi}_1 \end{cases}$$

يمكن أن تتغير الإحداثيات x و y و z بشكل صريح (*explicit*) مع الزمن أو ضمني (*implicit*) مما يستوجب أخذ ذلك بعين الاعتبار عند إجراء عمليات الاشتقاق أو التكامل.

2-4 تطبيقات على جبر وتحليل المتجهات

2-4-1 حركة جسيم خاضع لعدة قوى

إذا تحرك جسيم m تحت تأثير عدة قوى خارجية $\mathbf{F}_1$، و $\mathbf{F}_2$، و . . . و $\mathbf{F}_N$ فإن تسارعه يعطى بحسب قانون نيوتن الثاني بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N = m\mathbf{a} \qquad (44-2)$$

أو بالشكل :

$$\mathbf{F}_T = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (45-2)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم و $\mathbf{p}$ زخمه الخطي.

بمكاملة العلاقة السابقة بين اللحظتين t_1 و t_2 نجد:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_T \, dt \qquad (46-2)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر من (2-46) هو تغير الزخم الخطي للجسيم خلال الفترة Δt والطرف الأيمن هو دفع القوة (*impulse*) $\mathbf{F}_T$ خلال تلك الفترة ، أي أن:

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_T \, dt \qquad (47-2)$$

من جهة أخرى لو ضربنا طرفي (2-45) عددياً بمتجه السرعة اللحظية لوجدنا:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_T \qquad (48-2)$$

أو

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2} m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2} mv^2)=\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v} \qquad (49-2)$$

لكن

$$T=\tfrac{1}{2} mv^2 \qquad (50-2)$$

هي الطاقة الحركية، ومن ثم نجد بمكاملة (2-49) بين اللحظتين t_1 و t_2 أن:

$$T_2-T_1=\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v})\ dt \qquad (51-2)$$

تسمى (2-51) **الشكل التكاملي لنظرية الطاقة** ، حيث يمثل الحد $\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v}$ القدرة اللحظية p (*instantaneous power*)، أي أن:

$$p=\mathbf{F}_T\cdot\mathbf{v} \qquad (52-2)$$

2 - 4 - 2 شغل قوة مؤثرة على جسيم يتحرك في الفضاء

نعرّف شغل قوة مؤثرة على جسيم خلال انتقاله مسافة ما بالعلاقة :

$$W=\int_{r_1}^{r_2} F\cdot dr \qquad (53-2)$$

حيث تدل $d\mathbf{r}$ على اتجاه الحركة في كل لحظة .

إذا كانت الزاوية بين القوة واتجاه الحركة معروفة عند كل نقطة من المسار عندئذ نكتب العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$W=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} F_T\cos\theta\ dr \qquad (54-2)$$

أما إذا كانت مركبات متجه الموضع $\mathbf{r}$ معروفة دوماً عندئذ يصير الشغل معطى بـ :

$$W=\int F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz \tag{55-2}$$

بوضع $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ في (51-2) نجد :

$$T_2-T_1=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}_T\cdot d\mathbf{r}=W_T \tag{56-2}$$

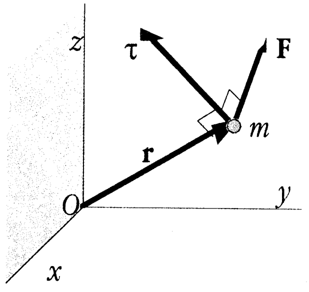
تدل العلاقة أعلاه أن تغير الطاقة الحركية لجسيم عندما ينتقل بين موضعين محددين بمتجهي الموضع $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ يساوي شغل محصلة القوى المؤثرة عليه خلال ذلك. تسمى العلاقة (56-2) **نظرية الشغل والطاقة** (*Work-Energy Theorem*).

2 - 4 - 3 العزم والزخم الزاوي (*Torque & Angular Momentum*)

نعرّف عزم قوة مؤثرة على جسيم بالنسبة لنقطة ما O بالعلاقة :

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{57-2}$$

حيث $\mathbf{r}$ متجه موضع الجسيم بالنسبة للنقطة O (أي يبدأ من O وينتهي عند موضع الجسيم) انظر الشكل (5-2).



الشكل (5-2)

إذا كانت $\mathbf{F}$ في (57-2) هي محصلة القوى المؤثرة على الجسيم فنضع $\mathbf{F}=m\,d\mathbf{v}/dt$ ونجد:

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})$$

إذ نلاحظ أن :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

حيث يساوي الحد الأول من الطرف الأيمن الصفر لأن $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. بوضع:

$$\boldsymbol{\ell}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \qquad (58-2)$$

حيث ℓ **الزخم الزاوي** (*Angular Momentum*) للجسيم بالنسبة لـ O ، يؤول العزم إلى :

$$\boldsymbol{\tau}_T=\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} \qquad (59-2)$$

أي أن عزم محصلة القوى المؤثرة على جسيم بالنسبة لنقطة ما يساوي تغير زخمه الزاوي مع الزمن بالنسبة لنفس النقطة.

هذا هو الشكل العام لقانون نيوتن الثاني في التحريك.

يمكن تعريف الدفع الزاوي والوصول إلى نظرية الزخم الزاوي، كما فعلنا في الحركة الانتقالية، بمكاملة العلاقة السابقة بين اللحظتين t_1 و t_2 فنجد:

$$\boldsymbol{\ell}_2-\boldsymbol{\ell}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{\tau}\;dt \qquad (60-2)$$

حيث يسمى الطرف الأيمن **الدفع الزاوي** (*Angular Impulse*) ويساوي، بحسب (2-60)، تغير الزخم الزاوي بين اللحظتين t_1 و t_2 .

تعطي العلاقة (2-60) الشكل التكاملي لنظرية الزخم الزاوي .

2-5 طاقة الوضع (أو الطاقة الكامنة) (*Potential Energy*)

إذا اعتمدت القوة المؤثرة على جسيم على موضعه في الفضاء فقط عندئذ يصير شغلها عندما ينتقل من $\mathbf{r}_1$ إلى $\mathbf{r}_2$ معطى بالعلاقة:

$$W=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (61-2)$$

فإذا عرفنا **طاقة وضع** الجسيم عند الموضع $\mathbf{r}$ بالشكل:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (62-2)$$

حيث $\mathbf{r}_s$ موضع اختياري يؤخذ عادة بحيث يكون $V(\mathbf{r})$ هناك معدوماً. عندئذ تكون طاقة الوضع الناتجة عن القوة عند نقطة ما تساوي شغل هذه القوة اللازم لنقل الجسم من مكان اختياري (تنعدم عنده $\mathbf{F}$) إلى تلك النقطة.

بإعادة كتابة الشغل W بالشكل:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \left(-\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \right)$$

نجد :

$$W_T = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \qquad (63-2)$$

فشغل قوة مؤثرة على جسيم عندما ينتقل بين نقطتين يساوي الفرق في طاقة الوضع الناتجة عنها بينهما.

إذا كانت القوة هي محصلة القوى المؤثرة على الجسيم عندئذ يصير شغلها مساوياً إلى تغير طاقة الحركة أي أن:

$$T_2 - T_1 = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \qquad (64-2)$$

أو :

$$T_1 + V(\mathbf{r}_1) = T_2 + V(\mathbf{r}_2) \qquad (65-2)$$

نلاحظ من (2-65) أن كل طرف فيها يساوي مجموع طاقة الحركة وطاقة الوضع عند موضع ما. فإذا وضعنا:

$$E = T + V(\mathbf{r}) \qquad (66-2)$$

عندئذ تؤول (2-65) إلى :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0 \qquad (67-2)$$

يُطلق على E اسم **الطاقة الميكانيكية الكلية** (*Total Mechanical Energy*).

نتستنتج من (2-67) أنه إذا تحرك جسيم بين نقطتين تحت تأثير محصلة قوى تعتمد على موضعه فقط، يمكن استخلاص طاقة وضع منها عندئذ تبقى طاقته الميكانيكية الكلية ثابتة.

يدعى ماتقدم **مبدأ حفظ الطاقة** (*Principle of Conservation of Energy*).

2 - 6 القوى المحافظة وخطوط تساوي الجهد والمعنى الفيزيائي للتدرج

وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا تحرك جسيم تحت تأثير محصلة قوى تعتمد على موضعه وكان بالإمكان إيجاد طاقة وضع منها ، أي يمكن إجراء التكامل :

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

فإن الطاقة الميكانيكية الكلية لهذا الجسيم تبقى ثابتة عند انتقاله من موضع لآخر . يطلق على القوة المؤثرة عليه عندئذ اسم قوة محافظة (*Conservative Force*).

نلاحظ أن تحقق التكامل السابق يعني أنه يمكن اشتقاق القوة من طاقة وضعها من العلاقة:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \qquad (68-2)$$

ولكن:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

فإذا أخذنا الضرب المتجه لطرفي (2-68) بـ∇ فإننا نجد أن:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (69-2)$$

فالقوة المحافظة هي تلك التي تعتمد على الموضع وتحقق (2-69) .

من جهة أخرى، إذا تحرك جسم على سطح (أو خط) بحيث بقيت طاقة وضعه ثابتة عليه، عندئذ نقول إنه يتحرك على سطح (أو خط) تساوي جهد((equipotential surface (or line))).

كمثل على ماتقدم نفترض أن جسيماً m يتحرك في الفضاء تحت تأثير جذب جسيم آخر كبير جداً كتلته M، يبعد عنه مسافة r، بقوة معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{r}_1 \qquad (70-2)$$

حيث G ثابت الجذب العام و $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة من M إلى m . يمكن تحديد طاقة وضع النظام من (62-2) فنجد:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{GmM}{r} \qquad (71-2)$$

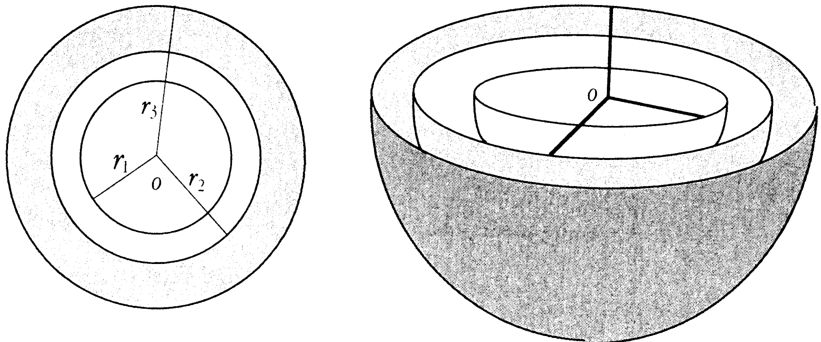
حيث وضعنا الموضع الاختياري $\mathbf{r}_s$ عند $r=\infty$ حيث تنعدم القوة المؤثرة على الجسيم وكذلك طاقة وضعه (أي عند موضع اتزانه). (لاحظ أن الزاوية بين $d\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_1$ تساوي $180°$). فإذا بقيت طاقة الوضع المعطاة بـ (71-2) ثابتة، أي أن:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r} = -C \qquad (72-2)$$

حيث C عدد موجب، عندئذٌ نجد من العلاقة السابقة أن:

$$r = \frac{GmM}{C} \qquad (73-2)$$

فيبقى بعد الجسيم m عن الجسيم الكبير M ثابت كيفما تحرك الأول في الفضاء، أي أنه يتحرك على سطح كرة نصف قطرها r. فسطوح تساوي الجهد في هذه الحالة هي كرات تعطى أنصاف أقطارها بالعلاقة (73-2) من أجل قيم مختلفة لـ C، متمركزة عند مركز الجذب M ، كما في الشكل (6-2) .

(ب)


(أ)

الشكل (6-2)

لنفترض الآن أن الجسيم يتحرك على سطح تساوي جهد بحيث أن :

$$V(x,y,z)=c \tag{74-2}$$

حيثc ثابت. عندئذ يكون :

$$dV(x,y,z)=0 \tag{75-2}$$

ولكن :

$$dV(x,y,z)=\mathbf{\nabla} V\cdot d\mathbf{r} \tag{76-2}$$

حيث يتجه $d\mathbf{r}$ موازياً لسطح تساوي الجهد (حتى يبقى الجسيم متحركاً عليه). نظراً لأن$\mathbf{\nabla} V$ لايساوي الصفر بالضرورة لذا نستنتج أن الزاوية بينه وبين $d\mathbf{r}$ هي $90°$، أي أن$\mathbf{\nabla} V$ عمودي على سطح تساوي الجهد كما أن

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\mathbf{\nabla} V$$

لذا نستنتج أن القوة المؤثرة على الجسيمm تتجه عمودياً على سطح تساوي الجهد عند كل نقطة منه.

أخيراً إذا تحرك جسيم تحت تأثير قوة محافظة $\mathbf{F}$ فإن شغلها عندما يتحرك على مسار مغلق ما هو:

$$W=\oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \tag{77-2}$$

حيث L طول المسار المغلق. لكن بحسب نظرية ستوك (*Stoke's Theorem*) فإن:

$$\oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} \qquad (78-2)$$

حيث A السطح المحصور داخل المسار L و $d\mathbf{A}$ سطح عنصري منه.

بما أن القوة محافظة لذلك يكون:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

أي أن:

$$W = \oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (79-2)$$

فشغل القوة عندما يتحرك الجسيم على طريق مغلقة يساوي الصفر، فهي لاتعطي ولاتأخذ طاقة. هذا بالتحديد مانعنيه بقولنا إن القوة محافظة !

2 - 7 حركة القذائف (*Projectile Motion*)

2 - 7 -1 حركة القذائف في وسط ساكن عديم الاحتكاك:

تعتبر حركة القذائف مثالاً جيداً على حركة جسيم في مستو أو في الفضاء حيث يخضع الجسيم الى قوة الجاذبية $m\,\mathbf{g}$ ، وقوى الاحتكاك ودفع الرياح، إن وجدت.

فإذا اعتبرنا جسيما يتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية فقط وجدنا من قانون نيوتن الثاني:

$$m\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{g} \qquad (79-2)$$

باعتبار المحور oz شاقوليا نحو الأعلى.

نأخذ مركبات المعادلة السابقة على المحاور الاحداثية فنجد:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \qquad (80-2)$$

بحل هذه المعادلات مفترضين أن الجسم بدأ حركته في المستوى xz $(x_0=y_0=z_0=v_{0y}=0)$ نجد:

$$\begin{cases} x=v_{0x}t \\ y=0 \\ z=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_{0z}\,t \end{cases} \tag{81-2}$$

يمكن إيجاد معادلة المسار الذي يتحرك عليه الجسم باختصار t من المعادلتين أعلاه فنجد:

$$z=-\frac{g}{2\,v_{0x}^2}x^2+\frac{v_{0z}}{v_{0x}}x \tag{82-2}$$

تمثل العلاقة الأخيرة قطعاً مكافئاً تقعره نحو الأسفل، تصل ذروته لارتفاع z_{max} عندما تصير السرعة الشاقولية v_z مساوية للصفر، فنجد:

$$z_{max}=\frac{v_{0z}^2}{2g} \tag{83-2}$$

نحصل على مدى القذيفة عندما $z=z_0=0$ فنجد:

$$R=x_{max}=\frac{2v_{0x}v_{0z}}{g} \tag{84-2}$$

لا بأس من التنويه"هنا إلى أن هذه النتائج مستقلة عن اختيارنا للمحاور الاحداثية، بمعنى أن أعلى ارتفاع تبلغه القذيفة وأبعد نقطة ستصل اليها لا يرتبطان باختيارنا للمحاور، كما أن شكل المسار الذى تتحرك سيبقى كما هو دائماً.

2-7-2 حركة القذائف في وسط مقاوم

نعتبر فيما يلي حركة قذيفة في وسط يؤثر عليها بقوة مقاومة تتناسب مع متجه سرعتها (كاللزوجة) حيث نكتبها بالشكل:

$$\mathbf{F}_r=-b\mathbf{v} \tag{85-2}$$

حيث b معامل مقاومة الوسط. من ثم تؤول معادلة الحركة إلى :

$$m\mathbf{a} = -m\mathbf{g} - b\mathbf{v} \qquad (86-2)$$

باعتبار oz نحو الأعلى وأخذ مركبات العلاقة (2-86) على المحاور الاحداثية نجد :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha\dot{x} \\ \ddot{y} = -\alpha\dot{y} \\ \ddot{z} = -g - \alpha\dot{z} \end{cases} \qquad (87-2)$$

حيث وضعنا $\alpha = b/m$.

إذا افترضنا أن القذيفة أطلقت في اللحظة $t=0$ من الموضع $(0,0,0)$ بسرعة $(v_{0x},0,v_{0z})$، وكاملنا المعادلات (2-87) لوجدنا:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_{0x}e^{-\alpha t} \\ v_y = \dot{y} = 0 \\ v_z = \dot{z} = v_{0z}e^{-\alpha t} - \dfrac{g}{\alpha}(1 - e^{-at}) \end{cases} \qquad (88-2)$$

بالمكاملة مرة أخرى نجد:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_{0x}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \\ y = 0 \\ z = (\dfrac{v_{0z}}{\alpha} + \dfrac{g}{\alpha})(1 - e^{-at}) - \dfrac{g}{\alpha}t \end{cases} \qquad (89-2)$$

نجد معادلة المسار الذي تتحرك عليه القذيفة باختصار الزمن t بين x و z:

$$z = (\frac{g}{\alpha v_{0x}} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}})x - \frac{g}{\alpha^2}\ln(\frac{v_{0z}}{v_{0x} - \alpha x}) \qquad (90-2)$$

من الواضح أن المسار لم يعد قطعاً مكافئاً بل يختلف باختلاف معامل المقاومة b.

نلاحظ من (2-90) أنه بعد زمن كبير بالمقارنة مع $1/\alpha$ تصير x ثابتة بينما تنتهي z لـ $-\infty$ ، أي أن:

$$-\infty \leftarrow z \;;\; \frac{v_{0x}}{\alpha} \leftarrow x \;\Leftarrow\; t >> \frac{m}{b} \tag{91-2}$$

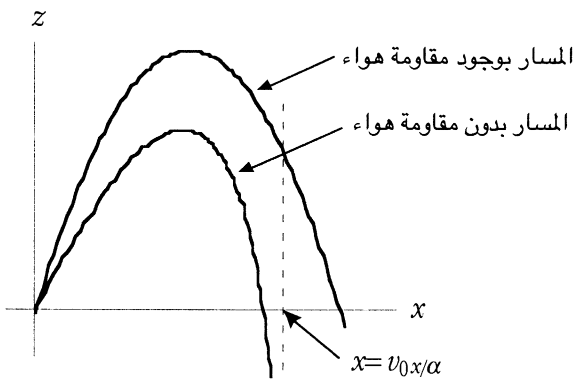
فتصير حركة القذيفة مماثلة لحركة جسيم يسقط سقوطا حرا في وسط مقاوم ، وتؤول مركبتي سرعتها إلى:

$$v_x = \text{ثابت} \tag{92-2}$$

و

$$v_z = -\alpha g = -\frac{m}{b} g \tag{93-2}$$

يوضح الشكل (2-7) كيف يتغير شكل مسار قذيفة عندما يكون الوسط الذي تتحرك فيه مقاوماً.



الشكل (2-7)

2 - 7 -3 حركة القذائف في وسط مقاوم بوجود رياح متحركة :

يمكن إدخال تأثير حركة الرياح على حركة القذائف باعتبار أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة القذيفة بالنسبة للرياح، أي أن مقاومة وسط لجسم يتحرك فيه تتناسب مع سرعة الجسم بالنسبة للوسط.

لذلك نكتب سرعة القذيفة بالنسبة للأرض **V** بالشكل:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \tag{94-2}$$

حيث **v** سرعة القذيفة بالنسبة للرياح و **w** سرعة الرياح بالنسبة للأرض.

عندئذ تصير قوة المقاومة معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_r = -b\mathbf{v} = -b(\mathbf{V}-\mathbf{w}) \qquad (95-2)$$

وتؤول معادلات الحركة إلى :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha(\dot{x}-w_x) \\ \ddot{y} = -\alpha(\dot{y}-w_y) \\ \ddot{z} = -g-\alpha(\dot{z}-w_z) \end{cases} \qquad (95-2)$$

يتطلب حل هذه المعادلات معرفة وافية عن حركة الرياح وسرعتها ، إلا أنه يصير في غاية السهولة إذا كانت الرياح تتحرك بسرعة ثابتة.

2 - 8 حركة جسيم مشحون في مجال كهرمغناطيسي

2 - 8 - 1 حركة جسيم مشحون في مجال كهربائي فقط

إذا تحرك جسيم، كتلته m وشحنته q، في مجال كهربائي $\mathbf{E}$ (ناتج عن توزع ما لشحنات كهربائية أخرى) فإنه يخضع لقوة كهربائية معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad (96-2)$$

وتصير معادلة حركة الجسيم عندئذ :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} \qquad (97-2)$$

إذا أخذنا مركبات المعادلة (97-2) على المحاور الاحداثية وجدنا:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE_x \\ m\ddot{y} = qE_y \\ m\ddot{z} = qE_z \end{cases} \qquad (98-2)$$

حيث يمكن أن تكون مركبات المجال الكهربائي بشكل عام دالة لكل من x و y و z و t.

إذا كان $\mathbf{E}$ ناتج عن شحنات ساكنة (*static charges*) عندئذ يكون:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (99-2)$$

أي أن القوى المؤثرة على الجسيم محافظة وهناك جهد كهربائي (*electric potential*) معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \qquad (100-2)$$

تصير طاقة وضع الجسيم عندئذ معطاة بالعلاقة:

$$V = q\Phi \qquad (101-2)$$

وطاقته الكلية :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + q\Phi \qquad (102-2)$$

2 - 8 - 2 حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي فقط

عندما يتحرك جسيم مشحون بسرعة $\mathbf{v}$ في مجال مغناطيسي $\mathbf{B}$ فإنه يخضع لقوة مغناطيسية:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (103-2)$$

بحسب قانون نيوتن الثاني فإن :

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

نستنتج من هذه العلاقة أن تسارع الجسيم عمودي دوما على سرعته ، أي أن التسارع القطرى $a_r = dv/dr$ يساوي الصفر، فيتحرك الجسيم بسرعة ثابتة دائماً. هذا صحيح حتى ولو كان $\mathbf{B}$ متغيراً مع الاحداثيات x و y و z طالما أنه لا يتغير مع الزمن t.

2 - 8 - 3 حركة جسيم مشحون في مجال كهرمغناطيسي

إذا تحرك جسيم مشحون في مجالين كهربائي ومغناطيسي معاً فإنه يخضع لقوة تسمى **قوة لورنتز** (*Lorentz's Force*)، تعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

أي أن :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (104-2)$$

فاذا افترضنا أن :

$$\mathbf{E}=E_y\mathbf{j}+E_z\mathbf{k} \tag{105-2}$$

و :

$$\mathbf{B}=B_0\mathbf{k} \tag{106-2}$$

عندئذ نجد من مركبات (2-104) أن :

$$\begin{cases} m\ddot{x}=qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y}=-qB_0\dot{x}+qE_y \\ m\ddot{z}=qE_z \end{cases} \tag{107-2}$$

نلاحظ من المعادلة الثالثة من (2-107) أن :

$$z=\frac{qE_z}{2m}t^2+v_{0z}t+z_0 \tag{108-2}$$

باشتقاق المعادلة الأولى من (2-107) والإستفادة من الثانية نجد:

$$m\dddot{x}=qB_0\ddot{y}=-\frac{(qB_0)^2}{m}\dot{x}+\frac{q^2B_0}{m}E_y \tag{109-2}$$

بوضع $\dot{x}=u$ تؤول المعادلة الأخيرة إلى :

$$\ddot{u}+(\frac{qB_0}{m})^2u=\frac{q^2B_0}{m^2}E_y \tag{110-2}$$

أو :

$$\ddot{u}+\omega^2u=\frac{q^2B_0}{m^2}E_y \tag{111-2}$$

حيث :

$$\omega=\frac{qB_0}{m} \tag{112-2}$$

كما نعلم، فإن حل المعادلة (2-111) اهتزازي من الشكل:

أي أن القوى المؤثرة على الجسيم محافظة وهناك جهد كهربائي (*electric potential*) معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \tag{100-2}$$

تصير طاقة وضع الجسيم عندئذ معطاة بالعلاقة:

$$V = q\Phi \tag{101-2}$$

وطاقته الكلية :

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + q\Phi \tag{102-2}$$

2 - 8 - 2 حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي فقط

عندما يتحرك جسيم مشحون بسرعة $\mathbf{v}$ في مجال مغناطيسي $\mathbf{B}$ فإنه يخضع لقوة مغناطيسية:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{103-2}$$

بحسب قانون نيوتن الثاني فإن :

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

نستنتج من هذه العلاقة أن تسارع الجسيم عمودي دوما على سرعته ، أي أن التسارع القطرى $a_r = dv/dr$ يساوي الصفر، فيتحرك الجسيم بسرعة ثابتة دائماً. هذا صحيح حتى ولو كان $\mathbf{B}$ متغيراً مع الاحداثيات x و y و z طالما أنه لا يتغير مع الزمن t.

2 - 8 - 3 حركة جسيم مشحون في مجال كهرمغناطيسي

إذا تحرك جسيم مشحون في مجالين كهربائي ومغناطيسي معاً فإنه يخضع لقوة تسمى **قوة لورنتز** (*Lorentz's Force*)، تعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

أي أن :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{104-2}$$

فاذا افترضنا أن :

$$\mathbf{E} = E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k} \tag{105-2}$$

و :

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{k} \tag{106-2}$$

عندئذ نجد من مركبات (2-104) أن :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} + qE_y \\ m\ddot{z} = qE_z \end{cases} \tag{107-2}$$

نلاحظ من المعادلة الثالثة من (2-107) أن :

$$z = \frac{qE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0 \tag{108-2}$$

باشتقاق المعادلة الأولى من (2-107) والإستفادة من الثانية نجد:

$$m\dddot{x} = qB_0\ddot{y} = -\frac{(qB_0)^2}{m}\dot{x} + \frac{q^2B_0}{m}E_y \tag{109-2}$$

بوضع $\dot{x} = u$ تؤول المعادلة الأخيرة إلى :

$$\ddot{u} + (\frac{qB_0}{m})^2 u = \frac{q^2B_0}{m^2}E_y \tag{110-2}$$

أو :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{q^2B_0}{m^2}E_y \tag{111-2}$$

حيث :

$$\omega = \frac{qB_0}{m} \tag{112-2}$$

كما نعلم، فإن حل المعادلة (2-111) اهتزازي من الشكل:

$$u = \dot{x} = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{E_y}{B_0} \qquad (113-2)$$

ومنه:

$$x = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi) + (\frac{E_y}{B_0})t + x_0 \qquad (114-2)$$

بالإستفادة من(2-113) وأولى (2-107) نجد:

$$-mA\omega\sin(\omega t + \phi) = qB_0\dot{y}$$

ومنه :

$$y = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi) + y_0 \qquad (115-2)$$

يمكن كتابة (2-114) و (2-115) بالشكل:

$$\begin{cases} x - X_0 = a\sin(\omega t + \phi) \\ y - Y_0 = a\cos(\omega t + \phi) \end{cases} \qquad (116-2)$$

حيث:

$$\begin{cases} X_0 = x_0 + (\frac{E_y}{B_0})t \\ Y_0 = y_0 \end{cases} \qquad (117-2)$$

تمثل (2-116) معادلة دائرة مركزها عند النقطة $(x_0\ ,y_0)$، ونلاحظ من (2-117) أن هذا المركز لايبقى ثابت في مكانه بل يتحرك بشكل انسحابي على محور السينات بسرعة ثابتة تساوي E_y/B_0 .

لا ننسى طبعاً أن الاحداثي z يزداد بحسب (2-108) بنفس الوقت .

2 - 9 أمثلة عامة

مثل 2-1

ماشغل القوة (N) $\mathbf{F}=(x^2+z^2)\mathbf{i}+(2z)\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ على الطريق $x=y=2z$ بين النقطتين (2,2,1) و(8,8,4) متر؟

الحل: نكتب الشغل

$$W=\int_1^2 \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_{x_1}^{x_2} F_x \bullet dx+\int_{y_1}^{y_2} F_y \bullet dy+\int_{z_1}^{z_2} F_z \bullet dz$$

حيث:

$$\int_2^8 F_x \bullet dx=\int_2^8 (x^2+z^2)dx=\int_2^8 (x^2+(\frac{x^2}{4})dx=210 \text{ J}$$

و

$$\int_2^8 F_y \bullet dy=\int_2^8 2zdy=\int_2^8 ydy=30 \text{ J}$$

و

$$\int_1^4 F_z \bullet dz=\int_1^4 3dz=9 \text{ J}$$

فيكون

$$W=249 \text{ J}$$

مثل 2-2

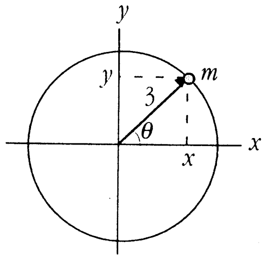
ما شغل القوة (N) $\mathbf{F}=(2x-y+z)\mathbf{i}+(x+y-z^2)\mathbf{j}+(3x-2y+4z)\mathbf{k}$ على جسم يدور دورة كاملة على محيط دائرة في المستوي xy مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها (3 m) ؟

الحل: عندما يتحرك الجسم على الدائرة المذكورة يكون $z=0$ وتصير القوة:

$$\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(3x-2y)\mathbf{k}$$

كما أن :

$$d\mathbf{r}=(dx)\mathbf{i}+(dy)\mathbf{j}$$



الشكل (9-2)

بتحويل الإحداثيات x و y إلى $x=3\cos\theta$ و $y=3\sin\theta$ حيث تتغير θمن صفر إلى 2π عند دوران الجسم دورة كاملة على الدائرة (انظر الشكل (9-2))، عندئذ يصير الشغل معطى بـ

$$W=\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_C[\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(3x-2y)\mathbf{k}]\bullet d\mathbf{r}$$

$$=\int_C (2x-y)\,dx+(x+y)\,dy$$

$$W=\int_0^{2\pi}[2(3\cos\theta)-3\sin\theta](-3\sin\theta)\,d\theta+[3\cos\theta+3\sin\theta](3\cos\theta)\,d\theta$$

أي أن

$$W=18\,\pi\ \ (\mathrm{J})$$ ❐

❐ **مثل 3-2**

برهن أن القوة $\mathbf{F}=(y^2z^3-6xz^2)\mathbf{i}+(2xyz^3)\mathbf{j}+(3xy^2z^2-6x^2z)\mathbf{k}$ محافظة.

الحل: حتى تكون $\mathbf{F}$ محافظة يجب أن يكون:

$$\nabla\times\mathbf{F}=0$$

لكن:

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2z^3-6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2-6x^2z\end{vmatrix}=0$$

فالقوة محافظة فعلاً. ❐

❐ **مثل 4-2**

ادرس حركة إلكترون في مجال كهربائي $\mathbf{E}=E_0\,\mathbf{i}$ وآخر مغناطيسي $\mathbf{B}=B_0\,\mathbf{k}$ بفرض أنه كان في اللحظة $t=0$ عند نقطة المبدأ ويسير بسرعة $\mathbf{v}=v_0\,\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ متجهات وحدة على المحاور ox و oy و oz، على الترتيب).

الحل: نكتب أن القوة الكلية المؤثرة على الالكترون هي:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (1)$$

نأخذ مركبات العلاقة الأخيرة على المحاور ox و oy و oz فنجد:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=qB_0\dot{y}\\ m\ddot{y}=qE_0-qB_0\dot{x}\\ m\ddot{z}=0\end{cases} \qquad (2)$$

من الواضح أن حل المعادلة الأخيرة ، بالشروط الابتدائية المفروضة، هو:

$$z=0$$

فالجسم يتحرك في المستوي xy فقط.

باشتقاق المعادلة الاولى من (2)، الاستفادة من الثانية نجد:

$$m\dddot{x}=qB_0\ddot{y}=\frac{q^2B_0}{m}(E_0-B_0\dot{x})$$

بوضع $\dot{x}=u$ نجد:

$$\ddot{u}+(\frac{qB_0}{m})^2 u=\frac{q^2 B_0 E_0}{m^2}$$

أو :

(3) $$\ddot{u}+\omega^2 u=\omega^2 v_c$$

حيث وضعنا:

$$\omega=\frac{qB_0}{m}$$

و

$$v_c=E_0/B_0$$

بحل (3) المعادلة نجد:

(4) $$u=\dot{x}=A\cos(\omega t+\phi)+v_c$$

بحسب شروط البدء فإن:

(5) $$v_0=A\cos\phi+v_c$$

باشتقاق x والاستفادة من أولى المعادلات (2) نجد:

$$\ddot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\phi)=\omega\dot{y}$$

ومنه:

(6) $$\dot{y}=-A\sin(\omega t+\phi)$$

بحسب شروط البدء فإن:

$$A\sin\phi=0$$

أي أن $\phi = 0$، لذلك تصبح المعادلة (5) على الشكل:

$$v_0=A+v_c \quad\Rightarrow\quad A=v_0-v_c$$

بتعويض A و ϕ في (4) نجد:

$$\dot{x}=A\cos\omega t+v_c$$

أي أن :

$$x=\frac{A}{\omega}\sin\omega t+v_c t+c$$

بحسب الشروط الابتدائية يكون :

$$c=0$$

أي أن:

$$x=a\sin\omega t+v_c t \qquad (7)$$

حيث:

$$a=A/\omega$$

بنفس الشكل ، نجد من (6):

$$\dot{y}=-A\sin\omega t$$

ومنه :

$$y=\frac{A}{\omega}\cos\omega t+c'$$

بحسب الشروط الابتدائية يكون:

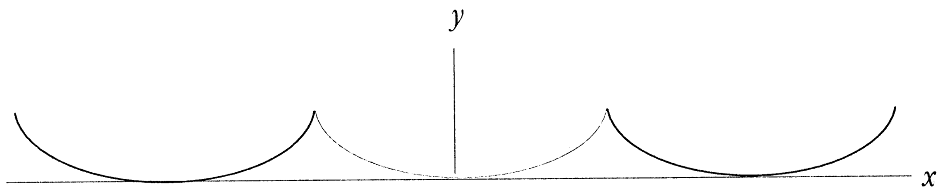
$$c'=-\frac{A}{\omega}=-a$$

أي أن:

$$y=a(\cos\omega t-1) \qquad (8)$$

بهذا نكون قد وجدنا الحل العام لحركة الالكترون.

يسمى المسار المعطى بالمعادلتين (7) و(8) سايلكلود(*cycloid*) ، كما في الشكل (10-2). (مامغزى الكمية v_c؟ اكتب معادلة المسار!).



الشكل (10-2)

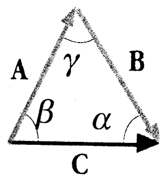
مسائل

1-2 جد سرعة وتسارع والزخم الخطي والزخم الزاوي بالنسبة للمبدأ O لجسيم m محدد في المواضع التالية: $\mathbf{r}=ct\mathbf{i}-0.5gt^2\,\mathbf{j}$، $\mathbf{r}=ct\mathbf{i}+A\sin(\omega t)\,\mathbf{j}$، $\mathbf{r}=A\sin(\omega t)\,\mathbf{i}+B\cos(\omega t)\,\mathbf{j}$، $\mathbf{r}=ct\,\mathbf{i}+b\cos(\omega t)\mathbf{j}+b\sin(\omega t)\,\mathbf{k}$.

2-2 برهن أن قيمة التسارع الكلي لجسيم m يتحرك على طريق منحني نصف قطر تقوسه ρ وسرعته اللحظية v هي $|\mathbf{a}|=|d\mathbf{v}/dt|=(\dot{v}^2+v^4/\rho^2)^{1/2}$.

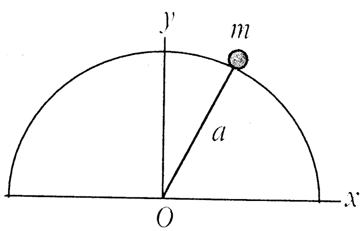
3-2 (أ) برهن أن قيمة محصلة متجهين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تعطى بالعلاقة: $C^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta$ حيث θ الزاوية بينهما(قانون جيب التمام $(cosine\ law)$).

(ب) برهن أن اتجاه المحصلة يعطى من العلاقة $(A/\sin\alpha)=(B/\sin\beta)=(C/\sin\gamma)$ (انظر الشكل (2-11)):



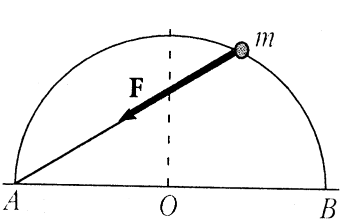
الشكل (2-11)

4-2 يوضع جسيم m عند ذروة قبة كروية نصف قطرها a، كما في الشكل (2-12)، ويُدفع بلطف لينزلق بدون احتكاك. برهن أن الجسيم سيغادر السطح عند نقطة ارتفاعها $2a/3$ بالنسبة لمركز القبة وجد سرعتها عندئذ.



الشكل (2-12)

5-2 يتحرك جسيم على النصف العلوي لكرة نصف قطرها R تحت تأثير قوة جاذبة نحو النقطة A من الكرة متناسبة مع بعد الجسيم عنها، كما في الشكل (2-13)، بحيث أنه عندما يكون الجسيم عند النقطة B فإن قيمة القوة هي F_0. جد شغل هذه القوة عندما يدور الجسيم من A إلى B.



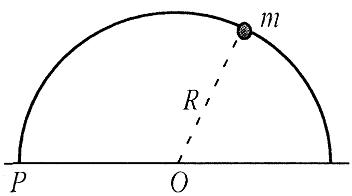
الشكل (2-13)

6-2 يخضع جسيم لقوة مركباتها $F_x = ax^3 + bxy^2 + cz$ و $F_y = ay^3 + bx^2y$ و $F_z = cx$. ماشغل القوة عندما ينتقل الجسيم على الخط الواصل بين النقطتين $(0,0,0)$ و(x_0, y_0, z_0)؟

7-2 يتحرك جسيم في المستوي xy تحت تأثير قوة جاذبة نحو المبدأ ومتناسبة عكساً مع بعده عن محور السينات على النحو $F = -b/y$. (أ) ماشغل هذه القوة عندما ينتقل الجسيم من النقطة $(0, a)$ إلى $(2a, 0)$ على الطريق المؤلفة من ضلعي مستطيل الأول يوازي محور السينات وطوله $2a$ والثاني يوازي محور الصادات وطوله a.

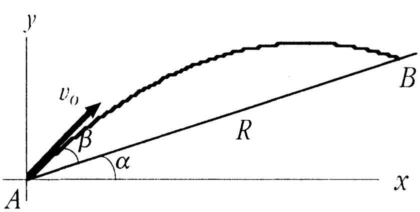
8-2 جد **L** و**F** و τ في أي لحظة لجسيم يتحرك في الفضاء بحيث تعطى إحداثياته بالعلاقات $x = x_0 + at^2$ و $y = bt^3$ و $z = ct$.

9-2 يتحرك جسيم بسرعة ثابتة v على محيط دائرة نصف قطرها R بدءاً من النقطة P في اللحظة $t=0$، كما في الشكل (14-2). ماالزخم الزاوي للجسيم والقوة المؤثرة عليه وعزمها بالنسبة لـP في أي لحظة؟



الشكل (14-2)

10-2 يطلق جسيم بسرعة ابتدائية v_0 وزاوية β بالنسبة للأفق ليسقط على مستوي يميل بزاوية α عن الأفق، كما في الشكل (15-2).



الشكل (15-2)

(أ) برهن أن مدى الجسيم على المستوي هو: $R = 2v_0^2[\sin(g-\alpha)\cos\beta]/(g\cos^2\alpha)$

(ب) برهن أن المدى الأعظمي على المستوي هو $R_{max} = v_0^2/(1+\sin\alpha)$ وأننا نحصل عليه عندما $\beta = \pi/4 + \alpha/2$.

11-2 برهن أن أعلى ارتفاع لمدفع مداه R هو $R/4$ وأن زمن الطيران هو $(R/2g)^{1/2}$.

12-2 يحاول رامي مدفعية إصابة هدف يبعد عنه مسافة أقل من المدى الأعظم لمدفعه برهن أن هناك زاويتان محتملتان للإطلاق أولاهما أصغر بقيمة ما من $45°$ والثانية أكبر بنفس القيمة من $45°$. كيف يتغير الحل لو وجدت مقارمة هواء متناسبة مع السرعة اللحظية ؟ (قرّب للمرتبة الأولى لزاوية الإطلاق).

2-13 برهن أن سرعة الإطلاق لقذيفة مداها R وأعلى ارتفاع لها H تعطى بالعلاقة التالية $[g(R^2+16H^2)/8H]^{1/2}$ وأن زاوية الإطلاق تعطى بالعلاقة: $\sin^{-1}[4H/(R^2+16H^2)^{1/2}]$.

2-14 تطلق قذيفة من طرف تلة ارتفاعها H بزاوية α فتسقط عند نقطة تبعد مسافة أفقية D عن نقطة الإطلاق. برهن أن أعلى ارتفاع تصل إليه $H+D\tan^2\alpha/[4(H+D\tan\alpha)$.

2-15 ماأعلى ارتفاع تصل إليه قذيفة تخضع لقوة مقاومة معطاة بالمعادلة (2-85)؟ انشر النتيجة وفق سلسلة قوى بالنسبة للوسيط $\alpha=b/m$ واحتفظ بالحدود الحاوية على α فقط وقارن بالمعادلة (2-83).

2-16 تطلق قذيفة من المبدأ بسرعة ابتدائية (v_{0x},v_{0y},v_{0z}) بوجود رياح سرعتها $\mathbf{w}=w\mathbf{j}$. (أ) حل معادلات الحركة (2-95) وجد كل من x و y و z بدلالة الزمن. (ب) جد النقطة (x_1,y_1) حيث ترتطم القذيفة بالمستوي الأفقي $z=0$ (احتفظ بالحدود الحاوية على r فقط). (جـ) برهن أنه إذا أهملنا مقاومة الهواء وحركة الرياح فإن مدى القذيفة سيكون أكبر مماهو عليه في حالة وجود مقاومة هواء بمعدّل $4rv_{oz}/3mg$، بينما يؤدي وجود رياح متحركة لجعل مدى القذيفة يبتعد عن المحور oy مسافة $2rwv_{oz}^2/mg^2$.

2-17 تطلق قذيفة في وسط مقاوم $(-r\mathbf{v})$ بسرعة ابتدائية $\mathbf{v}_o=(v_{ox},v_{oy},v_{oz})$. برهن أنه يمكن كتابة متجه الموضع للقذيفة بالشكل: $\mathbf{r}=-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k}+\mathbf{v}_0t-\Delta\mathbf{r}$ حيث $\Delta\mathbf{r}$ التصحيح اللازم إضافته على الحل في حالة انعدام مقاومة الهواء والمعطى بـ :

$$\Delta\mathbf{r}=r[\mathbf{v}_0(\tfrac{1}{2!}t^2-\tfrac{1}{3!}t^3+\cdots)+g(\tfrac{1}{3!}t^3-\tfrac{1}{4!}rt^4+\cdots)\mathbf{k}].$$

2-18 برهن أن القوى المذكورة في المسألتين 2-5 و 2-6 هي قوى محافظة وجد طاقة الوضع لكل منها واستخدمه لحساب الشغل في كل حالة.

2-19 حدد القوى المحافظة ممايلي وجد طاقة وضع المحافظة منها:

(أ) $F_x=6abyz^3-20x^3y^2$ و $F_y=6abxz^3-10bx^4y$ و $F_z=18abxyz^2$.

(ب) $F_x=18\text{abyz}^3-20bx^3y^2$ و $F_y=18\text{abxz}^3-10bx^4y$ و $F_z 6abxyz^2$.

(جـ) $\mathbf{F}=F_x(x)\mathbf{i}+F_y(y)\mathbf{j}+F_z(z)\mathbf{k}$.

20-2 ماطاقة الوضع لكل من القوى التالية:

(أ) $F_x=2ax(y^3+z^3)$ و $F_x=2ax(y^3+z^3)+3ay^2(x^2+y^2)$ و $F_z=3az^2(x^2+y^2)$.

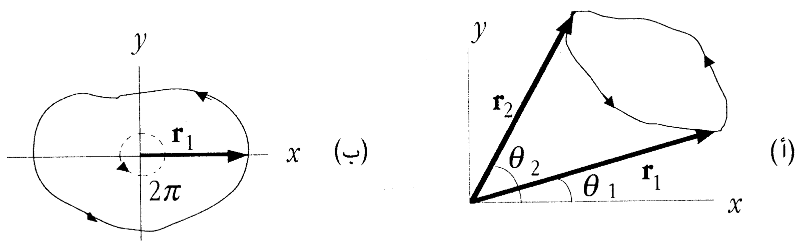
(ب) $F_\rho=a\rho^2\cos\phi$ و $F_\phi=a\rho^2\sin\phi$ و $F_z=az^2$.

(جـ) $F_r=-2ar\sin\theta\cos\phi$ و $F_\theta=-ar\cos\theta\cos\phi$ و $F_\phi=ar\sin\theta\sin\phi$.

(د) $F_x=axe^{-R}$ و $F_y=bye^{-R}$ و $F_z=cze^{-R}$ ، حيث $R^2=ax^2+by^2+cz^2$.

21-2 مامركبات القوة التي لها طاقة وضع من الشكل : (أ) axy^2z^3، (ب) $kr^2/2$ ، (جـ) $(k_xx^2+k_yy^2+k_zz^2)/2$؟

22-2 يتحرك جسيم في المستوي xy تحت تأثير قوة متغيرة من الشكل $\mathbf{F}=\alpha\,\boldsymbol{\theta}_1/r$ حيث α ثابت و r بُعد الجسيم عن المبدأ O و $\boldsymbol{\theta}_1$ متجه وحدة باتجاه θ(أ) هل القوة محافظة؟ (ب) ماشغل القوة عندما يتحرك الجسيم على المسار الموضح في الشكل (16-2 أ) و (16-2 ب)؟ علّق على النتيجة .



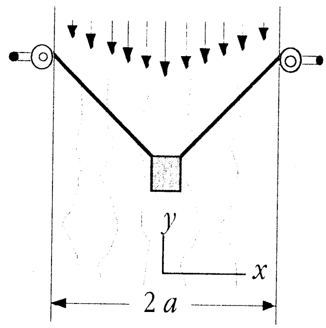
الشكل (16-2)

23-2 ادرس حركة جسيم كتلته m وشحنته q خاضع لمجالين كهربائي $\mathbf{E}=(E_0\sin\omega t)\,\mathbf{i}$ ومغناطيسي $\mathbf{B}=B_0\,\mathbf{k}$ بفرض أن $v_0=0$. ادرس الحالة عندما $\omega=qB_0/m$.

24-2 يتحرك جسيم(m,q) في مجال كهربائي ثابت ومجال مغناطيسي $\mathbf{B}$. برهن أنه إذا استخدمنا المتحول $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-[(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/B^2]t$ فإن معادلة الحركة للمتحول الجديد $\mathbf{r}'$ تطابق تلك لـ $\mathbf{r}$ ماعدا أننا تخلصنا من مركبة $\mathbf{E}$ العمودية على $\mathbf{B}$.

25-2 يتحرك زورق في نهر تجري مياهه بسرعة معطاة بالعلاقة: $\mathbf{v}=-v_0(1-x^2/a^2)\mathbf{j}$ حيث $2a$ عرض النهر و x بُعد أي نقطة منه عن منتصفه، كما في الشكل (17-2)، بحيث يخضع الزورق لقوة دفع الماء المتناسبة مع سرعة الماء $(\mathbf{F}=b\mathbf{v})$، كما يخضع لقوة

شد خارجية ناتجة عن حبلين مربوطين به تساوي وتعاكس **F** ليسير الزورق بسرعة ثابتة باتجاه oy. بيّن فيما إذا كانت القوة محافظة أم لا واحسب شغلها عندما يسير الزورق مسافة l باتجاه oy ثم يعود نفس المسافة إلى الخلف .



الشكل (17-2)

26-2 يتحرك إلكترون في مجال كهربائي ثابت $\mathbf{E}=E\,\mathbf{i}$ وآخر مغناطيسي ثابت $\mathbf{B}=B\,\mathbf{j}$. اكتب معادلات الحركة وحلها بفرض أن $\mathbf{r}_0=0$ و $\mathbf{v}_0=v_0\,\mathbf{j}$.

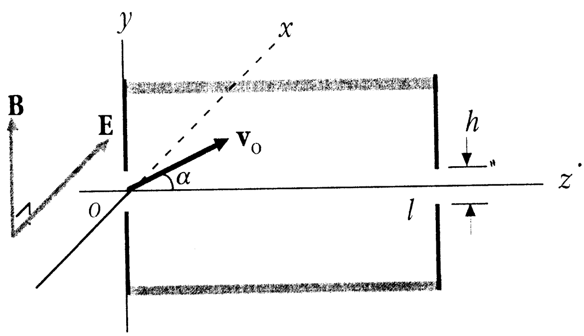
27-2 تنزلق حلقة صغيرة على محيط سلك دائري شاقولي نصف قطره b بدون احتكاك بدءاً من نقطة تقع على نفس ارتفاع المركز. (أ) ماسرعة الحلقة ورد فعل السلك عندما تصل إلى أخفض نقطة عليه؟ (ب) ماالزمن الذي ستستغرقه للوصول إلى هناك ؟

28-2 ينزلق جسيم كروي صغير على سطح كرة كبيرة نصف قطرها b بدءاً من السكون عند نقطة تقع على ارتفاع $b/2$ من مركز الكرة. عند أي ارتفاع سينفصل الجسمان؟

29-2 الماغنترون الاسطواني *(The Cylidrical Magnetron)* : يتحرك جسيم (m,q) في مجال كهربائي $\mathbf{E}=(a/\rho)\rho_1$ (ρ_1 متجه وحدة على امتداد ρ الذي يمثل بُعد الجسيم عن المحور oz) وآخر مغناطيسي $\mathbf{B}=B\,\mathbf{k}$، حيث a و B ثابتان موجبان أو سالبان. (أ) اكتب معادلات الحركة بالإحداثيات الاسطوانية. (ب) برهن أن الكمية $m\rho^2\dot{\varphi}+(qB/2c)\rho^{-}\quad K$ هي ثابت حركة. (جـ) استخدم تكامل الطاقة لمناقشة أنواع الحركة الممكنة آخذاً بعين الاعتبار كل القيم الممكنة للثوابت a و B و K و E.

(د) ماالشروط الواجب توافرها ليكون المسار دائرياً حول oz؟ (هـ) ماتردد الاهتزازات الصغيرة حول هذا المسار الدائري؟

2-30 منتقي السرعة *(velocity selector)*: يستخدم منتقي السرعة لانتقاء جسيمات نووية أو ذرية لها سرعة محددة في المسرعات النووية ، باستخدام مجالين؛ أحدهما كهربائي **E** باتجاه محور السينات، والآخر مغناطيسي **B** باتجاه محور الصادات، كما في الشكل (2-18) . تدخل حزمة الجسيمات للجهاز من خلال شق ضيق يقع في المستوي yz وتخرج من شق آخر موازٍ له ويقع في نفس المستوي. يتم اختيار المجالين **E** و**B** بحيث لاتنحرف الجسيمات التي لها السرعة المراد الحصول عليها فقط لتبقى متحركة باتجاه المحورoz. (أ) بفرض أن جسيماً ينطلق من المبدأ بسرعة v_0 صانعاً زاوية صغيرة αمع oz، متى يصل إلى النقطة $z=l$؟ احتفظ بحدود المرتبة الأولى لـ α. (ب) ماأفضل اختيار لكل من **E** و**B** بحيث يمر أكبر عدد من الجسيمات ذات السرعةv_0 من الشق الثاني بينما ينحرف غيرها أكبر مايمكن ؟ (جـ) بفرض أن عرض كل شق هوh، ماأكبر تغيرδvفي السرعة عن v_0 بحيث تستطيع الجسيمات التي كانت تتحرك مبدئياً موازية لـoz أن تمر من الشق الثاني؟ استخدم قيم **E** و**B** التي وجدتها في (ب).



الشكل (2-18)

القوى المركزية

(Central Forces)

3 - 1 تمهيد

إذا خضع جسم لقوة يمر خط تأثيرها من نقطة ثابتة دوماً وتعتمد قيمتها على بعد الجسم عن هذه النقطة فإننا نقول إنه خاضع **لقوة مركزية** *(central force)*. نطلق على النقطة الثابتة اسم **مركز القوة** *(force center)*.

تعتبر دراسة حركة الأجسام تحت تأثير القوى المركزية من أهم المسائل في الفيزياء لأن أشهر القوى الطبيعية، كالجاذبية، والكهربائية، حتى النووية (أو إحدى مركباتها على الأقل)، هي مركزية. لذا سنخصص هذا الفصل لدراسة هذه الحركة، فنحدد معادلاتها ونوع المسار الذي يتحرك عليه الجسم الخاضع لها، ثم ندرس حركة الكواكب والأقمار ونستخرج قوانين كپلر الثلاثة في الفلك *(Kepler's Laws)*، وننهي الفصل بدراسة تشتت رزرفورد *(Rutherford Scattering)*، وحركة الصواريخ والمذنبات عند مرورها بالقرب من النجوم والكواكب.

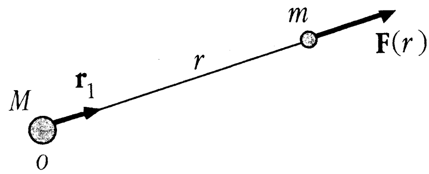
3 - 2 الحركة تحت تأثير قوة مركزية

لنفترض أن لدينا جسيماً m يتحرك تحت تأثير قوة مركزية $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ناتجة عن جسم آخر M موجود عند نقطة المبدأ O، وكبير جداً بحيث لايتأثر برد فعل m عليه فيبقى ساكناً عملياً. كما نفترض أن المسافة بين الجسمين M و m كبيرة جداً بحيث يمكن اعتبار كل واحد جسيماً نقطياً بالنسبة للآخر، كما في الشكل (3-1).

من ثم نكتب القوة التي يخضع لها m بالشكل:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{r}_1 \qquad (1-3)$$

حيث $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة من مركز القوة إلى موضع الجسيم m و r بعده عن هذا المركز.



الشكل (1-3)

إذا كانت$F(r)>0$ فالقوة تتجه بعيداً عن المركز، أي أنها طاردة، وإذا كانت$F(r)<0$ فتتجه القوة نحو المركز، أي أنها جاذبة.

3 - 3 خواص الحركة تحت تأثير قوة مركزية

3 - 3 - 1 عزم القوة *(Torque)*

نعلم أن عزم قوة **F** مؤثرة على جسيم بالنسبة لنقطة 0 هو:

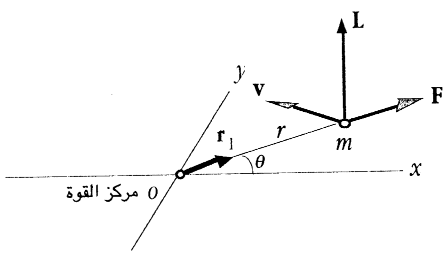
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (2-3)$$

حيث **r** متجه موضع الجسيم بالنسبة لـ 0. انظر الشكل (2-3).

فإذا كانت القوة مركزية معطاة بالعلاقة (1-3) عندئذ يكون عزمها بالنسبة لمركزها 0 مساوياً إلى:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)(\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1) = 0 \qquad (3-3)$$

فعزم أي قوة مركزية بالنسبة لمركزها يساوي الصفر دوماً.



الشكل (2-3)

3-3-2 الزخم الزاوي (Angular Momentum)

نعلم أن الزخم الزاوي $\mathbf{L}$ لجسيم m خاضع لقوة عزمها $\boldsymbol{\tau}$ بالنسبة لنقطة O يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (4-3)$$

ولكن $\boldsymbol{\tau}=0$، أي أن:

$$\mathbf{L} = \text{ثابت} \qquad (5-3)$$

فالزخم الزاوي لأي جسم خاضع لقوة مركزية ثابت قيمةً واتجاهاً.

3-3-3 نوع الحركة (Type of Motion)

نعلم أن الزخم الزاوي لجسيم نقطي يتحرك بسرعة $\mathbf{v}$ بالنسبة لنقطة o هو :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \qquad (6-3)$$

حيث $\mathbf{r}$ متجه موضع الجسيم بالنسبة لـ o.

إذا ضربنا طرفي العلاقة (6-3) عددياً بـ $\mathbf{r}$ نجد :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = m\, \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0 \qquad (7-3)$$

فمتجه الموضع $\mathbf{r}$ عمودي دوماً على المتجه الثابت $\mathbf{L}$، أي أن الجسيم يتحرك في مستو عمودي عليه. **فحركة جسم خاضع لقوة مركزية هي حركة مستوية.**

3-4 معادلات الحركة تحت تأثير قوة مركزية

وجدنا أعلاه أن حركة جسيم خاضع لقوة مركزية تتم في مستوي ليكن xy. بما أن القوة تعتمد على بعد الجسيم r عن المركز فقط لذا نستخدم الإحداثيات القطبية (r,θ) لتحديد موضعه وكتابة معادلات الحركة. فنكتب من قانون نيوتن الثاني:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\,\mathbf{a} \qquad (8-3)$$

بتعويض $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ من (1-3) والتسارع من (31-2) تؤول (8-3) إلى:

$$F(r)\mathbf{r}_1 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1 \qquad (9-3)$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن:

$$F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (10-3)$$

و

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad (11-3)$$

تعني دراسة حركة الجسيم أن نحل المعادلتين (10-3) و(11-3) ونحدد كيف تتغير r و θ بالنسبة لمركز القوة في كل لحظة من الزمن.

للقيام بذلك نلاحظ أنه إذا ضربنا طرفي (11-3) بـ r نحصل على:

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

أو :

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

ولكن:

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = \left|mr\mathbf{r}_1 \times (\dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1)\right| = mr^2\dot{\theta} \qquad (12-3)$$

أي أن:

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \qquad (13-3)$$

ومنه:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \qquad (14-3)$$

بتعويض $\dot{\theta}$ في (10-3) نجد:

$$m\ddot{r}-\frac{L^2}{mr^3}=F(r) \qquad (15-3)$$

تحوي المعادلة التفاضلية الأخيرة r ومشتقاتها بالنسبة للزمن فقط، فيمكن بالتالي إيجاد r بدلالة t (نظرياً على الأقل) وتعويضها في (14-3) لإجراء التكامل:

$$\theta=\int\dot{\theta}\ dt=\int\frac{L}{mr^2}\ dt+\theta_0 \qquad (16-3)$$

بذلك نكون قد وجدنا كل من r و θ بدلالة الزمن من قانون نيوتن الثاني.

3 - 5 معادلة مسار الجسيم المتحرك تحت تأثير قوة مركزية

للوصول إلى معادلة المسار الذي يتحرك عليه جسيم خاضع لقوة مركزية يجب حذف الزمن بين r و θ وإيجاد علاقة تربط بينهما. فنضع:

$$r=\frac{1}{u}\ \Rightarrow\ u=\frac{1}{r} \qquad (17-3)$$

ونعوض في (14-3) فنجد:

$$\dot{\theta}=\frac{Lu^2}{m} \qquad (18-3)$$

كما أن:

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}=-\frac{L}{m}\cdot\frac{du}{d\theta} \qquad (19-3)$$

و

$$\ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{m}\cdot\frac{du}{d\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{m}\cdot\frac{du}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}=-\frac{L^2u^2}{m^2}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (20-3)$$

بتعويض كل من $\ddot{r}$ و $\dot{\theta}$ في (10-3) نجد:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} \; F(\frac{1}{u}) \tag{21-3}$$

يربط حل المعادلة التفاضلية الأخيرة بين u (أي$1/r$) و θ، أي أنه يمثل معادلة المسار المنشودة.

3-6 الطاقة في الحركة تحت تأثير قوة مركزية

تعتبر الطريقة المذكورة في الفقرة السابقة مفيدة لتتبع حركة جسيم خاضع لقوة مركزية إن أمكن حل المعادلة (3-15) وإجراء التكامل (3-16). إلاّ أن هذا قد لايكون سهلاً في حالات كثيرة. إضافة لذلك، يمكن معرفة الكثير عن نوع الحركة، وشكل الطريق الذي يسير عليه الجسيم، وغير ذلك من الكميات المتعلقة بهذه الحركة، بالاستفادة من ثبات الطاقة الميكانيكية الكلية لجسم خاضع لقوى محافظة.

لذا نكتب الطاقة الميكانيكية الكلية:

$$E = T + U$$

حيث نكتب طاقة الحركة للجسيم بالشكل:

$$T = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{22-3}$$

بتعويض $\dot{\theta}$من (3-14) نجد:

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{23-3}$$

كما نكتب طاقة الوضع:

$$U = V(r) = -\int_{r_s}^{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{24-3}$$

حيث نختار $\mathbf{r}_s = \infty$، الذي تنعدم عنده القوة وطاقة الوضع، عندها تؤول الطاقة الميكانيكية الكلية إلى:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad (25-3)$$

نلاحظ من المعادلة (25-3) أن الطاقة الكلية تتألف من مجموع حدين: أولاهما $\frac{1}{2} m\dot{r}^2$ يمثل طاقة حركة انتقالية (نصف الكتلة مضروباً بمربع السرعة القطرية)، والثاني $L^2/2mr^2 + V(r)$ يعتمد على بعد الجسيم r عن مركز القوة فقط، بالإضافة لثوابت الحركة من كتلة وزخم زاوي وثابت القوة المركزية. لذا يُطلق على هذا الحد اسم **الجهد الفعّال** *(effective potential)*، لأنه يشبه طاقة الوضع في حالة الحركة على خط مستقيم، ونضع:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + 'V'(r) \qquad (26-3)$$

حيث:

$$'V(r)' = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \qquad (27-3)$$

سنرى أهمية هذه الكمية وكيف نستخدمها لمعرفة أنواع الحركة الممكنة للجسيم.

من جهة أخرى، يمكن الاستفادة من (25-3) وكون E ثابتة للتوصل إلى معادلة تعطي تغيرات r مع الزمن، فنكتب:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - 'V'(r)]} \qquad (28-3)$$

بمكاملة هذه العلاقة نجد:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - 'V(r)'}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\ (t - t_0) \qquad (29-3)$$

من ثم يمكن معرفة تغيرات r مع الزمن من (29-3) (إن أمكن إجراء التكامل) ونعوضها في (14-3) لنجد $\theta\ (t)$ أيضاً.

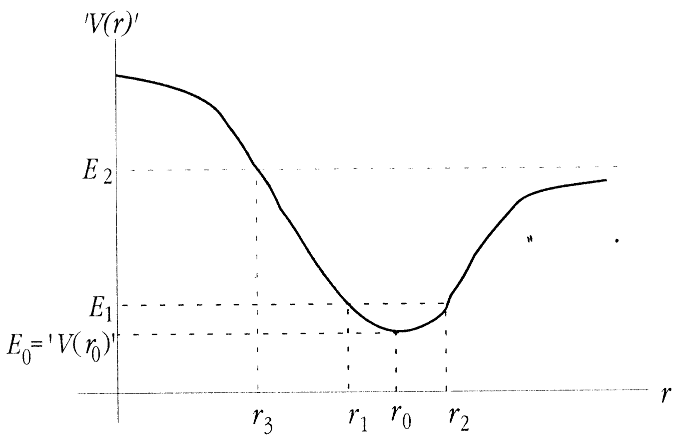
نلاحظ أن العلاقتين (10-3) و (11-3) هي معادلات تفاضلية من الدرجة الثالثة

(لماذا؟)، لكننا وصلنا إلى حلها بإجراء تكامل واحد فقط لكل من r و θ، سبب ذلك كون E و $\mathbf{L}$ ثابتين. لذلك يطلق على كل منها اسم **تكامل أولي** *(first integral)* أو **ثابت حركة** *(constant of motion)*.

3 - 7 دراسة الحركة تحت تأثير قوة مركزية باستخدام الطاقة

سندرس في هذه الفقرة أنواع الحركة الممكنة لجسيم خاضع لقوة مركزية بشكل وصفي، بالاستفادة من ثبات طاقته الميكانيكية بحسب الأشكال المحتملة للجهد الفعّال الخاضع له.

نلاحظ من العلاقة (3-28) أن المقدار المجذور يجب أن يكون موجباً دوماً، أي يجب أن يكون $E \geq 'V(r)'$ وهذا هو الشرط الأساس الذي نستخدمه لفهم طبيعة الحركة الممكنة. فإذا رسمنا تغيرات $'V(r)'$ مع بعد الجسيم r عن مركز القوة، ولنفترض أننا حصلنا على الشكل (3-3)، عندئذ ندرس القيم الممكنة للطاقة الميكانيكية E. فنلاحظ مايلي:

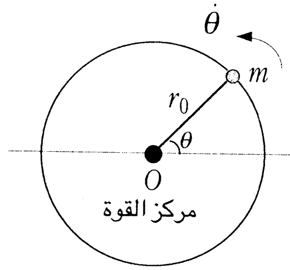


الشكل (3-3)

1 - إذا كانت $E=E_0='V(r_0)'$، حيث $'V(r_0)'$ أصغر قيمة ممكنة للجهد الفعّال، عندئذ يجب أن يبقى بعد الجسيم عن مركز القوة ثابتاً، أي أن: $r=r_0=$ثابت، لأن أي بُعد آخر سيجعل $E<'V(r)'$ وهذا غير مسموح به طبعاً.

في هذه الحالة تصير السرعة القطرية $\dot{r}$ مساوية للصفر دوماً، لذا يدور الجسيم على دائرة نصف قطرها r_0 بسرعة زاوية ثابتة $\dot{\theta}$ نجدها من العلاقة (14-3) بوضع $r=r_0$ (انظرالشكل (4-3)):

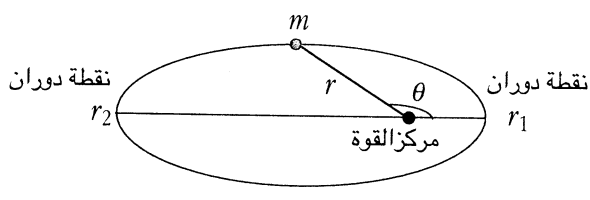
$$\dot{\theta}_0 = \frac{L}{mr_0^2} \qquad (30-3)$$



الشكل (4-3)

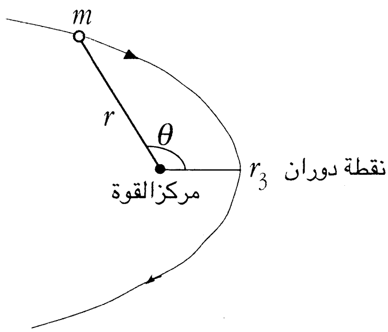
2 - إذا كانت $E=E_1>V(r_0)$ عندئذ نلاحظ أن r ستكون محصورة بين القيمتين r_1 و r_2 فقط لأن $V(r)$ سيصير أكبر من الطاقة الكلية E خارج هذا المجال مما سيجعل المقدار المجذور في (28-3) سالباً وهذا غير ممكن بالطبع. لذلك يتحرك الجسيم بحيث تتغير r دورياً بين r_1 و r_2، فيبتعد الجسيم عن مركز القوة خلال دورانه حوله إلى أن يصل لبعد r_2 ثم يقترب منه إلى r_1، وهكذا دواليك.

أبسط مثل على هذه الحركة هو الدوران على قطع ناقص *(ellipse)* نصفي قطريه r_1 و r_2، كما في الشكل (5-3). نلاحظ هنا أن السرعة القطرية $\dot{r}$ تنعدم عند هاتين النقطتين، لذلك نطلق عليهما اسم **نقاط دوران** *(turning points)*.



الشكل (5-3)

3 - إذا كانت $E \geq E_2$ عندئذ إذا كان الجسيم يتحرك أصلاً باتجاه مركز القوة فإن أقرب مسافة سيصل إليها هي r_3 حيث تنعدم هناك سرعته القطرية ويدور منحرفاً عن مساره الأصلي ثم يبتعد عن مركز القوة إلى مالانهاية، كما في الشكل (3-6). أي أن r_3 هي نقطة دوران في هذه الحالة.



الشكل (3-6)

نستنتج من المناقشة السابقة أن شكل الطريق الذي سيتحرك عليه الجسيم الخاضع لقوة مركزية يعتمد على طاقته الكلية التي "بدأ" بها، وعلى الجهد الفعّال الذي يتحرك فيه، أي على شكل القوة المؤثرة عليه.

3 - 8 الحركة على مسار دائري واستقرار المسار

نعود الآن إلى الحالة التي تكون فيها طاقة الجسيم الكلية أكبر بقليل من أصغر قيمة للجهد الفعّال، إن وُجدت، (الحالة 2 أعلاه) التي استنتجنا منها أن الجسيم يدور حول مركز القوة بحيث لايتغير بعده عنه كثيراً عن قيمة معينة r_0.

نلاحظ أنه حتى يتحقق هذا يجب أن تكون هناك قيمة صغرى للجهد الفعّال أي يجب أن يكون:

$$\left.\frac{dV'(r)'}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \quad \text{و} \quad \left.\frac{d^2V'(r)'}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0 \qquad (31-3)$$

عندها يتغير بُعد الجسيم عن مركز القوة خلال دورانه حوله بشكل اهتزازي بسيط سرعته الزاوية معطاة بالعلاقة (انظر الفقرة 1-9 والعلاقة (1-41)):

$$\omega^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2 V(r)}{dr^2}\right)_{r=r_0} \qquad (32-3)$$

أي أن الجسم سيتحرك على مسار دائري نصف قطره r_0 بسرعة زاوية $\dot{\theta}$ ويهتز بنفس الوقت حول نصف القطر هذا بتردد ω.

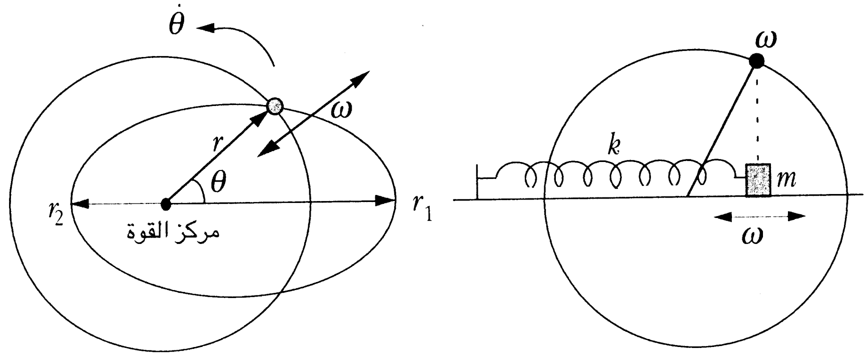
3-9 المعنى الفيزيائي لـ ω و $\dot{\theta}$

نعلم أنه عندما يتحرك جسم على دائرة فإن سرعته الزاوية تمثل مقدار الزاوية التي يدورها في واحدة الزمن، وتقدر عادة بالراديان، مثل الأرض التي تدور حول الشمس، أو الإلكترون حول البروتون في ذرة الهيدروجين، وهكذا دواليك، كما في الشكل (3-4).

نعلم كذلك أنه عندما يهتز جسيم m مربوط بزنبرك k حركة اهتزازية بسيطة فإننا نربط اهتزازاته بمسقط حركة جسم يدور على دائرة بوساطة التمثيل الدائري للحركة الاهتزازية ونطلق على $\omega = (k/m)^{1/2}$ اسم السرعة الزاوية للجسم الذي يدور على الدائرة، كما في الشكل (3-7 أ).

كما وجدنا في دراستنا الحالية أن الجسيم الخاضع لقوة مركزية يتحرك في مستو ، وأن لسرعته مركبتين إحداهما قطرية $v_r = \dot{r}$ ، تدل على تغير بعد الجسم عن مركز القوة (كاهتزاز جسم مربوط بزنبرك)، والثانية مماسية $v_\theta = r\dot{\theta}$، تدل على المسافة التي يقطعها الجسم في واحدة الزمن حول مركز القوة (كدوران جسم على دائرة) حيث تمثل $\dot{\theta}$ الزاوية التي يدورها خلال ذلك، أي سرعته الزاوية.

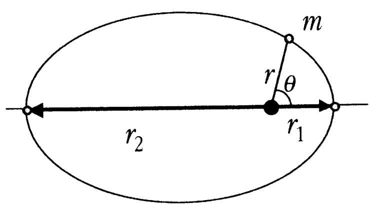
فإذا دار جسمٌ على دائرة نصف قطرها r يتغير بين قيمتين r_1 و r_2 فإن $\dot{\theta}$ تدل على سرعته الزاوية خلال الدوران بينما تدل ω على السرعة الزاوية لتغير r، كما في الشكل (3-7 ب).



(ب) الشكل (7-3) (أ)

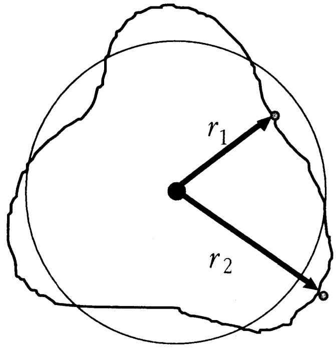
نلاحظ هنا أن شكل المسار يتغير بحسب الحالات التالية :

1- $\dot{\theta}=\omega$: أي أن الزمن اللازم للجسيم ليدور دورة واحدة حول مركز القوة ($2\pi/\theta$) يساوي الزمن اللازم لتتغير r من r_1 مثلاً إلى r_2 ثم عودة لـ r_1 (أي $2\pi/\omega$). فيعود الجسيم إلى النقطة التي بدأ منها، ويكون قد تحرك على مسار بسيط مغلق، كقطع ناقص، كما في الشكل (8-3). نلاحظ هنا أن الزاوية التي يدورها الجسم عندما تتغير r من r_1 إلى r_2 تساوي π.



الشكل (8-3)

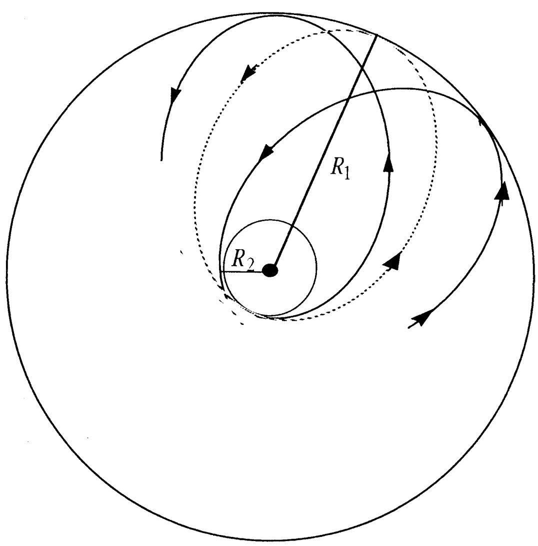
2- $\omega = n\dot{\theta}$، حيث n عدد صحيح: أي أن الزمن اللازم للجسيم ليدور دورة واحدة حول مركز القوة يساوي أضعافاً صحيحة من الزمن اللازم ليتغير بعده عن هذا المركز بين أكبر وأصغر قيمة له. فخلال دورة واحدة إذاً تتغير r عدداً صحيحاً من المرات، وعندما يعود الجسيم للنقطة التي بدأ منها تكون r قد عادت أيضاً إلى قيمتها التي بدأت منها فيرسم الجسيم مساراً متعرجاً في هذه الحالة إلاّ أنه يبقى مغلقاً بسيطاً، كما في الشكل (9-3).



الشكل (3-9)

3- $m\omega \neq n\dot{\theta}$ ، حيث m و n أي عددين صحيحين: أي يبدأ الجسيم حركته من نقطة ولايعود إليها مطلقاً فيصير المسار قطعاً ناقصاً يدور حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه مع مرور الزمن، كما في الشكل (3-10)، الذي نلاحظ منه أنه عندما تتغير r بين r_1 و r_2 فإن θ لاتتغير بمقدار $180°$ (كما في الحالة 1) بل تتغير بمقدار معطى بالعلاقة (برهن ذلك):

$$\Delta\theta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r^2\sqrt{2m(E-'V(r)'}}\, dr \qquad (33-3)$$



الشكل (3-10)

3 - 10 الحركة تحت تأثير قوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد

تتصف أهم القوى الطبيعية، كقوة التجاذب الكتلي أو قوة كولوم الكهربائية، أنها مركزية تتناسب قيمتها عكساً مع مربع البعد بين الجسمين المتفاعلين. لذا فإن دراسة هذا النوع من القوى بالتفصيل يعتبر من أهم المواضيع في الفيزياء، سواء التقليدية *(classical)* أو الحديثة *(modern)*، لأنها تعطي المفتاح الرئيس لفهم طبيعة تركيب المادة بدءاً من الأجسام الكونية الكبيرة انتهاءاً بأدق الجسيمات في الذرة.

لذلك نفترض فيما يلي أن لدينا جسيماً m يخضع لتأثير قوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد بينه وبين مصدرها، الذي نفترض أنه جسم آخر M كتلته كبيرة جداً بالمقارنة مع m، بحيث يبقى مركز القوة عملياً ساكناً في مكانه.

من ثم نكتب القوة المؤثرة على m بالشكل:

$$\mathbf{F}(r)=\frac{k}{r^2}\mathbf{r}_1 \qquad (35-3)$$

حيث k ثابت القوة المركزية، وتكون $\mathbf{F}$ جاذبة إذا كانت $k<0$ وطاردة إذا كانت $k>0$.

من الأمثلة المهمة على قوة جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد التجاذب الكتلي بين الأجسام، تعطى قيمتها بالعلاقة:

$$F(r)=\frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad (36-3)$$

حيث G **ثابت الجاذبية العام** ويساوي $6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg}$. نلاحظ أن k في هذه الحالة هو $G\,m_1\,m_2$.

كما تعتبر قوة كولوم الكهربائية بين شحنتين نقطيتين من القوى المركزية الهامة وتعطى قيمتها بالعلاقة:

$$F(r)=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (37-3)$$

حيث ε_0 **سماحية الخلاء** *(permitivity constant)* ويساوي $8.85\times10^{-12}\mathrm{C^2/N.m^2}$. نلاحظ أن k في هذه الحالة يساوي $q_1\,q_2/4\pi\varepsilon_0$.

3 - 10 - 1 طاقة الوضع والطاقة الميكانيكية الكلية

لحساب طاقة وضع جسم خاضع لقوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد نستخدم(2-69) فنجد:

$$V(r)=\frac{k}{r} \tag{38-3}$$

كما نحسب الطاقة الميكانيكية الكلية :

$$E=K+V(r)=\tfrac{1}{2}mv^2+\frac{k}{r} \tag{39-3}$$

بوضع

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

تؤول (3-39) إلى:

$$E=\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2+{}'V(r)' \tag{40-3}$$

حيث $'V(r)'$ الجهد الفعّال:

$$'V(r)'=\frac{k}{r}+\tfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2=\frac{k}{r}+\frac{L^2}{2mr^2} \tag{41-3}$$

3 - 10 - 2 معادلة المسار

لإيجاد معادلة المسار لجسم خاضع لقوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد نستخدم المعادلة (3-29) ونكتب:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{m}{L^2u^2}F(\frac{1}{u})$$

بوضع

$$F(\frac{1}{u})=ku^2$$

تصير معادلة المسار :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{mk}{L^2} \qquad (42-3)$$

المعادلة الأخيرة تفاضلية من الدرجة الثانية بطرف ثاني حلها:

$$u=\frac{1}{r}=A\cos\theta-\frac{mk}{L^2} \qquad (43-3)$$

حيث A ثابت تكامل يعتمد على الشروط الإبتدائية للحركة.

بتعويض $u=1/r$ نجد:

$$r=\frac{L^2/mk}{-1+(L^2A/mk)\cos\theta} \qquad (44-3)$$

أو

$$r=\frac{p}{-1+\varepsilon\cos\theta} \qquad (45-3)$$

حيث وضعنا:

$$p=\frac{L^2}{mk} \qquad (46-3)$$

و

$$\varepsilon=pA=\frac{L^2A}{mk} \qquad (47-3)$$

تمثل (45-3) منحنى قطعي *(conic section)* يدل ε فيه على معامل شذوذه عن الدائرة *(eccentricity)*، لأنه:

إذا كان $\varepsilon=0$ يصير المنحنى دائرة *(circle)* (غير شاذ)

وإذا كان $\varepsilon<1$ يصير قطعاً ناقصاً *(ellipse)* (ε ينقص عن الواحد)

وإذا كان $\varepsilon=1$ يصير قطعاً مكافئاً *(parabola)* (ε يكافئ الواحد)

وإذا كان $\varepsilon>1$ يصير قطعاً زائداً *(hyperbola)* (ε يزيد عن الواحد)

نستنتج إذاً أن نوع المسار الذي يتحرك عليه الجسيم الخاضع لقوة متناسبة عكساً مع مربع البعد يعتمد على نوع القوة، جاذبة أو طاردة (من خلال ε)، والشروط الابتدائية من طاقة وزخم زاوي (E و L).

3 - 11 أنواع المسارات الممكنة لجسم خاضع لقوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد

يمكن معرفة فيما إذا سيكون مسار جسم خاضع لقوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد منحنياً مغلقاً (دائرة أو قطعاً ناقصاً) أو مفتوحاً (قطعاً زائداً أو مكافئاً)، من طاقته الكلية، وإشارة القوة التي يخضع لها، ودراسة نهايات الجهد الفعّال، كما فعلنا في الفقرة 3-3.

ذلك أنه إذا كان للجهد الفعّال نهاية صغرى فيمكن لبعد الجسم عن مركز القوة أن يتغير بشكل دوري ويحتمل نتيجة لذلك أن يصير المسار مغلقاً. أما إذا لم تكن هناك نهاية صغرى للجهد الفعّال فلا يمكن للبعد أن يتغير دورياً ويكون المسار منحنى مفتوح بالتأكيد.

نعتبر فيمايلي الإشارتين المكنتين للقوة:

1 - القوة نابذة $k>0$

إذا خضع جسيم لقوة نابذة ($k>0$) فإن طاقته الكلية ستكون موجبة حتماً لأن

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+(\frac{k}{r}+\frac{L^2}{2mr^2})>0 \qquad (48-3)$$

هذا منطقي تماماً، إذ لايعقل أن يرتبط جسيم بمركز قوة يطرده بعيداً عنه!

لهذه النتيجة أهمية كبيرة على نوع المسار الذي يمكن أن يتحرك الجسيم عليه، الذي نحدده بدراسة نهايات الجهد الفعّال.

نلاحظ من (3-41) أن:

$$\frac{d'V(r)'}{dr}=-\frac{k}{r^2}-\frac{L^2}{mr^3}\neq 0 \qquad (49-3)$$

بما أن $k>0$ و$L^2>0$ فلايمكن أن تكون (3-49) مساوية للصفر أبداً، أي لاتوجد نهاية للجهد الفعّال. فالمسار منحنى غير مغلق كقطع زائد أو مكافئ، فيتحرك الجسيم بحيث يقترب من مركز القوة إلى نقطة معينة ثم ينحرف مبتعداً إلى مالانهاية.

لمعرفة فيما إذا كان المسار قطعاً زائداً أم مكافئاً يجب معرفة ما إذا كان $\varepsilon \geq 1$.

لذلك نستخدم معادلة المسار(3-45) ومعادلة الطاقة الكلية (3-48).

فنلاحظ من الأولى أن r ستكون أصغر مايمكن عندما يكون $\cos\theta = +1$، عندئذ تصير قيمتها:

$$r_{\min} = \frac{p}{-1+\varepsilon} = \frac{L^2 / mk}{-1 + L^2 A / mk} \qquad (50-3)$$

من جهة أخرى فإن السرعة القطرية للجسيم $\dot{r}$ ستكون معدومة عندما $r = r_{\min}$ لأن هذه النقطة هي نقطة الدوران الوحيدة له في مساره. لذلك نضع $\dot{r} = 0$ في معادلة الطاقة فنجد:

$$E = 'V(r_{\min})' = \frac{k}{r_{\min}} + \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} \qquad (51-3)$$

باختصار $r_{\min}$ بين (3-50) و (3-51) نجد:

$$A^2 = \frac{m^2k^2}{L} + \frac{2mE}{L^2} = \frac{m^2k^2}{L^4}(1 + \frac{2EL^2}{mk^2}) \qquad (52-3)$$

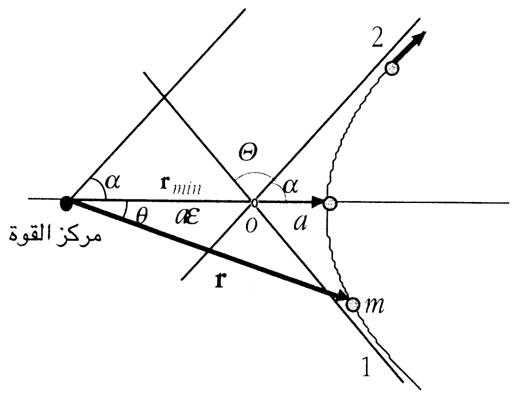
بحسب (3-47) يكون :

$$\varepsilon = \frac{L^2 A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \qquad (53-3)$$

بما أن $E>0$ دوماً في هذه الحالة مما يعني أن الجذر في (3-53) أكبر من الواحد، أي أن $\varepsilon>1$ فيكون المسار هو الفرع السالب من قطع زائد حتماً، كما في الشكل (3-11)

يقع مركز القوة عند أحد محرقيه (بؤرة) *(focal point)* بحيث يأتي الجسيم من اللانهاية مقترباً من مركز القوة إلى أن يصير على بعد $r= r_{\min}$ ثم يبتعد بعد ذلك إلى مالانهاية مرة أخرى.

نتذكر دوماً أن موضع الجسيم بالنسبة لمركز القوة يتحدد بالبعد r والزاوية θ، كما في الشكل (3-11).



الشكل (3-11)

يتضح من الشكل (3-11) أن الجسيم كان قادماً أصلاً على الخط 1 إلاّ أن وجود مصدر لقوة طاردة حرفه عن مساره تدريجياً إلى أن صار يتحرك أخيراً على الخط 2 عند مسافات كبيرة من مصدر القوة. لهذا نعرّف زاوية انحراف أو بالأصح **زاوية تشتت** الجسيم *(scattering angle)* Θ بالعلاقة:

$$\Theta = \pi - 2\alpha \tag{54-3}$$

حيث α هي قيمة θ عندما يبتعد الجسيم إلى مالانهاية ونحصل عليها من العلاقة (3-45) بوضع $r \to \infty$ فنجد:

$$\theta_{\infty} = \alpha = \cos^{-1}(\frac{1}{\varepsilon}) \tag{55-3}$$

يمكن إيجاد أقرب مسافة $r_{\min}$ يصل إليها الجسيم من مركز القوة من الشكل (3-11) فنكتب :

$$r_{\min} = a + a\varepsilon = a(1+\varepsilon) \tag{56-3}$$

بكتابة معادلة القطع الزائد بشكلها الهندسي :

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{-1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{p}{-1+\varepsilon\cos\theta} \tag{57-3}$$

بمقارنة طرفي العلاقة الأخيرة نستنتج أن:

$$p = a(\varepsilon^2 - 1) = \frac{L^2}{mk} \tag{58-3}$$

بتعويض εمن (53-3) نجد:

$$a = \frac{k}{2E} \tag{59-3}$$

كما أن:

$$r_{\min} = a(1+\varepsilon) = \frac{k}{2E}[1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{mk^2}}\ ] \tag{60-3}$$

بذلك نكون قد حددنا مسار جسيم خاضع لقوة مركزية نابذة متناسبة عكساً مع مربع البعد بأنه الفرع السالب من قطع زائد، كما وجدنا الخواص الهندسية لهذا القطع كمعامل. شذوذه (ε)، وبعد ذروته عن مركزه (a)، وأقرب نقطة يصل إليها من مركز القوة $(r_{\min})$، بدلالة ثابت القوةk، وثوابت الحركةL وE.

2 - ا القوة جاذبة $k<0$

إذا تحرك جسيم تحت تأثير قوة جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد عندئذ نلاحظ من معادلة الطاقة الكلية (40-3) أنه يمكن لـ E أن تكون موجبة أو معدومة أو سالبة. إذ أن :

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 +' V(r)' = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + (\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}) \tag{61-3}$$

بما أن $k<0$ فإنه من الممكن أن تكون E موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر، بحسب الشروط الابتدائية (أي ثوابت الحركة) للجسيم. لذا يعتمد نوع الحركة بشكل واضح على الطاقة الكلية والزخم الزاوي.

لتحديد نوع المسار نجد نهايات الجهد الفعّال $'V(r)'$:

$$\frac{d\,'V(r)'}{dr}=-\frac{k}{r^2}-\frac{L^2}{mr^3} \qquad (62-3)$$

من الواضح أن $d'V(r)'=0$ عندما $r=r_0$ حيث:

$$r_0=-\frac{L^2}{(-mk)}=\frac{L^2}{m|k|} \qquad (63-3)$$

فهناك احتمال أن يتحرك الجسيم على مسار مغلق أو غير مغلق وذلك بحسب طاقته الكلية:

1- فإذا كان $E='V(r_0)'$ عندئذ تصير السرعة الماسية $\dot{r}=0$ دائماً ويتحرك الجسيم على مسار دائري نصف قطره r_0.

2- وإذا كان $0>E>'V(r_0)'$ عندئذ يتحرك الجسيم على مسار مغلق بسيط بحيث يتغير بعده عن مركز القوة بين قيمة صغرى $(r_1=r_{min})$ وقيمة عظمى $(r_2=r_{max})$. يطلق على r_1 اسم **نقطة الذنب** *(perihelion)* في حالة حركة الكواكب حول الشمس، و**نقطة الحضيض** *(perigee)* عند دوران الأقمار (الطبيعية والصناعية) حول الأرض. كما يطلق على r_2 اسم **نقطة الرأس** *(aphelion)* لحركة الكواكب حول الشمس و**أوج المدار** *(apogee)* في حالة حركة الأقمار حول الأرض.

يمكن تحديد كل من r_1 و r_2 من معادلة المسار (45-3) والطاقة الكلية (61-3) . نضع $\cos\theta=\pm 1$ في الأولى فنجد:

$$r_{1,2}=\frac{p}{-1\pm\varepsilon}=\frac{L^2/mk}{-1\pm L^2A/mk} \qquad (64-3)$$

ونضع $\dot{r}=0$ في الثانية فنجد:

$$E = \frac{k}{r_{1,2}} + \frac{L^2}{2mr_{1,2}^2} \quad (65-3)$$

باختصار $r_{1,2}$ بين المعادلتين الأخيرتين نجد:

$$A^2 = \frac{m^2k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} = \frac{m^2k^2}{L^4}(1 + \frac{2EL^2}{mk^2}) \quad (66-3)$$

بتعويض A في (47-3) نجد:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \quad (67-3)$$

فإذا كانت طاقة الجسم الكلية موجبة عندئذ يكون $\varepsilon>1$ ويكون المسار قطعاً زائداً، كما في الحالة السابقة. أما إذا كانت الطاقة الكلية مساوية للصفر عندها يكون $\varepsilon=1$ ويصير المسار قطعاً مكافئاً معادلته:

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)} \quad (68-3)$$

أخيراً إذا كانت الطاقة الكلية سالبة عندها يكون $\varepsilon<1$ ويتحرك الجسم على مسار قطع ناقص نحدد ثوابته الهندسية، كنصف قطره الكبير a، والصغير b، كما في الشكل (12-3)، بملاحظة أنه يمكن كتابة معادلته بالشكل:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{-1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{L^2 / mk}{-1 + (L^2A / mk)\cos\theta} \quad (69-3)$$

أي أن:

$$a(1-\varepsilon^2) = \frac{L^2}{mk}$$

بتعويض ε من (67-3) نجد:

$$a = -\frac{k}{2|E|} \quad (70-3)$$

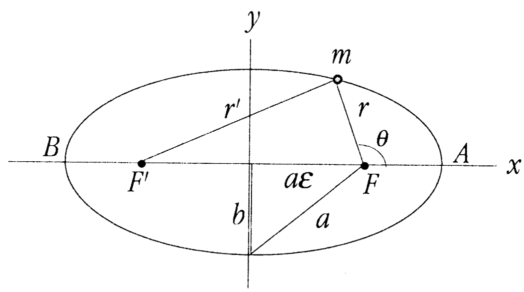
أي أن:

$$E = -\frac{k}{2a} \qquad (71-3)$$

ثم نحسب طول نصف القطر الصغير b من الشكل (12-3) بكتابة:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{(-mk)} \qquad (72-3)$$

بذلك نكون قد حددنا مسارجسم خاضع لقوة مركزية جاذبة سواء كانت طاقته الكلية موجبة أم سالبة أم معدومة، وعيّنا الخواص الهندسية للقطع الناتج في كل حالة.



الشكل (12-3)

3 - 12 مسارات القطوع الناقصة ومسألة كبلر *(Kepler's Problem)*

توصل **جوهانز كبلر** (*Johannes Kepler* 1630-1571) لوضع ثلاثة قوانين تصف حركة الكواكب حول الشمس بعد أن درس وحلل المعلومات الفلكية التي كانت متوفرة آنئذ، بخاصة تلك التي حصل عليها **تايكو براهي** (*Tycho Brahe* 1601-1546) من مشاهداته لمواضع الكواكب حول الشمس على مدى فترة طويلة من الزمن.

هذه القوانين هي :

1 - قانون المسارات: تتحرك الكواكب حول الشمس في مسارات قطوع ناقصة بحيث تقع الشمس عند أحد المحرقين (البؤرتين).

2 - قانون المساحات: يمسح المتجه الواصل من الشمس إلى الكوكب مساحات متساوية في أزمنة متساوية خلال دوران الكوكب حول الشمس.

3 - قانون التناسب: يتناسب مربع دور حركة الكوكب حول الشمس طردياً مع مكعب نصف القطر الكبير لمساره.

يمكن استخلاص قوانين كپلر من قوانين نيوتن في الحركة. نثبت ذلك فيما يلي:

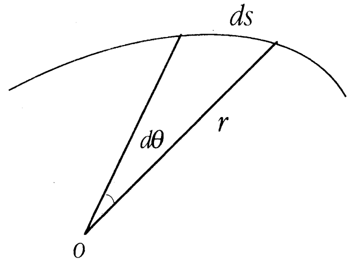
(أ) تتحرك الكواكب خاضعة لقوة مركزية جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد (قانون الجاذبية العام) وطاقتها الكلية سالبة (تحقق من ذلك!) لذا فهي تتحرك على قطوع ناقصة، كما وجدنا آنفاً. هذا هو قانون المسارات.

(ب) يمكن حساب المساحة التي يمسحها المتجه الواصل من الشمس الواقعة عند محرق (بؤرة) القطع الناقص إلى المتجه خلال زمن معين من الشكل (13-3) وملاحظة أن المساحة الممسوحة خلال زمن dt تساوي:

$$ds \approx \frac{1}{2}(rd\theta)r \qquad (73-3)$$

أي أن:

$$\frac{ds}{dt} \approx \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \qquad (74-3)$$



الشكل (13-3)

بتعويض $\dot{\theta}$ من (14-3) نجد:

$$\frac{ds}{dt} \approx \frac{L}{2m} = \text{ثابت} \qquad (75-3)$$

فالسرعة المساحية (*areal speed*) ثابتة. هذا هو قانون المساحات .

(جـ) نحسب الزمن اللازم ليدور الكوكب حول الشمس دورة كاملة بمكاملة (75-3) فنجد:

$$s = \frac{L}{2m} T \qquad (76-3)$$

حيث s مساحة القطع الناقص الممسوح التي تساوي:

$$s = \pi ab \qquad (77-3)$$

بتعويض b من (72-3) واستخدام (71-3) نجد:

$$s = \pi a^2 (\frac{2L^2|E|}{mk^2}) = \frac{L}{2m} T \qquad (78-3)$$

ومنه:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{(-k)} a^3 \qquad (79-3)$$

أي أن مربع الدور يتناسب مع مكعب نصف القطر الكبير للقطع الناقص. هذا هو قانون التناسب.

يتضح مما تقدم أن قوانين كبلر تنتج تلقائياً من قوانين نيوتن في الحركة، إلاّ أن حركة الكواكب الفعلية ليست بهذه البساطة نتيجة وجود كواكب أخرى في المجموعة الشمسية. فيحتمل أن تحوي القوة المركزية المؤثرة على كل كوكب على حدودٍ أخرى غير $1/r^2$ مما يجعل المسارات مختلفة بعض الشئ عما وجدناه سابقاً.

3 - 13 مسارات القطوع الزائدة وتشتت رزرفورد *(Rutherford Scattering)*

إذا خضع جسم لقوة مركزية نابذة فإنه يتحرك على قطع زائد، بطاقة أكبر من الصفر دوماً. من الأمثلة على ذلك اقتراب بروتون موجب الشحنة من نواة ثقيلة موجبة الشحنة أيضاً فتدفعه بعيداً عنها مما يؤدي لانحرافه عن مساره الأصلي ويتحرك على مسار قطع زائد.

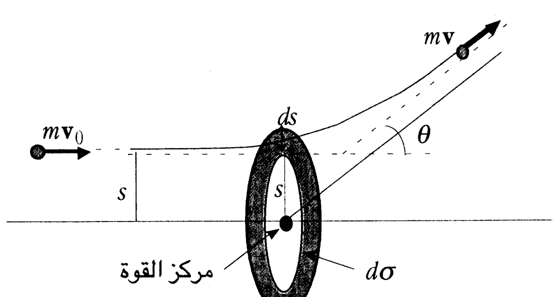
من جهة أخرى، إذا خضع جسم حر (أي أن طاقته الكلية موجبة) لقوة مركزية جاذبة فإنه يتحرك أيضاً على مسار قطع زائد. مثل ذلك حركة الجسيمات السماوية، كالنايزك والشهب، بالقرب من نجم كبير عندما تأتي من بعيد بطاقة حركية كبيرة، وعند اقترابها من النجم تتأثر بجاذبيته منحرفة أيضاً عن مسارها لتتحرك على قطع زائد. الفرق بين هذه الجسيمات والكواكب المتحركة على قطوع ناقصة حول نجم ما، كالشمس، هو أن الأخيرة كانت جزءاً من النجم وانشطرت مبتعدة عنه، إلا أن طاقتها الكلية السالبة لم تكن كافية لتتخلص من جذبه فبقيت مرتبطة به. أما الشهب والنيازك فإنها تتحرك في الفضاء السحيق بشكل حر وطاقة كلية عالية فيؤدي جذب النجم لها عند مرورها بالقرب منه لحرفها فقط دون التقاطها وإبقائها في مسار حوله.

لندرس فيما يلي حركة جسم على قطع زائد، كما هو موضح بالشكل (14-3) فنلاحظ أنه يأتي من بعيد على الخط 1 ثم ينحرف لبتعد مرة أخرى على الخط 2. وقد عرفنا زاوية التشتت Θ سابقاً بالعلاقة (54-3):

$$\Theta = \pi - 2\alpha$$

حيث α الزاوية التي تنتهي إليها θ عندما يبتعد الجسيم كثيراً عن مركز القوة، أي عندما تؤول r إلى مالانهاية ونجدها من (55-3) وتعويض ε من (53-3) :

$$\tan\frac{\Theta}{2} = \cot\alpha = \sqrt{\frac{mk^2}{2EL^2}} \qquad (80-3)$$



الشكل (14-3)

فإذا افترضنا أن سرعة الجسيم كانت v_0 عندما كان على بعد كبير من مركز القوة وأن المسافة العمودية بين مساره الأصلي ومركز القوة s عندئذ نكتب زخمه الزاوي L على النحو:

$$L = mv_0 s \qquad (81-3)$$

وطاقته الكلية:

$$E = \frac{1}{2} mv_0^2 \qquad (82-3)$$

يطلق على s اسم **معامل التصادم** *(impact parameter)*.

بتعويض L و E في (3-80) نجد:

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{k}{msv_0^2} \qquad (83-3)$$

تربط العلاقة الأخيرة بين زاوية تشتت الجسيم من جهة، وطاقته الابتدائية ومعامل التصادم، الذي يقترب به من مركز التشتت، من جهة أخرى.

كتطبيق على تشتت رزرفورد نعتبر ظاهرة تشتت جسيم مشحون إيجابياً (كجسيم α) من نواة ثقيلة موجبة أيضاً. فعندما نطلق عدداً كبيراً من α على صفيحة رقيقة من معدن ثقيل، كالذهب مثلاً، تصير كل نواة مركز قوة طاردة مؤثرة على كل جسيم α قادم. فإذا كان عدد الجسيمات القادمة N وعدد الجسيمات المنحرفة عن منسارها "خلال زاوية محصورة بين Θ و $\Theta \pm d\Theta$ هو dN عندئذ نعرِّف **مساحة مقطع التشتت** *(scattering cross section)* σ بالعلاقة:

$$d\sigma = \frac{1}{n} \frac{dN}{N} \qquad (84-3)$$

حيث n عدد مراكز التشتت (النوى) في واحدة المساحة من الصفيحة.

يمكن إعطاء $d\sigma$ مفهوماً هندسياً بأنه المساحة العنصرية حول مركز قوة واحد التي إن مر الجسيم من خلالها فإنه سينحرف عن مساره بزاوية محصورة بين Θ و $\Theta \pm d\Theta$، وتكون المساحة الكلية بواحدة السطح الناتجة عن وجود n مركز قوة هي

$n\, d\sigma$. من ثم إذا كان هناك N جسيم قادم فإن عدد الجسيمات المنحرفة dN هو $N n\, d\sigma$، أي أن $dN = N n\, d\sigma$. هذا ماكتبناه سابقاً.

يمكن أن نربط بين مساحة مقطع التشتت $d\sigma$ وزاوية التشتت Θ من (80-3) بوضع:

$$\frac{d\Theta}{2\cos^2\frac{\Theta}{2}} = -\frac{k}{mv_0^2 s^2} \tag{85-3}$$

فنلاحظ من الشكل (14-3) أن:

$$d\sigma = 2\pi s ds \tag{86-3}$$

لذا يكون:

$$d\sigma = \left(\frac{k}{2mv_0^2}\right)^2 \frac{2\pi \sin\Theta}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}\, d\Theta \tag{87-3}$$

يطلق على العلاقة الأخيرة اسم **قانون رزرفورد في التشتت**.

14 - 3 أمثلة عامة

❑ **مثل 1-3 الحركة على مسار دائري واستقرار المدار** (*orbital stability*)

يتحرك جسيم m على مسار دائري تحت تأثير قوة مركزية من الشكل:

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}$$

حيث n عدد صحيح. ماأصغر قيمة يمكن أن تأخذها n بحيث يكون المسار دائرياً مستقراً؟

الحل: إذا تحرك الجسيم على مسار دائري وتعرض لبعض الاهتزازات خلال حركته وبقي مع ذلك يتحرك على مسار مغلق قريب من مساره الدائري الأصلي، عندئذ نقول إن هذا المسار مستقر. أما إذا خرج عن طريقه بشكل كبير وأفلت من حركته الدائرية نهائياً فإننا نقول أن المسار غير مستقر.

سنتحقق في هذا المثل من كون المسار مستقراً أم لا بطريقتين:

أ – طريقة الجهد الفعّال:

وجدنا في الفقرة (3-3) أنه حتى يتحرك جسيم خاضع لقوة مركزية جاذبة في مسار مغلق يجب أن يكون لجهده الفعال نهاية صغرى ، لذا نكتب $'V(r)'$

$$'V(r)' = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

حيث نجد $V(r)$ من معادلة القوة:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)\ dr = -\frac{k}{(1-n)r^{n-1}}$$

بالتعويض في $'V(r)'$ والاشتقاق نجد:

$$\frac{d'V(r)'}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{k}{r^n}$$

نلاحظ أن $\frac{d'V(r)'}{dr} = 0$ عندما تكون r محققة للمعادلة:

$$-\frac{L^2}{mr^3} + \frac{k}{r^n} = 0$$

أي عندما:

$$\frac{L^2}{2mr^2} = \frac{k}{2r^{n-1}}$$

لكن حتى يكون المسار دائرياً يجب أن تكون $r=0$ وعندها تصير الطاقة الكلية:

$$E = 'V(r_0)' = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{k}{n-1}\ \frac{1}{r_0^{n-1}}$$

بالاستفادة من المعادلة السابقة نجد:

$$E = \frac{k}{r_0^{n-1}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1})$$

لكن الطاقة الكلية لجسم خاضع لقوة مركزية جاذبة، يدور في مسار مغلق (أي أنه مرتبط *bound*) يجب أن تكون سالبة، أي يجب أن يكون:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n-1}$$

أي أن:

$$n < 3$$

هذه هي القيم الممكنة لـ n.

ب – طريقة تغيير نصف القطر

لنفترض أن الجسم يتحرك على مسار دائري نصف قطره ثابت $r=r_0$ عندئذ نجد من معادلة الحركة (3-5) أن:

$$mr_0\dot{\theta}^2 = F(r_0)$$

وبتعويض $\dot{\theta}$ من (3-7) نجد:

$$-\frac{L^2}{mr_0^3} = F(r_0)$$

نفترض الآن أن نصف القطر سيتغير بمقدار x فنضع:

$$r = r_0 + x$$

بالتعويض في معادلة الحركة (3-5) والاستفادة من (3-7) نجد:

$$m\ddot{x} - \frac{L^2}{m}(r_0 + x)^{-3} = F(r_0 + x)$$

بنشر $(r_0+x)^{-3}$ و $F(r_0+x)$ بحسب سلسلة تايلورنجد:

$$m\ddot{x}-\frac{L^2}{m}r_0^{-3}(1-3\frac{x}{r_0}+\cdots)=F(r_0)+x\frac{dF(x)}{dx}\bigg|_{x=r_0}+\cdots$$

ومنه:

$$m\ddot{x}+\left[-\frac{3}{r_0}F(r_0)-\frac{dF(r)}{dr}\bigg|_{r=r_0}\right]x=0$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على x^2 أو قوى أكبر من ذلك.

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أن x ستتغير دورياً وتبقى سعتها محدودة القيمة إذا كان:

$$\frac{3}{r_0}F(r_0)+\frac{dF(r)}{dr}\bigg|_{r=r_0}<0 \qquad (88-3)$$

هذا هو الشرط الذي يجب أن تحققه **أي قوة مركزية** حتى يتحرك الجسم الخاضع لها في مسار دائري مستقر نصف قطره $r=r_0$.

في حالة كون $F(r)$ من الشكل:

$$F(r)=-\frac{k}{r^n}$$

نجد أن الشرط السابق يعطي:

$$-\frac{3}{r_0}\frac{k}{r_0^n}+n\frac{k}{r_0^{n-1}}<0$$

أي أن:

$$n<3$$

هذه هي نفس المتراجحة التي وجدناها بالطريقة الأولى.

لابأس من التنويه إلى أنه لو كانت(88-3) موجبة لصارت المعادلة التفاضلية لـ x على النحو:

$$m\ddot{x}-\omega^2 x=0$$

حيث:

$$\omega^2=\frac{3}{r_0}F(r_0)+\left.\frac{dF(r)}{dr}\right|_{r=r_0}$$

لاتمثل المعادلة التفاضلية لـ x في هذه الحالة حركة اهتزازية، فإما أن تزداد x أو تتناقص باستمرار، ممايعني أنه في حالة اضطراب المسار الدائري للجسيم خلال حركته فإنه سينهار تماماً بحيث يبتعد الجسم إلى مالانهاية أو يسقط إلى مركز القوة. ❒

❒ مثل 3-2 تحديد ثوابت المسار من الشروط الابتدائية

يدور قمر اصطناعي في مسار دائري نصف قطره r_0 عندما تبدأ محركاته بالعمل لفترة وجيزة لتزيد سرعته بمقدار 10%. مامعادلة المسار الجديد ومابُعد أوجه عن المحرق (البؤرة)؟

الحل: نفترض أن سرعة الجسم الأصلية على مداره الدائري هي v_0 ونكتب قيمة القوة المركزية المؤثرة عليه بالشكل:

$$F(r)=\frac{mv_0^2}{r_0}=\frac{k}{r_0^2}$$

ومنه:

$$\frac{k}{mr_0}=v_0$$

الآن: عندما يتحرك القمر على مسار غير دائري فإن زخمه الزاوي ثابت يساوي:

$$L=mr^2\dot{\theta}=mr_0^2\dot{\theta}_0^2=mr_0v_c$$

حيث r_0 و$\dot{\theta}_0$ موضعه وسرعته الزاوية عندما $\theta=0$، و v_c سرعته الجديدة بعد تشغيل المحركات.

من ثم نكتب معامل شذوذ المسار الجديد من العلاقة (3-67) (بعد تعويض0= θ و $r=r_0$):

$$\varepsilon=-1+\frac{L^2}{mkr_0} \Rightarrow \frac{L^2}{mk}=r_0(\varepsilon+1)$$

بتعويض L و k بقيمتيهما نجد:

$$\varepsilon=(\frac{v_c}{v_0})^2-1$$

لكن $v_c=1.1\ v_0$، فيكون:

$$\varepsilon = 0.21$$

لتصير معادلة المسار الجديد:

$$r=\frac{L^2/mk}{-1+0.21\cos\theta}=r_0\frac{1.21}{-1+0.21\cos\theta}$$

نجد بعد أوج المدار الجديد عن المحرق من المعادلة السابقة بوضع $\theta=\pi$ أي:

$$r_{\max}=r_0\frac{1.21}{1-0.21}=1.53r_0$$ ❒

ملحق – الخواص الهندسية للمنحنيات القطعية

المعادلة العامة للمنحنيات القطعية هي :

$$r=\frac{p}{\pm1+\varepsilon\cos\theta} \qquad (89-3)$$

أ – القطع الزائد $(Hyperbola)$ $\varepsilon>1$:

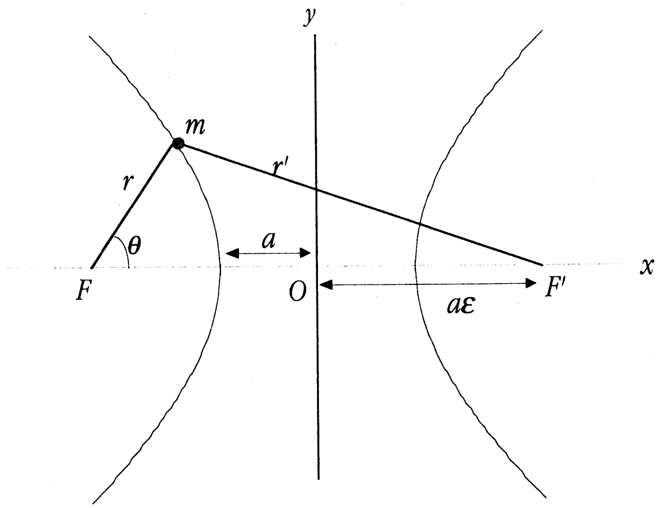
القطع الزائد هو المنحني الناتج عن كل النقاط التي يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين معينتين ثابتاً، كما في الشكل (3-15) بحيث يكون:

$$r-r'=\pm2a \qquad (90-3)$$

حيث تعطي الإشارة الموجبة الفرع الموجب من القطع بينما تعطي الإشارة السالبة الفرع السالب منه، بينما يطلق على F و F' اسم المحرقين.

نكتب معادلة القطع الزائد بالشكل:

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \varepsilon \cos\theta} \qquad (90-3)$$



الشكل (15-3)

ب – القطع الناقص (*Ellipse*) $\varepsilon < 1$:

القطع الناقص هو المنحني الناتج عن كل النقاط التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين معينتين ثابتاً ، كما في الشكل (16-3)، فنكتب:

$$r + r' = 2a \qquad (91-3)$$

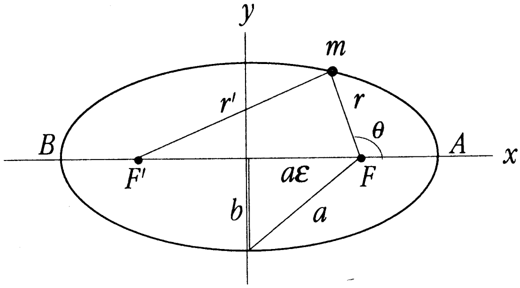
نكتب معادلة القطع بالشكل :

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\theta} \qquad (92-3)$$

يرتبط طول نصف القطر الكبير(a) بطول نصف القطر الصغير (b) :

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) \qquad (93-3)$$

تسمى A في الشكل (16-3) نقطة الاقتراب القصوى، و B نقطة الابتعاد القصوى.

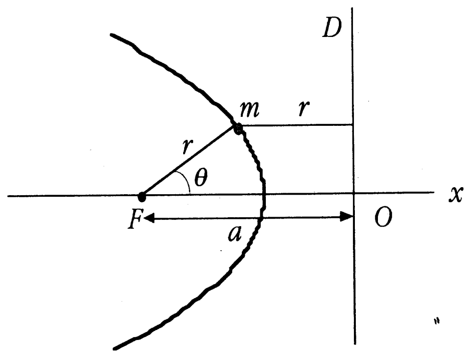


الشكل (16-3)

جـ - القطع المكافئ $\varepsilon=1$ (*Parabola*):

القطع المكافئ هو المنحني الناتج عن كل النقاط التي تبعد أي منها عن خط مستقيم معين نفس بعدها عن نقطة ثابتة ، كما في الشكل (17-3). تكون معادلة القطع هي:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{94 - 3}$$



الشكل (17-3)

مسائل

1-3 حدد أي من القوى المركزية التالية جاذبة نحو أو طاردة بعيداً عن المركز($\mathbf{r}_1$ متجه وحدة على امتداد$\mathbf{r}$): (أ)$\mathbf{F}=-k\mathbf{r}_1/r^{1/2}$، $k>0$ (ب)$\mathbf{F}=-4\pi r^3\mathbf{r}_1$ (جـ) $\mathbf{F}=r(r-1)\mathbf{r}_1/(r^2+1)$

2-3 تعطى طاقة الوضع لإلكترون في جزئ الهيدروجين بالعلاقة $V=-(e/r_1+e/r_2)$ حيث r_1 و r_2 بعدي الإلكترون عن النواتين المتواجدتين عند النقطتين $(-a,0,0)$ و$(a,0,0)$ والثابت $k=1/4\pi\varepsilon_0$ ثابت قوة كولوم المعروف. جد القوة المؤثرة على الإلكترون $F(r)$، حيثr بعده عن المبدأ.

3-3 برهن أن قيمة السرعة المساحية *(areal velocity)* في الإحداثيات الديكارتية هي $\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})$.

4-3 يخضع جسيم لقوة مركزية من الشكل $F(r)=-k/r^3$، حيث$k>0$، فيبدأ حركته عند نقطة$x=a$ على محور السينات الموجب بسرعةv_0 تصنع زاوية αمع ذلك المحور. برهن أن المعادلة التفاضلية للحركة هي: $\ddot{r}=-(k-ma^2v_0^2\sin^2\alpha)/mr^3$.

5-3 برهن أن معادلة مسار الجسيم المذكور في المسألة 4-3 تعطى بالعلاقة:
$d^2u/d\theta^2+(1-\gamma)u=0$ حيث $u=1/r$ و $\gamma=ma^2v_0^2\sin^2\alpha$.

6-3 جد كل المسارات الممكنة لجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية بحيث تبقى سرعته ثابتة القيمة دوماً.

7-3 (أ) ماطاقة الوضع لجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية $F=-k/r^2$، حيث $k>0$؟ (ب) ماالشغل اللازم لنقل هذا الجسيم من مسار دائري نصف قطره a إلى آخر نصف قطره b؟ هل يعتمد هذا الشغل على الطريق المتبع؟ علل.

8-3 يتحرك جسيم تحت تأثير القوة المذكورة في المسألة 7-3 فيبدأ على دائرة نصف قطرها a من السكون وينتقل إلى أخرى نصف قطرها b. برهن أن سرعته هناك تعطى بالعلاقة $[2k(a^3-b^3)]^{1/2}$، وأنها مستقلة عن الطريق المتبع.

9-3 يتحرك جسيم تحت تأثير قوة جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد. ماتردد

الحركة الدائرية وتردد الاهتزازات الصغيرة حولها؟

10-3 يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية طاقة وضعها $V=kr^4$، حيث $k>0$. (أ) جد القيم الممكنة للطاقة الكلية E والزخم الزاوي L حتى يكون المسار دائرياً نصف قطره a وحدد دور هذه الحركة الدائرية (ب) ماتردد الاهتزازات الصغيرة حول هذه الحركة الدائرية؟

11-3 تعطى طاقة الوضع الناتجة عن قوة التجاذب النووي بين البروتون والنيوترون في النواة حسب نموذج يوكاوا *(Yukawa Potential)* بـ $V(r)=k\exp(-\alpha r)/r$، حيث $k<0$. (أ) ماالقوة بين البروتون والنيوترون؟ (ب) ناقش أنواع الحركة الممكنة لجسيم m خاضع لهذه القوة. (جـ) ما E و L لهذا الجسيم حتى يتحرك على مسار دائري نصف قطره a، وماتردد الاهتزازات الصغيرة حولها؟ (د) برهن أن المسارات الدائرية (تقريباً) ستصير مغلقة تقريباً إذا كانت a صغيرة جداً.

12-3 (أ) ادرس أنواع الحركة الممكنة لجسيم خاضع لقوة $F(r)=-k/r^2+k'/r^3$، حيث $k>0$ واعتبر إشارتي k' المكنتين. (ب) حل المعادلة القطرية وبرهن أن المسارات المحدودة تعطى بالعلاقة $r=a(1-\varepsilon^2)/(1+\varepsilon\cos\theta)$ عندما يكون $L^2>-mk'$. (جـ) برهن أن المعادلة السابقة للمسار هي قطع ناقص دوّار، وجد السرعة الزاوية لدورانه، وحدد فيما إذا كان الدوران بنفس اتجاه حركة الجسيم أم بعكسها.

13-3 وصلت سفينة الفضاء الروسية سبوتنك – I إلى مسافة اقتراب قصوى من سطح الأرض هي 227 km بسرعة 28710 km/h. (أ) مامسافة الابتعاد القصوى لهذه السفينة ومادور حركتها حول الأرض، التي نفترض أنها كروية تماماً بنصف قطر 6400 km؟ (ضع تسارع الجاذبية قرب سطح الأرض $9.8\ \mathrm{m/s^2}$).

14-3 شوهد مذنب *(comet)* على بُعد 10^8 كم من الشمس يسير بسرعة 51.6 km/s تصنع زاوية $45°$ مع الخط الواصل بين مركز الأرض ومركز الشمس. جد معادلة المسار لهذا المذنب بالإحداثيات القطبية بفرض أن الشمس تقع عند المبدأ وأن محور السينات يقع على الخط الواصل بين مركزي الأرض والشمس (ضع كتلة الشمس 2×10^{30} كغ).

15-3 (أ) ناقش بطريقة الجهد الفعّال أنواع الحركة الممكنة لجسيم خاضع لقوة من الشكل $F(r)=-k/r^3$، حيث $k>0$، وجد قيم E و L لكل حركة ممكنة. (ب) برهن أن معادلة المسار ستكون من أحد الأشكال التالية:

$$\frac{1}{r}=A\cos[\beta(\theta-\theta_0)]$$
$$\frac{1}{r}=A\cosh[\beta(\theta-\theta_0)]$$
$$\frac{1}{r}=A\sinh[\beta(\theta-\theta_0)]$$
$$\frac{1}{r}=A(\theta-\theta_0)$$
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}e^{\pm\beta\theta}$$

16-3 بفرض أن الأرض كروية تماماً، وأن نفقاً يصل القطب الشمالي بالقطب الجنوبي عبر مركزها قد شُق ، وأن قوة التجاذب بين جسيمين m_1 و m_2 هي من الشكل $\mathbf{F}=-(Gm_1m_2/r^2)\mathbf{r}_1$، حيث $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة من m_1 إلى m_2 (عندما نحسب القوة التي يخضع لها m_2)، برهن عندئذ أنه إذا تركنا جسيماً m عند القطب الشمالي فإنه سيتحرك داخل النفق حركة اهتزازية بسيطة وجد ترددها. (مساعدة: احسب القوة المؤثرة على الجسيم على بعد r من مركز الأرض، بفرض أن كثافتها الكتلية ثابتة) .

17-3 ماالقوة المركزية التي تؤثر على جسيم يتحرك على المسار $r=ae^{k\theta}$، حيث a و k ثابتان؟

18-3 يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية فيرسم المسار $r=c\theta^2$. (أ) ماالقوة المؤثرة على الجسيم؟ (ب) حدد كيف تتغير θ مع الزمن بفرض أن $\theta=0$ عندما $t=0$.

19-3 برهن أنه يمكن كتابة معادلة المسار لجسيم خاضع لقوة مركزية بالشكل:

$$\frac{L^2}{2m}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u^2\right]+V\left(\frac{1}{u}\right)=E$$

حيث $u=1/r$.

يُطلق على العلاقة السابقة **معادلة الطاقة للمسار** *(energy equation of the orbit)*.

20-3 (أ) اكتب معادلات الحركة لجسيم خاضع للقوة $F(r)=-k/r^2-\varepsilon/r^4$ ، حيث $k>0$. (ب) مامعادلة المسار وماشرط كونه دائرياً مستقراً؟ (جـ) برهن أنه عندما تتغير r من أصغر قيمة لها إلى أكبر قيمة فإن θ تتغير من الصفر إلى قيمة أكبر من π بمقدار ε/ka^2~ في حالة الحركة الدائرية شبه المستقرة (الاهتزازية).

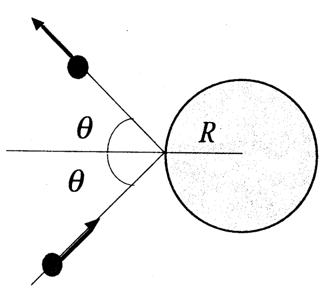
21-3 يتحرك مذنب في مسار قطع مكافئ في نفس مستو مسار الأرض حول الشمس الذي يمكن اعتباره دائرياً نصف قطره a. برهن أن نقاط تلاقي المسارين تعطى من العلاقة $\cos\theta=-1+2p/a$ حيث p نقطة ذنب المسار المعرّفة عندما $\theta=0$.

22-3 استخدم نتيجة المسألة 3-21 لبرهان أن الزمن الذي يبقى فيه المذنب ضمن مسار الأرض يساوي $(\sqrt{2}/3\pi)[(2p/a)+1][1-(p/a)]^{1/2}$ من السنة. برهن أيضاً أن القيمة العظمى لهذا الزمن هو $2/3\pi$ من السنة، أي حوالي 11 اسبوعاً.

23-3 (أ) برهن أن مسار جسيم خاضع لقوة مركزية طاردة $F=k/r^3$، حيث $k>0$، له شكل المسار الأول في المسألة 3-9 وعبّر عن β بدلالة k وE وL وm. (ب) برهن أن مساحة مقطع التشتت تعطى بالعلاقة:

$$d\sigma=\frac{2\pi^3 k}{mv_0^2}\frac{\pi-\Theta}{\Theta^2(2\pi-\Theta)^2}\,d\Theta$$

24-3 يصطدم جسيم صغير بكرة صلبة نصف قطرها R ويرتد عنها بحيث تكون زاوية السقوط مساوية لزاوية الإرتداد تماماً، كما في الشكل (3-18). مامساحة التشتت العنصرية $d\sigma$ عندما يتشتت الجسيم بزاوية محصورة بين Θ و$\Theta\pm d\Theta$. كامل $d\sigma$ وبرهن أن مساحة مقطع التشتت الكلية هي πR^2 كما هو متوقع.



الشكل (3-18)

25-3 ماالقوة المركزية المؤثرة على جسيم يتحرك على المنحنى $r^2=a^2\cos 2\theta$؟

26-3 تعطى طاقة الوضع لهزّاز توافقي في الفضاء بالعلاقة $V=kr^2/2$. ارسم منحنى الجهد الفعّال وناقش الحالات الممكنة للحركة وجد تردد الحركة الدائرية (إن وجدت) وترددالاهتزازات الصغيرة حولها.

27-3 حدد مسارجسيم يتحرك تحت تأثيرقوة مركزية من الشكل $F=-k\,r$ حيث $k>0$ إذا بدأ من $r=a$ و $\theta=0$ بسرعة v_0 عمودية على محور السينات. مانوع المسار؟

28-3 برهن أن مسار جسيم خاضع لقوة $\mathbf{F}=A\,\mathbf{r}_1/(r^4\cos\theta)$ أو $\mathbf{F}=B\,\mathbf{r}_1/(r^2\cos^3\theta)$ دائري $r=2a\cos\theta$. ماذا تستنتج عن القوة التي تتوصل إليها من معادلة المسار؟

29-3 برهن أنه لاتوجد قوة مركزية تجعل الجسيم الخاضع لها يتحرك على خط مستقيم.

30-3 ماالقوة المركزية التي تجعل سرعة الجسيم الخاضع لها متناسبة مع r^{-n}، حيث n ثابت؟

31-3 تتحرك سفينتا فضاء على قطع ناقص واحد معامل شذوذه ε بحيث أن بينهما مسافة صغيرة D عند نقطة الذنب. برهن أن المسافة بينهما عند نقطة الأوج ستصير $D(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$.

32-3 برهن أن القوة المركزية الوحيدة التي تباعدها *(divergence)* يساوي الصفر $(\nabla\times\mathbf{F}=0)$ يجب أن تكون متناسبة عكساً مع مربع البعد.

33-3 يتحرك قمر اصطناعي حول الأرض بحيث أن أكبر سرعة له هي $v_{\max}$ وأقل سرعة $v_{\min}$. برهن أن معامل شذوذ المسار هو $(v_{\max}-v_{\min})/(v_{\max}+v_{\min})$.

34-3 برهن أنه إذا كان دور حركة القمر الصطناعي المذكور في المسألة 33-3 هو τ فإن طول نصف القطر الكبير لمساره هو $\tau\,(v_{\max}v_{\min})^{1/2}/2\pi$.

35-3 تعطى المعادلة التفاضلية لمسار كوكب حول نجم وفق نظرية النسبية الخاصة لآينشتين بالعلاقة:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{k}{mL^2}+\gamma u^2$$

حيث $\gamma = 3k/mc^2$ وc سرعة الضوء.

(أ) برهن أنه باختيار مناسب للمحاور فإن معادلة المسار تعطى بـ:

$$r=\frac{k/mL^2}{1+\varepsilon\cos\alpha\theta}$$

حيث $\alpha = 1-\gamma k/mL^2$. (ب) استخدم (أ) لبرهان أن المسار قطع ناقص يدور ببطء في الفضاء بسرعة زاوية هو $2\pi\gamma k/mL^2$. (جـ) برهن أنه في حالة كوكب عطارد *(Mercury)* فإن هذا الدوران يعادل قوساً زاويته 43 ثانية من الدرجة في القرن. تم فعلاً قياس هذا الدوران بدقة عالية فتم التحقق من صحة نظرية آينشتين.

حركة منظومة جسيمات

(Motion of Systems of Particles)

4 - 1 تمهيد

درسنا في الفصول السابقة حركة جسيم صغير m على خط مستقيم أو في مستو أو في الفضاء ، ونعمم في الفصلين الرابع والخامس النتائج التي توصلنا إليها على منظومة مؤلفة من عدد نهائي من الجسيمات، أو على أجسام صلبة مؤلفة من عدد كبير جداً من الذرات. فنعرّف في هذا الفصل مركز كتلة منظومة جسيمات سواء كانت جسيمات نقطية محدودة العدد أم مؤلفة لأجسام صلبة ممتدة لانهائية العدد. ثم ندرس حركة مركز الكتلة هذا، فنحدد سرعته وتسارعه، ونستخرج قانون حركته. ثم نستخلص مبدأ حفظ الزخم الخطي وحفظ الزخم الزاوي لمنظومة جسيمات ، ونطبق ذلك على مسألة التصادم بين جسيمين ، سواء على خط مستقيم، أو في مستو، معرفين خلال ذلك التصادمات المرنة وغير المرنة وتشتت رذرفورد.

4 - 2 مركز كتلة عدة جسيمات

تتألف الأجسام التي ندرسها في الطبيعة من عدد كبير من الذرات والجزيئات التي يمكن أن تكون القوى المتبادلة بينها ضعيفة جداً، بحيث يمكن اعتبار كل واحد منها متحركاً بشكل مستقل عن البقية تنطبق عليه القوانين المختلفة التي حصلنا عليها حتى الآن، كالغازات المخلخلة. كما يمكن أن تكون القوى المتبادلة بين جسيمات المنظومة كبيرةً لايمكن إهمالها، كما في الأجسام السائلة والصلبة (الجاسئة)، التي يخضع كل جسيم فيها لتأثير القوى الجزيئية والذرية الناتجة عن الجسيمات الأخرى، بالإضافة للقوى الخارجية المؤثرة على النظام ككل. في هذه الحالة يتوجب علينا، عند دراسة حركة منظومة كهذه، متابعة كل جسيم منها على حدة، وتحديد الطريقة التي يتحرك بها تحت تأثير القوى الكلية المؤثرة عليه. لاشك في أن هذا يتطلب عناءً كبيراً، قد يكون مستحيلاً إذا كان عدد جسيمات المنظومة

يتجاوز الإثنين، كما هي الحال بالنسبة للأجسام الصلبة، أو أي منظومة مؤلفة من N جسيم، حيث نحدد موضع كل واحد في الفضاء بثلاثة إحداثيات مما يعني أنه يجب حل $3N$ معادلة مرتبطة (*coupled equations*).

لذلك ندرس حركة منظومة مؤلفة من عدد كبير جداً من الجسيمات، خاضعة لقوى خارجية ما، بتحديد النقطة التي تؤثر عندها محصلة هذه القوى، ثم نحاول دراسة حركة أجزاء المنظومة بالنسبة لهذه النقطة التي نطلق عليها اسم **مركز الكتلة** (*Center of Mass*)، وسندرس الآن كيف نحدد موقعها لمنظومات مختلفة.

نعرف موضع مركز كتلة عدة جسيمات نقطية (أي يمكن إهمال أبعاد أي منها بالمقارنة مع المسافة بين أي جسيمين) m_1 و m_2 و m_3 و . . . الخ، موجودة في المواضع $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ و . . . الخ، على الترتيب، كما في الشكل (4-1)، بالعلاقة:

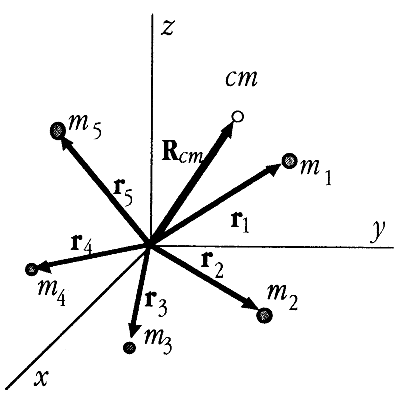
$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \qquad (1-4)$$

أو

$$M\mathbf{R}_{cm} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots \qquad (2-4)$$

حيث M الكتلة الكلية للجسيمات :

$$M = m_1 + m_2 + \cdots \qquad (3-4)$$



الشكل (4-1)

تجدر الإشارة هنا الى أن مركز كتلة نظام ما لايقع بالضرورة "داخل" النظام، كما أنه قد لا ينطبق على أي نقطة منه، كمركز كتلة حلقة دائرية متجانسة الذي يقع عند نقطة المركز (الخالية) طبعاً.

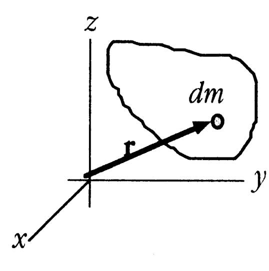
يمكن كتابة العلاقة (4-2) بدلالة مركباتها على المحاور الإحداثية بالشكل:

$$\begin{cases} MX_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots \\ MY_{cm} = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots \\ MZ_{cm} = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots \end{cases} \qquad (4-4)$$

4 - 3 مركز كتلة جسم صلب *(Center of Mass of Rigid Bodies)*

يمكن تحويل العلاقة (4-1) لايجاد موضع مركز كتلة جسم صلب (مستمر) بتجزئته إلى عدد كبير جداً من الجسيمات العنصرية اللامتناهية في الصغر بحيث يمكن اعتبار أي منها نقطة مادية dm حجمها dV صغير جداً بحيث يمكن تحديد موضعه بمتجه $\mathbf{r}$، كما في الشكل (4-2). عندها يصير موضع مركز الكتلة معطى بـ:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \qquad (5-4)$$



الشكل (4-2)

بتعريف الكثافة الحجمية (الموضعية) *(local volume density)* للمادة في الجسم الصلب عند الموضع $\mathbf{r}$ بالعلاقة:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{dV} \qquad (6-4)$$

تصير العلاقة (4-5):

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int_V \mathbf{r}\rho \, dV \qquad (7-4)$$

حيث V حجم الجسم الصلب كله.

يمكن الحصول على مركبات متجه موضع مركز الكتلة من (4-7) فنكتب:

$$X = \frac{1}{M}\int_V x\rho dV \quad , \quad Y = \frac{1}{M}\int_V y\rho dV \quad , \quad Z = \frac{1}{M}\int_V z\rho dV \qquad (8-4)$$

لو كان الجسم الصلب مستوياً، **بكثافة سطحية** $\sigma = dm/dS$ حيث S مساحة الجسم عندئذ تؤول العلاقة (4-7) إلى:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int_S \mathbf{r}\sigma dS \qquad (9-4)$$

بنفس الشكل ، لو كان الجسم متوزعاً بشكل طولي **بكثافة خطية** $\lambda = dm/dl$، حيث l طول الجسم، لأصبحت (4-7) بالشكل :

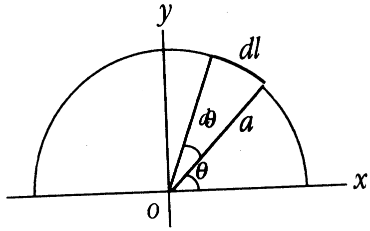
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int_l \mathbf{r}\lambda \, dl \qquad (10-4)$$

❐ مثل 4-1 مركز كتلة نصف دائرة

لنعتبر سلكاً على شكل نصف دائرة نصف قطرها a ولنحسب موضع مركز كتلته، فنأخذ منه جزءاً عنصرياً طوله dl، كما في الشكل (4-3) ونكتب من (4-10) :

$$X = \frac{1}{M}\int_l x\lambda \, dl$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_l y\lambda \, dl$$



الشكل (3-4)

باستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ)، نكتب:

$$x = a\cos\theta$$

$$y = a\sin\theta$$

كما نلاحظ من الشكل (3-4) أن:

$$dl = a\, d\theta$$

لذلك يكون:

$$X = \frac{1}{M}\int_0^{\pi}(a\cos\theta)(\lambda a d\theta) = 0$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_0^{\pi}(a\sin\theta)(\lambda a d\theta) = \frac{2a^2\lambda}{M}$$

كما أن كتلة السلك هي:

$$M = (\pi\, a)\lambda$$

لذا تصير Y :

$$Y = 2a/\pi$$

فموضع مركز الكتلة يقع على محور الصادات (oy) وهذا متوقع من تناظر السلك بالنسبة لهذا المحور. ❐

❐ مثل 2-4 مركز كتلة نصف قرص متجانس

لحساب موضع مركز كتلة نصف قرص رقيق متجانس نصف قطره a نجزئه إلى شرائح رقيقة موازية لمحور السينات طول كل منها $2x$ وعرضها dy، كما في الشكل

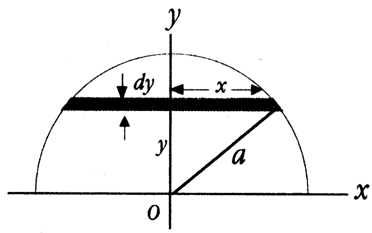
(4-4)، ونستخدم (6-5) لنكتب:

$$X = \frac{1}{M}\int_S x\sigma\, dS$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_S y\sigma\, dS$$

حيث يعطى السطح العنصري dS بالعلاقة:

$$dS = 2\,x\,dy$$



الشكل (4-4)

كما أن:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

فيكون

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

أي أن:

$$X = \frac{1}{M}\int_a^0 \sigma(x)(2x)\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx = 0$$

و

$$Y = \frac{1}{M}\int_a^0 \sigma\sqrt{a^2 - x^2}(2x)\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx = \frac{2\sigma a^3}{3M}$$

بملاحظة أن كتلة نصف القرص هي :

$$M = \left(\tfrac{1}{2}\pi a^2\right)\sigma$$

نجد:

$$Y = \frac{4a}{3\pi}$$

فيقع مركز الكتلة، في هذه الحالة، أيضاً، على oy بسبب التناظر.

من الواضح أن موضع مركز كتلة جسم صلب يعتمد على شكل الجسم فقط لاعلى اختيارنا للمحاور الإحداثية، بمعنى أن موضع مركز كتلة نصف قرص متجانس سيبقى عند نفس النقطة التي وجدناها فيما سبق سواء اخترنا المحاور بالطريقة السابقة أم لا.

4 - 4 مركز كتلة جسم صلب متجانس ومتناظر

إذا كان الجسم الصلب متجانساً ومتناظراً بالنسبة لنقطة، أو محور، أو مستو، فيمكن الاستفادة من ذلك لإيجاد مركز كتلته بسهولة. نلخص فيما يلي نصوص بعض النظريات المتعلقة بذلك:

1- اذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لمستو فإن مركز كتلته يقع في ذلك المستوي.

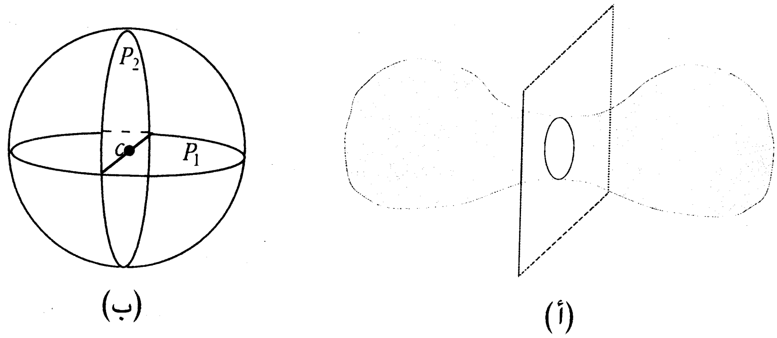
2- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لمستويين فإن مركز كتلته يقع على خط تقاطعهما.

3- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لثلاثة مستويات متقاطعة في نقطة واحدة فان مركز كتلته يقع عندها.

4- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لنقطة فان مركز كتلته يقع عند تلك النقطة.

كمثل على الحالة1 : نعتبر الجسم الموضح في الشكل (4-5 أ) فنلاحظ أنه متناظر بالنسبة للمستوي P (أي أنه من أجل كل نقطة في الطرف الأيمن من الجسم توجد نقطة مماثلة، على نفس البعد منه في الطرف الأيسر من الجسم)، لذلك يجب أن يقع مركز كتلة الجسم في هذا المستوي.

كمثل لبقية الحالات2 و3 و4: نعتبر الكرة المتجانسة الموضحة بالشكل (4-5 ب)، فهي متناظرة بالنسبة للمستويين P_1 و P_2 فيجب أن يقع مركز كتلتها على خط تقاطعهما، كما أنها متناظرة بالنسبة للنقطة O (مركزها الهندسي)، بالتالي فهذه النقطة هي مركز كتلتها ، كما هو معروف .



الشكل (5-4)

5-4 نظريتا بابس (Pappus Theorems)

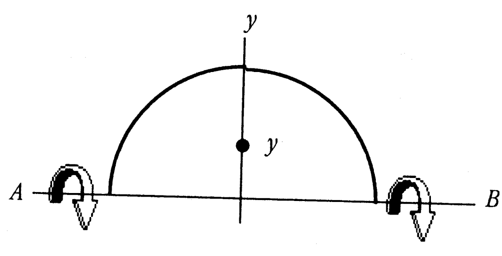
يمكن، في كثير من الأحيان، اختصار العمليات الرياضية اللازمة لحساب موضع مركز كتلة جسم صلب متجانس، متوزع بشكل طولي أو سطحي، باستخدام نظريتي بابس اللتين نلخصهما فيمايلي:

(أ) نظرية بابس الأولى: مركز كتلة منحنى مستو

"المساحة الناتجة عن دوران منحني مستو حول محور لايتقاطع معه تساوي طول المنحني مضروباً بالمسافة التي يقطعها مركز الكتلة خلال الدوران".

كتطبيق لنظرية بابس الأولى نعود لحساب موضع مركز كتلة سلك منحنى على شكل نصف دائرة، فنلاحظ أن المساحة الناتجة عن دوران هذا المنحني حول المحور AB في الشكل (6-4) تساوي مساحة كرة نصف قطرها a، فنكتب:

$$S = 4\pi a^2$$



الشكل (6-4)

بحسب نظرية بابس الأولى، بما أن مركز الكتلة يقع على المحورoy، بسبب التناظر، نكتب:

$$4\pi a^2 = (\pi a)(2\pi y)$$

حيث ترمزy لموضع مركز الكتلة علىoy.

فنجد من العلاقة السابقة أن:

$$y = \frac{2a}{\pi}$$

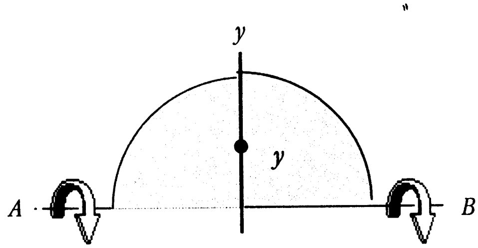
وهي نفس النتيجة التى حصلنا عليها في المثال (4-1) بوساطة التكامل.

(ب) نظرية بابس الثانية: مركز كتلة صفيحة مستوية

"الحجم الناتج عن دوران قطعة مستوية حول محور في مستويها، لا يتقاطع معها إلاّ عند طرفها، تساوي مساحة القطعة مضروبة بالمسافة التي يقطعها مركز الكتلة خلال الدوران"

كمثال على نظرية بابس الثانية، نحدد مركز كتلة نصف قرص متجانس. فندوره حول المحورAB، كما في الشكل (4-7)، ونلاحظ أن الحجم الناتج هو كرة، أي أن:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3$$



الشكل (4-7)

بحسب التناظر، فان مركزالكتلة يقع علىoy، لذلك نكتب:

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3 = (\tfrac{1}{2}\pi a^2)(2\pi y)$$

حيث $\pi a^2/2$ مساحة نصف القرص طبعا.

بالتالي نجد:

$$y=\frac{4a}{3\pi}$$

وهي نفس النتيجة التى وجدناها سابقاً أيضاً.

6-4 الزخم الخطي لعدة جسيمات ومبدأ حفظ الزخم الخطي

سنحدد في هذه الفقرة السرعة التي يتحرك بها مركز كتلة منظومة ما عندما تتحرك أجزاؤها، ونربط بين سرعة هذا المركز وسُرع مركبات المنظومة.

نشتق (2-4) فنجد:

$$M\dot{\mathbf{R}}_{cm} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_3 + \cdots \qquad (11-4)$$

لكن:

$$m_i\,\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i$$

حيث $\mathbf{p}_i$ الزخم الخطي للجسيم i، كما أن:

$$\mathbf{P}_{cm} = M\dot{\mathbf{R}}_{cm}$$

حيث $\mathbf{P}_{cm}$ الزخم الخطي لمركز الكتلة. لذلك نكتب (11-4) بالشكل:

$$\mathbf{P}_{cm} = M\dot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n \qquad (12-4)$$

فالزخم الخطي لمركز الكتلة يساوي مجموع الزخم الخطي لكل الجسيمات.

باشتقاق (12-4) نجد:

$$\frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt} = M\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \cdots \qquad (13-4)$$

لكن:

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$$

حيث $\mathbf{F}_i$ محصلة القوى المؤثرة على الجسيم i، التي تساوي مجموع القوى الداخلية المتبادلة بينها وبين بقية أجزاء المنظومة، بالإضافة للقوى الخارجية عن المنظومة.

بفرض أن محصلة القوى الداخلية المتبادلة بين أجزاء المنظومة كلها تساوي الصفر يكون:

$$\frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt} = M\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots = \mathbf{F}_{ext} \qquad (14-4)$$

حيث $\mathbf{F}_{ext}$ هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة .

لذا نكتب (4-14) بالشكل:

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt} \qquad (15-4)$$

أي أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على كل الجسيمات تساوي نسبة تغير الزخم الخطي لمركز الكتلة.

فمركز الكتلة يتحرك كجسم له كتلة الجسيمات كلهاوخاضع لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة عليها .

لهذه النتيجة أهمية كبيرة عند دراسة الحركة الانتقالية، أو الانسحابية، للأجسام الكبيرة الصلبة والمنظومات، إذ نعتبر الجسم نقطة مادية متوضعة عند مركز الكتلة خاضعة لمحصلة القوى الخارجية، وندرس حركتها تحت تأثير هذه المحصلة كما فعلنا في الفصل الأول.

نستنتج من العلاقة (4-15) أنه اذا كان:

$$\mathbf{F}_{ext} = 0 \qquad (16-4)$$

عندئذ يكون :

$$\mathbf{P}_{cm} = M\dot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n = \text{ثابت} \qquad (17-4)$$

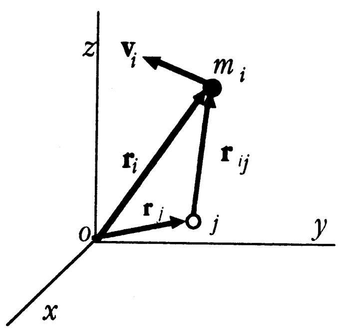
هذا هو مبدأ **حفظ الزخم الخطي** *(Conservation of Linear Momentum)* لعدة جسيمات يستفاد من مبدأ حفظ الزخم الخطي، بشكل رئيس، لدراسة حادثة التصادم.

4 - 7 الزخم الزاوي لعدة جسيمات ومبدأ حفظ الزخم الزاوي

لنفترض أن لدينا جسيماً m_i في الموضع $\mathbf{r}_i$ ولنحدد زخمه الزاوي بالنسبة للنقطة j المحددة بالمتجه $\mathbf{r}_j$ ، كما في الشكل (4-8)، فنكتب:

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{p}_i \qquad (18-4)$$

حيث $\mathbf{v}_i$ سرعة الجسيم i، بينما $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ متجه من النقطة j **إلى** موضع الجسيم i.



الشكل (4-8)

إذا كانت الجسيمات m_1 و m_2 و . . . و m_N موزعة في المواضع $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و . . . و $\mathbf{r}_N$ ، عندئذ يكون الزخم الزاوي الكلي لها بالنسبة للنقطة j هو:

$$\mathbf{L}_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{p}_i) \qquad (19-4)$$

لنفترض الآن أن النقطة j ثابتة، أي أن $\dot{\mathbf{r}}_j = 0$، عندئذ نجد من العلاقة السابقة:

$$\frac{d\mathbf{L}_j}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{r}_{ij}\times\mathbf{p}_i)=\sum_i[\frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt}\times\mathbf{p}_i+\mathbf{r}_{ij}\times\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}] \quad (20-4)$$

لكن:

$$\sum_i\frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt}\times\mathbf{p}_i=\sum_i\frac{d(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}{dt}\times\mathbf{p}_i=\sum_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\times\mathbf{p}_i=0$$

كما أن:

$$\sum_i\mathbf{r}_{ij}\times\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}=\sum_i\mathbf{r}_{ij}\times\mathbf{F}_i$$

فإذا وضعنا:

$$\boldsymbol{\tau}_j=\sum_i\mathbf{r}_{ij}\times\mathbf{F}_i \quad (21-4)$$

حيث تدل $\boldsymbol{\tau}_j$ على عزم القوى الخارجية الكلية المؤثرة على الأجسام بالنسبة للنقطة j وذلك بفرض أن عزم القوى الداخلية المتبادلة بين هذه الجسيمات بالنسبة لـ j معدوم.

من ثم تؤول (4-20) إلى:

$$\boldsymbol{\tau}_j=\frac{d\mathbf{L}_j}{dt} \quad (22-4)$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن معدل تغير الزخم الزاوي الكلي لمنظومة جسيمات حول نقطة بالنسبة للزمن تساوي عزم القوى الخارجية الكلي حول هذه النقطة. هذا هو **قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية**.

نلاحظ من (4-22) أنه إذا كانت محصلة العزوم المؤثرة على منظومة بالنسبة لنقطة ما تساوي الصفر فإن الزخم الزاوي الكلي لهذه المنظومة بالنسبة لنفس النقطة لايتغير.

$$\boldsymbol{\tau}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_j = \text{ثابت} \tag{23-4}$$

هذا هو **مبدأ حفظ الزخم الزاوي** *(Conservation of Angular Momentum)*.

إن مبدأ حفظ الزخم الزاوي من أهم مبادئ الحفظ في الفيزياء، بخاصة في الفيزياء الكمية، لأن أهم القوى الطبيعية، كالجاذبية والكهربائية، مركزية وعزمها معدوم بالنسبة لمركز القوة، لذا فإن المنظومات الطبيعية، كالذرات أو الأجرام السماوية، تتحرك بزخم زاوي ثابت دوماً وهي في حالة مستقرة.

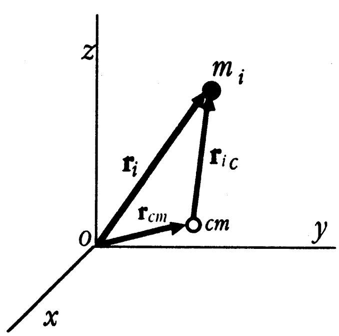
4-8 الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات ومبدأ حفظ الطاقة

نكتب الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات بالشكل:

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \tag{24-4}$$

فإذا حددنا موضع الجسيم m_i بالنسبة لمراقب ثابت بالمتجه $\mathbf{r}_i$، وبالنسبة لمركز الكتلة بالمتجه $\mathbf{r}_{ic}$. كما نحدد موضع مركز الكتلة بالنسبة لنفس المراقب الثابت بالمتجه $\mathbf{r}_{cm}$، كما في الشكل (4-9)، فنجد:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ic} + \mathbf{r}_{cm} \tag{25-4}$$



الشكل (4-9)

بالاشتقاق يكون:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{ic} + \mathbf{v}_{cm} \tag{26-4}$$

حيث $\mathbf{v}_{cm}$ سرعة مركز الكتلة، بينما $\mathbf{v}_{ic}$ سرعة الجسيم بالنسبة لهذا المركز.

من ثم نكتب(4-24) بالشكل:

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{ic} + \mathbf{v}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_{ic} + \mathbf{v}_{cm})$$

$$= \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{ic}^2 + \sum_i m_i (\mathbf{v}_{ic} \cdot \mathbf{v}_{cm})$$

لكن:

$$\sum_i m_i (\mathbf{v}_{ic} \cdot \mathbf{v}_{cm}) = 0$$

(برهن صحة هذه العلاقة)، كما أن:

$$\sum_i \tfrac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{c.m.}^2 = \tfrac{1}{2} \mathbf{v}_{c.m.}^2 \sum_i m_i = \tfrac{1}{2} M \mathbf{v}_{c.m.}^2$$

فتصير T بالشكل:

$$T = \tfrac{1}{2} M \mathbf{v}_{c.m.}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \qquad (27-4)$$

فالطاقة الحركية لمنظومة جسيمات هي مجموع الطاقة الحركية للحركة الانتقالية لمركز الكتلة (الحد الأول من الطرف الايمن من (4-27)) بالإضافة لمجموع الطاقة الحركية لكل الجسيمات بالنسبة لمركز الكتلة (الحد الثاني من الطرف الأيمن من (4-27)).

من جهة أخرى، إذا كانت القوى المؤثرة على المنظومة محافظة، عندئذ يمكن ايجاد طاقة وضع من الشكل:

$$V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N) \qquad (28-4)$$

أي تعتمد على مواضع الجسيمات فقط. عندئذ نكتب الطاقة الميكانيكية الكلية للمنظومة بالشكل:

$$E = T + V = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{ic}^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N) \qquad (29-4)$$

في هذه الحالة، يمكن إيجاد القوة المؤثرة على الجسيم i من طاقة وضعه بكتابة:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N) \qquad (30-4)$$

حيث يدل المؤثر (operator) ∇_i على أن عملية الاشتقاق تتم بالنسبة للجسيم i.
من ثم نجد مركبات $\mathbf{F}_i$ على المحاور الإحداثية بكتابة:

$$F_{iz} = -\frac{\partial V}{dz_i} \quad , \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{dy_i} \quad , \quad F_{ix} = -\frac{\partial V}{dx_i} \qquad (31-4)$$

4 - 9 التصادمات *(Collisions)*

مسألة تصادم جسمين ببعضهما من أهم المسائل في الفيزياء لأنها بسيطة الدراسة لكن غنية بما تعطية من معلومات عن الأجسام المتصادمة وطبيعة التصادم.

تنقسم التصادمات إلى قسمين:

(أ) **التصادمات المرنة**: وهي التي تبقى فيها الطاقة الكلية للجسيمات المتصادمة قبل وبعد التصادم ثابته لا تتغير.

(ب) **التصادمات غير المرنة**: وهي التي تختلف فيها الطاقة الكلية للجسيمات المتصادمة قبل التصادم عن الطاقة الكلية بعد التصادم.

4 - 9 - 1 التصادمات المرنة *(Elastic Collisions)* :

ليكن لدينا جسمان m_1 و m_2 يصطدمان ببعضهما بحيث أن زخمها الخطي قبل التصادم هو $\mathbf{p}_1$ و $\mathbf{p}_2$ ، على الترتيب، وبعد التصادم $\mathbf{p}_1'$ و $\mathbf{p}_2'$ على الترتيب أيضاً. عندئذ نستعمل مبدأي حفظ الزخم والطاقة فنكتب:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \qquad (32-4)$$

و

$$T_1 + T_2 = T_1' + T_2' \qquad (32-4)$$

يمكن كتابة العلاقة (4-33) بالشكل:

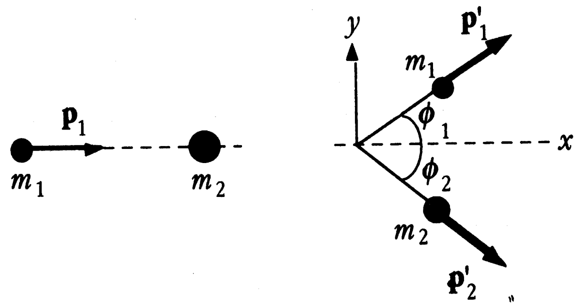
$$\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}=\frac{p_1'^2}{2m_1}+\frac{p_2'^2}{2m_2} \tag{34-4}$$

حيث وضعنا:

$$T_i=\frac{p_i^2}{2m_i}$$

حالة خاصة: الجسيم m_2 ساكن قبل التصادم؛ عندئذ نجد من العلاقتين (4-32) و (4-33) والشكل (4-10):

$$p_1=p_1'\cos\phi_1+p_2'\cos\phi_2$$
$$0=p_1'\sin\phi_1-p_2'\sin\phi_2$$
$$p_1^2=p_1'^2+\frac{m_2}{m_1}p_2'^2$$



الشكل (4-10)

باختصار ϕ_2 من المعادلات السابقة نجد:

$$\frac{p_1'}{p_1}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\phi_1\pm\sqrt{\left(\frac{m_1\cos\phi_1}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}} \tag{35-4}$$

تعطي (4-35) نسبة الزخم الخطي للجسم الأول بعد التصادم بالنسبة لزخمه الخطي قبل التصادم.

نميز هنا الحالات التالية :

(أ) $m_1 > m_2$ **حيث** نلاحظ أن المقدار:

$$\sqrt{\left(\frac{m_1 \cos\phi_1}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}}$$

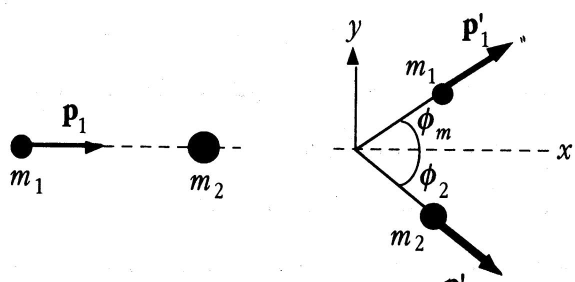
سيصير مساوياً للصفر عندما $\phi_1 = \phi_m$ حيث:

$$\left(\frac{m_1 \cos\phi_m}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$$

أي أن:

$$\cos\phi_m{}^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} \qquad (30-4)$$

نلاحظ أن ϕ_1لا يمكن أن تكون أكبر من ϕ_m وإلاّ فإن $\cos\phi_1 < \cos\phi_m$ مما سيجعل المقدار المجذورفي العلاقة (29-4) سالباً و هذا غير ممكن طبعاً. لذا نستنتج أنه عندما يصطدم جسيم ثقيل m_1 بجسيم أخف منه m_2 فإنه لا يمكن أن يتشتت عن مساره بزاوية أكبر من ϕ_mالمعطاة بالمعادلة (30-4) كما في الشكل (11-4).



الشكل (11-4)

نستنتج من (35-4) أنه عندما تكون $\phi_1 < \theta_m$ فإن p'_1 يمكن أن تأخذ قيمتين

أحداهما كبيرة تدل على تصادم جانبي *(glancing collision)*، والثانية صغيرة تدل على تصادم رأسي *(head-on collision)* تقريباً.

(ب) $m_1=m_2$: نلاحظ في هذه الحالة من المعادلة (4-35) أن:

$$\begin{cases} p_1' = p_1 \cos\phi_1 \\ p_2' = p_1 \sin\phi_1 \end{cases} \qquad (36-4)$$

من الواضح أن ϕ_1 تتغير بين $\phi_1=0$(لا تصادم) الى $\phi_1=\pi/2$.

(جـ) $m_1<m_2$: في هذه الحالة يمكن أن تأخذϕ_1كل القيم من $\phi_1=0$(لا تصادم) الى $\phi_1=\pi$(أي ارتداد أو تشتت خلفي*(backscattering)*).

في حالة الارتداد الخلفي فإن $\phi_1=\pi$و$\phi_2=0$، ويعطى الزخم الخطي للجسيمين المتصادمين بعد التصادم بدلالة الزخم الابتدائي للجسيم القادم على النحو:

$$\begin{cases} p_1' = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_1 \\ p_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} p_1 \end{cases} \qquad (38-4)$$

4 - 9 - 2 التصادمات غير المرنة *(Inelastic Collisions)*:

نقسم التصادمات غير المرنة إلى قسمين :

(أ) التصادمات غير المرنة كلياً *(Totally Inelastic Collisions)* يتغير فيها عدد الأجسام المتصادمة نتيجة التصادم، كأن تلتصق الجسيمات المتصادمة ببعضها وتصير جسماً واحداً، أو أن ينشطر جسم إلى جسمين أو أكثر.

(ب) التصادمات غير المرنة جزئياً *(Partially Inelastic Collisions)* تبقى فيها الجسيمات المتصادمة منفصلة عن بعضها وإن اختلفت كُتلها نتيجة للتصادم.

في كلا الحالتين من التصادمات غير المرنة نكتب من مبدأي حفظ الزخم والطاقة

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \\ T_1 + T_2 - (T_1' + T_2') = Q \end{cases} \qquad (39-4)$$

حيث Q الفرق في الطاقة الكلية للأجسام قبل وبعد التصادم.

إذا كانت $Q>0$ فان بعض الطاقة تتحرر نتيجة التصادم ونقول إن التصادم **مُصْدِر للطاقة** (*exoergic*)، وإذا كانت $Q<0$ فان التصادم بحاجة لبعض الطاقة حتى يتم، ونقول إن التصادم **ماص للطاقة** (*endoergic*).

(أ) التصادمات غير المرنة كلياً

سندرس حالة اصطدام جسم m_1 يسير بسرعة $\mathbf{v}_0$ مع جسم ثانٍ m_2 ساكن $(\mathbf{v}_2=0)$ بحيث يلتصق به بعد التصادم، كما في الشكل (4-12)، فنجد من مبدأ حفظ الزخم :

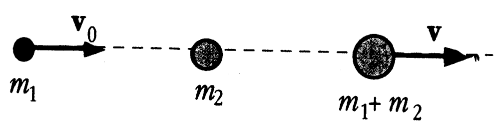
$$m_1\mathbf{v}_0=(m_1+m_2)\mathbf{v} \qquad (40-1)$$

حيث $\mathbf{v}$ سرعة الجسمين بعد التصاقهما ببعضهما.

يمكن البرهان أن الطاقة لا تبقى محفوظة في هذه الحالة بل يضيع جزء منها مساوٍ الى:

$$Q=\frac{1}{2}m_1v_0^2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)=\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)T_0 \qquad (41-1)$$

حيث T_0 الطاقة الحركية الأصلية للجسم الأول.

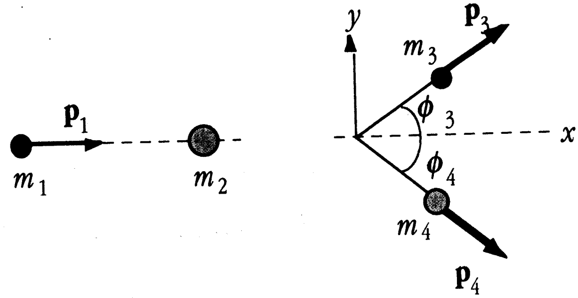


الشكل (4-12)

(ب) التصادمات غير المرنة جزئياً

لنعتبر تصادم جسم m_1 زخمه الخطي $\mathbf{p}_1$ بجسم ساكن m_2 بحيث يؤدي التصادم لإنتاج جسمين جديدين m_3 و m_4، كما هو موضح بالشكل (4-13)، عندئذ نكتب من مبدأ حفظ الزخم:

$$\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'$$



الشكل (13-4)

باختيار المحاور الإحداثية كما في الشكل (13-4) نجد من العلاقة السابقة:

$$(42-4) \qquad \begin{cases} p_1 = p_3 \cos\phi_3 + p_4 \cos\phi_4 \\ 0 = p_3 \sin\phi_3 - p_4 \sin\phi_4 \end{cases}$$

كما نكتب من مبدأ حفظ الطاقة:

$$(43-4) \qquad T_1 - (T_3 + T_4) = Q$$

باختصار ϕ_4 من المعادلتين (42-4) نجد:

$$(44-4) \qquad p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos\theta_3$$

بوضع $T=p^2/2m$ في العلاقة السابقة نحصل على قيمة الطاقة الضائعة (أو المكتسبة):

$$(45-4) \qquad Q = T_1\left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - T_3\left(1 + \frac{m_1}{m_4}\right) + 2\sqrt{(m_1 m_3 / m_4^2) T_1 T_3}\ \cos\phi_3$$

تستعمل العلاقة (45-4) في الفيزياء النووية لمعرفة القيمة Q $(Q\text{-}value)$ الناتجة عن أو الضرورية لإجراء أي تفاعل نووي.

4 - 10 معامل الارتداد *(Coefficient of Restitution)*

عندما يصطدم جسمان m_1 وm_2 ببعضهما اصطداماً رأسياً (على نفس الخط) فإن هناك علاقة تربط بين سرعتهما النسبية قبل وبعد التصادم. إذ وجد تجريبياً أن:

$$v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2) \qquad (46-4)$$

حيث v_1 وv_2 سرعتيهما قبل التصادم و v_1' و v_2' سرعتيهما بعد التصادم، على الترتيب بينما يدعى e **معامل الارتداد** *(coefficient of restitution)* وتتراوح قيمته بين 0 في حالة تصادم غير مرن كلياً و 1 في حالة تصادم مرن تماماً.

ترمز v_2-v_1 **لسرعة التقارب النسبية** *(relative speed of approach)* بينما ترمز $v_2' - v_1'$ **لسرعة التباعد النسبية** *(relative speed of seperation)*.

يمكن استخدام العلاقة (4-46) بالاضافة الى مبدأ حفظ الزخم لدراسة حادثة تصادم جسمين بشكل رأسي على خط مستقيم.

4 - 11 مسألة الجسمين *(The Two -Body Problem)*

سنعتبر في هذه الفقرة حركة منظومة مؤلفة من جسمين m_1 و m_2 يؤثران على بعضهما بقوتين متبادلتين خاضعتين لقانون نيوتن الثالث فقط. لهذه المسألة أهمية خاصة لأنها تنطبق على أهم المنظومات الطبيعية كالأرض والقمر، أو الأرض والشمس، أو الإلكترون والبروتون في ذرة الهيدروجين، وهكذا دواليك.

فإذا رمزنا لموضع الجسيمين بـr_1 و r_2 بالنسبة لمراقب ثابتO، كما في الشكل (4-14)، عندئذ نكتب من قانون نيوتن الثاني:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{1e} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{2i} + \mathbf{F}_{2e} \end{cases} \qquad (47-4)$$

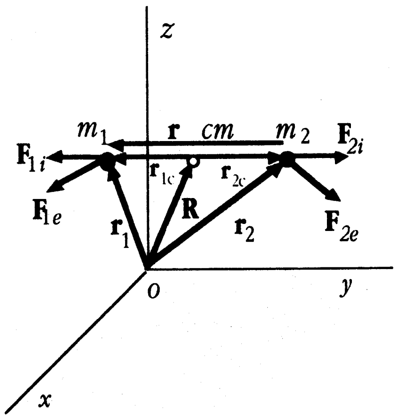
حيث تشير $\mathbf{F}_{1i}$(أو $\mathbf{F}_{2i}$) الى القوة الداخلية التي يؤثر بها m_2 (أو m_1) على m_1 (أو m_2) على الترتيب.

حسب قانون نيوتن الثالث فان:

$$\mathbf{F}_{1i} = -\mathbf{F}_{2i} \tag{48-4}$$

أما $\mathbf{F}_{1e}$ و $\mathbf{F}_{2e}$ فهما القوى الخارجية المؤثرة على الجسيمm_1 و m_2، على الترتيب، اللتين نفترض أنهما تحققان العلاقة:

$$\frac{\mathbf{F}_{1e}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_{2e}}{m_2} \tag{49-4}$$



الشكل (14-4)

لنعرف الآن مركز كتلة الجسيمين بالعلاقة:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{50-4}$$

كما نعرف المسافة النسبية بينهما بالعلاقة:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{51-4}$$

عندئذ نجد من العلاقتين الأخيرتين:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \tag{52-4}$$

و

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \qquad (53-4)$$

بتعويض $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ في (4-47) وجمع المعادلتين الناتجتين نجد:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{1r} + \mathbf{F}_{2e} \qquad (54-4)$$

من ناحية أخرى، نضرب أولى المعادلتين (4-47) بـ m_2 والثانية بـ m_1 ونطرح فنجد:

$$(m_1 m_2)\ddot{\mathbf{r}} = (m_1 + m_2)\mathbf{F}_{1i} \qquad (55-4)$$

بوضع:

$$M = m_1 + m_2$$

وتعريف **الكتلة المختزلة** *(reduced mass)* μ بالعلاقة:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (56-4)$$

تؤول المعادلتان (4-54) و (4-55) إلى:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e \qquad (57-4)$$

و

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{1i} \qquad (58-4)$$

حيث $\mathbf{F}_e$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيمين:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_{1e} + \mathbf{F}_{2e} \qquad (59-4)$$

تعطى (4-57) معادلة حركة مركز الكتلة بالنسبة لمناط الإسناد الثابت كأنه جسم كتلته الكلية M خاضع لمحصلة القوى الخارجية الكلية $\mathbf{F}_e$. بينما تعطي (4-58) حركة جسم كتلته μ موجود في موضع الجسيم m_1 ويتحرك بالنسبة لـ m_2 خاضعاً للقوة F_{1i} التي يؤثر بها هذا الأخير عليه.

يمكن استعمال المعادلتين (52-4) و(53-4) لإيجادسرعة الجسيمين ثم طاقتهما الحركية الكلية، فنجد:

$$T = \tfrac{1}{2} M V^2 + \tfrac{1}{2} \mu v^2 \qquad (60-4)$$

حيث:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \qquad (61-4)$$

التي تدل على سرعة الكتلة المختزلة بالنسبة لـ m_2، بينما

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} \qquad (62-4)$$

التي تدل على سرعة مركز الكتلة بالنسبة لمناط الإسناد الثابت O. (برهن 4-60).

4 - 12 الاحداثيات بالنسبة لمركز الكتلة *(Center of Mass Coordinates)*

وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا كان لدينا جسيمين m_1 و m_2 في الموضعين r_1 و r_2 بالنسبة لمراقب ثابت كما في الشكل (14-4)، فإن موضع مركز كتلتهما (C) يعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)$$

كما وجدنا أنه يمكن تعيين موضع الجسيمين بالنسبة لمركز كتلتهما من العلاقتين:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}$$

و

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r}$$

لنحدد الآن موضع الجسيمين بالنسبة لمركز كتلتهما فنلاحظ من الشكل (14-4) أن:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{1c} & \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{1c} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{2c} & \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{2c} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} \end{cases} \tag{63-4}$$

بالتعويض عن r_1 و r_2 من المعادلتين (52-4) و (53-4) نجد:

$$\mathbf{r}_{1c} = \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \tag{64-4}$$

و

$$\mathbf{r}_{2c} = -\frac{\mu}{m_2}\mathbf{r} \tag{65-4}$$

العلاقات السابقة صحيحة دوماً، كما أن مشتقاتها بالنسبة للزمن صحيحة أيضاً، أي أن:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) \tag{66-4}$$

حيث $\mathbf{V}$ سرعة مركز الكتلة، كما نجد من المعادلة (63-4) و (64-4):

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{v} \tag{67-4}$$

و

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v} \tag{68-4}$$

حيث تدل $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ على سرعتي الجسيمين بالنسبة لمناط الإسناد O (المراقب الثابت)، بينما تدل $\mathbf{v}$ على السرعة النسبية بينهما.

أخيراً نجد من المعادلتين (64-4) و(65-7) أن سرعتي الجسيمين بالنسبة لمركز كتلتهما، $\mathbf{v}_{1c}$ و $\mathbf{v}_{2c}$، بدلالة السرعة النسبية بينهما هما:

$$\mathbf{v}_{1c} = \frac{\mu}{m_1}\mathbf{v} \tag{69-4}$$

و

$$\mathbf{v}_{2c} = -\frac{\mu}{m_2}\mathbf{v} \qquad (70-4)$$

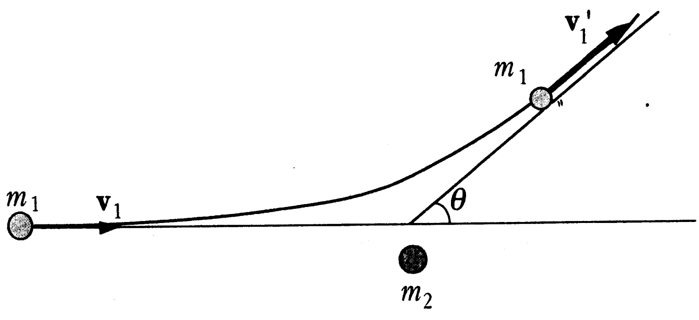
نستنتج من (4-69) و (4-70) أن الزخم الخطي الكلي للجسيمين بالنسبة لمركز الكتلة يساوي الصفر دوماً، لأن:

$$m_1\mathbf{v}_{1c} + m_2\mathbf{v}_{2c} = 0 \qquad (71-4)$$

سنستفيد من هذه المعادلة عند دراسة اصطدام جسيمين ببعضهما وتشتتهما بعد ذلك لإيجاد العلاقة بين زاوية التشتت بالنسبة لمراقب ثابت في المختبر ومراقب يتحرك مع مركز الكتلة.

4 - 13 اصطدام جسيمين ببعضهما وتشتت رزرفورد

ليكن لدينا جسيماً m_1 يتحرك بسرعة $\mathbf{v}_1$ (بالنسبة لمراقب في المختبر) وآخر m_2 ساكن، ولنفترض أن القوى الوحيدة المؤثرة عليهما هى قوى داخلية (مثل التجاذب الكتلي أو التجاذب و التنافر الكهربائي). فيقترب الجسيم m_1 من m_2 إلى مسافة معينة ثم ينحرف عن مساره بزاوية θ، كما هو موضح بالشكل (4-15) .



الشكل (4-9)

بما أن $\mathbf{v}_2=0$ لذلك نجد من العلاقة (4-66) أن:

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{M}\mathbf{v}_1 = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_1 \qquad (72-4)$$

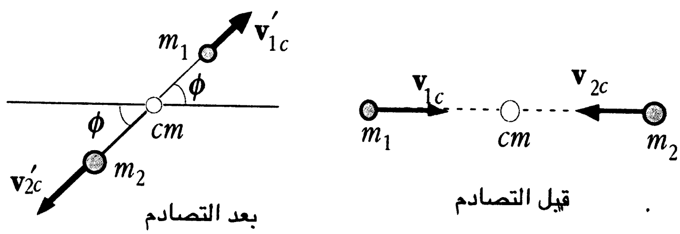
كما نجد من العلاقات (4-63) أن:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{1c} \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{2c} \end{cases} \qquad (73-4)$$

تكمن أهمية العلاقات (4-72) و(4-73) في أنها تربط بين سرعة أي من الجسيمين في المختبر بالنسبة لمراقب ثابت ($\mathbf{v}_1$ أو $\mathbf{v}_2$) مع سرعة هذا الجسيم بالنسبة لمراقب يتحرك مع مركز الكتلة ($\mathbf{v}_{1c}$ أو $\mathbf{v}_{2c}$)، كما أنها صحيحة قبل وبعد التصادم.

من جهة أخرى، عرّفنا زاوية التشتت بين سرعة الجسيم القادم قبل التصادم وسرعته بعد التصادم، أي بين المسار الابتدائي والنهائي. فنجد من الشكل (4-15) أن زاوية التشتت θمحصورة بين$\mathbf{v}_1$ و$\mathbf{v}'_1$ بالنسبة لمراقب في المختبر.

أما بالنسبة لمراقب يتحرك مع مركز الكتلة فان حادثة التصادم والتشتت تبدو له مختلفة بعض الشيء لأن الزخم الخطي الكلي للجسمين قبل وبعد التصادم بالنسبة لهذا المراقب يجب أن يكون مساوياً للصفر، بحسب العلاقة (4-72)، لذلك تظهر حادثة التصادم بالنسبة لمركز الكتلة كما هو مبين بالشكل (4-16).



الشكل (4-16)

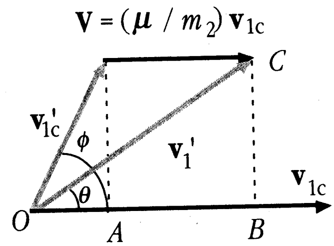
الآن: نجد من أولى العلاقتين (4-73) والمعادلة (4-72) أن:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_{1c} \qquad (74-4)$$

بالتالي فإن:

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_{1c} + \mathbf{v}'_{1c} \qquad (75-4)$$

نستنتج من العلاقة (4-75) أنه إذا رسمنا المتجهين $\mathbf{v}'_{1c}$ و $\mu\,\mathbf{v}_{1c}/m_2$ فان محصلتهما هي $\mathbf{v}'_1$، كما في الشكل (4-17) حيث نلاحظ أن اتجاه السرعة الابتدائية للجسيم m_1 هو واحد سواء بالنسبة لمركز الكتلة أو بالنسبة للمختبر.



الشكل (4-17)

ونجد من الشكل (4-17) أن:

$$\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}+\overline{AB}} \qquad (76-4)$$

لكن

$$\overline{BC} = \mathbf{v}'_{1c}\sin\phi$$

و

$$\overline{OA} = \mathbf{v}'_{1c}\cos\phi$$

و

$$\overline{AB} = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_{1c}$$

فيكون:

$$\tan\theta = \frac{v'_{1c}\sin\phi}{v'_{1c}\cos\phi + (\mu/m_2)v_{1c}} \qquad (77-4)$$

أو

$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\gamma + \cos\phi} \qquad (78-4)$$

حيث:

$$\gamma = \frac{m_1 v_1}{v'_{1c}(m_1 + m_2)} \qquad (79-4)$$

يمكن البرهان أنه في حالة التصادم المرن (Q=0) فإن:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \qquad (80-4)$$

بينما تعطى في حالة التصادم غير المرن بالعلاقة:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2}[1 - \frac{Q}{T}(1 + \frac{m_1}{m_2})]^{-1/2} \qquad (81-4)$$

حيث T الطاقة الحركية للجسيم القادم طبعاً.

نلاحظ أخيراً أنه في حادثة التصادم فإن معادلتي حفظ الزخم والطاقة في منظومة مركز الكتلة تكتبان بالشكل:

$$\mathbf{p}_{1c} + \mathbf{p}_{2c} = \mathbf{p}'_{1c} + \mathbf{p}'_{2c} = 0 \qquad (82-4)$$

و

$$\frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}^2}{2m_1} = \frac{p_{1c}'^2}{2m_1} + \frac{p_{1c}'^2}{2m_1} + Q \qquad (83-4)$$

حيث Q كمية الطاقة الضائعة أو المكتسبة في التصادم .

يمكن كتابة العلاقة (4-82) بالشكل:

$$\frac{p_{1c}^2}{2\mu} = \frac{p_{1c}'^2}{2\mu} + Q \qquad (83-4)$$

حيث μ الكتلة المختزلة.

4 - 14 أمثلة

❐ **مثل 44** في تجربة تشتت نووي تطلق حزمة من جسيمات α(نواة ذرة الهيليوم) طاقتها 4 MeV على اسطوانة صغيرة تحوي غاز الهيليوم فتتشتت بعض جسيمات α بزاوية 30° في منظومة المختبر. جد الطاقة الحركية للجسيمات المتشتتة والنوى المرتدة، وزاوية التشتت في منظومة مركز الكتلة.

الحل: في حالة تصادم جسمين متماثلين بشكل مرن فإن الزاوية بينهما بعد التصادم هي90° أي أن$\phi_1+\phi_2=90^\circ$، لذا نكتب من حفظ الزخم والشكل(4-10):

$$p_1 = p_1' \cos\phi_1 + p_2' \cos\phi_2 = p_1' \cos\phi_1 + p_2' \sin\phi_1$$

و

$$0 = p_1' \sin\phi_1 - p_2' \sin\phi_2 = p_1' \sin\phi_1 - p_2' \cos\phi_1$$

بما أن $\phi_1=30^\circ$ لذلك نجد من حل المعادلتين السابقتين:

$$p_1' = p_1 \cos\phi_1 = p_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و

$$p_2' = p_1 \sin\phi_1 = p_1 \frac{1}{2}$$

وتؤول معادلة حفظ الطاقة الحركية في هذه الحالة إلى:

$$T_1' = \frac{p_1'^2}{2m_1} = \frac{3}{4}\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{3}{4}T = 3\ \text{MeV}$$

و

$$T_2' = \frac{p_2'^2}{2m_1} = \frac{1}{4}\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{1}{4}T = 1\ \text{MeV}$$

ويمكن إيجاد زاوية التشتت في منظومة مركز الكتلة من العلاقة (4-72) مباشرة:

$$\theta = 2\phi_1 = 60^\circ$$ ❐

❐ **مثل 5-4** يصطدم پروتون كتلته m وسرعته $\mathbf{v}_0$ بنواة ذرة هيليوم ساكنة كتلتها $4m$ فيتشتت بزاوية $45°$ عن مساره الأصلي. ماسرعة كل جسيم بعد التصادم إذا كانت الطاقة الضائعة Q تساوي ربع طاقة الپروتون الابتدائية، ومازاوية التشتت في منظومة مركز الكتلة؟

الحل: نكتب مبدأ حفظ الزخم الخطي:

$$m\mathbf{v}_{0p} = m_p \mathbf{v}_p + m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$$

بملاحظة أن $m_a=4m_p$ وأخذ مركبتي العلاقة السابقة نجد:

$$v_0 = v_p' \cos 45° + 4v_\alpha'$$

و

$$0 = v_p' \sin 45° - 4v_\alpha' \sin\phi$$

كما نكتب من حفظ الطاقة:

$$\tfrac{1}{2} m_p v_0^2 = \tfrac{1}{2} m_p v_p'^2 + \tfrac{1}{2}(4m_p)v_\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} m_p v_0^2)$$

ومنه:

$$16v_\alpha' = 3v_0^2 - 4v_p'^2$$

بحل المعادلات الثلاث السابقة بالنسبة لـ v'_p، وأخذ الجذر الموجب فقط، نجد:

$$v_p' = \frac{v_0}{10}(\sqrt{2} \pm \sqrt{42}) \approx 0.79 v_0$$

كما نجد مركبتي سرعة الپروتون النهائية:

$$v_{px}' = v_{py}' = \frac{v_p'}{\sqrt{2}} \approx 0.56 v_0$$

كذلك نجد سرعة ألفا بعد التصادم:

$$v_\alpha' \approx 0.18 v_0$$

بالاستفادة من معادلات حفظ الزخم نجد زاوية تشتت ألفا:

$$\tan\phi = \frac{v_p'}{\sqrt{2}v_0 - v_p'} \approx 1.26 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 51.2^\circ$$

الآن: لإيجاد زاوية تشتت البروتون في منظومة مركز الكتلة نستخدم العلاقة (4-79) و (4-81) فنجد:

$$\theta \approx 57.3^\circ$$ ❐

مسائل

4-1 ماموقع وزخم مركز كتلة منظومة مؤلفة من كتل متساوية $(m = 1 \text{ kg})$ موجودة في المواضع ولها السرع التالية: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$، $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i}$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{j}+\mathbf{k}$، $\mathbf{v}_2 = \mathbf{j}$ و $\mathbf{r}_3 = \mathbf{k}$ ، $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

4-2 ماالطاقة الحركية للمنظومة المذكورة في المسألة 4-1 ومازخمها الزاوي بالنسبة للمبدأ O؟

4-3 يقع قرص رقيق نصف قطره a في المستوى xy بحيث يقع مركزه عند نقطة المبدأ وكثافة النصف الموجود فوق محور السينات σ بينما كثافة النصف الأسفل σ'. جد مركز كتلة القرص.

4-4 حدد باستخدام نظريتي بابس مركز كتلة مثلث قائم الزاوية طولي ضلعيه a و b إذا علمت أن حجم مخروط مساحة قاعدته A وارتفاعه h هو $Ah/3$.

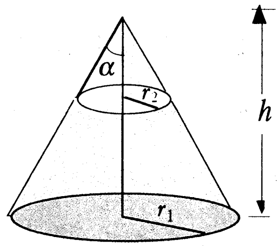
4-5 برهن أن نظرية بابس الثانية صحيحة حتى في الحالة التي يتقاطع فيها محور الدوران مع السطح شريطة أن نأخذ الفرق بين الحجمين الناتجين عن دوران القطعتين الحاصلتين من تقاطع محور الدوران مع السطح.

4-6 جد مركز كتلة سلك منحني على شكل نصف دائرة نصف قطرها a. جد أيضاً أنصاف أقطار الدوران حول المحاور ox و oy و oz التي تمر من مركز الكتلة حيث oz عمودي على سطح الدائرة.

4-7 (أ) جد العلاقة التي تعطي نصف قطر الدوران لقطعة مستقيمة طولها l حول

محور يمر من أحد طرفيها ويصنع زاوية αمعها. (ب) استخدم هذه النتيجة لحساب عزم عطالة أضلاع هرم متساوي الأضلاع حول محور يمر من مركزه وأحد رؤوسه.

8-4 جد مركز كتلة مخروط كتلته m، وارتفاعهh، وزاويته الرأسية α، حول محور تناظره وحول محور يمر من ذروته عمودياً على محور التناظر. استفد من نتائجك لايجاد مركز كتلة مقطع من المخروط، كما هو موضح بالشكل (18-4).



الشكل (18-4)

9-4 مامركز كتلة كل من الأجسام المتجانسة التالية:(أ) منحني على شكل ربع دائرة؟ (ب) سطح على شكل ربع قرص. (جـ) المساحة المحصورة بين المنحني $x^2=by$ والخط $y=b$؟ (د) الحجم المحصور بين السطح $z=(x^2+y^2)/b$ و المستوي $z=b$؟

10-4 جد مركز كتلة نصف كرة صلبة نصف قطرها a وتتغير كثافتها خطياً مع البعد عن المركز من الصفر عند المركز إلى ρ_0 عند الطرف. ماالجواب اذا كانت الكثافة ثابتة دوماً؟

11-4 أين يقع مركز كتلة كرة صلبة نصف قطرها R اقتطع من داخلها جزء كروى نصف قطره $R/2$ ويقع مركزه على بعد $R/2$ من مركز الكرة الأصلية؟

12-4 تنطلق رصاصة كتلتها m بسرعة v_0 بالنسبة لبندقية كتلتها M. ماسرعتها بالنسبة للأرض؟

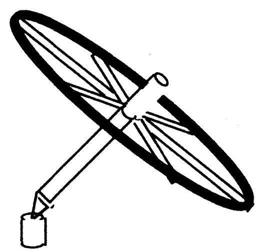
13-4 تنطلق قذيفة من مدفع بزاوية $45°$ وسرعة v_0 وعند وصولها لأعلى ارتفاع لها تنشطر إلى قسمين يسقط أحدها مباشرة للأسفل بسرعة $2v_0$. ماسرعة واتجاه القسم الثاني بعد الانفجار مباشرة؟

14-4 يتألف **البندول القذفي** *(ballistic pendulum)* من قطعة خشبية كتلتها M معلقة

بحبل طوله L مثبت من طرفه الآخر بسقف المختبر ويستخدم لمعرفة سرعة رصاصة كتلتهاm قبل اصطدامها به مباشرة عندما يكون في وضع شاقولي إذ تنحرف المنظومة بعد اختراق الرصاصة للبندول واستقرارها بداخله عن الشاقول بزاوية صغيرة θ. جد السرعة الابتدائية للرصاصة بدلالة M و m و L و θ.

15-4 تعلق كفة ميزان كتلتهاm_1 بذراعٍ مهملة الكتلة طولهاL ويمكنها الدوران حول نقطة ثابتة. ماالزاوية التي ستصل إليها الكفة عندما تهوي من زاوية θ بحيث أنها تغرف كمية m_2 من الرمل عند وصولها لأخفض نقطة من مسارها؟

16-4 برهن أن محور الجيروسكوب(*gyroscope*) الموضح في الشكل (4-19) سيدور بسرعة زاوية $\omega_p=g\,l/R^2\omega^2$ حول oz عندما يدور دولاب الجيروسكوب بسرعة زاوية ω حول محوره بفرض أن كتلته M متوضعه على محيطه و R نصف قطر الدولاب و l بعد مركز كتلته عن نقطة الارتكاز.



الشكل (4-19)

17-4 يدور كوكب نصف قطره a حول الشمس في مدار دائري نصف قطره r_0 بسرعة زاوية ω، كما يدور حول محوره بسرعة زاوية ω_0 بشكل عمودي على مستوي مساره حول الشمس. جد العلاقة التي تعطي تغيرات نصف القطرr بدلالة ωالتي تتناقص نتيجة قوى المد والجزر المتشكلة على سطح الكوكب لوجوده على مقربة من الشمس.

18-4 يصطدم جسيمm_1 بآخرm_2 ساكن ليتشتت الأول بزاويةθ_1والثاني بزاوية θ_2. ماالنسبة m_1/m_2 إذا كان التصادم تام المرونة؟

19-4 يصطدم جسيمm_1 طاقته الحركية T_0 بآخرm_2 ساكن اصطداماً مرناً فيتشتت الأخير صانعاً زاوية θ_2مع اتجاه m_1 الأصلي. برهن أن الطاقة التي يكسبهاm_2

ستكون أكبر مايمكن في تصادم رأسي *(head-on)* وأن الطاقة التي يخسرها m_1 في هذه الحالة تساوي $4m_1m_2T_0/(m_1+m_2)^2$.

20-4 يصطدم بروتون زخمه p_1 بنواة ساكنة اصطداماً مرناً ويتشتت بزاوية θ وزخم p_2 ماكتلة النواة بدلالة النسبة p_2/p_1 ؟ كيف يمكن التأكد من أن التصادم كان تام المرونة فعلاً؟

21-4 يصطدم جسيم m_1 بآخر m_2 ساكن اصطداماً مرناً. (أ) ماالزاوية التي يجب أن نضع عندها كاشفاً *(detector)* لتحري الجسيمات m_1 التي فقدت نصف زخمها الابتدائي؟ (ب) ماالنسبة m_1/m_2 التي تجعل هذه المسألة قابلة للحل؟

22-4 برهن أن معامل الارتداد e يساوي الواحد في التصادمات المرنة.

23-4 ماالطاقة الضائعة (أو المكتسبة) Q في تصادم رأسي بين جسيم m_1 سرعته v_1 وآخر m_2 ساكن مع العلم أن معامل الارتداد هو e؟

24-4 يصطدم جسيم m_1 زخمه p_1 بشكل مرن مع آخر m_2 زخمه p_2 ويتحرك باتجاه معاكس للأول. ماالزخم النهائي لـ m_1 إذا تشتت بزاوية θ_1؟

25-4 تصطدم كرة بلياردو طاقتها الحركية T_0 بأخرى مماثلة لها ساكنة على طاولة أفقية ملساء فتشتت الكرتان بزاويتان $\pm\theta$ بالنسبة للمسار الأصلي للأولى. برهن أنه إذا لم تتحول الطاقة لأي شكل آخر فإن الطاقة الحركية الدورانية التي اكتسبتها الكرتان نتيجة التصادم" تساوي $[1-(1/2\cos^2\theta)]T_0$.

26-4 ينشطر جسيم غير مشحون m في جناح فقاعات فينتج جسيمان آخران m_1 و m_2 زخمهما p_1 و p_2 ، على الترتيب، الزاوية بينهما α. ماقيمة واتجاه زخم m الأصلي وماالقيمة Q لهذا التفاعل ؟

27-4 تسقط كرة صغيرة من ارتفاع h فوق الأرض على مستو آخر يميل بزاوية α فترتد عنه لترتفع في الهواء وتعود للاصطدام به مرة ثانية، وهكذا دواليك. برهن أنه إذا كان معامل الارتداد e فإن الكرة سترتطم بالمستوي في المرة الثانية عند نقطة تبعد مسافة $4\varepsilon(1+\varepsilon)h\sin\alpha$ إلى أسفل من نقطة الارتطام الأولى.

28-4 برهن أن مجموع المسافات الشاقولية التي ترتفع إليها الكرة المذكورة في المسألة 4-27 قبل أن تنتهي الارتدادات كلياً هو $h(1+\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2)$.

29-4 تتحرك ثلاث كتل متماثلة على خط مستقيم، في لحظة معينة يكون لها المواضع والسرع التالية $(-1,0,+1)$ و $(4v_0, 2v_0, v_0)$، على الترتيب. ماالسرع النهائية للكتل إذا اصطدمت الكيل ببعضها وكانت كل التصادمات تامة المرونة؟

30-4 تمر سفينة فضاء كتلتها m وسرعتها v_0 بالقرب من القمر فتصل لأقرب مسافة R عن مركزه بسرعة عمودية على سرعة دوران القمر حول الأرض v. برهن أنه إذا مرت السفينة خلف القمر فإن طاقتها ستزداد واحسب مقدار الزيادة مفترضاً أن كتلة القمر M أكبر بكثير من كتلة السفينة.

31-4 يقترب جسم كتلته m وسرعته v_0 من جسم آخر كتلته $2m$ ساكن يبعد عن خط مسار الأول s. ماقيمة واتجاه السرعة النهائية لكل منهما؟

32-4 يصطدم جسيم m زخمه p_1 باخر مماثل ساكن فيصير زخمهما p'_1 و p'_2 والزاوية بينهما φ. برهن أن الطاقة الضائعة تساوي $Q = p'_1 p'_2 \cos\varphi / 2m$.

33-4 في تفاعل نووي يصطدم جسيم أول m_1 بآخر m_2 ساكن فينتج جسيمين m_3 و m_4. ماطاقة m_1 بدلالة القيمة Q للتفاعل والكتل m_1 و m_3 و m_4 وزاويتي التشتت θ_3 و θ_4 للجسيمين الناتجين، على الترتيب؟ ماذا يحدث إذا كانت $Q=0$؟

34-4 تشتت كومبتون *(Compton Scattering)*: بحسب الميكانيك الكمي؛ فإن لكل فوتون طول موجته λ طاقة hc/λ وزخم خطي h/λ، حيث h ثابت پلانك و c سرعة الضوء. في تشتت كومبتون؛ تصطدم حزمة من الأشعة السينية (فوتونات طاقتها بضعة آلاف كيلوإلكترون ڤولت) طول موجتها λ، عند اختراقها لأي مادة، بالإلكترونات الحرة الموجودة فيها فتشتت نتيجة لذلك وتنفذ بطول موجي λ' منحرفة عن مسارها الأصلي بزاوية φ. استخدم الأشكال النسبية للطاقة والزخم لبرهان أن التصادم بين فوتون وإلكترون ساكن كتلته يؤدي لتغيير طول موجة الأول بمقدار $\lambda' - \lambda = h(1-\cos\varphi)/mc$، وأن الإلكترون سيتحرك باتجاه يصنع زاوية θ مع الاتجاه الأصلي للفوتون معطاة بالعلاقة $\tan\theta = \sin\varphi / \{[1+(h/\lambda mc)](1-\cos\varphi)\}$.

الحركة المستوية للأجسام الصلبة

(Plane Motion of Rigid Bodies)

5-1 تمهيد

سندرس في هذا الفصل الحركة المستوية للأجسام الصلبة المؤلفة من عدد كبير من الجسيمات التي تبقى المسافة بينها ثابتة دوماً ، فتكون القوى التي تبقيها بهذا الشكل داخلية محققة لقانون نيوتن الثالث، كأنها ناتجة عن ترابط الذرات ببعضها بوساطة قضبان صلبة مهملة الكتلة. من ثم نستطيع تطبيق قوانين حفظ الطاقة والزخم الخطي والدوراني على هذه الأجسام.

من جهة أخرى ، تتألف الأجسام الصلبة من عدد كبير جداً من الذرات والجزيئات ، لذلك نقسم حركة الجسم إلى جزئين؛ الأول الحركة الدورانية لنقطة معينة منه بالنسبة لمناط إسناد ثابت، والثاني الحركة الدورانية لكل نقاط الجسم حول محور متحرك مار من هذه النقطة.

نتساءل هنا: كم عدد الإحداثيات اللازمة لتحديد موضع الجسم كله؟ قد يتبادر لأول وهلة أنه لانهائي لأن الجسم يحوي عدداً كبيراً جداً من الجسيمات النقطية، إلاّ أن هذا غير صحيح إذ يمكن تحديد موضع نقطة منه P_1 بثلاثة إحداثيات (x_1, y_1, z_1)، عندئذ تقع أي نقطة ثانية، P_2، تبعد عن P_1 مسافة r، على كرة مركزها P_1 ونصف قطرها r. حينئذ نحتاج لإحداثيين فقط لتحديد موضع P_2 على هذه الكرة، بالنسبة لمنظومة إحداثية مركزها P_1، كالزاويتين الكرويتين θ و ϕ. أخيراً، فإن أي نقطة ثالثة، P_3، تبعد مسافة $a \neq 0$ عن الخط الواصل بين P_1 و P_2، يجب أن تقع على دائرة نصف قطرها a حول هذا الخط. لتحديد مكان P_3 على هذا الخط نحتاج لإحداثي واحد، كالزاوية القطبية θ. عندما يتم تحديد مواضع ثلاث نقاط من جسم صلب، لاتقع في نفس المستوي، فإن مواقع بقية نقاطه يتحدد تماماً.

نستنتج مماتقدم أننا نحتاج لستة إحداثيات لتحديد الجسم الصلب كله، يتم اختيارها بحسب المسألة المطروحة. نستخدم عادة ثلاثة منها لتحديد موقع مركز

الكتلة، الذي درسنا كيفية إيجاده لمنظومة جسيمات نقطية وأجسام ممتدة في الفصل السابق، والبقية لتحديد اتجاه الجسم بالنسبة له.

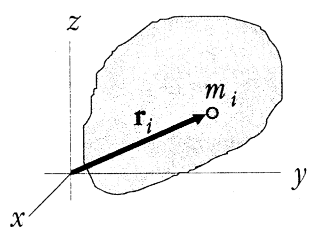
2-5 دوران الجسم الصلب حول محور ثابت

عند دراسة الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور نستعمل قانون نيوتن الثاني:

$$\boldsymbol{\tau}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \tag{1-5}$$

حيث $\boldsymbol{\tau}_z$ محصلة العزوم الخارجية المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران، و $\mathbf{L}_z$ الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لهذا المحور.

من أسهل الحركات الدورانية للأجسام الصلبة تلك التي تتم حول محور ثابت حيث تبقى حركة كل نقطة من الجسم في نفس المستوى دوماً. فإذا كان محور الدوران oz، فنلاحظ أن كل نقطة من الجسم الصلب الموجودة في الموضع $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ تتحرك على مسار دائري نصف قطره r_i عندما يدور الجسم حول oz، كما في الشكل (1-5).



الشكل (1-5)

نكتب الزخم الزاوي للجسيم m_i الموجود على بعد r_i من محور الدوران:

$$l_i = r_i p_i = m_i r_i v_i \tag{2-5}$$

لكن:

$$v_i = r_i \dot{\theta}_i \tag{3-5}$$

حيث $\dot{\theta}_i$ السرعة الزاوية لدوران m_{i} حول oz، فيصير الزخم الزاوي لـ m_{i} مساوياً لـ :

$$l_i = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i \qquad (4-5)$$

أي أن الزخم الزاوي للجسم الصلب كله حول oz هو:

$$L_z = \sum l_i = \sum m_i r_i^2 \dot{\theta}_i \qquad (5-5)$$

حيث يمتد المجموع على كل أجزاء الجسم الصلب.

نظراً لأن السرعة الزاوية $\dot{\theta}_i$ واحدة لكل نقاط الجسم ، نتيجة صلابته، نرمز لها بـ ω، عندئذ تؤول L_{z} إلى الشكل:

$$L_z = \sum (m_i r_i^2)\ \omega \qquad (6-5)$$

فإذا وضعنا:

$$I_z = \sum (m_i r_i^2) \qquad (7-5)$$

عندئذ تصير(5-7):

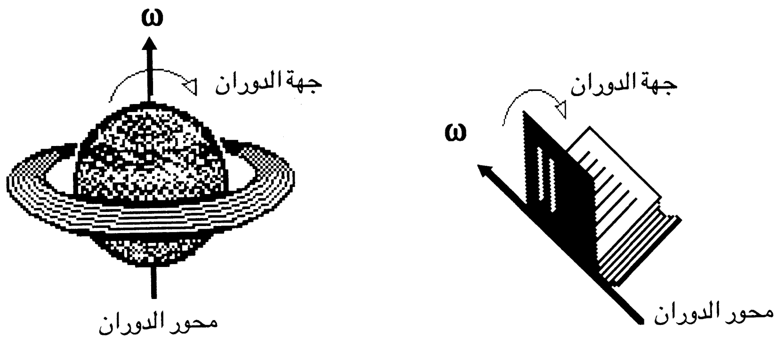
$$L_z = I_z \omega \qquad (8-5)$$

يطلق على I_z اسم عزم العطالة أو عزم القصور الذاتي *(Moment of Inertia)* للجسم الصلب حول oz وتعتّمد قيمته، كما نلاحظ من (5-7)، على المحور الذى يدور حوله الجسم. هذا هو الفرق الأساس بين I_z وكتلة الجسم m، كما سنوضح بعد قليل.

لابأس من التنويه إلى أن اتجاه الزخم الزاوي لجسم يدور حول محور ثابت هو بنفس اتجاه السرعة الزاوية، أي أن $\boldsymbol{\omega}$ و$\mathbf{L}_z$ متوازيان في هذه الحالة وباتجاه حركة برغي يدور مع الجسم، كما في الشكل (5-2).

تكتب (5-8) عندئذ على النحو :

$$\mathbf{L}_z = I_z \boldsymbol{\omega} \qquad (9-5)$$



الشكل (2-5)

يمكن الحصول على قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية حول محور ثابت بالتعويض عن $\mathbf{L}_z$ من (9-5) في (1-5) فنجد:

$$\boldsymbol{\tau}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \frac{d(I_z\boldsymbol{\omega})}{dt} = I_z\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad (10-5)$$

بتعويض التسارع الزاوي $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad (11-5)$$

تؤول (1-5) إلى:

$$\boldsymbol{\tau}_z = I_z\boldsymbol{\alpha} \qquad (12-5)$$

بمقارنة (12-5). بقانون نيوتن الثاني في الحركة الانتقالية ($\mathbf{F}=m\mathbf{a}$) نلاحظ التناظرالتام بين الحركتين. فسبب الحركة في الحالة الانتقالية هو القوة وفي الحالة الدورانية العزم، ونتيجة الحركة في الحالة الأولى هو التسارع الخطي بينما هو التسارع الزاوي في الحالة الثانية.

يمثل عامل التناسب في كلا الحالتين مقدار ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته الحركية.

لذا نلخص قانون نيوتن الثاني على النحو: يتناسب **سبب** الحركة *(cause)* (القوة أو العزم) طرداً مع **نتيجة** الحركة *(result)* (التسارع الخطي أو الزاوي) وعكساً مع **ممانعة** الجسم للحركة *(inertia)*(الكتلة أو عزم القصور الذاتي).

إذاً تمثل كل من m وI_z ممانعة للحركة، وإذا كانتm تمثل القصور الذاتي للجسم في الحركة الانتقالية فإنI_z تمثل عزم هذا القصور في الحركة الدورانية. فالجسم غير قادر على تغيير حالته التحريكية، سواء كانت انتقالاً أم دوراناً أم كليهما، من تلقاء نفسه، بل لابد من مؤثر خارجي لإحداث ذلك، وتكون ممانعة الجسم ومقاومته لهذا التغير هي m أوI_z بحسب نوع الحركة.

من الجدير ذكره أن انتقال الجسم يتم بشكل مباشر فليس هناك فرق تحريكي بين أي انتقال وآخر، لذلك لاتتغير كتلة الجسم مع تغيركيفية الانتقال أو مناط إسنادها. أما في الحركة الدورانية فإن طبيعة الدوران تختلف كلياً إذا تغير محور الدوران، وقد يكون هناك فرق كبير بين الدوران حول محور ما وآخر، لذا فإن عزم القصور الذاتي لجسم بالنسبة لمحور لايبقى ثابتاً، كالكتلة، بل يتغير بتغير هذا المحور. هذا هو الفرق الأساس بين هاتين الكميتين.

3-5 حساب عزم القصور الذاتي للأجسام الصلبة

يمكن حساب عزم العطالةI_z لجسم صلب حول محور ما بتجزئته إلى جسيمات متناهية في الصغر بحيث تؤول m_i في (5-7) إلى كتلة عنصرية dm تبعد عن المحور المفروض مسافة r ، وينتهي عدد هذه الجسيمات إلى مالانهاية ليصير المجموع (5-7) تكاملاً من الشكل:

$$I_z = \int r^2 dm \qquad (13-5)$$

حيث يمتد التكامل على الجسم الصلب كله.

بالتعويض عن dm بدلالة كثافة الجسم ρ في التكامل نجد:

$$I_z = \int r^2 \rho dV \qquad (14-5)$$

من الواضح أنه إذا كان توزع الجسم سطحياً أو طولياً فان dV في التكامل السابق تصير سطحاً عنصرياً ds أو طولاً عنصرياً dl ، على الترتيب.

□ **مثل 5-1 عزم عطالة قرص متجانس حول محور عمودي عليه عند المركز**

لحساب عزم عطالة قرص متجانس حول محور عمودي عليه عند مركزه نختار كتلة عنصرية dm مؤلفة من حلقة نصف قطرها r وسمكها dr، كما في الشكل (5-3)، بحيث تبعد جميع نقاطها عن محور الدوران نفس البعد، ونكتب:

$$dI_z = r^2 dm$$

لكن:

$$dm = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr)$$

أي أن:

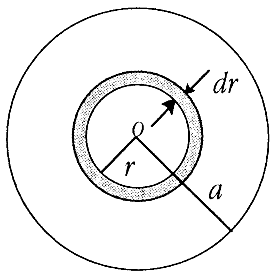
$$dI_z = r^2 dm = r^2 \sigma dS = 2\pi\sigma r^3 dr$$

ومنه:

$$I_z = \int_0^a 2\pi\sigma r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi\sigma a^4 = \tfrac{1}{2} ma^2$$

حيث وضعنا:

$$m = \sigma(\pi a^2)$$



الشكل (5-3) □

5 - 4 نصف قطر الدوران *(radius of gyration)*

نلاحظ من العلاقة (5-7) أن أبعاد عزم العطالة هي كتلة × مربع مسافة، لذلك نعبر عن عزم عطالة أي جسم صلب حول محور بالشكل:

$$I_z = Mk_z^2 \qquad (15-5)$$

حيث تدل k_z على طول يطلق عليه اسم **نصف قطر الدوران** ويمثل البعد الذي لو كان كل الجسم مجمعاً عنده لكان عزم عطالته حول المحور المفروض هو I_z.

نعطي في الجدول 5-1 قيم k_z لبعض الأجسام شائعة الاستعمال.

الجدول 5-1

قيم k_z^2 لبعض الأجسام شائعة الاستعمال (عزم القصور الذاتي = الكتلة × k_z^2)

الجسم	محور الدوران	k_z^2
قضيب رفيع	عمودي على القضيب عند المركز	$a^2/12$
طوله a	عمودي على القضيب عند طرفه	$a^2/3$
صفيحة مستطيلة مستوية	عمودي عليها ويمر من المركز	$a^2/12$
أبعادها a و b مواز لطرفها b	ماراً من المركز	$(a^2+b^2)/12$
قرص رقيق	يمر من المركز في مستويه	$a^2/4$
نصف قطره a	يمر من المركز عمودي على مستويه	$a^2/2$
حلقة رقيقة	يمر من المركز في مستويها	$a^2/2$
نصف قطرها a	يمر من المركز عمودي على مستويها	a^2
قشرة اسطوانية	محورها الطولي	a^2
نصف قطرها a وطولها b		
اسطوانة صلبة قائمة	محورها الطولي	$a^2/2$
نصف قطرها a وطولها b	يمر من مركزها وعمودي على محورها	$a^2/4+b^2/12$
قشرة كروية رقيقة نصف قطرها a	أي قطرفيها	$2a^2/3$
كرة صلبة منتظمة نصف قطرها a	أي قطر فيها	$2a^2/5$
متوازي مستطيلات صلب قائم	يمر من المركز عمودياً على الوجه ab	$(a^2+b^2)/12$
أبعاده a و b و c	موازياً للطرف c	

5-5 نظرية المحاور المتوازية والمحاور المتعامدة

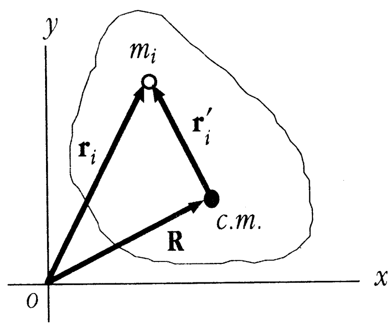
هناك نظريتان أساسيتان لحساب عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول محور ثابت هما:

(أ) نظرية المحاور المتوازية (*Parallel Axes Theorem*)

"عزم القصور الذاتي لمنظومة جسيمات أو لجسم صلب حول محور ما يساوي مجموع عزم القصور الذاتي حول محور مار من مركز الكتلة مواز للمحور المفروض مع حاصل ضرب كتلة المنظومة أو الجسم بمربع البعد بين المحورين".

البرهان: نلاحظ من الجسم الموضح بالشكل (4-5) أن عزم القصور الذاتي حول المحور oz المار من o هو :

$$I_z = \sum m_i r_i^2 \qquad (16-5)$$



الشكل (4-5)

لكننا نلاحظ من الشكل (4-5) أن:

$$r_i^2 = R^2 + r_i'^2 + 2\mathbf{r}_i' \cdot \mathbf{R}$$

حيث $\mathbf{r}_i'$ المتجه الواصل من مركز الكتلة $c.m.$ الى موضع الجسيم i، فيكون:

$$I_z = \sum m_i R^2 + \sum m_i r_i'^2 + 2\sum m_i \mathbf{r}_i' \cdot \mathbf{R}$$

أو

$$I_z = MR^2 + \sum m_i r_i'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i'$$

بحسب تعريف مركز الكتلة، فان المجموع $\sum m_i \mathbf{r}_i'$ في الطرف الأيمن يمثل موضع مركز كتلة النظام بالنسبة للنقطة cm التي هي مركز الكتلة نفسه. هذا بالطبع يساوي الصفر، كما أن:

$$I_{cm} = \sum m_i r_i'^2 \qquad (17-5)$$

فيكون:

$$I_z = MR^2 + I_{cm} \qquad (18-5)$$

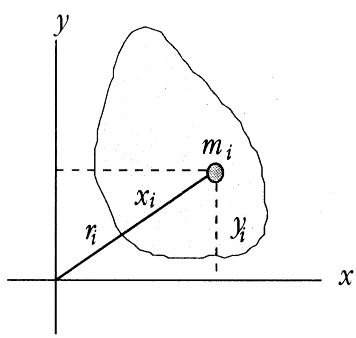
فعزم القصور الذاتي حول oz يساوي عزم القصور الذاتي حول محور يمر من مركز الكتلة موازياً لـ oz (I_{cm}) مضافاً إليه حاصل ضرب كتلة الجسم بمربع البعد بين المحورين (MR^2).

(ب) نظرية المحاور المتعامدة (*Perpendicular Axes Theorem*)

"عزم عطالة أي جسم صلب مسطح في مستو واحد حول محور عمودي على سطحه يساوي حاصل جمع عزم عطالة الجسم حول أي محورين متعامدين متقاطعين مع المحور المفروض وواقعين في مستو الجسم".

البرهان: نعتبر الجسم الصلب المسطح الموضح بالشكل (5-5) ونحسب عزم عطالته حول المحور oz العمودي على الورقة ، فنكتب:

$$I_z = \sum m_i r_i^2$$



الشكل (5-5)

لكننا نلاحظ من الشكل (5-5) أن :

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

فيكون :

$$I_z = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

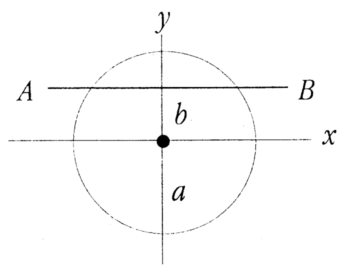
أي أن

$$I_z = I_x + I_y \qquad (19-5)$$

فعزم القصور الذاتي حول oz يساوي مجموع عزمي القصور الذاتي حول ox و oy.

❐ مثل 5-2

ما عزم عطالة القرص المتجانس الموضح في الشكل (5-6) حول المحور AB ؟



الشكل (5-6)

الحل: سنحل هذا المثال باستخدام نظرية المحاور المتوازية ونظرية المحاور المتعامدة فإذا عرفنا عزم عطالة القرص حول المحور ox في الشكل (5-6)، عندئذ نستعمل نظرية المحاور المتوازية لمعرفة I_{AB}. إلاّ أن حساب I_z بالتكامل معقد نوعاً ما، فنستخدم نظرية المحاور المتعامدة ونكتب:

$$I_z = I_x + I_y$$

حيث I_z عزم القصور الذاتي حول المحور oz العمودي على القرص في مركزه.

بحسب المثل (4-3) فإن:

$$I_z = \tfrac{1}{2} Ma^2$$

كما أن $I_x = I_y$، بسبب التناظر، لذلك نكتب:

$$I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} Ma^2$$

فيكون:

$$I_{AB} = I_x + Mb^2 = \frac{1}{4} Ma^2 + Mb^2$$ ❐

5-6 الشغل والطاقة في الحركة الدورانية

نحسب الطاقة الحركية لجسم صلب يدور حول محور ثابت من العلاقة:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (19-5)$$

بوضع

$$v_i = r_i \dot{\theta}_i$$

وملاحظة أن السرعة الزاوية $\dot{\theta}_i$ هي نفسها لكل نقاط الجسم نتيجة صلابته، أي أن:

$$\dot{\theta}_i = \omega$$

تؤول T إلى :

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \qquad (20-5)$$

أو

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (21-5)$$

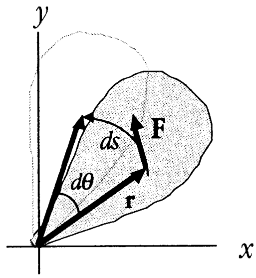
كذلك نجد الشغل اللازم لتدوير منظومة جسيمات زاوية θ حول محور الدوران بكتابة الشغل المبذول لنقل جسيم m من الجسم مسافة $\mathbf{s}$ تحت تأثير قوة $\mathbf{F}$، كما في الشكل (5-7)، فنكتب:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

لكن

$$d\mathbf{s} = -\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\theta}$$

حيث يتجه $d\boldsymbol{\theta}$ عمودياً على الورقة نحو الخارج.



$d\boldsymbol{\theta}$ يتجه خارج الورقة

الشكل (7-5)

فيكون:

$$W = \int -\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\theta})$$

بما أن

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

يصير الشغل

$$W = \int (-\mathbf{F} \times \mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

لكن:

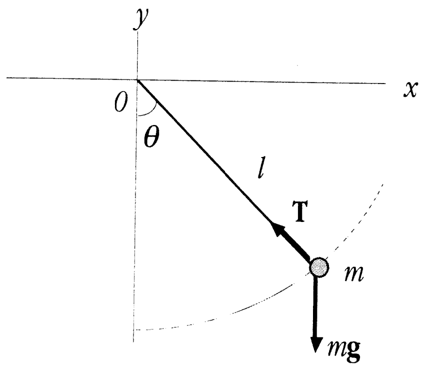
$$\boldsymbol{\tau}_z = -\mathbf{F} \times \mathbf{r}$$

لذا يؤول الشغل اللازم لتدوير جسم صلب حول محور ثابت إلى:

$$W = \int \boldsymbol{\tau}_z \cdot d\boldsymbol{\theta} \qquad (22-5)$$

5-7 البندول البسيط *(The Simple Pendulum)*

يتألف البندول البسيط من جسيم كتلته m يرتبط بخيط طوله l معلق من نقطة ثابتة O، كما هو موضح بالشكل (8-5). بإزاحة m قليلاً عن وضع الاتزان وتركها، يتأرجح البندول في مستو شاقولي.



الشكل (8-5)

لدراسة حركة البندول نستعمل العلاقة (8-4)، فنكتب:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \ddot{\theta} \qquad (23-5)$$

حيث τ_z محصلة العزوم بالنسبة لمحور الدوران oz (المار من 0 عمودياً على الورقة)، وتساوي:

$$\tau_z = -mgl\sin\theta$$

(لماذا وضعنا عزم الشد T حول oz يساوي الصفر، واعتبرنا عزم الوزن سالباً؟)

كما نكتب عزم عطالة الكتلة m بالنسبة لـoz بالشكل:

$$I_z = ml^2$$

فتصير معادلة الحركة:

$$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \qquad (24-5)$$

ومنه:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (25-5)$$

نعتبر الحالتين التاليتين:

(أ) – الزاوية θ صغيرة: عندئذ يكون $\sin\theta \approx \theta$ وتؤول العلاقة (5-25) إلى:

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0 \qquad (26-5)$$

حيث وضعنا:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (27-5)$$

يدعى ω_0 **التردد الطبيعي** *(natural frequency)* للبندول.

ثم نكتب حل المعادلة (27-5)، كما هو معروف، بالشكل:

$$\theta=\theta_0\cos(\omega_0 t+\phi) \qquad (28-5)$$

فتتغير الزاوية θ جيبياً مع الزمن بسعة عظمى θ_0(الزاوية التي أزحنا البندول بها في البداية)، وتردد زاوي ω_0 يعتمد على طول البندول وتسارع الجاذبية المحلي فقط. لذا يطلق على ω_0 اسم **التردد الطبيعي** لأنه متعلق بطبيعة وخواص البندول، تماماً مثل المنظومة المهتزة المؤلفة من كتلة وزنبرك تماماً التي وجدنا في الفصل الأول أن ترددها الطبيعي متعلق بخواصها الذاتية من كتلة وثابت مرونة للزنبرك.

(ب) – الزاوية θ غير صغيرة: يمكن دراسة الحركة في هذه الحالة بشكل وصفي بواسطة الطاقة الكلية (كما فعلنا عند دراسة الحركة المركزية) فنكتب الطاقة الكلية:

$$E=T+V$$

حيث:

$$T=\tfrac{1}{2}I_z\omega^2=\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \qquad (29-5)$$

(لاحظ أن ω تمثل السرعة الزاوية للبندول، أي معدل تغير الزاوية θ مع الزمن $\omega=\dot{\theta}$ وتختلف تماماً عن التردد الطبيعي ω_0!) .

بوضع المستوى الأرضي عند $\theta=\pm\pi/2$، نكتب طاقة الوضع بالشكل:

$$V=-mgl\cos\theta \qquad (30-5)$$

فتصير الطاقة الكلية:

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos\theta \qquad (31-5)$$

أي أن:

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 = E + mgl \cos\theta \qquad (32-5$$

نلاحظ من (30-5) أن طاقة الوضع $V = -mgl\cos\theta$ محدودة بين $+mgl$ و $-mgl$، لذلك فإن الحركة ستكون اهتزازية طالما أن $mgl > E > -mgl$، وعندما $E = \pm mgl$ فـإن $\dot{\theta} = 0$ ويعود الجسم بالإتجاه المعاكس عند هذه النقطة. أما اذا كان $E > mgl$ فالحركة غير اهتزازية لأنه لايمكن أن تصير $\dot{\theta}$ مساوية للصفر أبداً، أي أن البندول لا يهتز بل يدور في دائرة طوال الوقت.

بالطبع لايمكن للطاقة E أن تكون أقل من $-mgl$ لأن $\dot{\theta}^2$ ستكون سالبة عندئذ وهذا غير ممكن طبعاً..

الآن: بعد وصف طبيعة الحركة بحسب طاقة الجسم الكلية E نعود الى حل معادلة الحركة مستخدمين معادلة الطاقة (25-5) فنكتب:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\theta} \qquad (33-5)$$

أو

$$\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(E/mgl) + \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\; t \qquad (34-5)$$

يمكن تحويل التكامل الأخير الى آخر معروف باجراء بعض التحويلات الرياضية ، فنفترض أن:

$$E = -mgl \cos\alpha \qquad (35-5)$$

و

$$\sin\phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)} \qquad (36-5)$$

و

$$a = \sin(\alpha / 2) \tag{37-5}$$

بكتابة $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\theta/2$ و $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha/2$ ، نجد أن:

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha} = \sqrt{2}\ \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

فيكون:

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha} = \sqrt{2}\ \sin\frac{\alpha}{2}\ \sqrt{1 - (\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}})}\ = \sqrt{2}\ \sin\frac{\alpha}{2}\ \cos\phi$$

كما نجد باشتقاق (36-5) أن:

$$\cos\phi d\phi = \frac{1}{2a}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{2a\cos\phi d\phi}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

بتعوض ϕو θ في (34-5) نجد:

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\phi}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\ t \tag{38-5}$$

حيث اعتبرنا $\phi_0 = 0$ للسهولة.

يسمى التكامل (38-5) **تكاملاً قطعياً** *(Elliptic Integral)*.

إذا كانت a صغيرة عندئذ يمكن نشر (38-5) على شكل سلسلة قوى فنجد:

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2\phi}} = \int_0^\phi [1 + \tfrac{1}{2}a^2\sin^2\phi + \cdots\ ]d\phi = \sqrt{\frac{g}{l}}\ t \tag{39-5}$$

ومنه:

$$\phi + \frac{a^2}{8}(2\phi - \sin 2\phi) + \cdots = \sqrt{\frac{g}{l}}\ t \tag{40-5}$$

الآن: نلاحظ من (5-33) أن الجسم يقوم باهتزازة كاملة عندما تصير سرعته الزاوية $\dot{\theta}$معدومة (نقطة دوران) مرتين متتاليتين، وهذا يحصل عندما $\dot{\theta}=0$ و$\theta=\alpha$، $\theta=-\alpha$، أي عندما تتغير φ من الصفر الى 2π. عندئذ يكون:

$$2\pi+\frac{a^2}{8}(4\pi-\sin 4\pi)+\ \cdots\ =\sqrt{\frac{g}{l}}\ T$$

أي أن تردد الحركة يساوي :

$$T=2\pi\ \sqrt{\frac{l}{g}}\ [1+\frac{a^2}{4}+\ \cdots\ ] \qquad (41-5)$$

نلاحظ مباشرة أنه إذا كانت a صغيرة بحيث يمكن إهمال الحدود الحاوية على a^2 أو أكبر عندئذ نعود إلى العلاقة المعروفة للإهتزازات الصغيرة:

$$T=2\pi\ \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ونجد التردد الزاوي ωمن (5-41):

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l}}\ [1-\frac{a^2}{16}+\ \cdots\ ] \qquad (42-5)$$

يمكن للقارئ أن يقنع نفسه بأن أكبر قيمة للزاوية θ هي α، وعندما تكون a صغيرة فإن α ستكون صغيرة أيضا لتصير θصغيرة، ونحصل على نفس النتائج التي وجدناها في حالة الاهتزازات الصغيرة للدور والتردد ومعادلة الحركة.

5-8 البندول المركب (الفيزيائي) *(The Compound (Physical) Pendulum)*

نطلق اسم بندول مركب على كل جسم صلب معلق يهتز حول محور ثابت لا يمر بمركز كتلة الجسم حتى يكون هناك عزم كلى للقوى الخارجية ويكون هناك احتمال

لحركة اهتزازية.

نحدد موضع الجسم الصلب بالزاوية التي يصنعها الخط الواصل بين نقطة الدوران ومركز الكتلة مع الشاقول ، كما هو موضح بالشكل (5-9).

لدراسة حركة الجسم نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية ونكتب:

$$\tau_0 = -Mgh\sin\theta = I_0\ddot{\theta} \tag{43-5}$$

حيث h البعد العمودي بين مركز الكتلة cm ومحور الدوران المار من النقطة o عمودياً على الورقة، و I_0 عزم القصوور الذاتي للجسم بالنسبة لمحور الدوران oz، فاذا افترضنا أن :

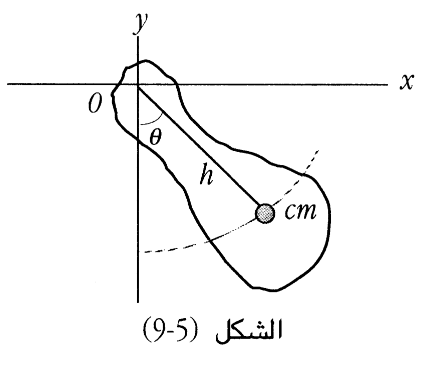
$$I_0 = Mk_0^2 \tag{44-5}$$

حيث k_0 نصف قطر الدوران بالنسبة للمحور oz، يكون:

$$-Mgh\sin\theta = Mk_0^2\ddot{\theta}$$

ومنه

$$\ddot{\theta} + \frac{gh}{k_0^2}\sin\theta = 0 \tag{45-5}$$



الشكل (5-9)

نلاحظ أن (5-45) تكافىء معادلة بندول بسيط طوله:

$$l = \frac{k_0^2}{h} \tag{46-5}$$

فاذا افترضنا أن النقطة o' تبعد عن o (نقطة تعليق الجسم) مسافة l لوجدنا أن :

$$l = h + h' \tag{47-5}$$

حيث تدل h' على بعد o' عن مركز الكتلة c .

يطلق على o' اسم **مركز الاهتزازات** *(Center of Oscillations)* .

نستنتج من (46-5) و (47-5) أن:

$$k_0^2 - h^2 = hh' \tag{48-5}$$

باستخدام نظرية المحاور المتوازية ، نكتب:

$$I_0 = I_{cm} + Mh^2$$

أي أن:

$$Mk_0^2 = Mk_{cm}^2 + Mh^2$$

بالتعويض في (48-5) نجد:

$$k_{cm}^2 = hh' \tag{49-5}$$

حيث k_{cm} نصف قطر دوران الجسم الصلب بالنسبة لمركز الكتلة.

فالنقطتان o و o'، متناظرتان بحيث أنه لو اهتز الجسم حول محور مار من الأولى أو من الثانية لكان له نفس الدور تماما لأن:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_0^2}{gh}}$$

كما أن:

$$T_{0'} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_{0'}^2}{gh'}}$$

أي أن:

$$T_0 = T_{0'}$$

فدور الحركة لايتغير سواء علقنا الجسم من النقطة O أو من نظيرتها O' !

❑ مثل 5-5

يهتز قرص متجانس نصف قطره a حول محور مار من النقطتين A وB، كما في الشكل (5-9أ). مادور الاهتزازات الصغيرة وما قيمة b التي تجعله أكبر ما يمكن؟

الحل: نلاحظ في هذا المثل أن القرص يمثل بندولاً مركباً يقع مركز كتلته في مركزه الهندسي o، فنكتب معادلة الحركة:

$$\tau_{AB} = I_{AB}\,\ddot{\theta}$$

حيثτ_{AB}عزم القوى الخارجية (وزن القرص فقط) ، حول محور الدوران AB ويساوي (انظر الشكل(5-16 ب)):

$$\tau_{AB} = -Mgb\sin\theta$$

بحسب المثل (5-4) فان:

$$I_{AB} = \tfrac{1}{4}Ma^2 + Mb^2$$

وتصير معادلة الحركة:

$$(\tfrac{1}{4}Ma^2 + Mb^2)\ddot{\theta} = -Mgb\sin\theta$$

ومنه:

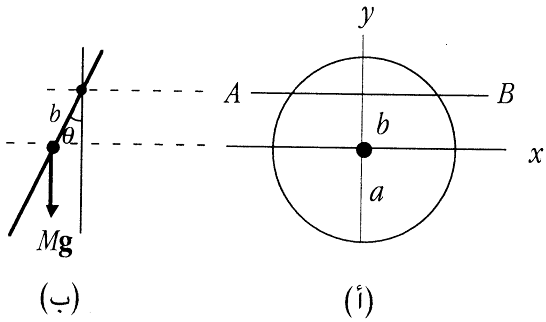
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

حيث افترضنا أن الاهتزازات صغيرة السعة $(\sin\theta \approx \theta)$ ووضعنا :

$$\omega_0^2 = \frac{gb}{a^2/4 + b^2}$$

فيكون الدور:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{4gb}}$$



الشكل (16-5)

أما قيم b التى تجعل الدور أكبر ما يمكن فهي تلك التي تجعل ω_0 أصغر ما يمكن لذا نشتق ω_0^2 ونكتب :

$$2\omega_0 d\omega_0 = \frac{g(a^2/4+b^2)-2b(gb)}{(a^2/4+b^2)^2} = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد :

$$b = a/2$$

عندها يكون :

$$\omega_0 = \sqrt{g/a}$$

و

$$T = 2\pi\sqrt{a/g} \qquad \square$$

5 - 10 الحركة العامة للأجسام الصلبة في مستو؛ انتقال ودوران

افترضنا حتى الآن في هذا الفصل أن محور دوران الجسم الصلب يبقى ثابتً في الفضاء، أما إذا لم يكن الأمر كذلك، بمعنى أن الجسم يدور وينتقل من مكانه بنفس الوقت، فعلينا استخراج نظرية ملائمة لهذه الحالة.

لذلك نكتب من قانون نيوتن الثاني :

$$\boldsymbol{\tau}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \qquad (51-5)$$

حيث$\boldsymbol{\tau}_z$ محصلة العزوم المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران و$\mathbf{L}_z$ الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لنفس المحور.

تنسب$\boldsymbol{\tau}_z$ و$\mathbf{L}_z$، في (5-51)، لمنظومة محاور عطالية، أي ثابتة في الفضاء. فإذا اعتبرنا منظومة محاور مركزها مركز كتلة الجسم الصلب وحددنا موقع أي جسيم منه m_i بالنسبة لهذه المنظومة، عندئذ نكتب موضع هذا الجسيم$\mathbf{r}_i$ بالنسبة لمنظومة المحاور العطالية الثابتة بالشكل:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{cm}$$

حيث $\mathbf{r}_{c.m}$ متجه موضع مركز كتلة الجسم الصلب بالنسبة لمبدأ منظومة المحاور العطالية.

باشتقاق طرفي العلاقة السابقة نجد:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{cm}$$

بالتعويض في (5-51) نجد:

$$\boldsymbol{\tau}_z = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}) = \frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

أو

$$\boldsymbol{\tau}_z = \sum_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{cm}) \times \mathbf{F}_i] = \frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{cm}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{cm})$$

بنشر الطرفين، وملاحظة أن كلا من $\sum m_i \mathbf{r}'_i$ و $\sum m_i \mathbf{v}'_i$ يساوي الصفر (بحسب تعريف مركز الكتلة)، نجد أن المعادلة السابقة تؤول إلى:

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_{cm} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}) \qquad (52-5)$$

لكن

$$\sum_i \mathbf{F}_i = M\mathbf{a}_{cm}$$

كما أن :

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}) = M[\frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} \times \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{r}_{cm} \times \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt}]$$

لذا تؤول (52-5) إلى:

$$\sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'$$

لكن المجموع في الطرف الأيمن هو الزخم الخطي للجسم الصلب بالنسبة لمركز كتلته والمجموع في الطرف الأيسر هو العزم الكلي للقوى حول مركز الكتلة، لذا نكتب:

$$\tau_{cm} = \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} \qquad (53-5)$$

هذه النتيجة صحيحة حتى لو كان مركز الكتلة متسارعاً، وإذا اخترنا نقطة أخرى بدلا من مركز الكتلة لحساب الزخم الزاوي والعزم بالنسبة لها لوجب أن تكون ساكنة بالنسبة لمنظومة المحاور العطالية حتى يمكن تطبيق (53-5).

5 - 11 الحركة المستوية العامة للجسم الصلب

إذا تحرك الجسم الصلب بحيث بقيت كل ذراته موازية لمستو ثابت دوماً عندئذ نقول إن حركة الجسم **مستوية** *(Laminar Motion)*. يمكن لمحور الدوران، في هذا النوع من الحركات، أن ينتقل من مكانه شريطة أن يبقى موازياً لنفسه، مثل تدحرج اسطوانة على مستو مائل .

أما المعادلات اللازمة لتحديد حركة الجسم وموضعه في كل لحظة فهي :

(أ) – حركة مركز الكتلة:

$$\mathbf{F}_T = M\mathbf{a}_{cm} \qquad (54-5)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم، وM كتلته، و$\mathbf{a}_{cm}$ تسارع مركز كتلته.

(ب) الحركة الدورانية حول مركز الكتلة:

$$\tau_{cm} = \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} \qquad (55-5)$$

حيث τ_{cm} عزم القوى الخارجية حول مركز الكتلة و $\mathbf{L}_{cm}$ الزخم الزاوي بالنسبة لهذا المركز، الذي يعطي في هذه الحالة بالعلاقة:

$$\mathbf{L}_{cm} = I_{cm}\omega \qquad (56-5)$$

حيث $\boldsymbol{\omega}$ السرعة الزاوية للدوران.

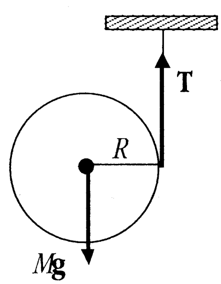
❐ مثل 5-6

يلف خيط طويل حول محيط دائرة عظمى لكرة صلبة، نصف قطرها R وكتلتها M. يثبت الطرف الآخر للخيط، بينما تسقط الكرة نحو الأرض، كما في الشكل (5-9). ما تسارع مركز الكتلة والشد في الخيط؟

الحل: نلاحظ من الشكل (5-9) أن القوى المؤثرة على النظام هي: الوزن $M\mathbf{g}$ نحو الأسفل وشد الخيط $\mathbf{T}$ نحو الأعلى.

نكتب معادلة حركة مركز الكتلة:

$$Mg - T = Ma$$



الشكل (5-17)

كما نعتبر العزوم حول محور مار من مركز الكتلة فنجد:

$$\tau_{cm} = TR$$ (ماذا عن عزم الوزن Mg؟)

فنكتب معادلة الحركة الدورانية حول c :

$$TR = I_{cm}\ddot{\theta} = I_{cm}\alpha$$

حيث I_{cm} عزم القصور الذاتي حول مركز الكتلة الذي يساوي:

$$I_{cm} = \tfrac{2}{5}MR^2$$

و α التسارع الزاوي للقرص حيث نجده بدلالة تسارع مركز الكتلة من العلاقة التي تربط بين التسارع الخطي لنقطة على محيط الكرة بتسارعها الزاوي، فنكتب:

$$\alpha = a/R$$

فيكون:

$$TR = (\tfrac{2}{5}MR^2)a/R$$

بحل هذه المعادلات نجد:

$$a = 5g/7$$

و

$$T = 2Mg/7 \qquad \square$$

---

5 - 12 الاتزان السكوني للأجسام (Static Equilibrium of Rigid Bodies)

وجدنا في الفقرة السابقة أن الحركة العامة للجسم الصلب توصف بحركة مركز كتلتها تحت تأثير محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم بالإضافة إلى الحركة الدورانية حول مركز الكتلة الناتجة عن العزم الكلي لهذه القوى حول مركز الكتلة نفسه. فحتى يتزن الجسم الصلب تماما يجب أن يبقى مركز كتلته ساكناً، أي يجب أن يكون:

$$\mathbf{F}_T = 0 \qquad (57-5)$$

كما يجب أن لايدور الجسم بتاتاً، أي أن:

$$\tau_T = \sum_i (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i) = 0 \qquad (58-5)$$

حيث يمكن أخذ العزوم حول أي محور، لأن عدم دوران الجسم بتاتاً يعني أن محصلة العزوم حول أي محور يجب أن تكون مساوية للصفر دوماً.

تعطي المعادلات (5-57) و(5-58) الشروط الأساس اللازمة ليتزن الجسم الصلب تماماً، إلاّ أن حلها في الحالة العامة لدوران وانتقال جسم صلب في الفضاء قد لايكون ممكناً لعدم توفر العدد الكافي من المعادلات. أما في الحالة الخاصة لدوران الجسم حول محور ثابت، أو الحركة المستوية للجسم الصلب فإن (5-58) تؤول إلى:

$$\tau_z = 0 \qquad (59-5)$$

حيث τ_z محصلة العزوم المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران. ويصير ممكناً حل معادلات الاتزان، كما سنرى في المثل التالي .

❐ مثل 5-7

تستند نصف كرة صلبة نصف قطرها a وكتلتها M بسطحها الكروي على حائط شاقولي خشن وأرض أفقية خشنة بحالة اتزان، كما في الشكل (5-18). ماالزاوية التي يصنعها السطح المستوى لنصف الكرة مع الأرض اذا كان معامل الاحتكاك بين جميع السطوح المتماسة هو μ؟

الحل: لنكتب شرطي الاتزان، فمن مجموع القوى نجد:

$$\mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{r1} + \mathbf{w} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_{r2} = 0$$

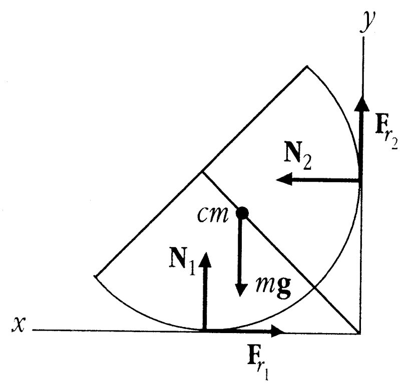
وبأخذ مركبات هذه العلاقة على ox وoy في الشكل (5-18) نجد:

$$N_2 - F_{r1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{r1} = N_2$$

و

$$N_1 + F_{r2} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{r2} = mg - N_1$$

بأخذ مجموع العزوم حول أي محور عمودي على المستوي xy ، كالمار من A، نجد:



الشكل (18-5)

$$N_2 a - F_{r2} a - mgy_c \sin\theta = 0$$

حيث y_c بعد مركز الكتلة عن مركز الكرة الذي يمكن البرهان على أنه يساوي:

$$y_c = 3a/8$$

بملاحظة أن:

$$F_{r1} = \mu N_1$$

و

$$F_{r2} = \mu N_2$$

وحل المعادلات السابقة نجد:

$$N_1 = m g/(\mu^2 + 1)$$

و

$$N_2 = \mu m g/(\mu^2 + 1)$$

و

$$\sin\theta = 8(\mu^2 + \mu)/3(\mu^2 + 1) \approx 8\mu/3$$ ❐

5 - 13 حركة جسم صلب تحت تأثير قوة دفع *(Impulsive Force)* (اختياري)

عرفنا في فصل سابق قوة الدفع بأنها تلك المؤثرة على جسيم لفترة زمنية قصيرة نسبياً بحيث تؤدي لتغيير سرعته بشكل مفاجىء، في هذه الفقرة ندرس

تأثير قوة من هذا النوع على الحركة المستوية لجسم صلب.

فإذا افترضنا أن لدينا جسماً صلباً حرالحركة في مستو وتعرض لتأثير قوة دفع لفترة زمنية فإنه سيتحرك، بشكل عام، حركة انتقالية ودورانية بنفس الوقت.

توصف الحركة الانتقالية بالعلاقة:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_{cm} \tag{60-5}$$

بحساب دفع هذه القوة نجد:

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F}dt = M\Delta\mathbf{v}_{cm} \tag{61-5}$$

أي أن سرعة مركز الكتلة تتغير بمقدار:

$$\Delta\mathbf{v}_{cm} = \frac{\mathbf{J}}{M} \tag{62-5}$$

أما الحركة الدورانية للجسم فتوصف بالعلاقة :

$$\tau_{cm} = \frac{dL_{cm}}{dt} = I_{cm}\frac{d\omega}{dt} \tag{63-5}$$

بمكاملة هذه العلاقة نجد الدفع الزاوي *(Rotational Impulse)* :

$$\hat{L}_{cm} = \int \tau_{cm}\,dt = I_{cm}\Delta\omega \tag{64-5}$$

أي أن تغير السرعة الزاوية للجسم نتيجة هذا الدفع الزاوي هي:

$$\Delta\omega = \frac{\hat{L}_{cm}}{I_{cm}} \tag{65-5}$$

نلاحظ أنه إذا كان خط تأثير قوة الدفع يبعد مسافة b عن مركز كتلة الجسم الصلب فإن:

$$\tau_{cm} = Fb \tag{66-5}$$

ومنه:

$$\hat{L}_{cm} = \int \tau_{cm}\, dt = \int Fbdt = bJ$$

أي أن:

$$\Delta\omega = \frac{bJ}{I_{cm}} \qquad (67-5)$$

لا بأس من الإشارة إلى أنه إذا كان الجسم مقيداً ليدور حول محور ثابت لوجب اعتبار عزم عطالته حول هذا المحور بدلاً من عزم عطالته حول مركز كتلته في العلاقات السابقة. كما أنه إذا تعرض الجسم لعدة قوى دافعة لوجب اعتبار مجموع الدفع في (5-62) و (5-67) أي أن:

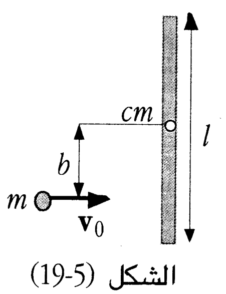
$$\Delta V_{cm} = \frac{J_1 + J_2 + \cdots}{I_{cm}} \qquad (68-5)$$

و

$$\Delta\omega = \frac{b_1 J_1 + b_2 J_2 + \cdots}{I_{cm}} \qquad (69-5)$$

❐ مثل 5-8

ترتطم كرة كتلتها m، تسير بسرعة أفقية v_0، بقضيب طوله l وكتلته M يقف بوضع شاقولي على سطح أفقي أملس، كما في الشكل (5-19). ما سرعة مركز كتلة للقضيب بعد التصادم إذا كان التصادم غير مرن جزئياً وكان معامل الارتداد e؟



الشكل (5-19)

الحل: نكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي :

$$m\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v}_{cm} + m\mathbf{v}_1$$

حيث $\mathbf{v}_1$ سرعة الكرة بعد التصادم.

من ناحية أخرى، نكتب من مبدأ حفظ الزخم الزاوي:

$$m\mathbf{v}_0 b = M\mathbf{v}_{cm} b + I_{cm}\omega$$

حيث ω السرعة الزاوية للقضيب بعد التصادم.

بالاستفادة من تعريف معامل الارتداد e نكتب:

$$e v_o = v_M - v_1$$

حيث v_M سرعة القضيب الانتقالية والدورانية بعد التصادم مباشرة وتساوي:

$$v_M = v_{cm} + b\omega$$

بذلك نجد :

$$e v_o = v_{cm} + b\omega - v_1 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

بتعويض $I_{c.m} = Ml^2/12$ وحل المعادلات السابقة نجد:

$$v_{cm} = (1+e)v_0/(M/m + 12b^2/l^2 + 1)$$

و

$$v_1 = v_0 - (M/m)v_{cm}$$

و

$$\omega = (12b/l^2)v_{cm}$$ ❐

مسائل

1-5 يتألف قرص ساعة من حلقة كتلتها M ونصف قطرها a مرتبطة بزنبرك يؤثر عليها بعزم ارجاع $\tau = -k\theta$. ادرس حركة القرص بفرض أنه أدير بزاوية ابتدائية θ_0.

2-5 يركب دولاب كتلته M ونصف قطر دورانه k على محور أفقي خاضع لعزم إرجاع $\tau = -K\theta$ناتج عن زنبرك مرتبط بالمحور ويوجد على محيط الدولاب كتلة صغيرة m وعلى بعد $2k$ من محوره. ادرس أنواع الحركة المكنة وحدد نقاط الاتزان المستقر وغير المستقر وجد تردد الاهتزازات الصغيرة حول نقاط التوازن المستقر. اعتبر الحالتين الآتيتين: $K>2mgk/\pi$ و $K>4mgk/\pi$. ماذا يحدث عندما $K<4mgk/\pi$ (مساعدة: حل المعادلة المثلثية الناتجة بالرسم).

3-5 تخضع مروحة طائرة لعزم دفع من الشكل: $\tau = \tau_0(1+\alpha\cos\omega t)$وإلى عزم مقاومة نتيجة للاحتكاك من الشكل: $\tau_r = -b\theta$. جد معادلة الحركة الدائمة.

4-5 اكتب معادلة الحركة لبندول بسيط مؤلف من كتلة صغيرة m معلقة بخيط طوله l خاضعة لعزم احتكاك $-b\theta$عند نقطة الدوران ولقوة احتكاك مع الهواء $-b_2\mathbf{v}$ حيث$\mathbf{v}$ سرعة m. ماالزمن اللازم حتى تتناقص سعة الاهتزازات الى $1/e$ من قيمتها الابتدائية بفرض أن الاهتزازات صغيرة. كيف يجب اختيارm وl حتى يهتز البندول أطول فترة ممكنة؟ كيف يجب اختيارm و l حتى يهتز البندول أكبر عدد من المرات؟

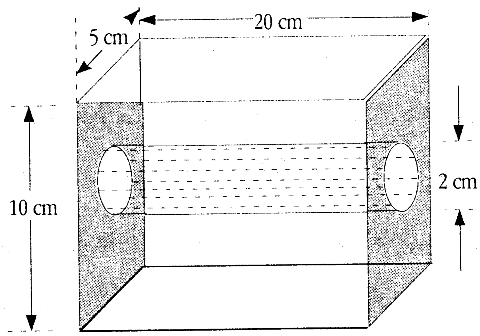
5-5 يعلق بندول· مركب "ليهتز حول أحد محورين متوازيين مارين من نقطتين O وO' اللتين تقعان على خط مستقيم يمر من مركز الكتلة وتبعدان مسافتين h وh' عنه، ويقاس الدوْران τ وτ'للاهتزازات الصغيرة حول O و O'، على الترتيب. افترض $\tau=\tau'$ وجد العلاقة التي تعطي g بدلالة الكميات المقاسة. ضع $\tau''=\tau(1+\delta)$، حيث$\delta<<1$ وجد التصحيح اللازم إضافته الى علاقتك السابقة ليحتوي على حدود من المرتبة δ فقط.

6-5 يقع قرص رقيق نصف قطره a في المستوى xy بحيث يقع مركزه عند نقطة المبدأ وكثافة النصف الموجود فوق محور السينات σ بينما كثافة النصف الأسفلσ'. جد عزم عطالته حول كل من ox وoy وoz وحول محور موازي لـ oz يمر من مركز الكتلة.

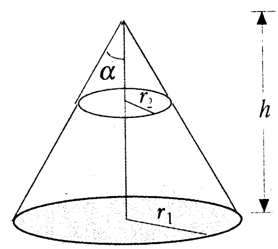
7-5 احسب عزم عطالة أضلاع هرم متساوي الأضلاع حول محور يمر من مركزه وأحد رؤوسه.

8-5 جد عزم عطالة مخروط كتلته m، وارتفاعه h، وزاويته الرأسية α، حول محور تناظره وحول محور يمر من ذروته عمودياً على محور التناظر. استفد من نتائجك لايجاد عزم عطالة مقطع من المخروط، كما هو موضح بالشكل (5-20)، حول محور أفقي يمر من مركز الكتلة.

9-5 جد عزوم عطالة الجسم الموضح بالشكل (5-21) حول المحاور المارة من مركز كتلته والموازية لكل طرف من أطرافه الثلاثة.



الشكل (5-21)



الشكل (5-20)

10-5 إلى أي ارتفاع يمكن لرجل وزنه W الصعود على سلم طوله l ووزنه w قبل أن يبدأ السلم بالإنزلاق إذا كان يستند على حائط شاقولي خشن صانعا معه زاوية α بفرض أن معامل الاحتكاك بين السلم والحائط وبين السلم والارض هو μ؟

11-5 جد عزم القصور الذاتي لصفيحة متجانسة على شكل نصف دائرة حول محور عمودي عليها ويمر من مركز كتلتها.

12-5 تعلق كتلة m بنهاية قضيب صلب كتلته M وطوله l. ما دور الحركة إذا تركت المنظومة لتهتز كبندول بسيط معلق من النهاية الأخرى للقضيب؟

13-5 تهتز صفيحة مربعة متجانسة كالبندول حول إحدى زواياها . مادور الحركة وأين يقع مركز الاهتزازات إذا كان محور الدوران (أ) عمودياً على مستو الصفيحة؟ (ب) يقع في نفس مستويها؟

14-5 برهن أن دور بندول مركب يساوي $2\pi(l/g)^{1/2}$ حيث l المسافة بين نقطة التعليق ومركز الدوران.

15-5 يلف خيط عدة لفات حول كرة صلبة وتمسك نهايته وتترك الكرة لتسقط الى الأرض. ما تسارع مركزها؟

16-5 يحمل رجلان لوحا خشبيا طوله l وكتلته m. برهن أنه اذا أفلت أحد الرجلين اللوح فإن الوزن الذي يحمله الرجل الآخر يتغير من $mg/2$ إلى $mg/4$.

17-5 تتزن اسطوانة نصف قطرها a على ذروة اسطوانة ثابتة خشنة تماما نصف قطرها b $(b>a)$، بحيث يتوازى محورا الاسطوانتين. عند أي نقطة ستغادر الأسطوانة الأولى الأسطوانة الثانية اذا تدحرجت عليها بدءاً من السكون؟

18-5 يتزن قضيب طوله l وكتلته m بوضع شاقولي على أرض خشنة ثم يتعرض لدفعة خفيفة جداً بحيث يهوي الى الأرض مع بقاء نهايته الملامسة للأرض ثابتة الى أن يصنع زاوية θ_0 تبدأ عندها بالإنزلاق. (أ) جد المركبة الأفقية والشاقولية لرد فعل الأرض بدلالة θ الزاوية بين القضيب والشاقول . (ب) جد θ_0. افترض أن معامل الاحتكاك بين الأرض ونهاية القضيب هو μ.

19-5 تقذف كرة بسرعة ابتدائية v_0 نحو الأعلى على مستو مائل بزاوية θ، فتنزلق عليه مبدئياً بدون دوران. جد موضع الكرة على المستوى بدلالة الزمن وحدد الموضع الذى تبدأ عنده الكرة بالدوران ، مفترضا أن معامل الاحتكاك بينهما هو μ.

20-5 ماعزم القصور الذاتي لقضيب متجانس طوله l وكتلته m حول محور عمودي عليه ويمر من نقطة تبعد $l/4$ عن طرفه؟

21-5 جد عزم القصور الذاتي ونصف قطر الدوران لصفيحة مربعة حول قطر فيها.

22-5 ما الطاقة الحركية لأسطوانة مفرغة كتلتها M ونصف قطرها a تتدحرج بدون انزلاق على أرض أفقية بسرعة v؟

23-5 كيف تتغير اجابة المسألة 22-5 لو كانت الاسطوانة مصمتة؟

24-5 تخضع عجلة كتلتها M ونصف قطرها a لقوة مماسية ثابتة F_0 بحيث تدور حول

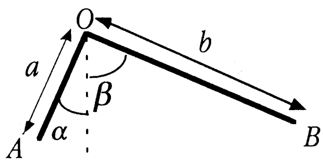
محور عمودي عليها ويمر من مركزها. برهن أن التسارع الزاوي للعجلة هو $F_0 a/Mk^2$ حيث k نصف قطر الدوران.

25-5 ماالزمن اللازم للعجلة في المسألة 5-30 لتصير سرعتها الزاوية ω_0 إذا بدأت من السكون؟ ماالشغل المبذول على العجلة والقدرة الكلية الناتجة؟

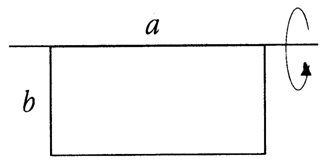
26-5 تعلق كرة مصمتة نصف قطرها a وكتلتها m من نقطة على سطحها وتبدأ بالاهتزاز حول محور يمر من نقطة التعليق. مادور الحركة وطول البندول البسيط؟

27-5 تهتز صفيحة مستطيلة طولها a وعرضها b حول محور أفقي يمر من ضلعها a، كما في الشكل (5-22). مادور الحركة وماطول البندول البسيط المكافىء؟

28-5 يتصل قضيبان OA وOB ببعضهما عند النقطة O بحيث أن الزاوية بينهما $90°$ ويعلقان من النقطة O، كما في الشكل (5-23). برهن أنه في حالة الاتزان فإن الزاويتين $\alpha = \tan^{-1}(a/b)$ و$\beta = 90° - \tan^{-1}(a/b)$.



الشكل (5-23)



الشكل (5-22)

معادلات لاغرانج

(Lagrange's Equations)

6 - 1 تمهيد: الاحداثيات العامة *(Generalized Coordinates)*

من المعروف أنه لدراسة حركة جسم m خاضع الى قوة خارجية كلية $\mathbf{F}$ فاننا نستعمل قانون نيوتن الثاني في الحركة:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1-6}$$

ثم نحاول حل هذه المعادلة لإيجاد موضع، وسرعة، وتسارع الجسم، في أي لحظة من الزمن. ويسمح تعريف التسارع بدلالة المشتقات الثانية للإحداثيات الديكارتية (x,y,z)، بكتابة معادلات الحركة مباشرة، إلا أننا في كثير من الأحيان لا نستعمل هذه الاحداثيات لأنها قد لا تكون ملائمة لبعض المسائل. فعند دراسة حركة البندول مثلا وجدنا أنه من الأفضل استعمال الزاوية θ التى تدل على مدى انحراف البندول عن الوضع الشاقولي بدلاً من x أو y. وعند دراسة حركة جسم خاضع لقوة مركزية $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ استخدمنا الاحداثيات القطبية (r,θ) بدلاً من (x,y) لتحديد موضع الجسم بالنسبة لمركز القوة، وهكذا دواليك.

لذلك نطلق على كل الاحداثيات التى نستعملها لدراسة حركة الأجسام، بما فيها الإحداثيات الديكارتية، اسم **الإحداثيات العامة** *(generalized coordinates)*. وعند حل مسألة تتطلب استعمال إحداثيات عامة، مثل (r,θ)، فإننا نكتب قانون نيوتن الثاني من المعادلة (6-1) بالإحداثيات الديكارتية ثم نحولها إلى الإحداثيات العامة المطلوبة، كما فعلنا في القوى المركزية. إلا أن هذه الطريقة قد لا تكون أبسط الطرق وأيسرها، لذا علينا إيجاد وسيلة تمكننا من كتابة معادلات الحركة بالإحداثيات العامة مباشرة دون اللجوء إلى الإحداثيات الديكارتية. هذا ماتعطيه معادلات لاغرانج التي ندرسها في هذا الفصل.

تتميز معادلات لاغرانج بأنها تستفيد من الطاقة للوصول لمعادلات الحركة. لهذه الطريقة أفضلية واضحة لأن الطاقة كمية عددية، بينما القوى كميات متجهة.

6 - 2 معادلات لاغرانج *(Lagrange's Equations)*

نفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من N جسيماً ونحدد موضع كل جسيم بثلاثة إحداثيات ديكارتية (x,y,z) فيكون عدد الإحداثيات الكلي اللازم لتحديد موضع كل هذه الجسيمات هو $3N$. إذا رمزنا للإحداثيات العامة بالرمز q_k عندئذ تكون إحداثيات الجسيم الأول (q_1 , q_2 , q_3)، والثاني (q_4 , q_5 , q_6)، وهكذا، فيكون لدينا في حالة N جسيم $(q_1 , q_2 , \ldots , q_{3N})$ إحداثي ترتبط بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقات:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1 , q_2 ,\ldots, q_{3N} , t) \\ y_1 &= y_1(q_1 , q_2 ,\ldots, q_{3N} , t) \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1 , q_2 ,\ldots, q_{3N} , t) \end{aligned}\right. \qquad (2-6)$$

بالعكس، يمكن كتابة الإحداثيات العامة بدلالة الإحداثيات الديكارتية:

$$\left\{\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1 , y_1 ,\ldots, z_N , t) \\ q_2 &= q_2(x_1 , y_2 ,\ldots, z_N , t) \\ &\vdots \\ q_{3N} &= q_{3N}(x_1 , y_2 ,\ldots, z_N , t) \end{aligned}\right. \qquad (3-6)$$

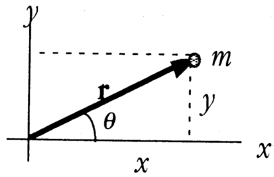
كمثال على ماتقدم نعتبر حركة جسيم في مستو، حيث نحدد موضعه بالإحداثيات الديكارتية (x,y) أو القطبية (r,θ)، كما في الشكل (6-1). ترتبط هذه الإحداثيات ببعضها بالعلاقات:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

و

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

فالإحداثيات العامة في هذه الحالة هي r و θ أو x و y.



الشكل (1-6)

الآن : تعطى سرعة أي جسيم i من منظومة تحوي N جسيماً بالعلاقة:

$$\mathbf{v}_i = \dot{x}_i\,\mathbf{i} + \dot{y}_i\,\mathbf{j} + \dot{z}_i\,\mathbf{k}$$

وطاقته الحركية :

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \qquad (4-6)$$

إذا استخدمنا العلاقات (6-2) نجد :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3N}}\dot{q}_{3N} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (5-6)$$

لكن x_i تعتمد على q_1 وq_2 و . . . و q_{3N} و t فقط، ولاتعتمد على $\dot{q}_1$ أو $\dot{q}_2$ أو .. أو $\dot{q}_{3N}$. نستنتج عندئذ أن $\partial x_i/\partial t$ يعتمد على q_1 و q_2 و . . . و q_{3N} و t فقط. لذلك إذا أخذنا المشتقات الجزئية لطرفي العلاقة (6-5) بالنسبة لـ $\dot{q}_k$ نجد:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \qquad (6-6)$$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $\dot{x}_i$ والإشتقاق بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$

أو

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}_i^2\right)\right] = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

كما نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بكتلة الجسيم m_i فنجد:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)] = (m_i \ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2) \qquad (7-6)$$

لكن:

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

هي محصلة القوة الخارجية المؤثرة على الجسيم i، فإذا أخذنا مجموع العلاقة (7-6) على كل الإحداثيات i من 1 إلى $3N$ وفرضنا $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$، نجد:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\sum_{i=1}^{3N} \tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)] = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{i=1}^{3N}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2) \qquad (8-6)$$

بملاحظة أن:

$$T = \sum_{i=1}^{3N}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2) \qquad (9-6)$$

وتعريف **القوى العامة** *(generalized forces)*، Q_k، بالعلاقة:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (10-6)$$

تؤول العلاقة (8-6) إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k \quad , \quad k = 1, 2, \dots, 3N \qquad (11-6)$$

تسمى العلاقات (11-6) **معادلات لاغرانج** *(Lagrange's Equations)*.

6 - 3 الزخم العام (generalized momentum)

يُطلق على الكمية $\partial T / \partial \dot{q}_k$ **الزخم العام** ويرمز لها بـ p_k أي أن:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \tag{12-6}$$

نلاحظ مباشرة أنه لو كانت T مكتوبة بدلالة الإحداثيات الديكارتية، أي أن:

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{13-6}$$

لكان:

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad , \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad , \quad p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{14-6}$$

هذه هي مركبات الزخم الخطي المعروفة لجسيم مادي.

أما لو كتبنا طاقة حركة جسيم يتحرك في مستو بالإحداثيات القطبية لوجدنا:

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2)$$

وتكون مركبات الزخم العام هي:

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad و \qquad p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

لكننا نعلم من دراسة الحركة المركزية أن p_θ هي الزخم الزاوي L للجسيم، و p_r الزخم الخطي بالاتجاه القطري $\mathbf{r}_1$.

فالزخم العام يشمل الزخم الخطي للحركة الانتقالية، والزخم الدوراني للحركة الدورانية.

6 - 4 القوى العامة ومبدأ العمل الإفتراضي *(Principle of Virtual Work)*

عرفنا في الفقرة السابقة القوة العامة بالعلاقة:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

سنعرف في هذه الفقرة القوى العامة بدلالة الشغل المبذول عندما تنتقل الجسيمات المؤلفة لمنظومة ميكانيكية من مكان لآخر. فنفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من N جسيماً في المواضع x_1 وy_1 و . . . y_N، وz_N، تحت تأثير القوى F_{1x}، وF_{1y}، و . . .، وF_{Ny}، و F_{NZ}. فإذا انتقل كل جسيم i مسافة عنصرية δx_i عندئذ يكون شغل هذه القوى الكلي

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (F_{ix}\,\delta x_i + F_{iy}\,\delta y_i + F_{iz}\,\delta z_i) \qquad (15-6)$$

فإذا كانت القوى F_i معلومة عندئذ يمكن حساب الشغل δW. بالعكس، إذا كان δW معلوماً (تجريبياً أو نظرياً) عندئذ يمكن معرفة القوى العامة المؤثرة على المنظومة. في هذه الحالة علينا كتابة المعادلة (6-13) من أجل كل انتقال عنصري δx_1 وδy_1 و . . و δy_N وδz_N يمثل أي انزياح صغير ممكن للجسيمات. نطلق على كل واحد من هذه الانتقالات اسم **انتقال افتراضي** *(virtual displacement)* لأنه ليس من الضروري أن يمثل انتقالاً فعلياً بل نفترض أن الجسيمات ستقوم به حتى نتمكن من حساب الشغل اللازم لذلك.

بحسب المعادلات (6-2) فإن:

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad , \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad , \quad \delta x_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (16-6)$$

بتعويض هذه العلاقات في المعادلات (6-13) نجد:

$$\delta W=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k+F_{iy}\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k+F_{iz}\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k\right)$$

أو

$$\delta W=\sum_{k=1}^{3N}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\right]\delta q_k$$

نلاحظ أن الحد الموجود بين القوسين [ ] يمثل القوة العامة Q_k، لذا يصير الشغل الافتراضي مساوياً إلى:

$$\delta W=\sum_{k=1}^{3N}Q_k\,\delta q_k \qquad (17-6)$$

أو :

$$\delta W=\sum_{k=1}^{3N}\delta W_k \qquad (18-6)$$

حيث :

$$\delta W_k=Q_k\,\delta q_k \qquad (19-6)$$

تدل δW_k في العلاقة السابقة على شغل القوى العامة Q_k عندما يتغير الإحداثي العام q_k بمقدار δq_k بينما تبقى بقية الإحداثيات العامة q_1، q_2، ...، q_{k-1}، ...، q_{3N} ثابتة. سنرى أهمية هذا التفسير عند دراسة حركة منظومة خاضعة لقوى غير محافظة.

❑ مثل 6-1: القوى العامة المؤثرة على جسيم يتحرك في مستو

لنحدد موضع الجسيم بالإحداثيات القطبية (r,θ) ونربط بينها وبين الإحداثيات الديكارتية (x,y) بالعلاقات:

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

كما نكتب القوة المؤثرة بالشكل:

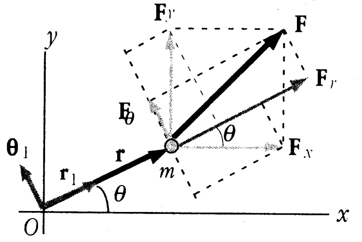
$$\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}=F_r\mathbf{r}_1+F_\theta\boldsymbol{\theta}_1$$

نلاحظ من الشكل (2-6) أن:

$$F_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta$$

و

$$F_\theta = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta$$



الشكل (2-6)

عندئذ نستخدم المعادلة (10-6) لحساب Q_k فنكتب:

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r}$$

حيث

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad \text{و} \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$$

فيكون:

$$Q_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta = F_r$$

وكذلك:

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

حيث:

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \quad \text{و} \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

فنجد:

$$Q_\theta = -rF_x \sin\theta + rF_y \cos\theta = rF_\theta$$

نلاحظ أن Q_r هي مركبة القوة الفعلية باتجاه r (F_r) بينما Q_θ عزمها بالنسبة للمبدأ O (rF_θ). ❐

6-5 القوى المحافظة وطاقة الوضع (Conservative Forces & Potential Energy)

إذا كانت القوى F_{1x}، . . . ، F_{NZ} محافظة، أي مشتقة من طاقة وضع $V=V(x_1,..,z_N)$ عندئذ يكون:

$$\left\{\begin{aligned} F_{1x} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ F_{1y} &= -\frac{\partial V}{\partial y_1} \\ F_{1z} &= -\frac{\partial V}{\partial z_1} \\ &\vdots \\ F_{Nz} &= -\frac{\partial V}{\partial z_N} \end{aligned}\right. \qquad (20-6)$$

كما أن الشغل العنصري δW يصير مساوياً لتغير طاقة الوضع δV، ونحصل عليه عندما نحسب شغل القوى (6-20) عندما تنتقل المنظومة بمقدار عنصر $\delta\mathbf{r}$، أي أن:

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) \qquad (21-6)$$

فإذا كتبنا طاقة الوضع بدلالة الإحداثيات العامة، أي:

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}) \qquad (22-6)$$

لكان:

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (23-6)$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (8-17) فإننا نستنتج أن:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (24-6)$$

تعطي العلاقة الأخيرة الطريقة التى يتم بواسطتها حساب القوى العامة من طاقة الوضع لمنظومة خاضعة لقوى محافظة، كما سنرى في الأمثلة العامة .

6-6 القوى المحافظة ومعادلات لاغرانج

وجدنا في الفقرة (6-2) أن الشكل العام لمعادلات لاغرانج هي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial q_k}+Q_k \quad , \quad (k=1,2,\cdots,3N)$$

كما وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا كانت القوى المؤثرة على منظومة ما محافظة أي مشتقة من طاقة وضع:

$$V(x_1,y_1,z_1\cdots,x_N,y_N,z_N)=V(q_1,q_2,\cdots,q_{3N})$$

عندئذ تعطى القوى العامة بالعلاقة:

$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

بتعويض Q_k في معادلات لاغرانج نجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial q_k}-\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (25-6)$$

بما أن V لايعتمد على المشتقات $\dot{q}_k$، نضع:

$$L=T-V \qquad (26-6)$$

ونكتب(6-25) على النحو :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \quad , \quad k=1,2,\ldots,3N \qquad (27-6)$$

يطلق على L اسم دالة لاغرانج *(Lagrangian)*، وتعطي العلاقات(6-27) معادلات لاغرانج لمنظومة خاضعة لقوى محافظة.

نلاحظ هنا مباشرة أن الزخم العام يعطى بالعلاقة :

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

6-7 ثوابت الحركة والإحداثيات المهملة

(Constants of Motion & Ignorable Coordinates)

إذا كتبنا دالة لاغرانج لجسم (أو منظومة جسيمات) ووجدنا أنها لا تحوي إحدى الأحداثيات q_k، أي أن:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

عندئذ تؤول معادلة لاغرانج لهذا الإحداثي إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{ثابت}$$

أي أن:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{ثابت} \qquad (30-6)$$

فالزخم العام p_k المتعلق بالإحداثي q_k ثابتٌ لايتغير مع الزمن. يدعى q_k، في هذه الحالة، **إحداثي مهمل** *(ignorable coordinate)* و p_k **ثابت حركة** *(Constant of Motion)*.

في هذه الحالة لانضطر الى حل معادلة لاغرانج بالنسبة للمتحول q_k بل نستفيد من كون p_k ثابتاً لحساب $\dot{q}_k$ وتعويضها في بقية معادلات لاغرانج مباشرة.

كمثل على ما تقدم نكتب دالة لاغرانج لجسم خاضع لقوة مركزية:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

نلاحظ أن L لايعتمد على الزاوية θ لذلك نكتب مباشرة:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{ثابت}$$

فنجد:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

بتعويض $\dot{\theta}$ في معادلة لاغرانج للمتحول r نجد معادلة تفاضلية بمتحول واحد r، فإذا قمنا بحلها وإيجاد r عندئذ نعوض في العلاقة أعلاه لنجد $\dot{\theta}$ ومن ثم θ.

6 - 8 أمثلة

مثل 6-2 البندول البسيط *(The Simple Pendulum)* :

لندرس حركة بندول بسيط كتلته m وطوله l، فنكتب طاقته الحركية T:

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

نلاحظ من الشكل (6-3) أن:

$$\dot{x} = (l\cos\theta)\dot{\theta} \quad \Leftarrow \quad x = l\sin\theta$$

و

$$\dot{y} = (l\sin\theta)\dot{\theta} \quad \Leftarrow \quad y = -l\cos\theta$$

فيكون:

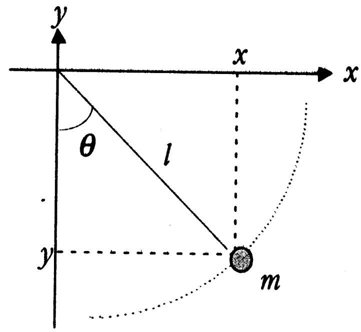
$$T = \tfrac{1}{2} ml\dot{\theta}^2$$

كما أن طاقة الوضع هي:

$$V = mgy = -mgl\cos\theta$$

بذلك نجد دالة لاغرانج L بدلالة الإحداثي العام θ:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} ml\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$



الشكل (3-6)

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} \quad \Leftarrow \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

كما أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

فنكتب معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

أو:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

وهي معادلة البندول البسيط المعروفة. ❒

❒ **مثل 3-6 حركة جسيم تحت تأثير قوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد**

نفترض أن لدينا جسيماً m خاضعا لقوة مركزية من الشكل:

$$F(r) = \frac{k}{r^2}$$

فتكون طاقة وضعه معطاة بالعلاقة:

$$V(r) = -\int F(r)\,dr = \frac{k}{r}$$

أما الطاقة الحركية فنكتبها على الشكل:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

فنجد دالة لاغرانج:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{k}{r}$$

نحصل على معادلات الحركة بكتابة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-\frac{k}{r}=0$$

وكذلك:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0$$

هذه هي المعادلات المعروفة لحركة جسيم خاضع لقوة مركزية. ❐

---

6 - 9 حركة منظومة ميكانيكية خاضعة لقيود *(Constrained Motion)*

من المسائل المهمة في الميكانيك التي نستعمل فيها معادلات لاغرانج، لسهولة تطبيقها، تلك التي تكون "فيها المنظومة الميكانيكية خاضعة لقيود معينة *(constraints)*. كأن نجبر جسماً على الحركة على منحنى معين بحيث تحقق إحداثياته علاقة محددة يطلق على عدد الطرق التي يمكن للجسم أن يتحرك بها بدون أن يخالف القيود المفروضة عليه اسم **عدد درجات الحرية** *(number of degrees of freedom)*. بمعنى آخر فإن هذا العدد هو **عدد الإحداثيات اللازمة والكافية لتحديد حركة الجسم أو المنظومة بشكل كامل**.

إذا اعتبرنا جسيماً حراً في الفضاء فإن عدد درجات الحرية له يساوي عدد إحداثياته في الفضاء، أي ثلاثة، أما لو اعتبرنا جسماً صلباً يتحرك بحرية في الفضاء فإننا نلاحظ أنه يمكننا تحديد موضعه إذا حددنا موضع ثلاث نقاط منه لا

تقع كلها في مستو واحد، أي أننا بحاجة الى تسعة إحداثيات. لكن بما أن الجسم صلب فإن المسافة بين كل نقطتين منه يجب أن تبقى ثابتة دوماً، مما يؤدي الى وجود ثلاث علاقات بين هذه الاحداثيات التسعة . لذلك يصير عدد درجات الحرية للجسم الصلب هو ست فقط.

نمير بين نوعين من القيود التي يمكن أن تخضع لها منظومة مؤلفة من N جسيماً. فإذا كان هناك c علاقة تربط بين الإحداثيات العامة للمنظومة نتيجة القيود المفروضة، من الشكل:

$$\phi_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, c \tag{31-6}$$

عندئذ نطلق على هذه القيود اسم **قيود هولونومية** *(holonomic constraints)*.

من الواضح أن عدد درجات الحرية لمنظومةذات قيود هولونومية سينخفض بمقدارٍ مساوٍ لعدد معادلات القيود المفروضة ويصير:

$$f = 3N - c \tag{32-6}$$

أما إذا لم يكن بالإمكان كتابة علاقات بين القيود، بشكل مماثل لـ(31-6)، فإننا نقول إن القيود **غير هولونومية** *(non-holonomic constraints)*.

تعتبر حركة جسيم على محيط كرة نصف قطرها R، متمركزة عند المبدأ، مثلاً على حركة خاضعة لقيود هولونومية، إذ أن إحداثيات هذا الجسيم يجب أن تحقق على الدوام علاقة من الشكل:

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

أما لو اعتبرنا تدحرج كرة صغيرة على السطح الخارجي لكرة كبيرة للاحظنا أن هذا النوع من القيود غير هولونومي، لأن الكرة الصغيرة ستنفصل عن الكرة الكبيرة في لحظة ما مما يؤدي إلى اختفاء القيد بينهما كليا.

6 - 10 معادلات لاغرانج بوجود قيود هولونومية ومضاريب لاغرانج

نفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من N جسيماً وخاضعة لقيود عددها c من الشكل:

$$\phi_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, c$$

سنحاول فيما يلي كتابة معادلات لاغرانج لهذه المنظومة بطريقة تمكننا من حساب القوى الناتجة عن القيود مباشرة (مثل شد الحبل في آلة آتوود المشهورة). لذلك نكتب من (6-11) :

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) - Q_k = 0$$

بضرب طرفي العلاقة السابقة بـ δq_k، الذي نعتبره انتقالاً افتراضياً للإحداثي q_k ، كما لو كان الجسم سيتحرك فعلاً بذلك الاتجاه ، وأخذ المجموع على k نجد:

$$\sum_k \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) - Q_k\right]\delta q_k = 0 \qquad (33-6)$$

لكن معادلة القيد (6-31) تعطي:

$$\sum_k A_{qi}\, \delta q_k = 0 \qquad (34-6)$$

حيث تتغير i من 1 إلى c (عدد معادلات القيود)، و

$$A_{qi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial q_k} \qquad (35-6)$$

بما أن أن هناك c معادلة قيد، لذا نحصل على c معادلة من الشكل (6-35). فنضرب الأولى بـ λ_1 والثانية بـ λ_2 و . . . والأخيرة بـ λ_c، ونجمع هذه المعادلات فنجد:

$$\sum_k (\lambda_1 A_{q1} + \lambda_2 A_{q2} + \cdots + \lambda_c A_{qc})\delta q_k = 0 \qquad (36-6)$$

بطرح هذه العلاقة من (6-33) نجد، بعد الإصلاح:

$$\sum_k [(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k})-(Q_k+\lambda_1 A_{q1}+\lambda_2 A_{q2}+\cdots+\lambda_c A_{qc})]\delta q_k=0$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل أي انتقال افتراضي δq_k، أي أن:

$$(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k})-(Q_k+\lambda_1 A_{q1}+\lambda_2 A_{q2}+\cdots+\lambda_c A_{qc})=0$$

أو

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k+\sum_{i=1}^{c}\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial q_k}=0 \qquad (37-6)$$

تسمى الثوابت λ_i في (6-37) **مضاريب لاغرانج** *(Lagrange Multipliers)*، وسنرى بعد قليل أنها ترتبط بقوى القيود المفروضة على المنظومة.

إذا كانت القوى العامة Q_k مشتقة من طاقة وضع $V=V(q_1,q_2\,..,q_{3N})$، نكتب:

$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

وتؤول (6-37) إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{c}\lambda_i\frac{\partial \phi_i}{\partial q_k}=0 \qquad (38-6)$$

حيث L دالة لاغرانج للمنظومة.

بمقارنة (6-38) بـ(6-11) نلاحظ أن الطرف الأيمن من الأولى يمثل القوى العامة الكلية المؤثرة على المنظومة، وبحسب ماافترضناه فإن Q_k تمثل القوى العامة المتعلقة بالقوى المحافظة المؤثرة على المنظومة، لذلك نستنتج أن المجموع في الطرف الأيمن من (6-38) يتعلق بقوى القيود المفروضة على المنظومة (غير المحافظة طبعاً)، وتدل مضاريب لاغرانج λ_i على قوى القيود هذه.

تكمن أهمية معادلات لاغرانج في أنها تغنينا عن إدخال قوى القيود المفروضة على منظومة في معادلات الحركة، لأن التأكيد هنا هو على تحريك المنظومة (بحساب طاقة الحركة وطاقة الوضع) لا على حساب القوى المؤثرة على كل جزء منها. إلاّ أنه في حالات معينة يكون المطلوب معرفة القوى المقيدة للحركة، كرد فعل سطح أو شد خيط، ....الخ، لذلك تعتبر معادلات لاغرانج المعطاة بالعلاقات(6-38) إحدى السبل الواضحة والمختصرة لحساب هذه القوى، حيث نحسب منها مضاريب لاغرانج التي تساوي قوى القيود تماماً.

6 - 11 أمثلة على الحركة المقيدة *(Constrained Motion)*

❐ مثل 6-4 تدحرج كرة صلبة على كرة ثابتة

ندرس تدحرج كرة صغيرة نصف قطرها a على السطح الخارجي لكرة كبيرة نصف قطرها b ، كما في الشكل (6-4)، ونحلل الحركة إلى ثلاث مراحل:

(1) تدحرج الكرة الصغيرة على الكبيرة نتيجة وجود قوة احتكاك سكوني معطاة بالعلاقة:

$$0 \leq f_s \leq \mu_s N \qquad (1)$$

(2) انزلاق الكرة الصغيرة على الكرة الكبيرة عندما تصير f_s أكبر مايمكن وتتحول إلى قوة احتكاك حركي معطاة بالعلاقة:

$$f_k = -\mu_k N \qquad (2)$$

(3) مغادرة الكرة الصغيرة لسطح الكرة الكبيرة عندما تصبح قوة رد الفعل معدومة، أي عندما:

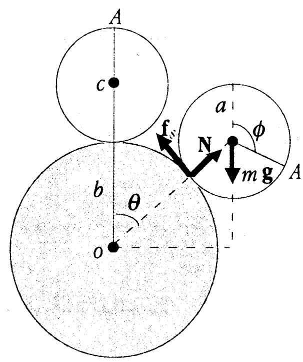
$$N = 0$$

لتصير حركتها عندئذ مماثلة لحركة قذيفة خاضعة للجاذبية الأرضية فقط.

من الواضح أن الجزء الأول من الحركة هو أعقدها بينما يمكن دراسة الجزأين الثاني والثالث بسهولة. لذلك سنركز فيما يلي على المرحلة الأولى من الحركة،

ونحسب قوتي رد الفعل والاحتكاك المؤثرتين على الكرة الصغيرة خلال انزلاقها بوساطة مضاريب لاغرانج.

نلاحظ خلال هذه المرحلة أنه طالما كان هناك تدحرج بدون انزلاق فإن القوس الذي تقطعه النقطة A، في الشكل (6-4)، خلال دوران الكرة الصغيرة زاوية صغيرة φ، حول محورها ، يساوي المسافة التي يقطعها مركز هذه الكرة c حول مركز الكرة الكبيرة o، أي أن :



الشكل (6-4)

$$a\varphi = (a+b)\theta \qquad (3)$$

أو

$$\phi_1 = (a+b)\theta - a\varphi = 0 \qquad (4)$$

هذه هي معادلة القيد الوحيدة في هذه المرحلة، وطالما أنها محققة فإن التدحرج يتم بدون انزلاق. أما عندما تصل الكرة الصغيرة الى المرحلة الثانية من حركتها عندئذ تصير (4) غير صحيحة. لذلك نعرّف الزاوية γ بالعلاقة:

$$\gamma = (a+b)\theta - a\varphi = 0 \qquad (5)$$

حيث نقول إن $\gamma=0$ يعني أن التدحرج يتم بدون انزلاق، بينما $\gamma \neq 0$ يعني أن هناك انزلاقاً إلى أن تنفصل الكرتان عن بعضهما.

كما أن بقاء الكرتين على تماس دوماً (قبل الانفصال) يعني أن:

$$r = a + b = \text{ثابت} \qquad (6)$$

أو:

$$\phi_2 = r - a + b = 0 \tag{7}$$

وهذه هي معادلة القيد الثانية والتي نستفيد منها إن أردنا إيجاد رد فعل الكرة الكبيرة على الصغيرة.

الآن: لدراسة الحركة نكتب الطاقة الحركية للكرة الصغيرة:

$$T = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\varphi}^2$$

بالتعويض عن سرعة مركز الكتلة $v_{c.m.}$ بـ $(a+b)\theta$ وعزم العطالة I_c بـ $(2ma^2/5)$ نجد:

$$T = \frac{1}{2} m (a+b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (\frac{2}{5} m a^2) \dot{\varphi}^2 \tag{8}$$

كما نكتب طاقة وضع الكرة الصغير بالشكل :

$$V = mg(a+b)\cos\theta \tag{9}$$

حيث اعتبرنا مستوى الأرض عند موقع مركز الكرة الكبيرة.

بما أن التدحرج يتم بدون انزلاق فإن قوة الإحتكاك لا تقوم بأي شغل، لذلك تعتبر المتظومة خاضعة لقوى محافظة فقط ونكتب دالة لاغرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (a+b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (\frac{2}{5} m a^2) \dot{\varphi}^2 - mg(a+b)\cos\theta \tag{10}$$

كما تعطي معادلة القيد (4):

$$a\delta\varphi - (a+b)\delta\theta = 0 \tag{11}$$

فإذا وضعنا $q_1=\theta$ و $q_2=\varphi$ وجدنا من (6-35):

$$\begin{cases} A_\theta = \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = a + b \\ A_\varphi = \dfrac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -a \end{cases} \tag{12}$$

بذلك نكتب من معادلات لاغرانج (6-33):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 (a+b) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = -\lambda_1 a \end{cases} \tag{13}$$

حيث نلاحظ أنه لا يوجد إلا مضروب واحد من مضاريب لاغرانج لوجود معادلة قيد واحدة في هذا الجزء من الحركة.

بتعويض L من(10) في المعادلتين (13) نجد:

$$m(a+b)^2 \ddot{\theta} - mg(a+b)\cos\theta = (a+b)\lambda_1 \tag{14}$$

و

$$(\tfrac{2}{5} ma^2)\ddot{\varphi} = -a\lambda \tag{15}$$

بحل هاتين المعادلتين بالإستفادة من معادلة القيد (4) نجد:

$$\lambda_1 = -\tfrac{2}{7} mg \sin\theta \tag{16}$$

التي تعطي مضروب لاغرانج المساوي إلى قوة الإحتكاك لأنها نتجت عن معادلة القيد (4).

كما نجد:

$$\ddot{\theta} = \frac{5g}{7(a+b)} \sin\theta \tag{17}$$

لإيجاد رد الفعل نفترض أن البعد r بين مركز الكرة الصغيرة ومركز الكرة الكبيرة سيتغير بمقدار افتراضي δr، فنلاحظ أن القوة الوحيدة التي تقوم بشغل عندئذ (باستثناء القوة المحافظة **mg**) هي رد الفعل **N**. لذلك نعيد كتابة الطاقة الحركية للكرة الصغيرة مفترضين أن r متغيرة فنجد:

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5} ma^2)\dot{\varphi}^2 - mgr\cos\theta \tag{18}$$

ومنه

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\ddot r$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot\theta^2 - mg\cos\theta$$

أما معادلة القيد (5) فتعطي:

$$\delta r = 0$$

لذلك نكتب معادلة لاغرانج بالشكل:

$$m\ddot r - mr\dot\theta^2 + mg\cos\theta = \lambda_2 \tag{19}$$

بوضع: ثابت= r، نجد أن المعادلة السابقة تؤول إلى:

$$-mr\dot\theta^2 + mg\cos\theta = \lambda_2$$

بتعويض $\dot\theta^2$، بعد إجراء التكامل، وملاحظة أن $\theta_0=0$ عندما $t=0$ نجد:

$$\dot\theta^2 = \tfrac{10}{7}\frac{mg}{r}(1-\cos\theta) \tag{20}$$

وتصير λ_2 مساوية إلى:

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{7}\frac{mg}{r}(17\cos\theta - 10) \tag{21}$$

نلاحظ مباشرة أن $N=mg$ عندما $\theta=0$، كما هو مفروض.

يمكن معرفة الزاوية التى ستبدأ عندها الكرة بالإنزلاق عندما تصبح f_s أكبر مايمكن أي عندما $f_s=\mu_s N$ ، بتعويض كل من f_s وN نجد:

$$\tfrac{2}{7}mg\sin\theta_s = \mu_s[\tfrac{1}{7}mg(17\cos\theta - 10)]$$

حيث θ_s الزاوية التي يبدأ عندها الإنزلاق *(slipping)*. بحل المعادلة السابقة نجد:

$$\cos_s = \frac{170\mu_s + \sqrt{756\mu_s^2 + 16}}{289\mu_s^2 + 4} \tag{22}$$

يمكن أيضاً معرفة الزاوية التي ستغادر عندها الكرة الصغيرة سطح الكرة الكبيرة بوضع N=0 فنجد:

$$\cos_s = \frac{10}{17} \tag{23}$$

بالطبع فإن قيمة μ_s هي التى تحدد فيما إذا كانت الكرة الصغيرة ستتدحرج بدون انزلاق قبل أن تطير عن الكرة الكبيرة أم لا.

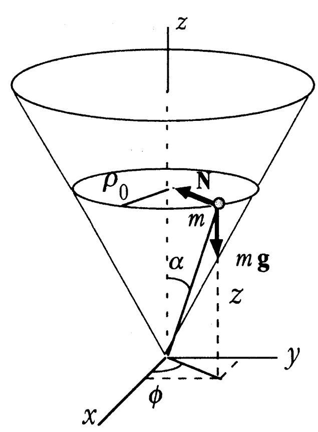
لا بأس من الإشارة إلى أننا لم نستخدم معادلة القيد(3) لأنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$a(\theta - \varphi) + b\theta = 0$$

بحيث أصبحت مستقلة عن r ولم يعد هناك حاجة لإستخدامها. ❒

❒ مثل 6-6 حركة جسيم داخل مخروط

ندرس الآن حركة جسيمm على السطح الداخلي لمخروط دوراني قائم مقلوب، كما في الشكل (6-5)، ونحدد شرط حركة الجسم على دائرة نصف قطرها ρ_0، وقيمة رد الفعل عندئذ.



الشكل (6-5)

نكتب معادلة المخروط بالشكل:

$$z=\rho\cot\alpha$$

من ثم نجد معادلة القيد:

$$z-\rho\cot\alpha=0 \qquad (1)$$

كما نكتب الطاقة الحركية بالإحداثيات الإسطوانية:

$$T=\tfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

وطاقة الوضع:

$$V=mgz$$

فنجد دالة لاغران :

$$L=T-V=\tfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz \qquad (2)$$

كما نجد من معادلة القيد (1):

$$\delta z-\cot\alpha\delta\rho=0$$

أي أن:

$A_\varphi=0$ و $A_\rho=-\cot\alpha$ و $A_z=1$

لذلك نكتب معادلة لاغرانج بالنسبة لـ z و ρ بالشكل:

$$m\ddot{z}+mgz=\lambda \qquad (3)$$

و

$$m\ddot{\rho}-m\rho\dot{\varphi}^2=-\lambda\cot\alpha \qquad (4)$$

نظراً لأن L لايعتمد على φ لذلك نكتب مباشرة:

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi})=0 \qquad (5)$$

كما نكتب من معادلة القيد(1) :

$$\ddot{z}=\ddot{\rho}\cot\alpha \qquad (6)$$

بحل مجموعة المعادلات (3) و (4) و (5) و (6) نجد :

$$m\rho^2\dot{\varphi} = \text{ثابت} \tag{7}$$

و

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \tag{8}$$

بحل المعادلة (8) بالنسبة لـ ρ والإستفادة من (7) و (3) نجد ρو φوz و λ.

الآن: إذا افترضنا أن الجسم يدور على دائرة أفقية نصف قطرها ρ_0 عندئذ نجد رد الفعل من المعادلة (4):

$$\lambda = \frac{m\rho_0\dot{\varphi}^2}{\cot\alpha}$$

بتعويض $\dot{\varphi}$من (7) نجد:

$$\lambda = \frac{l^2\tan\alpha}{m\rho_0^3} \tag{9}$$

❐

❐ مثل 7-6 البندول الكروي *(The Spherical Pendulum)*

نعتبر بندولاً مؤلفاً من كتلة m معلقة بخيط طوله l، مثبت طرفه الآخر عند نقطة O وندرس أنواع الحركة الممكنة له حسب طاقته الكلية.

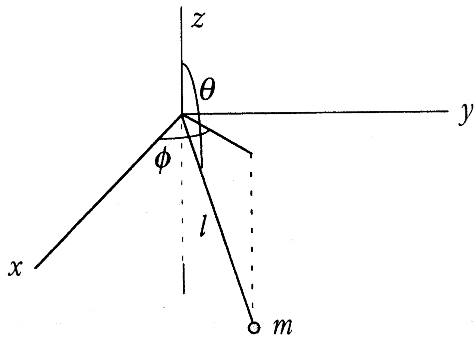
نحدد موضع الكتلة m في الفضاء باستخدام الإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ)، كما في الشكل (6-6)، بذلك تكون سرعة m معطاة بالعلاقة (راجع الفصل الثاني):

$$\mathbf{v} = \dot{r}\ \mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\ \boldsymbol{\theta}_1 + r\sin\theta\dot{\phi}\ \boldsymbol{\phi}_1$$

حيث $\mathbf{r}_1$ متجه وحدة باتجاه ازدياد المتجه $\mathbf{r}$ و $\boldsymbol{\theta}_1$ متجه وحدة باتجاه ازدياد الزاوية θ و $\boldsymbol{\phi}_1$ متجه وحدة باتجاه ازدياد الزاوية ϕ.

بما أن: ثابت$=r=l$ ، فيكون $\dot{r}=0$ وتصير الطاقة الحركية للبندول معطاة بالعلاقة:

$$T = \tfrac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$



الشكل (6-6)

$$T=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

أما طاقة الوضع فهي:

$$V=mgz=mgl\cos\theta$$

فتصير دالة لاغرانج معطاة بالعلاقة:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)-mgl\cos\theta$$

نلاحظ أن L لايحوي φ، أي أن ϕ إحداثي مهمل $(\partial L/\partial\varphi=0)$. فتؤول معادلة لاغرانج بالنسبة لـ φ إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=\frac{d}{dt}[ml^2(\sin^2\theta)\dot{\phi}]=0$$

أي أن p_ϕ ثابت حركة:

$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}=\text{ثابت}$$

أي أن:

$$\dot{\phi}=\frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}$$

أما معادلة لاغرانج بالنسبة للزاوية θ فهي:

$$ml^2\ddot{\theta} - ml^2 \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - mgl\sin\theta = 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

بتعويض $\dot{\phi}$ بقيمتها وإصلاح المعادلة الناتجة نجد:

$$\ddot{\theta} = (\frac{p_\phi^2}{m^2 l^5})\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

يعطي حل المعادلة السابقة كيف تتغير θ مع الزمن. إذا استطعنا حلها عندئذ يمكن الوصول لتغيرات ϕ مع الزمن أيضاً من p_ϕ.

من الواضح أن المعادلة التفاضلية السابقة في غاية الصعوبة، لذلك نعتمد طريقة مناقشة الطاقة الكلية لمعرفة احتمالات الحركة الممكنة للبندول الكروي، فنكتب:

$$E = T + V = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

أو:

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = E - 'V(\theta)'$$

حيث وضعنا الجهد الفعّال $'V(\theta)'$ مساوياً إلى:

$$'V(\theta)' = \frac{p_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

بما أن $ml^2\dot{\theta}^2/2 \geq 0$ دوماً، لذا فالحركة محددة بقيم θ التي تحقق $E \geq 'V(\theta)'$.

سندرس أنواع الحركة الممكنة في الحالتين الآتيتين:

(أ) $p_\phi = 0$ نستنتج عندئذ أن $\dot{\phi} = 0$، ومنه:

ϕ = ثابت

فالحركة تتم في مستو موازي لـ xy. يصير الجهد الفعال حينئذ مساويا إلى:

$$'V(\theta)' = mgl\cos\theta$$

وتصبح حركة البندول الكروي مطابقة لحركة بندول بسيط.

كما يكون الجهد الفعّال أصغر مايمكن عندما $\theta=\pi$، ويساوي:

$$V'(\theta) = -m g l$$

بينما يصير أكبر مايمكن عندما $\theta=0$، ويساوي:

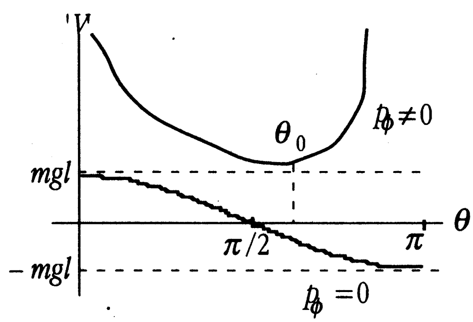
$$V'(\theta) = m g l$$

فإذا كان:

$$E = V' = -m g l$$

فليس هناك حركة على الإطلاق لأن $\dot{\theta}=0$. وإذا كان $E=V'=mgl$ فهناك اتزان قلق عند $\theta=0$.(هذا إذا استبدلنا الخيط بقضيب صلب).

(ب) $p_\phi \neq 0$: في هذه الحالة لا تعود حركة البندول الكروي مشابهة لحركة بندول بسيط ، ونلاحظ من منحنى الجهد الفعّال في الشكل (6-7) أن هناك نهاية صغرى له عندزاوية معينة $\pi > \theta_0 > \pi/2$. فإذا كان $E=V'(\theta_0)$ عندئذ تصير $\dot{\theta}=0$، أي أن $\theta=$ ثابت، فيرسم البندول مخروطاً زاويته الرأسية $\alpha=\pi-\theta_0$ (لماذا؟). كما نلاحظ أنه كلما كانت p_φ أكبر فإن θ_0 تقترب من $\pi/2$، وهذا طبيعي إذ أن زاوية المخروط الرأسية تزداد كلما ازدادت سرعة دورانه حول المحور oz إلى أن تصير مساوية لـ $\pi/2$ عندما $p_\varphi \to \infty$ أي أن $\alpha=\pi/2$.



الشكل (6-7)

لإيجاد العلاقة بين p_φ و θ_0، عندما تصير حركة البندول دائرية حول المحور oz (أي: $\theta_0=$ثابت) نضع:

$$\left(\frac{d' V(\theta)'}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = -mgl\sin\theta - \frac{p_\phi^2\cos\theta_0}{ml^2\sin^3\theta_0} = 0$$

ومنه:

$$p_\phi^2 = \frac{m^2 l^3 \sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}$$

بما أن:

$$p_\phi = \dot{\phi} m l^2 \sin^2\theta_0$$

فنجد:

$$\dot{\phi} = \frac{g}{(-l\cos\theta_0)}$$

فتكون الطاقة الكلية للبندول في هذه الحالة هي:

$$E_0 = \tfrac{1}{2} mgl\left(\frac{2-3\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\right)$$

أما إذا كان E أكبر بقليل من $'V(\theta_0)'$ عندئذ يقوم البندول بالدوران حول المحور oz في مخروط تتغير زاويته الرأسية α بشكل توافقي حول α_0 لأن θ ستهتز حول θ_0، ويكون تردد الإهتزازات الصغيرة معطى بالعلاقة:

$$k = \left(\frac{d^{2}{}' V(\theta)'}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} = \frac{mgl}{(-\cos\theta_0)}(1+3\cos^2\theta_0)$$

لكن عندما تكون θ قريبة من θ_0 أي عندما يكون الفرق $(\theta-\theta_0)$ صغيراً، عندئذ يمكن نشر $'V(\theta_0)'$ بحسب سلسلة تايلور فنجد:

$$'V(\theta)' = 'V(\theta_0)' + \left(\frac{d' V(\theta)'}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^{2}{}' V(\theta)'}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0)^2 + \cdots$$

بوضع:

$$E_0 = 'V(\theta_0)'$$

و

$$(\frac{d' V(\theta)'}{d\theta})_{\theta=\theta_0} = 0$$

و

$$k = (\frac{d^{2'} V(\theta)'}{d\theta^2})_{\theta=\theta_0}$$

يكون:

$$' V(\theta)' = E_0 + \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على $(\theta-\theta_0)^3$ ، أو أعلى، فتؤؤل معادلة الطاقة إلى:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2 = E - E_0$$

تمثل العلاقة الأخيرة معادلة الطاقة لهزاز توافقي بسيط، كتلته ml^2، وطاقته $E-E_0$ ويتحدد موضعه بالزاوية $\theta-\theta_0$. وتصير السرعة الزاوية لحركة البندول الاهتزازية معطاة بالعلاقة:

$$\omega^2 = \frac{k}{M} = \frac{k}{ml^2} = \frac{g}{l}(\frac{1 + 3\cos^2\theta_0}{-\cos\theta_0})$$

بمقارنة $\dot{\phi}$و ω نجد أن:

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega^2} = \frac{1}{1 + 3\cos^2\theta_0}$$

بما أن $\pi>\theta>\pi/2$ فان $\omega>\dot{\phi}$، أي أن سرعة دوران البندول حول المحورoz أبطأ من سرعة اهتزازه للأعلى والأسفل، لذا يتأرجح البندول خلال دورانه حول oz.

من جهة أخرى، نلاحظ أنه عندما $\theta_0=\pi/2$وE أكبر بقليل من E_0 فإن البندول يتحرك دائرياً في مستو مائل عن الأفق بعض الشيء. يتم هذا عندما تكون p_φ كبيرة جداً لكون الجاذبية مهملة تقريباً في هذه الحركة ذات الطاقة العالية جداً.

أما عندما$\theta_0=0$وE أكبر بقليل من E_0 فإن $\omega=2\dot{\phi}$ فتهتز θمرتين خلال كل دورة

للبندول الذي يرسم قطعاً ناقصاً يقع مركزه على المحورoz. هذا مشابه لحركة هزاز توافقي يتحرك في مستو على اتجاهين متعامدين بترددين متساويين. □

6 - 12 معادلات هاملتون (Hamilton's Equations)

سندرس في هذه الفقرة حركة منظومة ميكانيكية خاضعة لقوى محافظة فقط، أي أن معادلات لاغرانج لها تعطى بالعلاقات(6-27)، وتكون دالة لاغرانج دالة للإحداثيات العامة q_k، والسرع $\dot{q}_k$، وربما الزمن t.

الآن: نعلم أن حالة أي منظومة، أي موضع وسرعة وتسارع كل جزء منها، تتحدد، في أي لحظة، بتحديد الإحداثيات والزخوم العامة q_k و p_k كلها. كما نعلم أن معادلات لاغرانج هي معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية تربط بين التسارعات $\ddot{q}_k$ وبين هذه الإحداثيات والزخوم العامة.

من جهة أخرى، يمكن تحديد حالة المنظومة بإعطاء الإحداثياتq_k والزخوم p_k المعرفة بالعلاقات:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, 3N \tag{39-6}$$

تفيد العلاقات السابقة بإعطاء الكميات p_k بدلالة q_1 ، q_2 ، . . . . ، q_{3N} و $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_{3N}$ إذ يمكن نظرياً حل هذه العلاقات لتحديد q_k بدلالة q_1،q_2 ، . . . ، q_{3N} و $p_1, p_2, \cdots, p_{3N}$. سنحاول في هذه الفقرة كتابة معادلات الحركة بدلالة الإحداثيات q_k والزخوم p_k .

نأخذ المشتق الكلي لدالة لاغرانج:

$$dL = \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

أي أن:

$$dL = \sum_{k=1}^{3N} (p_k \, d\dot{q}_k + \dot{p}_k \, dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{39-6}$$

لنعرّف الآن الدالة $H(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, p_1, p_2, \ldots, p_{3N})$ بالعلاقة:

$$H = \sum_{k=1}^{3N} p_k \dot{q}_k - L \qquad (40-6)$$

حيث نعوّض عن السرع q_k بدلالة الإحداثيات والزخوم، فنجد من (39-6) و (40-6) أن:

$$dH = \sum_{k=1}^{3N} (\dot{q}_k \, dp_k - \dot{p}_k \, dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (41-6)$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن H يعتمد بشكل صريح على كل من dq_k و dp_k والزمن t كما نجد أيضاً أن:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, 3N \qquad (42-6)$$

و

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (43-6)$$

تعطي العلاقات (42-6) معادلات الحركة لأنها تحدد السرع بدلالة الإحداثيات والزخوم، ويطلق على H اسم **دالة هاملتون** *(Hamiltonian Function)*.

إذا كان V لايعتمد إلاّ على الإحداثيات العامة فقط، أي أن $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_{3N})$ عندئذ نستنتج من تعريف دالة لاغرانج أن H تمثل الطاقة الكلية للمنظومة. نبرهن ذلك فيما يلي.

إذا كانت الطاقة الحركية الكلية لمنظومة دالة لمربع السرع $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{3N}$ عندئذ نجد من نظرية أولر *(Euler'e Theorem)* أن:

$$\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \qquad (44-6)$$

(برهن العلاقة السابقة). من ثم فإن:

$$H=\sum_{k=1}^{3N}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-L=T+V \tag{45-6}$$

وهو المطلوب إثباته.

إذا لم يعتمد L على الزمن بشكل صريح فإن H لايعتمد عليه بشكل صريح أيضاً، كما نلاحظ من العلاقة (6-43)، ويصير H ثابتاً من ثوابت الحركة، إذ أنه من السهل إثبات أن:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{46-6}$$

وإذا لم يحوي H إحدى الإحداثيات q_k بشكل صريح فإن الزخم العام المقابل له يكون ثابتاً من ثوابت الحركة، ويقل عدد معادلات الحركة، نتيجة لذلك، بعدد الإحداثيات غير الموجودة في الهاملتونيان H، لذا ينخفض عدد درجات الحرية للمنظومة من $3N$ إلى $3N-f$ حيث f عدد تلك الإحداثيات غير الموجودة في H. من هنا أطلق اسم **إحداثيات مهملة** *(ignorable coordinates)* على هذه الإحداثيات.

بعد حل معادلات هاملتون للإحداثيات غير المهملة يمكن إيجاد أي إحداثي مهمل مباشرة من العلاقات (6-42) بالتكامل بالنسبة للزمن t، على النحو:

$$q_k(t)=q_k(0)+\int_0^t\frac{\partial H}{\partial p_k}dt \tag{47-6}$$

إن معادلات هاملتون هي صياغة مختلفة لقوانين نيوتن في الحركة. وتعطي، في حالات بسيطة، نفس المعادلات التي نحصل عليها من قانون نيوتن الثاني مباشرة. ففي حالة هزّاز توافقي بسيط مثلاً فإننا نكتب الزخم:

$$p=m\dot{x}$$

من ثم نجد دالة هاملتون:

$$H=T+V=\frac{p^2}{2m}+\tfrac{1}{2}kx^2$$

(لاحظ أننا نكتب H بدلالة p و x لا بدلالة السرعة $\dot{x}$!). من ثم نجد من معادلات هاملتون (6-42) أن:

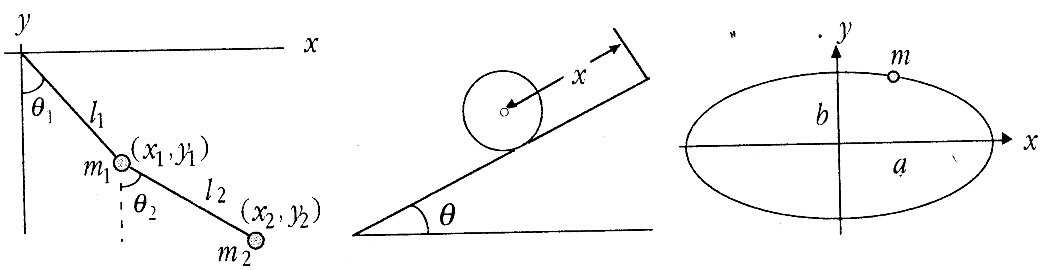
$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -kx$$

نلاحظ مباشرة أن العلاقة الأولى هي معادلة الحركة التي نعرفها لجسم مربوط بزنبرك، والثانية هي التعريف الأساس للزخم الخطي p.

على الرغم من أن معادلات هاملتون ذات قيمة قليلة نسبياً إذا استخدمت لكتابة معادلات حركة منظومة ميكانيكية كلاسيكية فقط، إلاّ أنها توفر البداية المنطقية لوضع قوانين الميكانيك الإحصائي والميكانيك الكمي. وقد وضع هاملتون معادلاته هذه بالاستفادة من معادلات رياضية مشابهة لها في الضوء، لذا فليس من المستغرب أن تشكل معادلات هاملتون نقطة البداية للميكانيك الموجي.

مسائل

1-6 ما الإحداثيات العامة اللازمة لتحديد حركة كل من (أ) جسيم m يتحرك على قطع ناقص (ب) اسطوانة تتدحرج على مستو مائل (جـ) كتلتي البندول المضاعف *(double pendulum)*، كما في الأشكال (6-8)؟

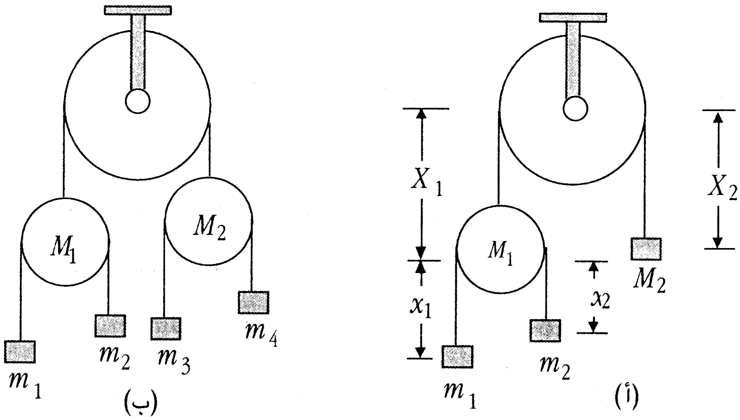


الأشكال (6-8)

2-6 اكتب دالة لاغرانج ومعادلات لاغرانج للمنظومات التالية: (أ) هزاز توافقي بسيط، (ب) جسم يسقط بشكل حر في الفضاء.

3-6 اكتب معادلات لاغرانج لآلات آتوود المضاعفة الموضحة بالشكل(6-9 أ) بفرض أن

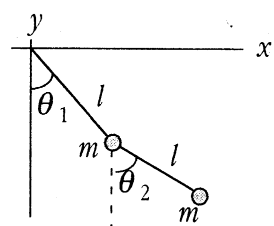
$2m_1=m_2$ و $M_2=2M_1$ (أهمل الإحتكاك وأوزان البكرات). جد تسارع الكتل والشد في كل خيط. كرر السؤال للمنظومة الموضحة بالشكل (6-9ب) مفترضاً أن $m_1=2m_2$ و $m_3=3m_2$ و $m_6=m_4=4m_2$.



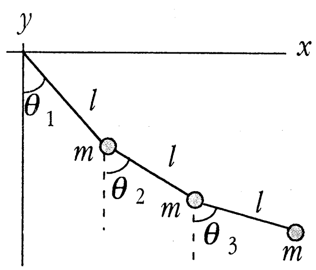
الشكل (9-6)

4-6 تتحرك m بدون احتكاك على سلك سايكلود (*cycliod*) معطى بـ $x=a(1-\sin\theta)$ و $y=a(1+\cos\theta)$ حيث $0\le\theta\le2\pi$. جد دالة لاغرانج واكتب معادلات الحركة.

5-6 اكتب معادلات لاغرانج للبندول المضاعف في الشكل (10-6) مختاراً إحداثيات عامة مناسبة، مفترضاً أن البندول يهتز في مستو شاقولي. برهن أن هذه المعادلات تنتهي إلى معادلات هزازين توافقيين مرتبطين عندما تكون زاويتي الإهتزاز صغيرتين وجد الترددات الطبيعية معتبراً الحالتين: $m_1>>m_2$ و $m_1<<m_2$.



الشكل (10-6)



الشكل (11-6)

6-6 اكتب معادلات الحركة للبندول الثلاثي الموضح في الشكل (11-6).

7-6 تتحرك كتلتان m_1 و m_2 تحت تأثير قوة التجاذب بينهما بالإضافة الى مجال جاذبية ثابت **g**. اعتبر إحداثيات مركز الكتلة (x,y,z) مفترضاً أن $\mathbf{g}=g\mathbf{k}$ وأن المسافة بين m_1 و m_2 هي r وحدد اتجاه الخط الواصل بينهما بالزاويتين القطبيتين θ و ϕ. اكتب معادلات الطاقة الحركية لكل إحداثي من الإحداثيات الستة وكذلك معادلات القوى العامة والزخم ومعادلات لاغرانج.

8-6 يتألف بندول بسيط من كتلة m معلقة بخيط طوله مثبت عند نقطة o تتحرك بشكل توافقي على محور السينات بحيث أن: $x = a\cos\omega t$. (أ) اكتب معادلات لاغرانج لـ m مفترضا أن البندول يهتز في مستو شاقولي دوماً وبرهن أنه عندما تكون الإهتزازات صغيرة فإن حركة m تشابه حركة هزاز توافقي مدفوع بقوة خارجية جيبية وجد معادلة الإهتزازات الدائمة *(steady-state solution)*.

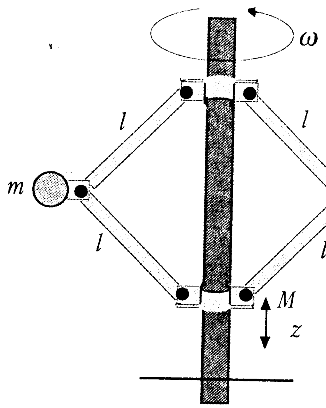
9-6 يعلق بندول بسيط، كتلته m وطوله l، بسقف عربة قطار كتلته M يسير على سكة بدون احتكاك فيهتز البندول في مستو شاقولي موازي للسكة. (أ) أكتب معادلات لاغرانج وبرهن أن هناك إحداثي مهمل واحذفه. ناقش الحركة بطريقة الطاقة.

10-6 يستند سلم على حائط أملس صانعاً معه زاوية α ويبدأ بالإنزلاق بدون احتكاك. أكتب معادلات الحركة بفرض أن السلم يبقى على تماس مع الحائط. ماالزاوية التي يصنعها السلم مع الحائط لحظة فقدان التماس معه (إن حدث ذلك).

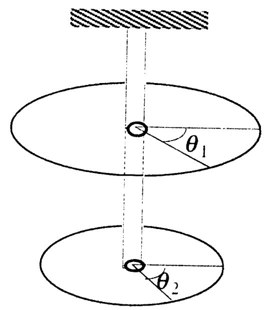
11-6 تنزلق كتلة m على السطح الداخلي لمخروط مقلوب *(inverted cone)* نصف زاويته الرأسية α بحيث تخضع لرد الفعل والجاذبية فقط. (أ) أكتب معادلات لاغرانج مفترضا أن محور المخروط ينطبق على oz الشاقولي نحو الأعلى ومعتبراً بعد m عنه هو ρ. برهن أن الزاوية ϕ التي تحدد موضع m في مستو أفقي حول oz هي إحداثي مهمل وناقش الحركة بطريقة الجهد الفعال. (ب) جد السرعة الزاوية $\dot{\phi}$ التي تدور بها m حول oz من أجل قيمة معينة ρ_0، وتردد الإهتزازات الصغيرة ω حول هذه الحركة الدائرية، وبرهن أن هذه الحركة إما لولبية للأعلى والأسفل أو متأرجحة بحسب كون α أكبر أو أصغر من قيمة حرجة $\alpha = \sin^{-1}(1/3)^{1/2}$.

12-6 يعلق قرصان m_1 و m_2 بسقف الغرفة بوساطة سلك مهمل الكتلة كما في الشكل

(12-6) ويفتل احدهما (أو كلاهما) في مستويه ويترك لتهتز المنظومة. (أ) برهن أن الطاقة الحركية تساوي: $T=\frac{1}{2}[m_1k_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2k_2^2\dot{\theta}_2^2]$ حيث k_1 و k_2 نصفي قطري الدوران للقرص الأول والقرص الثاني، على الترتيب. (ب) برهن أيضا أن طاقة الوضع هي: $V=\frac{1}{2}[\tau_1\theta_1^2+\tau_2(\theta_2-\theta_1)^2]$ حيث تدل τ_1 و τ_2 على ثابت فتل السلك لكل قرص. اكتب معادلات لاغرانج للمنظومة وحلها وجد الترددات الطبيعية.



الشكل (13-6)



الشكل (12-6)

13-6 يوضح الشكل (13-6) حاكم سرعة لمحرك بخاري *(Flyall Governer)* المؤلف من كتلتين متساويتين m مرتبطتين بالأذرع والمفصلات بمحور شاقولي، بحيث ينزلق الكم السفلي، ذو الكتلة M، على هذا المحور ويبقى الكم العلوي ثابتاً، بينما يدور النظام كله بسرعة زاوية ω حول المحور الثابت. أكتب معادلات الحركة وناقشها بطريقة الطاقة. حدد ارتفاع الكم السفلي z عن أخفض نقطة له كدالة لـ ω عندما تدور الكرتان بسرعة ثابتة وجد ترددالإهتزازات الصغيرة حول هذه الحركة الثابتة.

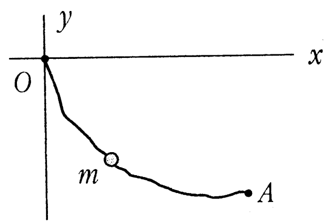
14-6 يتحرك جسيم m بدون احتكاك على السطح الداخلي لقطع دوراني $x^2+y^2=az$ خاضعاً لرد الفعل والجاذبية فقط. اكتب معادلات الحركة وبرهن أن السرعة الزاوية لـ m يجب أن تكون $(2g/a)^{1/2}$ حتى تتحرك الكتلة في دائرة أفقية على ارتفاع h. ادرس استقرار الحركة الدائرية وجد تردد الإهتزازات الصغيرة حولها.

15-6 يتحرك جسيم m على السطح الداخلي لنصف كرة مقلوبة قطرها $2R$ بحيث تقع

ذروتها على المستوى xy ما هي السرعة الأفقية التي يجب أن تتحرك بها m لتدور على دائرة أفقية ارتفاعها h فوق المستوي xy ؟

16-6 برهن أنه يمكن كتابة أي مجال مغناطيسي منتظم باتجاه المحور oz بدلالة جهد متجه (vector potential) على الشكل: $\mathbf{A}=B\rho\boldsymbol{\phi}_1/2$ (حيث $\boldsymbol{\phi}_1$ متجه وحدة باتجاه ϕ)، وأكتب دالة لاغرانج لجسيم مشحون يتحرك في هذا المجال وجد ثلاثة إحداثيات مهملة. قارن نتائجك مع مسألة الماغنترون الاسطواني المعطاة في الفصل 3 .

17-6 ماالزمن اللازم لينزلق جسيم m بدءاً من السكون من نقطة أولى O إلى نقطة ثانية A على سلك أملس موجود في مستو شاقولي، كما في الشكل (6-14) ، تحت تأثير الجاذبية فقط؟



الشكل (6-14)

18-6 برهن أنه إذا استغرق الجسيم المذكور في المسألة 6-17 أقصر زمن ممكن للانتقال من O إلى A ، فإن المعادلة التفاضلية التي تصف المنحنى الذي يتحرك عليه هي: $1+\dot{y}^2+2y\ddot{y}=0$

19-6 برهن أن حل المنحنى الناتج في المسألة 6-18 هو سايكلود.

20-6 احسب الشد في خيط البندول الكروي (مثال 6-7) بدلالة E و p_ϕ ، باستخدام مضاريب لاغرانج، وحدد الزاوية θ_1 التي سينهار عندها الخيط من أجل قيمة محددة لـ E و p_ϕ.

21-6 اكتب دالة هاملتون للبندول الكروي وجد معادلات الحركة .

22-6 اكتب دالة هاملتون لهزّاز توافقي بسيط، ومعادلة هاملتون – جاكوبي الناتجة وجد معادلة الحركة للهزّاز.

23-6 اكتب دالة هاملتون للإلكترون في ذرة الهيدروجين ثم اكتب معادلات هاملتون وجد معادلة الحركة.

24-6 يتحرك جسيم في مجال مركزي معطى بالعلاقة $V = -(K\cos\theta)/r^2$. اكتب دالة هاملتون لهذا الجسيم واستخلص معادلات هاملتون للحركة.

25-6 اكتب دالة هاملتون للبندول المضاعف في المسألة 5-6 واستخرج معادلات هاملتون وعرف الإحداثيات المهملة، وبرهن أن ما يبقى هو مسألتين منفصلتين بدرجة حرية واحدة لكل منها، يمكن حل كل واحدة بطريقة الطاقة، وحدد طاقة الوضع لكل مسألة.

منظومات المحاور المتحركة

(Moving Coordinate Systems)

7-1 تمهيد : الحركة الإنسحابية لمنظومة المحاور الإحداثية

(Translational Motion of Coordinate Systems)

عندما ندرس حركة جسم ونحدد موضعه بمتجه $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x,y,z)$ فإننا ننسب المركبات (x,y,z) لمنظومة محاور ox و oy و oz نفترض أنها ثابتة أو ساكنة. الاّ أننا في كثير من الحالات نضطر لتعيين موضع جسم بالنسبة لمنظومة محاور متحركة، كأن نعيّن موضع جسم بالنسبة للأرض التي تدور بدورها حول الشمس. نتسأل هنا: هل يمكن لمراقب على سطح الأرض ويدرس حركة جسم على سطحها أن يستخدم قوانين نيوتن التي يُفترض أنها صحيحة من وجهة نظر مراقب مرتبط بمنظومة محاور عطالية ساكنة بشكل مطلق؟ ما هو تأثير حركة الوسط الذي يوجد فبه هذا المراقب على حكمه على الطريقة التي سيتحرك بها الجسم بالنسبة له؟

لذا سندرس في هذا الفصل تأثير حركة الوسط (أي منظومة المحاور الإحداثية) على جسم متحرك فيه، وكيف تتغير قوانين الحركة تبعاً لذلك. وسنربط بين حركة الجسم بالنسبة لمراقب ثابت بحركته بالنسبة لآخر مرتبط بالمنظومة المتحركة.

لنفترض إذاً أن لدينا منظومة محاور احداثية $oxyz$ متحركة بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة $OXYZ$ ، كما في الشكل (7-1)، فنلاحظ أن موضع أي جسيم P بالنسبة للمحاور المتحركة يرتبط بموضعه بالنسبة للمحاور الثابتة بالعلاقة:

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\mathbf{R}_0 \qquad (1-7)$$

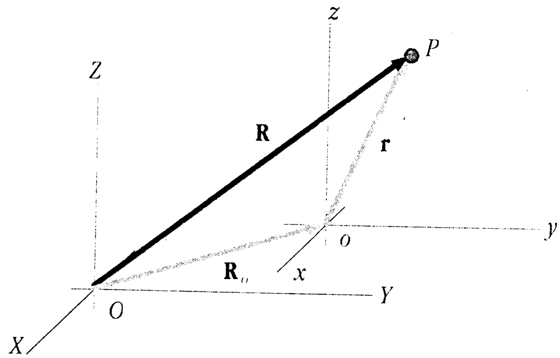
حيث تدل $\mathbf{R}$ و $\mathbf{r}$ على متجه موضع الجسيم بالنسبة للمحاور الثابتة والمتحركة، على الترتيب، بينما $\mathbf{R}_0$ متجه موضع مبدأ الإحداثيات المتحركة بالنسبة للثابتة.

إذا اعتبرنا الحركة الإنتقالية *(translational motion)* للمحاور المتحركة، عندئذ نجد سرعة وتسارع الجسم في المنظومتين باشتقاق(7-1) مرتين، فنحصل على:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{V}_0 \tag{2-7}$$

و

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_0 \tag{3-7}$$



الشكل (1-7)

نلاحظ من العلاقة (3-7) أنه إذا كانت المنظومة المتحركة تسير بسرعة ثابتة ، أي $\mathbf{a}_0=0$ عندئذ يكون:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \tag{4-7}$$

أي أن تسارع الجسم واحد في كلا المنظومتين.

هذا صحيح فقط في حالة الحركة الإنتقالية للمحاور المتحركة.

2-7 القوى العطالية *(Inertial Forces)*

نعلم من قانون نيوتن الثاني أن:

$$\mathbf{F}_T = m\,\mathbf{a}$$

بتعويض $\mathbf{a}$ من (3-7) نجد:

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{a} + m\mathbf{a}_0 \tag{5-7}$$

أو

$$\mathbf{F}_T - m\mathbf{a}_0 = m\mathbf{a} \tag{6-7}$$

فحتى يبقى قانون نيوتن صحيحاً في المنظومتين أي أن $\mathbf{F}_T=m\mathbf{a}=m\mathbf{a}$، يجب أن يكون $\mathbf{a}_0=0$، أي يجب أن تتحرك المنظومة المتحركة بسرعة ثابتة بالنسبة للمنظومة الثابتة. نقول عندها إن قوانين نيوتن **لامتغيرة** *(invarient)*.

إذا كانت حركة منظومة المحاور تتم بسرعة متغيرة عندئذ نكتب قانون نيوتن الثاني بالصورة التالية:

$$"\mathbf{F}" = m\mathbf{a} \qquad (7-7)$$

حيث وضعنا:

$$"\mathbf{F}" = \mathbf{F}_T - m\mathbf{a}_0 \qquad (8-7)$$

مما يعني أنه علينا إضافة الحد $-m\mathbf{a}_0$ إلى محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم، و يمثل قوة وهمية ناتجة عن حركة المحاور الإحداثية فقط تدعى **قوة عطالية** *(Inertial Force)*.

يجدر التنويه إلى أننا سنستخدم المعادلة (7-5) عند دراسة حركة الأجسام بالنسبة للأرض، أي يجب اعتبار القوة العطالية الناتجة عن دوران الأرض. سنرى كيف يؤثر هذا على شكل الأرض أو مسار القذائف وغير ذلك من حركات الأجسام بالقرب من سطح الأرض.

7 - 3 الحركة الدورانية لمنظومة المحاور الإحداثية

(Rotational Motion of Coordinate Systems)

درسنا في الفقرة السابقة الحركة الانتقالية لمنظومة المحاور الاحداثية بحيث تبقى ox وoy وoz موازية لكل من OX وOY و OZ، على الترتيب. أما في هذه الفقرة فندرس الحركة الدورانية فقط للمحاور المتحركة بالنسبة للثابتة، ونفترض للسهولة أن مبدأيهما منطبقان على بعضهما، كما في الشكل (7-2) ، عندئذ يكون بُعد أي جسم عن o و O واحداً، أي أن:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \qquad (9-7)$$

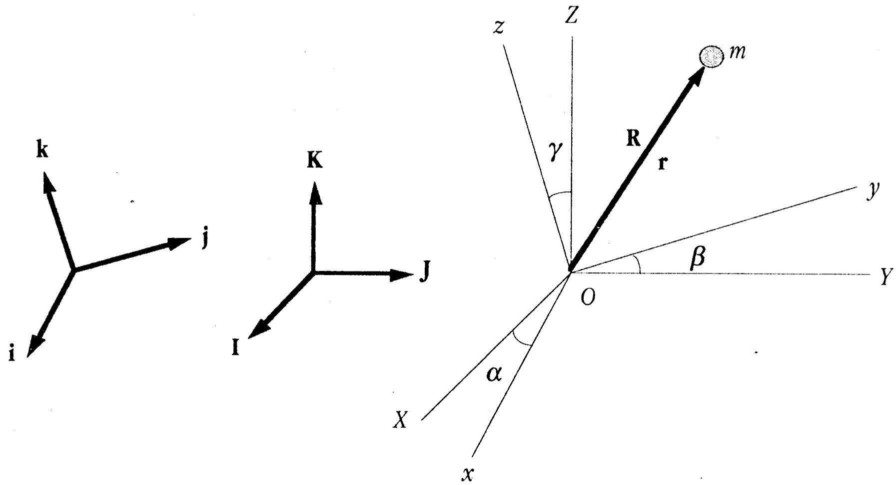
حيث:

$$\mathbf{R} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{K}$$

و

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (11-7)$$

حيث(**I,J,K**) متجهات الوحدة على المحاور الإحداثية الثابتة $OXYZ$ بينما(**i,j,k**) متجهات الوحدة على منظومة المحاور الدوّارة $oxyz$،كما في الشكل (2-7).



الشكل (2-7)

يمكن الحصول على العلاقات بين مركبات **R** و **r** بضرب(7-10) و(7-11) عددياً بـ **i** أولاً، فنجد:

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{R} = X(\mathbf{i} \bullet \mathbf{I}) + Y(\mathbf{i} \bullet \mathbf{J}) + Z(\mathbf{i} \bullet \mathbf{K})$$

و :

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{r} = x$$

بما أن **r=R** يكون :

$$x = X(\mathbf{i} \bullet \mathbf{I}) + Y(\mathbf{i} \bullet \mathbf{J}) + Z(\mathbf{i} \bullet \mathbf{K})$$

بإعادة العملية بالنسبة لـ **j** ثم **k** نجد العلاقات التالية:

$$
(12-7) \qquad \begin{cases} x = X(\mathbf{i}\bullet\mathbf{I}) + Y(\mathbf{i}\bullet\mathbf{J}) + Z(\mathbf{i}\bullet\mathbf{K}) \\ y = X(\mathbf{j}\bullet\mathbf{I}) + Y(\mathbf{j}\bullet\mathbf{J}) + Z(\mathbf{j}\bullet\mathbf{K}) \\ z = X(\mathbf{k}\bullet\mathbf{I}) + Y(\mathbf{k}\bullet\mathbf{J}) + Z(\mathbf{k}\bullet\mathbf{K}) \end{cases}
$$

بضرب(7-10) و (7-11) عددياً بـ **I** ثم**J** ثم**K**، على الترتيب، نجد بنفس الطريقة أن:

$$
(13-7) \qquad \begin{cases} X = x(\mathbf{I}\bullet\mathbf{i}) + y(\mathbf{I}\bullet\mathbf{j}) + z(\mathbf{I}\bullet\mathbf{k}) \\ Y = x(\mathbf{J}\bullet\mathbf{i}) + y(\mathbf{J}\bullet\mathbf{j}) + z(\mathbf{J}\bullet\mathbf{k}) \\ Z = x(\mathbf{K}\bullet\mathbf{i}) + y(\mathbf{K}\bullet\mathbf{j}) + z(\mathbf{K}\bullet\mathbf{k}) \end{cases}
$$

يمثل الضرب العددي (**i•I**) أو(**i•J**) أو (**i•K**)، . . .الخ، جيب تمام*(cosine)* الزاوية المحصورة بين المحورين المعنيين. ففي حالة كل من (**i•I**) و (**j•J**) و (**k•K**) نكتب:

$$
(14-7) \qquad \begin{cases} \mathbf{i}\bullet\mathbf{I} = \cos\alpha \\ \mathbf{j}\bullet\mathbf{J} = \cos\beta \\ \mathbf{i}\bullet\mathbf{K} = \cos\gamma \end{cases}
$$

تسمى الزوايا αو βو γ **جيوب تمام التوجيه** *(direction cosines)* للمحاور المتحركة بالنسبة للثابتة.

يمكن الربط بين سرعة الجسم بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور المتحركة بسرعته بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور الثابتة. فنجد أولاً سرعته بالنسبة للمحاور الثابتة باشتقاق العلاقة (7-9):

$$
(15-7) \qquad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dX}{dt}\mathbf{I} + \frac{dY}{dt}\mathbf{J} + \frac{dZ}{dt}\mathbf{K} = D_F\mathbf{R}
$$

حيث يدل الرمز $d\mathbf{R}/dt = D_F\mathbf{R}$ على عملية اشتقاق بالنسبة للمحاور الثابتة *(Fixed)* (أي معدّل تغير المتجه بالنسبة لمراقب موجود في تلك المنظومة). وأما سرعته بالنسبة للمحاور المتحركة *(Moving)* فنجدها باشتقاق العلاقة (7-10):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = D_M \mathbf{r} \qquad (16-7)$$

حيث يدل الرمز $D_M \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$ على عملية اشتقاق بالنسبة للمحاور المتحركة.

نربط بين $\mathbf{V}$ و$\mathbf{v}$ بملاحظة أن $\mathbf{R}=\mathbf{r}$، أي أن:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + (x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt})$$

حيث يدل الرمز $d\mathbf{i}/dt$ مثلا على معدل تغيّر متجه وحدة المحور ox في المحاور المتحركة بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور الثابتة.

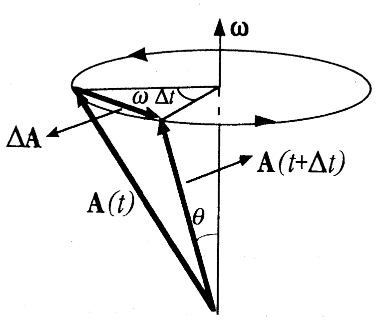
نكتب العلاقة الأخيرة على النحو:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + (x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}) \qquad (17-7)$$

من الواضح أن طول كلٍ من $\mathbf{i}$ و$\mathbf{j}$ و$\mathbf{k}$ لايتغير مع دوران المنظومة $oxyz$ لكن اتجاه كل واحد سيتغير. لذا نحدد فيما يلي مشتق متجه ثابت بالقيمة متغير بالإتجاه.

7-4 مشتق متجه ثابت القيمة ومتغير الإتجاه

ليكن $\mathbf{A}$ متجهاً ثابت الطول الاّ أن اتجاهه يتغير نتيجة دورانه بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$ حول محور ما، كما في الشكل (7-3).



الشكل (7-3)

بكتابة $\mathbf{A}$ في اللحظة t بالشكل $\mathbf{A}(t)$ واللحظة $t+\Delta t$ بالشكل $\mathbf{A}(t+\Delta t)=\mathbf{A}(t)+\Delta\mathbf{A}$، يكون:

$$\mathbf{\Delta A} = \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)$$

ونلاحظ من الشكل (3-7) أن:

$$\Delta A = (A \sin\theta)(\omega \Delta t)$$

ومنه:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = A\omega \sin\theta$$

حيث θ الزاوية بين $\mathbf{A}$ و $\boldsymbol{\omega}$، فنكتب:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \qquad (18-7)$$

حيث نستنتج من الشكل (3-7) أن اتجاه $\mathbf{\Delta A}$ هو باتجاه $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$ وليس باتجاه $\mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}$!

نعود الآن الى العلاقة (17-7)، ونعوّض عن $d\mathbf{i}/dt$ و $d\mathbf{j}/dt$ و $d\mathbf{k}/dt$، فنجد:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

أي أن:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (19-7)$$

بما أن $\mathbf{v}=D_M\mathbf{r}$ و $\mathbf{V}=D_F\mathbf{r}$ ، لذلك نكتب (19-7) بالشكل:

$$\mathbf{V} = D_F\mathbf{r} = D_M\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (20-7)$$

تُستخدم (20-7) لتعريف مؤثر الإشتقاق *(differential operator)* D_F بالعلاقة:

$$D_F \equiv D_M + \boldsymbol{\omega} \times \qquad (21-7)$$

يستفاد من هذا المؤثر لإيجاد العلاقة بين مشتق متجه ما في منظومة محاور ثابتة ومشتقه في منظومة محاورتدور حول الأولى بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$.

تتضح سهولة استخدام D_F عندما نربط تسارع جسم في منظومة ثابتة بتسارعه في منظومة تدور حولها، فنكتب من (21-7) مباشرة:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = D_F^2\mathbf{r} \equiv (D_M + \omega\times)(D_M + \omega\times)\mathbf{r} \qquad (22-7)$$

لكن

$$(D_M + \omega\times)(D_M + \omega\times)\mathbf{r} = D_M^2\mathbf{r} + \omega\times(D_M\mathbf{r}) + \omega\times(\omega\times\mathbf{r}) + D_M(\omega\times\mathbf{r})$$
$$= D_M^2\mathbf{r} + 2\omega\times(D_M\mathbf{r}) + \omega\times(\omega\times\mathbf{r}) + (D_M\omega)\times\mathbf{r}$$

بوضع:

$$\mathbf{a} = D_M^2\mathbf{r}$$

و

$$\mathbf{v} = D_M\mathbf{r}$$

و

$$\dot{\omega} = D_F\omega = D_M\omega \qquad \text{(لماذا؟)}$$

حيث $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ سرعة وتسارع الجسم بالنسبة للمنظومة المتحركة و $\dot{\omega}$ التسارع الزاوي لمنظومة المحاور المتحركة بالنسبة للثابتة، تصير العلاقة (7-22):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + 2\omega\times\mathbf{v} + \omega\times(\omega\times\mathbf{r}) + \dot{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (23-7)$$

إذا كان مبدأ منظومة المحاور الدوّارة يتحرك انسحابياً بتسارع $\mathbf{a}_0$ بنفس الوقت الذي تدور فيه، فيجب إضافة $\mathbf{a}_0$ للطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة.

7-5 الحركة الدورانية لمنظومة المحاور وقوانين نيوتن

ندرس في هذه الفقرة الصيغة التي ينتهي إليها قانون نيوتن الثاني من وجهة نظر مراقب موجود في منظومة محاور متحركة (أي وسط متحرك) $oxyz$ بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة $OXYZ$، عندما يطبقه على جسم متحرك في هذا الوسط. نفترض للسهولة أن المنظومة تتحرك بشكل دوراني فقط بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$ بحيث يبقى مبدؤها منطبقاً على مبدأ منظومة المحاور الثابتة، عندئذ نكتب من قانون نيوتن

الثاني عندئذ:

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{a} \qquad (24-7)$$

بتعويض $\mathbf{a}$ من (23-7) نجد:

$$\mathbf{F}_T = m(\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}) \qquad (25-7)$$

أو:

$$\mathbf{F}_T - [2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}] = "\mathbf{F}" = m\mathbf{a} \qquad (26-7)$$

حيث تدل "$\mathbf{F}$" على القوة العطالية المؤثرة على الجسم بالنسبة لمراقب موجود في منظومة المحاور الإحداثية المتحركة (الدوّارة) وتتألف من أربعة حدود هي:

1- $\mathbf{F}_T$ وهي محصلة القوى الخارجية الفعلية المؤثرة على الجسم.

2- $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ يطلق على هذا الحد اسم **قوة كوريوليس**(*Coriolis Force*)وهي معدومة طبعاً إذا كان الجسم لايتحرك في المنظومة الدوّارة (أي إذا كان $\mathbf{v}=0$).

3- $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ يدعى هذا الحد **القوة الطاردة** (أو النابذة)(*centrifugal force*) ولايمثل قوة خارجية طبعاً بل يظهر لمراقب موجود في منظومة المحاور المتحركة فقط الذي يقرر عند متابعته لحركة الجسم في هذه المنظومة أن هناك قوة كهذه تؤثر على الجسم متجهةً بعيداً عن المبدأ، إذ نلاحظ من الشكل (4-7) أن:

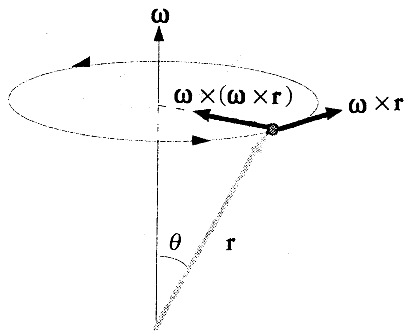
$$|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| = \omega r\sin\theta$$

من ثم

$$|\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})| = \omega^2 r\sin\theta \qquad (27-7)$$

يمثل الحد $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ التسارع المركزي المعروف الذي يتجه نحو مركز الدوران (انظر الشكل (4-7)). من ثم تصبح القوة $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ مساوية ومعاكسة للقوة المركزية، أي متجهة بعيداً عن المبدأ، لهذا يُطلقُ عليها المراقبُ الموجود في المنظومة المتحركة اسم القوة الطاردة، وهي كما أسلفنا ليست قوة حقيقية بل ناتجة عن دوران منظومة المحاور التي يتحرك الجسم فيها.

4- $-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}$ يسمى هذا الحد **القوة العرضية** (أو المستعرضة) *(Transverse Force)* لأنها عمودية على السرعة دوماً. وتساوي الصفر إذا دارت المنظومة المتحركة بسرعة زاويّة ثابتة، كما هي الحال في دوران الأرض مثلاً.



الشكل (4-7)

مثل 1-7

تدور اسطوانة موسيقية حول محور شاقولي عمودي عليها يمر من مركزها بينما تسير نملة على قطر للإسطوانة منطلقة من مركزها بسرعة ثابتة v بالنسبة للإسطوانة ومتجهة نحو محيطها. (أ) حدد القوى المؤثرة على النملة بالنسبة لمراقب جالس على الإسطوانة (!) ويدور معها. (ب) جد المسافة التي ستقطعها النملة على الإسطوانة قبل أن تبدأ بالإنزلاق عليها مع العلم أن معامل الإحتكاك بينهما هو μ.

الحل: نختار منظومة محاور متحركة ينطبق فيها ox على خط سير النملة، كما في الشكل (5-7).

بفرض أن خط سير النملة على الاسطوانة ينطبق على محور السينات، نكتب:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} = v\,t\,\mathbf{i}$$

و

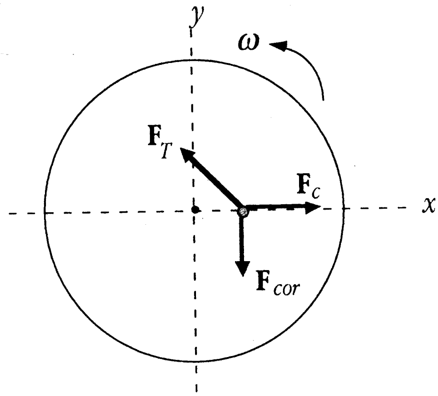
$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} = v\mathbf{i}$$

و

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{i} = 0$$

كما أن:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$$



الشكل (5-7)

نلاحظ أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على النملة هي:

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_r$$

حيث يتجه الوزن $m\mathbf{g}$ ورد الفعل $\mathbf{N}$ عمودياً على الاسطوانة (ومستوي الورقة) وهما متساويان ومتعاكسان، أي أن:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0$$

كما أن قوة الاحتكاك بين النملة والاسطوانة:

$$F_r \leq \mu N = \mu mg$$

بينما تعطى قوة كوريوليس بـ :

$$\mathbf{F}_{cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -2m\omega v\mathbf{j}$$

والقوة الطاردة:

$$\mathbf{F}_c = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -m\omega^2 x\mathbf{i}$$

بما أن النملة تسير بسرعة ثابتة بالنسبة للإسطوانة فيجب أن يكون:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{cor} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_r = 0$$

أي أن :

$$\mathbf{F}_r = m\omega^2 x\mathbf{i} + 2m\omega v\mathbf{j}$$

نلاحظ أن النملة ستبدأ بالإنزلاق على الإسطوانة عندما تصل قوة الحتكاك بينهما الى أكبر قيمة لها، أي عندما:

$$F_r = \mu mg = \sqrt{(m\omega^2 x)^2 + (2m\omega v)^2}$$

ومنه:

$$x = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v^2}$$ ❐

6-7 أثر دوران الأرض على حركة الأجسام بالقرب من سطحها

نعتبر في هذه الفقرة حركة جسم بالقرب من سطح الأرض التي تدور حول محورها بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$. فنكتب معادلة حركة الجسم من (7-26) بالشكل:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - [2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}]$$

حيثa و$\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ تسارع وسرعة وموضع الجسم بالنسبة للأرض، على الترتيب، بينما $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه.

نلاحظ أن الحد الأخير من الطرف الأيمن معدوم لأن $\boldsymbol{\omega}$ ثابت لذا تصير العلاقة السابقة بالشكل:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - [2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \qquad (28-7)$$

7-7 الأجسام الساكنة وخط الشاقول الحقيقي وشكل الأرض

إذا كان الجسم ساكناً بالنسبة للأرض، أي أن $\mathbf{v}=0$، ولايخضع لأي قوة خارجية باستثناء وزنه $m\mathbf{g}$ ، عندئذ تصير العلاقة (7-28) على النحو:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (29-7)$$

أو :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e$$

حيث :

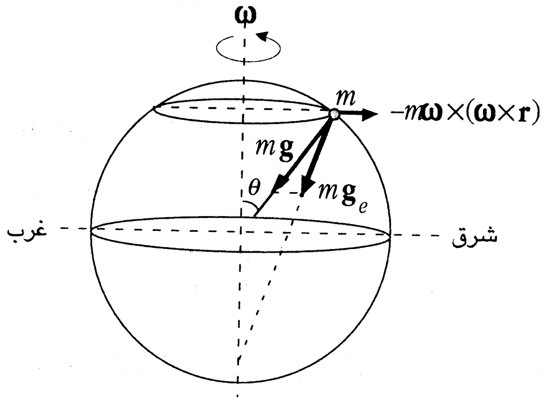
$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (30-7)$$

أي أن تسارع الجاذبية الأرضية الفعّال *(effective gravitational acceleration)* هو $\mathbf{g}_e$ وليس $\mathbf{g}$ والسبب في اختلافهما هو دوران الأرض حول محورها كما هو ملاحظ من (30-7)، ولو كانت $\boldsymbol{\omega} = 0$ لصارت $\mathbf{g}_e$=$\mathbf{g}$ بالطبع.

لعل أهم تأثير لدوران الأرض على $\mathbf{g}_e$ هو انحراف خط الشاقول الحقيقي، الذي يمثله اتجاه $\mathbf{g}_e$، عن اتجاه $\mathbf{g}$ المار من مركز الأرض دوماً، بحسب الموقع بالنسبة لخط الاستواء. فإذا اعتبرنا جسيماً على سطح الأرض في النصف الشمالي منها للاحظنا أن وزنه $m\mathbf{g}$ يتجه نحو مركز الأرض بالفعل، الاّ أن الحد $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ يتجه من الشرق للغرب، كما هو موضّح في الشكل (7-6)، من ثم يكون اتجاه $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ نحو الشرق، أي أن اتجاه المحصلة $\mathbf{g}_e$ إلى الجنوب قليلاً من مركز الأرض. بنفس الشكل يكون اتجاه $\mathbf{g}_e$ إلى الشمال من مركز الأرض بالنسبة لجميع النقاط الواقعة في النصف الجنوبي من الكرة الأرضية.

بما أن سطح البحر (كذلك السطح المستوي من الأرض) في أي مكان يكون عمودياً على اتجاه الجاذبية الأرضية الفعلي $\mathbf{g}_e$ في ذلك الموضع، فإننا نستنتج أن الأرض تنتفخ بعض الشئ كلما اقتربنا من خط الإستواء (حيث تزداد قيمة $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ لتصير أكبر مايمكن هناك) بينما تصبح كروية تماماً عند القطب الشمالي والقطب الجنوبي(حيث يكون $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ مساوياً للصفر). فشكل الأرض ليس كروياً تماماً بل إن هناك بعض "التفلطح" في شكلها عند خط الإستواء الاّ أن هذا "التفلطح" ليس كبيراً لكون الحد $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ صغيراً بالمقارنة مع $\mathbf{g}$.

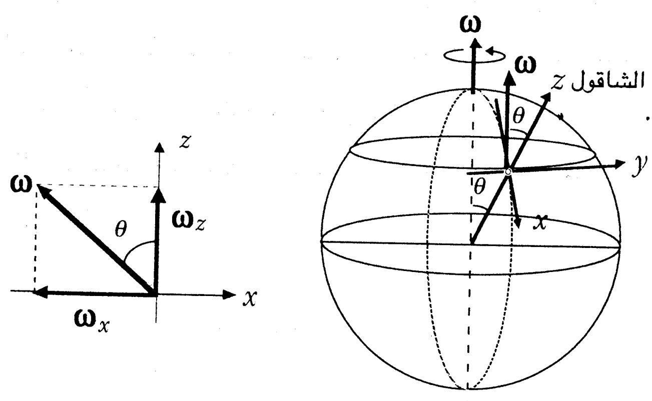
يدعى $\mathbf{g}_e$ **الشاقول المحلي** *(local vertical)* نحدد اتجاهه بخط الشاقول المؤلف من كتلة M على شكل مخروط دوراني حاد الزاوية معلق من منتصف قاعدته السفلى بحبل رفيع يستخدمه عمال البناء للتأكد من عدم ميلان الحيطان عند بنائها.



الشكل (6-7)

7 - 8 حركة الأجسام تحت تأثير الجاذبية الأرضية فقط قرب من سطح الأرض

لندرس حركة جسم خاضع لتأثير الجاذبية الأرضية فقط (كالمقذوفات مثلاً)، ولنكتب معادلات حركته بالنسبة لمراقبٍ موجود على سطح الأرض. فنعتبر منظومة محاور إحداثية $oxyz$ مرتبطة بالأرض وتدور معها بحيث يتجه ox من الشمال للجنوب ويتجه oy من الغرب للشرق، بينما يتجه oz من الأسفل للأعلى منطبقاً على الشاقول المحلي، كما هو موضّح في الشكل (7-7).



الشكل (7-7)

نلاحظ من الشكل (7-7) أن $\boldsymbol{\omega}$ تقع في المستوي xz كما أن مركبتيها هما:

$$\begin{cases} \omega_x = -\omega \sin\theta \\ \omega_z = \omega \cos\theta \end{cases} \tag{31-7}$$

حيث θ زاوية خط العرض *(colatitude)*.

فإذا كتبنا كل من **r** و **v** بالشكل:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

عندئذ يمكن كتابة مركبات المعادلة (7-29) على المحاورox وoy وoz فنجد:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\cos\theta)\dot{y} \\ \ddot{y} - 2\omega[(\cos\theta)\dot{x} + (\sin\theta)\dot{z} \\ \ddot{z} = -g + 2\omega(\sin\theta)\dot{y} \end{cases} \tag{32-7}$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية علىω^2لصغرها بالمقارنة مع بقية الحدود في (7-29) .

7 - 9 بندول فوكولت *(Focault Pendelum)*

يعتبر بندول فوكولت من أفضل الأمثلة للبرهان على دوران الأرض حول نفسها وملاحظة ذلك بطريقة ممتعة ومباشرة، ويتألف من بندول بسيط عادي ولكن طوله كبير مع ما ألفناه في حالة البندول المخبري، إذ يصل لعدة أمتارأحياناً.

إذا اعتبرنا بندولاً، طولهL وكتلتهm، معلقٌ من نقطة ثابتةٍA في غرفة المختبر، كما في الشكل (7-8)، وكتبنا معادلات الحركة له كما يراها مراقبٌ موجودٌ في غرفة المختبر لوجدنا من (7-26):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{33-7}$$

حيث :

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

فتؤول (7-33) إلى:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{34-7}$$

$$\begin{cases} \omega_x = -\omega \sin\theta \\ \omega_z = \omega \cos\theta \end{cases} \qquad (31-7)$$

حيث θ زاوية خط العرض *(colatitude)*.

فإذا كتبنا كل من $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ بالشكل:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

عندئذ يمكن كتابة مركبات المعادلة (7-29) على المحاورox وoy وoz فنجد:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\cos\theta)\dot{y} \\ \ddot{y} - 2\omega[(\cos\theta)\dot{x} + (\sin\theta)\dot{z} \\ \ddot{z} = -g + 2\omega(\sin\theta)\dot{y} \end{cases} \qquad (32-7)$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية علىω^2لصغرها بالمقارنة مع بقية الحدود في (7-29) .

7 - 9 بندول فوكولت *(Focault Pendelum)*

يعتبر بندول فوكولت من أفضل الأمثلة للبرهان على دوران الأرض حول نفسها وملاحظة ذلك بطريقة ممتعة ومباشرة، ويتألف من بندول بسيط عادي ولكن طوله كبير مع ما ألفناه في حالة البندول المخبري، إذ يصل لعدة أمتارأحياناً.

إذا اعتبرنا. بندولاً،طولهL وكتلتهm، معلقٌ من نقطة ثابتةٍA في غرفة المختبر، كما في الشكل (7-8)، وكتبنا معادلات الحركة له كما يراها مراقبٌ موجودٌ في غرفة المختبر لوجدنا من (7-26):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \qquad (33-7)$$

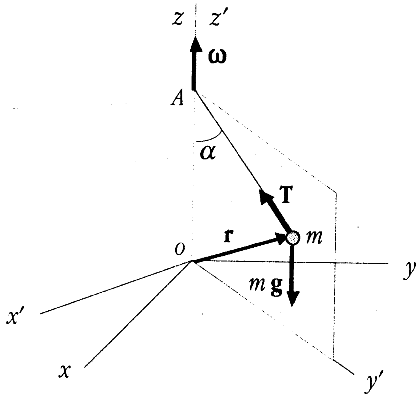
حيث :

$$\mathbf{F}_T = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

فتؤول (7-33) إلى:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \qquad (34-7)$$

حيث أدخلنا الحد $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ ضمن التسارع الفعّال $\mathbf{g}_e$، كما أن $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ هما سرعة وتسارع الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر طبعاً.

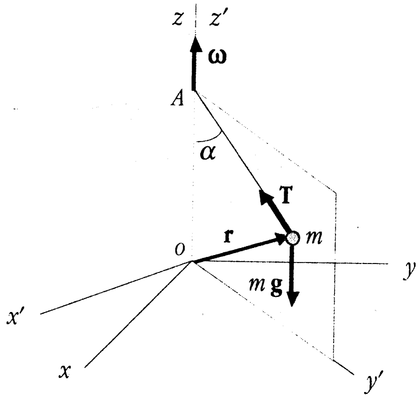


الشكل (7-8)

ندرس حركة البندول بطريقة كيفية أولاً: فنلاحظ أنه لو كانت $\boldsymbol{\omega}=0$، أي أن الأرض لاتدور حول نفسها، لما كانت هناك محاور متحركة أصلاً ولصارت (7-34) مكافئة لمعادلة بندول بسيط يتحرك حركة اهتزازية بسيطة فإذا بدأ البندول اهتزازاته في مستوٍ معيّن، ليكن yz مثلاً، فإنه سيبقى في هذا المستوي دائماً وأبداً. أما عندما نأخذ دوران الأرض بعين الإعتبار، أي أن $\boldsymbol{\omega}\neq 0$، فإننا نلاحظ أن البندول لايخضع لقوتي الوزن والشد فقط بل لقوة كوريوليس $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ أيضاً التي تتجه عمودياً على سرعة البندول $\mathbf{v}$ دوماً، مما يؤدي لاكتسابه تسارعاً عمودياً على $\mathbf{v}$ فيغيّر من اتجاه السرعة فقط لامن قيمتها(كما في الحركة الدائرية المنتظمة). لذا يتغير اتجاه $\mathbf{v}$ مع مرور الزمن باتجاه عمودي على مستو الاهتزازات yz، بالتالي يتغير اتجاه المستوي الذي يهتز فيه البندول رويداً رويداً ويدور ببطء مع مرور الزمن.

لحساب السرعة الزاوية التي يدور بها مستوي اهتزازات بندول فوكولت بالنسبة للأرض نربط بهذا المستوي منظومة محاور احداثية $ox'y'z'$ تدور معه. عندئذ نستخدم العلاقة (7-19) للربط بين سرعة الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر $\mathbf{v}$ وسرعتها بالنسبة لهذه المنظومة الجديدة $\mathbf{v}'$، ونكتب:

حيث أدخلنا الحد $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ ضمن التسارع الفعّال $\mathbf{g}_e$، كما أن $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ هما سرعة وتسارع الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر طبعاً.



الشكل (7-8)

ندرس حركة البندول بطريقةٍ كيفيةٍ أولاً: فنلاحظ أنه لو كانت $\boldsymbol{\omega}=0$، أي أن الأرض لاتدور حول نفسها، لما كانت هناك محاور متحركة أصلاً ولصارت (7-34) مكافئة لمعادلة بندول بسيط يتحرك حركة اهتزازية بسيطة فإذا بدأ البندول اهتزازاته في مستوٍ معيّن، ليكن yz مثلاً، فإنه سيبقى في هذا المستوي دائماً وأبداً. أما عندما نأخذ دوران الأرض بعين الإعتبار، أي أن $\boldsymbol{\omega}\neq 0$، فإننا نلاحظ أن البندول لايخضع لقوتي الوزن والشد فقط بل لقوة كوريوليس $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ أيضاً التي تتجه عمودياً على سرعة الهندول $\mathbf{v}$ دوماً، مما يؤدي لاكتسابه تسارعاً عمودياً على $\mathbf{v}$ فيغيّر من اتجاه السرعة فقط لامن قيمتها(كما في الحركة الدائرية المنتظمة). لذا يتغير اتجاه $\mathbf{v}$ مع مرور الزمن باتجاه عمودي على مستو الاهتزازات yz، بالتالي يتغير اتجاه المستوي الذي يهتز فيه البندول رويداً رويداً ويدور ببطء مع مرور الزمن.

لحساب السرعة الزاوية التي يدور بها مستوي اهتزازات بندول فوكولت بالنسبة للأرض نربط بهذا المستوي منظومة محاور احداثية $ox'y'z'$ تدور معه. عندئذ نستخدم العلاقة (7-19) للربطربط بين سرعة الكتلة m بالنسبة لغرفة المختبر $\mathbf{v}$ وسرعتها بالنسبة لهذه المنظومة الجديدة $\mathbf{v}'$، ونكتب:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \omega' \times \mathbf{r}$$

أو:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega' \times \mathbf{r} \tag{35-7}$$

حيث ω' السرعة الزاوية لدوران مستوي اهتزازات البندول بالنسبة للمختبر.

بنفس الشكل نربط بين تسارع m بالنسبة للمختبر بتسارعها بالنسبة للمنظومة $ox'y'z'$، فنكتب من (23-7):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}) + 2\omega' \times \mathbf{v} \tag{36-7}$$

لكن:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\omega \times \mathbf{v}$$

فيكون:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \mathbf{v}'$$

أو

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\omega \times \mathbf{v} - m\omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \mathbf{v}'$$

أي أن:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g}_e + \mathbf{T} - 2m\omega \times (\mathbf{v}' + \omega' \times \mathbf{r}) - m\omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}) - 2m\omega' \times \mathbf{v}' \tag{37-7}$$

لكن بحسب العلاقة المعرّوفة:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})$$

فإن:

$$\omega \times (\omega' \times \mathbf{r}) = \omega'(\omega \bullet \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\omega \bullet \omega')$$

و

$$\omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}) = \omega'(\omega' \bullet \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\omega' \bullet \omega')$$

نستنتج من هاتين المعادلتين ومن (37-7) والشكل (8-7) أن كل الحدود الموجودة في

الطرف الأيمن من (37-7) تقع في مستوي اهتزازات البندول ماعدا الحد الأخير $-2m(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}')\times\mathbf{v}$. لكن حركة البندول بالنسبة لمراقب موجود في مستوي الاهتزازات يجب أن تتم دوماً في هذا المستوي، ولذلك يجب أن يكون $\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}'$ عمودياً على هذا المستوي حتى يصبح حاصل الضرب $\mathbf{v}\times(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}')$ واقعاً فيه حتماً يتم هذا إذا كان:

$$\mathbf{k}\bullet(\omega+\omega')=0$$

لكن:

$$\omega'=\omega'\mathbf{k}$$

وبحسب (31-7) فإن

$$\omega=-\omega\sin\theta\mathbf{i}+\omega\cos\theta\mathbf{k} \qquad (38-7)$$

حيث θ زاوية خط العرض، لذا يكون:

$$\omega\cos\theta+\omega'=0$$

أي أن:

$$\omega'=-\omega\cos\theta \qquad (39-7)$$

نعود الآن لحل معادلات الحركة لبندول فوكولت بالتفصيل لمعرفة كيفية تحرك m التي نفترض أنها تقوم باهتزازات صغيرة السعة بحيث تبقى حركتها في المستوي xy بدون أن يتغيّر ارتفاعها بشكل ملموس، أي أن:

$$z\approx\dot{z}\approx\ddot{z}\approx0$$

باستخدام المعادلة (33-7) وأخذ مركبتيها على المحورين ox و oy نجد:

$$m\ddot{x}=T_x+2m\omega\dot{y}\cos\theta \qquad (40-7)$$

و

$$m\ddot{y}=T_y-2m\omega\dot{x}\cos\theta \qquad (41-7)$$

نلاحظ من الشكل (7-8) أن:

$$T_x = -(T\sin\alpha)\cos\phi$$

و

$$T_y = -(T\sin\alpha)\sin\phi$$

بما أن الحركة تتم في المستوي xy تقريباً، لذلك يكون:

$$mg = T\cos\alpha \approx T$$

كما أن:

$$\sin\alpha = \rho / l$$

و

$$\sin\phi = x/\rho$$

و

$$\cos\phi = y/\rho$$

لذا تصير المعادلتان (7-40) و (7-41) بالشكل:

$$\ddot{x} = -(g/l)x + 2\omega' y \tag{42-7}$$

و

$$\ddot{y} = -(g/l)y - 2\omega' x \tag{43-7}$$

حيث وضعنا:

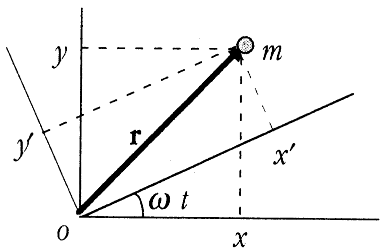
$$\omega' = \omega\cos\theta \tag{44-7}$$

يمكن حل المعادلتين السابقتين بسهولة إذا انتقلنا لمنظومة محاور جديدة تدور بسرعة زاوية ω' بالنسبة للمنظومة $oxyz$ (غرفة المختبر)، وبالطبع فإن هذه المنظومة الجديدة تطابق تلك التي عرّفناها سابقاً بأنها مرتبطة بمستوي اهتزازات البندول. ولذلك تصير معادلات التحويل من x إلى x' أو من y إلى y' معطاة بالعلاقتين (انظر الشكل (7-9)):

$$x = x' \cos \omega' t + y' \sin \omega' t \qquad (45-7)$$

و

$$y = -x' \sin \omega' t + y' \cos \omega' t \qquad (46-7)$$



الشكل (8-7)

بتعويض هاتين المعادلتين في (42-7) و (43-7) وجمعهما وإصلاح النتيجة نجد:

$$(\ddot{x}' + \frac{g}{l} x') \cos \omega' t + (\ddot{y}' + \frac{g}{l} y') \sin \omega' t = 0 \qquad (47-7)$$

بما أن هذه النتيجة يجب أن تكون محققة مهما يكن الزمن t، لذلك يجب أن يكون أمثال $\sin\omega' t$ و$\cos\omega' t$ مساوياً للصفر دوماً، أي يجب أن يكون:

$$\ddot{x}' + \frac{g}{l} x' = 0 \qquad (48-7)$$

و

$$\ddot{y}' + \frac{g}{l} y' = 0 \qquad (49-7)$$

يمكن البرهان أن حركة جسيم يتحرك في المستوي $x'y'$ تتغير إحداثياته وفق المعادلتين (40-7) و(41-7) هو قطع ناقص ثابت في المستوي $x'y'$ الاّ أنه يدور بسرعة زاوية ω' بالنسبة لغرفة المختبر. لذا يبدو مسار البندول بالنسبة لمراقبٍ في الغرفة أنه قطعٌ ناقصٌ دوّارٌ يعطى دوره بالعلاقة:

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \cos \theta} \qquad (50-7)$$

بتعويض ω بدلالة دور حركة الأرض خلال دورانها حول نفسها، أي:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{24} \qquad (51-7)$$

نجد دور حركة دوران مستو اهتزازات البندول:

$$T = \frac{2\pi}{\omega \cos\theta} = \frac{24}{\cos\theta} \text{ h} \qquad (52-7)$$

ففي منطقة خط عرضها 45° في النصف الشمالي من الأرض يكون دور بندول فوكولت حوالي 34 ساعة، بينما يصل هذا الدور لحوالي 275 ساعة قرب خط الإستواء !

يمكن مشاهدة دوران الأرض بطريقة مباشرة بصنع بندول طويل وإزاحته جانباً مسافة صغيرة نسبياً وتحديد اتجاه اهتزازاته الإبتدائي على أرض المختبر، ثم تركه ليهتز لفترة طويلة (عدة ساعات) فيلاحظ تغير هذا الإتجاه بشكل واضح. بالطبع فإن ذلك يعني حقيقة أن الأرض هي التي دارت خلال هذا الزمن. (يجدر التنويه إلى أنه يجب تجهيز بندول طويل ومركب بحيث يمكن تزويده بالطاقة التي يخسرها نتيجة الإحتكاك في كل دورة حتى لا تتخامد حركته مع مرور الوقت).

7 - 10 نظرية لارمور *(Larmor Theorem)*

تنص نظرية "لارمور" على أنه إذا خضعت عدة جسيمات مشحونة كتلة الواحدة m وشحنتها q، إلى مجال مغناطيسي ضعيف بالإضافة للقوى الداخلية المتبادلة بينها $\mathbf{F}_{int}$ ولمحصلة قوى مركزية $\mathbf{F}_c$، وإذا كانت النسبة q/m هي نفسها لكل هذه الجسيمات، فإنه يمكن التخلص من تأثير المجال المغناطيسي تماماً بالإنتقال إلى منظومة محاور تدور حول مركز القوة المركزية الخارجية بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega} = -q\mathbf{B}/2m$.

لبرهان هذه النظرية نعتبر أحد الجسيمات المشحونة ونكتب قانون نيوتن له:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \qquad (53-7)$$

حيث تدل $\mathbf{V}$ و $\mathbf{a}$ على سرعة وتسارع الجسيم بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة في

الفضاء، و$\mathbf{F}_c$ القوة المركزية الخارجية المؤثرة عليه، و $\mathbf{F}_{int}$ محصلة القوى الداخلية التي يخضع لها هذا الجسيم نتيجة وجود بقية الجسيمات بالقرب منه. أما $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ فهي القوة المغناطيسية الناتجة عن وجود المجال المغناطيسي $\mathbf{B}$.

بالانتقال لمنظومة محاور $oxyz$ تدور بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$ بالنسبة للمحاور الثابتة نكتب

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$$

و

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \mathbf{v}$$

حيث$\mathbf{v}$ و$\mathbf{a}$ سرعة وتسارع الجسيم بالنسبة للمنظومة المتحركة.

بتعويض $\mathbf{a}$ و$\mathbf{V}$ في (7-53) وإصلاحها، نجد:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + q(\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \times (q\mathbf{B} + 2m\omega) \tag{54-7}$$

إذا افترضنا أن:

$$\omega = -\frac{q}{2m}\mathbf{B} \tag{55-7}$$

لصارت معادلة الحركة (7-54) بالشكل:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int} - m\left(\frac{q}{2m}\right)^2 \times \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \tag{56-7}$$

فإذا كان $\mathbf{B}$ صغيراً (أي أن $\boldsymbol{\omega}$ صغيرةٌ أيضاً) لأمكن عندئذ إهمال الحد $\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{r})$ بالمقارنة مع الحدود الأخرى لتؤول معادلة الحركة عندئذ إلى:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{int} \tag{57-7}$$

تمثل العلاقة الأخيرة معادلة الحركة للجسيم وكأن المجال المغناطيسي غير موجودٍ على الإطلاق.

□ مثل 2-7

يسقط جسم من ارتفاع 100 m سقوطاً حراً في منطقة خط عرضها 45°. مامقدار الإنحراف الذي يعانيه بالنسبة للشاقول المحلي وفي أي اتجاه؟

الحل: نكتب معادلة حركة الجسم بالنسبة لمنظومة محاور مرتبطة بالأرض وتدور معها. فنجد من (27-7):

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_e - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \qquad (1)$$

بأخذ مركبات المعادلة (1) على كلٍ من ox وoy وoz نجد (أنظر المعادلات (32-7)):

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\cos\theta)\dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega[(\cos\theta)\dot{x} + (\sin\theta)\dot{z}] \\ \ddot{z} = -g - 2\omega(\sin\theta)\dot{y} \end{cases} \qquad (2)$$

سنقوم بحل معادلات الحركة (1 أو 2) بطريقتين مختلفتين، كما هو آت:

(أ) طريقة التكاملات الأولية *(first Integrals)*

نكامل المعادلتين الأوليتين من (2) مرة واحدة فنجد:

$$\dot{x} = 2\omega(\cos\theta)y + c_1$$
$$\dot{y} = -2\omega[(\cos\theta)x + (\sin\theta)z] + c_2$$

بحسب الشروط الإبتدائية فإن:

$$x_0 = y_0 = 0 \text{ و } z_0 = h$$

كذلك :

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

لذلك يكون:

$$c_2 = 2(\omega\cos\theta)y \text{ و } c_1 = 0$$

أي أن:

$$\dot{x} = 2\omega(\cos\theta)y$$

و

$$\dot{y} = -2\omega[(\cos\theta)x + (\sin\theta)z] + 2\omega(\sin\theta)h$$

بتعويض y في المعادلة الثالثة من (2) وإهمال الحدود الحاوية على ω^2 لصغرها بالمقارنة مع غيرها وأخذ الشروط الإبتدائية بعين الإعتبار، نجد:

$$\ddot{z} = -g$$

ومنه

$$\dot{z} = -gt$$

و

$$z = -\tfrac{1}{2}gt^2 + h$$

بتعويض z في معادلة y في (2) نجد (بعد إهمال ω^2):

$$\ddot{y} = 2\omega(\sin\theta)gt \qquad (3)$$

بمكاملة المعادلة الأخيرة مرتين وملاحظة شروط البدء، نجد:

$$y = \tfrac{1}{3}\omega g(\sin\theta)t^3 \qquad (4)$$

بتعويض y في معادلة x نلاحظ أن $x \equiv 0$ دوماً لإهمالنا الحدود الحاوية على ω^2!

الآن: عند وصول الجسم إلى الأرض ($z=0$) يكون:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (5)$$

بتعويض t في معادلة y نجد:

$$y = \tfrac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\ \sin\theta \qquad (6)$$

كما أن $x=z=0$.

فالجسم قد انحرف نحو الشرق (اتجاه oy الموجب) بالمقدار y الذي يساوي في هذه الحالة 1.5 cm تقريباً.

(ب) طريقة التشوّش *(perturbation method)*

لنفترض أن حل المعادلة (1) في حالة عدم دوران الأرض ($\boldsymbol{\omega}=0$) هو $\mathbf{r}_0(t)$، عندئذ نكتب الحل الحقيقي عندما $\boldsymbol{\omega}\neq 0$، بالشكل:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0(t)+\mathbf{r}_1(t) \qquad (7)$$

حيث $\mathbf{r}_1(t)$ تصحيح صغير متناسب مع ω.

من الواضح أن $\mathbf{r}_0(t)$ يحقق المعادلة:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0(t)=-\mathbf{g}_e=-g_e\mathbf{k} \qquad (8)$$

بالتكامل نجد:

$$\dot{\mathbf{r}}_0(t)=-g_e t\mathbf{k} \qquad (9)$$

و

$$\ddot{\mathbf{r}}_0(t)=-\tfrac{1}{2}g_e t^2\mathbf{k}+\mathbf{r}(0) \qquad (10)$$

بتعويض (8) في (1) نجد (لاحظ أننا وضعنا $\mathbf{a}=\mathbf{r}$):

$$\mathbf{r}_0(t)=-\tfrac{1}{2}g_e t^2\mathbf{k}+\mathbf{r}(0) \qquad (10)$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على ω^2 ولاحظنا أن $\mathbf{r}_1$ يتناسب مع ω ولذلك أهملنا $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_1$ مثلاً. بالإستفادة من (7-32) نجد:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1(t)=2\omega(\sin\theta)g_e t\mathbf{j}$$

بالمكاملة وملاحظة شروط البدء $\mathbf{r}_1(0)=0$ و $\dot{\mathbf{r}}_1=0$، نجد:

$$\mathbf{r}_1(t)=\tfrac{1}{3}\omega(\sin\theta)g_e t^3\mathbf{j} \qquad (12)$$

هذه هي نفس النتيجة التي وجدناها سابقاً، إذ أن الإنحراف $\mathbf{r}_1$ يتم باتجاه المحور oy أي باتجاه الشرق وله نفس المقدار الذي وجدناه بالطريقة السابقة تماماً. ❐

مسائل

1-7 ترتبط كتلة m بزنبرك k مثبت عند نقطة تهتز بشكل توافقي بسيط على محور السينات بتردد ω وسعة A اكتب معادلة حركة m بالنسبة لمنظومة محاور تتحرك مع نقطة التثبيت مفترضاً أن m تتحرك على محور السينات فقط.

2-7 تدور منظومة محاور $oxyz$ بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور ساكنة $OXYZ$ لهانفس المبدأ. ماسرعة جسيم بالنسبة لكل منظومة إذا تحدد موضعه في المنظومة المتحركة بـ $\mathbf{r} = \sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$ ؟

3-7 ماتسارع الجسيم المذكور في المسألة 2-7 بالنسبة لكل منظومة في اللحظة $t=0$ ؟

4-7 تدور منظومة محاور $oxyz$ بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة $OXYZ$ لها نفس المبدأ. جد سرعة جسيم ساكن في الموضع (3,1,-2) بالنسبة للمنظومة المتحركة كما يحسبه مراقب موجود في المنظومة الساكنة.

5-7 برهن أن قيمة القوة الطاردة المؤثرة على كتلة m على سطح الأرض $m\omega^2 R\sin\theta$ حيث R نصف قطر الأرض و ω سرعتها الزاوية و θ زاوية خط العرض. برهن أيضاً أن اتجاه هذه القوة بعيد عن سطح الأرض بشكل عمودي على $\boldsymbol{\omega}$.

6-7 يجري نهر عرضه 2 km بسرعة 5 km/h بالنسبة للأرض في منطقة خط عرضها $45°$ من الجنوب للشمال برهن أن الضفة اليسرى ستكون أعلى من الضفة اليمنى بمقدار 2.9 cm.(مساعدة: لاحظ أن محصلة القوى المؤثرة على ماء النهر يجب أن تكون عمودية على سطحه).

7-7 برهن أنه إذا دارت الأرض بسرعة زاوية $\omega^2 = 2g/R$، حيث R نصف قطر الأرض و g تسارع الجاذبية الأرضية، فإن وزن أي كتلة m لايعتمد على خط العرض.

8-7 يُقذف جسم نحو الأعلى عند خط عرض θ بسرعة ابتدائية v_0. برهن أن مقدار انحرافه نحو الشرق عند ارتطامه بالأرض ثانية سيكون $4\omega\, v_0^3 \sin\theta / 3g^2$.

9-7 يقذف جسم نحو الأسفل من ارتفاع h عند خط عرض θ بسرعة ابتدائية v_0. جد مقدار انحرافه نحو الشرق عند وصوله للأرض.

10-7 برهن أن الوزن الظاهري لكتلة m عند زاوية خط عرض θ نتيجة دوران الأرض هو: $\omega'^2=m^2(g-\omega^2 R\sin^2\theta)^2+(\omega^2 R\sin\theta\ \cos\theta)^2$، حيث R نصف قطر الأرض.

11-7 برهن أن الزاوية بين الشاقول المحلي والشاقول الحقيقي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\beta=\tan^{-1}(\omega^2 R\sin\theta\cos\theta)/(g-\omega^2 R\sin^2\theta)$$

12-7 تُطلق قذيفة بسرعة ابتدائية v_0 باتجاه يصنع زاوية α مع الأفق نحو الغرب. برهن أن الزمن اللازم للقذيفة للوصول الى أقصى ارتفاع لها (مهملاً الحدود الحاوية على ω^2) هو: $t=(v_0\sin\alpha/g)-(2\omega v_0^2\sin\theta\sin\alpha\cos\alpha/g^2)$. برهن أيضاً أن أقصى ارتفاع تصل اليه القذيفة هو: $y=(v_0^2\sin^2\alpha/2g)-(2\omega v_0^2\sin\theta\sin^2\alpha\cos\alpha/g^2)$.

13-7 يُعلق خيط شاقول *(plumb line)* كتلته m بسقف عربة قطار متحرك. (أ) ما الشد في خيط الشاقول وانحرافه عن الشاقول المحلي إذا كان القطار يتحرك على خط مستقيم بتسارع $\mathbf{a}_0$؟ (ب) أعد نفس السؤال في حالة كون القطار يدور على منعطف نصف قطره ρ وبسرعة ثابتة v_0. أهمل دوران الأرض في كل حالة.

14-7 تزحف نملة بسرعة v في مسار دائري نصف قطره b على اسطوانة موسيقية تدور بسرعة زاوية ω.(أ) صف حركة النملة بالنسبة لمنظومة محاور تدور مع الإسطوانة .(ب) ما تسارع النملة بالنسبة لمنظومة محاور ثابتة في المختبر؟ اعتبر الحالتين الآتيتين: $v=b\omega$ و $v=-b\omega$.

15-7 يدور انبوب مجوّف AOB طوله $2a$ بسرعة زاوية ω حول محور شاقولي عمودي عليه عند منتصفه وبداخله كتلة صغيرة m تنزلق فيه بدون احتكاك بادئة من السكون من نقطة تبعد مسافة b عن مركزه O.(أ) جد موضع وسرعة الكتلة m داخل الإنبوب في أي لحظة. (ب) برهن أن الزمن اللازم لتخرج m من الإنبوب يساوي:

$$t=(1/\omega)\ln[a+\sqrt{a^2-b^2})]$$

16-7 تتحرك كتلة m على سلك دائري موجود في مستو شاقولي (رأسي) نصف قطره a ويدور حول قطر شاقولي فيه بسرعة زاوية ثابتة ω. برهن أن m ستتحرك بشكل اهتزازي دوره $2\pi a\omega/\sqrt{a^2\omega^4-g^2}$، حول وضع اتزانها مفترضاً أنه لايوجد

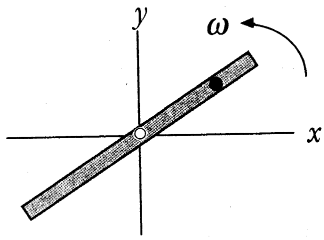
احتكاك بتاتاً . ناقش الحالة عندما $\omega=\sqrt{g/a}$.

17-7 يدور جيروسكوب مؤلف من دولاب نصف قطره r تقع كتلته M على محيطه حول محوره بسرعة زاوية $\omega_0=\theta$ بحيث يبقى هذا المحور أفقياً دوماً وثابتاً بالنسبة لسطح الأرض. اعتبر منظومة محاور ثابتة بالنسبة لسطح الأرض بحيث ينطبق oz فيها على محور الجيروسكوب ويقع مبدؤها في مركز الدولاب، كما يقع متجه السرعة الزاوية للأرض $\boldsymbol{\omega}$ في المستوي xy صانعاً زاوية α مع oz. جد مركبات العزم $d\mathbf{N}$ حول المبدأ o الناتج عن قوة كوريوليس المؤثرة على كتلة عنصرية dm على محيط الدولاب والمحددة بالإحداثيات القطبية (r,θ). استخدم هذه النتيجة للبرهان أن العزم الكلي لقوة كوريوليس على الجيروسكوب هي: $\mathbf{N}=\omega_0 \sin\alpha)/2\,\mathbf{j}$.

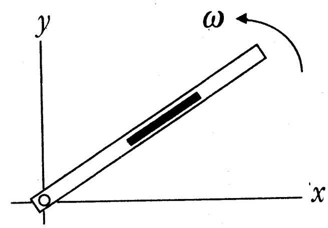
18-7 يتحرك جسيم في المستوي xy تحت تأثير قوة مركزية جاذبة $F=-kr$. ادرس حركة الجسيم مستخدماً منظومة محاور تدور حول oz بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$ مختارة بحيث أن القوة المركزية (الطاردة) تساوي وتعاكس F. حل معادلات الحركة في هذه المنظومة الإحداثية وناقش أنواع الحركة الناتجة وقارن ذلك مع الحل الذي وجدته عند دراسة القوة المركزية.

19-7 ينزلق جسيم على مستو مائل طوله l وزاوية ميله α بدءاً من السكون. (أ) برهن أن الزمن اللازم لهذا الجسيم ليصل الى قعر المستوي هو $\sqrt{2l/g\sin\alpha}$ وذلك بإهمال دوران الأرض. (ب) خذ دوران الأرض بعين الإعتبار مفترضاً أن الجسيم ينزلق من الشمال للجنوب في منطقة خط عرضها θ وبرهن أن الزمن يصير في هذه الحالة مساوياً إلى: $\sqrt{2l/g\sin\alpha}+[2\omega l\sin\theta\cos\alpha]/3g$ بإهمال الحدود الحاوية على ω^2 أو أكثر (جـ) جد سرعة الجسيم عندما يصل الى قعر المستوي. (د) مامقدار انحراف الجسيم للشرق أو للغرب عند وصوله للقعر؟

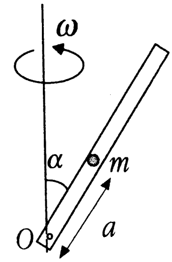
20-7 يور انبوب اسطواني مفرغ حول محور شاقولي يصنع معه زاوية α بسرعة زاوية ثابتة ω وبداخله كتلة m يمكنها الحركة بدون احتكاك. برهن أنه إذا بدأت m حركتها من السكون على بُعد a من o ، كما في الشكل (7-10)، فإن بُعدها عن o في أي لحظة t يُعطى بالعلاقة $r=a\cosh(\omega t\cos\alpha)$.



الشكل (7-12)



الشكل (7-11)



الشكل (7-10)

7-21 يعلق إنبوب من إحدى طرفيه بينما ينزلق بداخله قضيب متجانس كتلته m وطوله l، كما في الشكل (7-11). أكتب معادلات لاغرانج عندما يدور الإنبوب حول محور أفقي يمر من نقطة التعليق مختاراً إحداثيات عامة مناسبة.

7-22 حل المسألة 7-22 بفرض أن المستوي xy أفقي.

7-23 ادرس حركة كتلة m تنزلق بدون احتكاك داخل إنبوب مفرغ يدور في مستو شاقولي بسرعة زاوية ثابتة ω، كما في الشكل (7-12).

7-24 برهن أن مسار جسيم يتحرك في المستوي $x'y'$ وفقاً للمعادلتين (7-40) و(7-41) هو قطع ناقص ثابت في المستوي $x'y'$ ويدور بسرعة زاوية ω بالنسبة للمحاور oxy.

الحركة العامة للأجسام الصلبة

(General Motion of Rigid Bodies)

8-1 تمهيد : ممتد العطالة (أو ممتد القصور الذاتي) *(Inertia Tensor)*

درسنا حتى الآن أبسط أنواع حركة الجسم الصلب كالحركة الإنتقالية الخالصة التي تبقى فيها ذرات الجسم كله بوضع معين ثابت بالنسبة لمركز كتلته الذي ينتقل من مكانه تحت تأثير محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه، والحركة الدورانية المستوية التي يدور فيها الجسم حول محور معين يبقى موازياً لاتجاه ثابت دوماً. وقد وجدنا أن قانون الحركة العام في الحالة الأولى هو:

$$\mathbf{F}_T = \frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt} \qquad (1-8)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم و $\mathbf{P}_{cm}$ الزخم الخطي لمركز الكتلة، بينما يكون قانون الحركة في الحالة الثانية بالشكل:

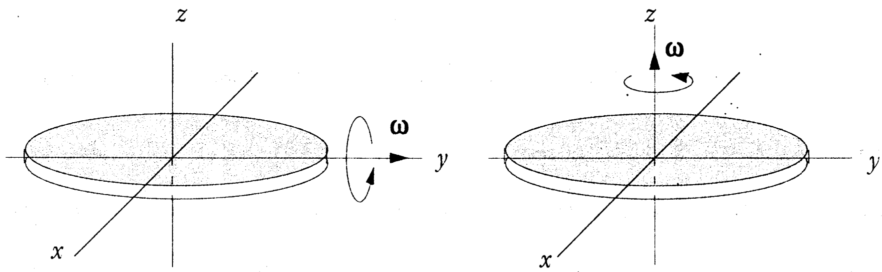
$$\tau_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \qquad (2-8)$$

حيث τ_z محصلة العزوم الخارجية المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران oz، بينما $\mathbf{L}_z$ الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لهذا المحور. وسنعمم الحركة الدورانية للجسم الصلب من دوران حول محور إلى دوران حول نقطة.

يمكن تبسيط الفكرة لو اعتبرنا قرصاً يدور حول محور تناظره oz كما في الشكل(8-1أ)، عندئذ بفرض أن سرعته الزاوية $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$ وعزم عطالته حول هذا المحور I_z نكتب قانون الحركة على النحو:

$$\tau_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt}\mathbf{k} \qquad (3-8)$$

لكن ماذا يحدث إذا تغير اتجاه محور الدوران مع الزمن إلى oy، كما في الشكل (1-8ب)؟ لاشك بأن $\boldsymbol{\omega}$ و I_z ستتغيران عندئذ وتصير المسألة أكثر تعقيداً حتماً.



(ب) الشكل (1-8) (أ)

لذلك نعتبر جسماً صلباً يدور حول نقطة ما، كما في الشكل (2-8) ونبحث عن زخمه الزاوي حولها فنكتب:

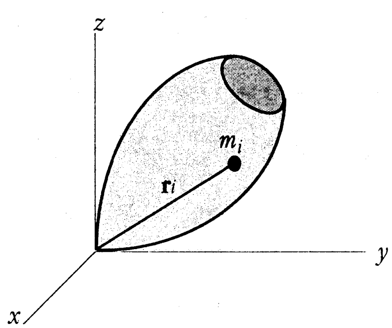
$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \tag{4-8}$$

بوضع:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \tag{5-8}$$

حيث $\boldsymbol{\omega}$ السرعة الزاوية التي يدور بها الجسم حول o، نجد:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \tag{6-8}$$



الشكل (2-8)

لكن:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\bullet\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})\mathbf{C}$$

لذا تصير (8-6):

$$\mathbf{L}=\sum_i m_i[r_i^2\omega-\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i\bullet\omega)] \qquad (7-8)$$

الآن: نعرّف **الضرب الثنائي** *(dyad product)*، بالعلاقة:

$$(\mathbf{AB})\bullet\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\bullet\mathbf{C})$$

أو

$$\mathbf{C}\bullet(\mathbf{AB})=(\mathbf{C}\bullet\mathbf{A})\mathbf{B}$$

ونكتب:

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i\bullet\omega)=(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i)\bullet\omega$$

فتصير(8-7):

$$\mathbf{L}=\sum_i m_i[r_i^2\omega-(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i)\bullet\omega]$$

بملاحظة أن:

$$\mathbf{1}\bullet\omega=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk})\bullet\omega=\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}=\omega\ . \qquad (8-8)$$

حيث يدل **1** على مجموع الثنائيات$\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk}$ ويسمى **ممتد الوحدة** *(unit tensor)* لأن تطبيقه على ω أعطى نفس المتجه تماماً.

بما أن ω مستقل عن المجموع في (8-7) لذلك نضعه خارجاً ونكتب:

$$\mathbf{L}=\sum_i m_i[r_i^2\mathbf{1}-\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i]\bullet\omega \qquad (9-8)$$

أو :

$$\mathbf{L}=\mathbf{I}\bullet\omega \qquad (10-8)$$

حيث نطلق على $\mathbf{I}$ اسم **ممتد العطالة** (أو ممتد القصور الذاتي) *(Inertia Tensor)* ويعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{I}=\sum_i m_i\,[r_i^2\mathbf{1}-\mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_i\,] \qquad (11-8)$$

نظراً لحاجتنا لاستخدام الممتدات *(tensors)* بشكل موسع من الآن فصاعد، لذا سنعطي في الفقرة التالية بعض المبادئ الأساس في هذا الموضوع، وينصح القارئ بالعودة إلى مراجع متخصصة في هذا الموضوع للاستزادة منه عند الحاجة.

8 - 2 الممتدات *(Tensors)* (اختياري)

عرفنا في الفقرة السابقة الثنائي **AB** بعلاقة محددة هي:

$$(\mathbf{AB})\bullet\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\bullet\mathbf{C}) \qquad (12-8)$$

حيث نلاحظ أنه لايوجد أي إشارة بين المتجهين **A** و**B**، من ثم يمكن كتابة أي متجه **A** على النحو:

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}=(\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk})\bullet\mathbf{A} \qquad (13-8)$$

حيث يطلق على أي من الثنائيات **ii** أو **jj** أو **kk** اسم ممتد.

نلاحظ أن المتجه في الفضاء العادي ينتج من المجموع الخطي للثنائيات الثلاث المذكورة أعلاه فقط ، لذلك نقول إن المتجه هو ممتد من الدرجة الأولى.

أما إذا اعتبرنا المجموع الخطي لكل الثنائيات الممكنة التي تنتج عن متجهات الوحدة **i** و **j** و **k** التي يبلغ عددها تسع ثنائيات، فإننا نحصل على تعريف الممتد من الدرجة الثانية على النحو:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}=&A_{xx}\mathbf{ii}+A_{xy}\mathbf{ij}+A_{xz}\mathbf{ik}\\&+A_{yx}\mathbf{ji}+A_{yy}\mathbf{jj}+A_{yz}\mathbf{jk}\\&+A_{zx}\mathbf{ki}+A_{zy}\mathbf{kj}+A_{zz}\mathbf{kk}\end{aligned} \qquad (14-8)$$

من الواضح أن هناك فرق كبير بين الثنائي **ij** و **ji** على سبيل المثل ذلك أن:

$$(\mathbf{ij}) \bullet \mathbf{A} = \mathbf{i}\,(\mathbf{j} \bullet \mathbf{A}) = A_y\,\mathbf{i}$$

بينما:

$$(\mathbf{ji}) \bullet \mathbf{A} = \mathbf{j}\,(\mathbf{i} \bullet \mathbf{A}) = A_x\,\mathbf{j}$$

من جهة أخرى، يمكن كتابة أي ممتد باستخدام المصفوفات(*matrices*)، فنكتب:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \qquad (15-8)$$

حيث نلاحظ أن A_{xx} هي أمثال الثنائي **ii** في (14-8) وA_{xy} هي أمثال **ij**، وهكذا دواليك.

8-3 جبر الممتدات *(Tensor Algebra)* (اختياري)

8-3-1 جمع الممتدات:

يجمع الممتدان **A** و **B** على النحو:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}=\sum_i\sum_j (A_{ij}+B_{ij})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \qquad (16-8)$$

حيث $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_j$ متجهي وحدة على المحورين المعنيين i و j.

8-3-2 ضرب الممتدات:

نعلم أن حاصل الضرب العددي لمتجهين **A** و**B** يكتب بالشكل:

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\sum(A_i\mathbf{e}_i)\bullet(B_j\mathbf{e}_j)=\sum_i\sum_j(A_iB_j)\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j \qquad (17-8)$$

إلا أن:

$$\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$$

حيث تدل δ_{ij} على دلتا كرونكر وتساوي:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

لذلك يصير حاصل ضرب متجهين مساوٍ إلى:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \sum_{i} A_i \, B_i \qquad (18-8)$$

بنفس الشكل نكتب حاصل ضرب ممتدين **A** و**B**:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \sum_{ijkl} (A_{ij} \, \mathbf{e}_i \, \mathbf{e}_j) \bullet (B_{kl} \, \mathbf{e}_k \, \mathbf{e}_l)$$

أو

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \sum_{i,j,l=1} A_{ij} \, B_{jl} (\mathbf{e}_j \, \mathbf{e}_l) \qquad (19-8)$$

8 - 3 - 3 مُبَادل ممتد *(Transpose)*:

نعرف مُبَادل ممتد بالعلاقة:

$$\mathbf{A}^t \bullet \mathbf{C} = \mathbf{C} \bullet \mathbf{A} \qquad (20-8)$$

وتعطي مركبات مُبَادل **A**، أي مركبات $\mathbf{A}^t$ بالعلاقة:

$$A^t_{ij} = A_{ji} \qquad (21-8)$$

إذا كان $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ فإننا نقول إن **A** هو **ممتد متناظر** *(symmetric tensor)*. يتحدد هذا الممتد عندئذ بمعرفة ستة عناصر منه، بينما نحدد الثلاثة الباقية من العلاقة:

$$A_{ij} = A_{ji} \qquad (22-8)$$

وإذا كان $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$ نقول إن **A** ممتد **مضاد التناظر** *(asymmetric tensor)*. يتحدد هذا الممتد بمعرفة ثلاثة من عناصره غير القطرية، لأن:

$$\begin{cases} A_{ij} = -A_{ji} & i \neq j \\ A_{ij} = 0 & i = j \end{cases} \tag{23-8}$$

نلاحظ من تعريف ممتد العطالة أنه متناظر دوماً.

8 - 3 - 4 الممتد الثابت *(constant tensor)* والممتد القطري *(diagonal tensor)*:

نقول إن **A** ممتد ثابت إذا كان يكتب بالشكل:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{1} = A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24-8}$$

حيث A عدد ثابت، كما نقول إن **A** **ممتد قطري** إذا كان معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \tag{25-8}$$

لا بأس من أن ننوه إلى نقطة هامة تتعلق بالمصفوفات والممتدات والفرق بينهما. فالمصفوفة مجموعة أعداد جبرية تجمع وتطرح حسب قواعد معينة، أما **الممتدات فهي مؤثرات** *(operators)* تؤثر على أي متجه عند ضربها به منتجة متجها جديداً قد يختلف عن المتجه الأصلي بمعناه الفيزيائي أو الهندسي أو كلاهما.

مثل ذلك تطبيق مؤثر ممتد العطالة **I** على متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$، فنجد:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \bullet \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \bullet \boldsymbol{\omega} \tag{26-8}$$

إن نتيجة هذا الضرب هي متجه الزخم الزاوي **L** الذي يختلف كليا عن $\boldsymbol{\omega}$.

8 - 4 تحويلات منظومات المحاور الاحداثية

(Transformation of Coordinate Systems)

سنحاول في هذه الفقرة دراسة الطريقة التي تتحول بها مركبات ممتد عندما ننتقل من منظومة محاور أولى $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ لأخرى $(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3')$ لها نفس المبدأ.

نكتب العلاقة بين إحداثيات نقطة بالنسبة للمنظومتين على النحو:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j \qquad (27-8)$$

حيث:

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i' \bullet \mathbf{e}_j \qquad (28-8)$$

يمكن التأكد من العلاقات السابقة باعتبار نقطة في مستو، كما في الشكل (8-3)، حيث نلاحظ أن:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (29-8)$$

حيث:

$$\begin{cases} a_{11} = \mathbf{e}_1' \bullet \mathbf{e}_1 = \cos\theta \\ a_{12} = \mathbf{e}_1' \bullet \mathbf{e}_2 = \sin\theta \\ a_{21} = \mathbf{e}_2' \bullet \mathbf{e}_1 = -\sin\theta \\ a_{22} = \mathbf{e}_2' \bullet \mathbf{e}_2 = \cos\theta \end{cases} \qquad (30-8)$$

نكتب ما تقدم بشكل مختصر مستفيدين من المصفوفات بالشكل:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (31-8)$$

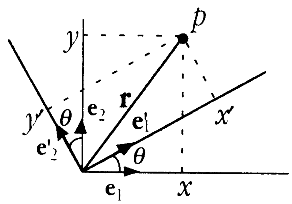
تدعى المصفوفة:

$$(\mathrm{a}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (32-8)$$

مصفوفة الدوران *(rotation matrix)* من (x, y) إلى (x', y') .

يمكن البرهان بسهولة أن مصفوفة الدوران من (x', y') إلى (x, y) هي:

$$(\mathrm{a}') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (33-8)$$



الشكل (3-8)

الآن: نعلم أنه يمكن كتابة أي متجه **A** في نظومة محاور $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ بالشكل:

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\,\mathbf{e}_i$$

كما يمكن كتابة **A** بالنسبة لمنظومة ثانية $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$، لها نفس المبدأ بالشكل:

$$\mathbf{A}' = A'_1\,\mathbf{e}'_1 + A'_2\,\mathbf{e}'_2 + A'_3\,\mathbf{e}'_3 = \sum_{i=1}^{3} A'_i\,\mathbf{e}'_i$$

من الواضح أن المركبات (A_1, A_2, A_3) ترتبط بـ (A'_1, A'_2, A'_3) بالعلاقة:

$$A'_i = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\,A_j \qquad (34-8)$$

وواضح أن مركبات المتجه **A** تتحول بشكل مماثل تماما للإحداثيات (x_1, x_2, x_3). لذا يعرَّف المتجه جبريا أنه مجموعة أعداد (A_1, A_2, A_3) تتحول، كالإحداثيات (x_1, x_2, x_3)، وفق القاعدة (27-8) عند دوران منظومة المحاور الإحداثية.

بنفس الشكل نربط بين مركبات ممتد العطالة **I** بالنسبة للمنظومة $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ والمنظومة $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ التي لها نفس المبدأ، بالعلاقة :

$$\begin{cases} I'_{ij} = \mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{I} \bullet \mathbf{e}'_j = \sum_{k,l} a_{ik}\, a_{lj}\, I_{kl} \\ I_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{I}' \bullet \mathbf{e}_j = \sum_{k,l} a_{ik}\, a_{lj}\, I'_{kl} \end{cases} \qquad (35-8)$$

حيث تعطي a_{nm} بالعلاقة:

$$a_{nm} = \mathbf{e}'_n \bullet \mathbf{e}_m \qquad (36-8)$$

فالتعريف الجبري الصحيح للمتد هو أنه مجموعة تسعة أعداد I_{ij} تتحول وفق القاعدة (35-8) عند دوران منظومة المحاور الإحداثية.

8-5 تقطير ممتد (جعل ممتد قطريا) *(diagonalization of a tensor)*

من المهم جدا في أغلب المسائل المتعلقة بدوران الأجسام الصلبة، البحث عن منظومة محاور إحداثية يكون ممتد العطالة فيها قطرياً، أي حاوياً على الحدود القطرية فقط مع انعدام الحدود غير القطرية. سنحدد فيما يلي الطريقة التي نصل بها الى هذه المنظومة.

اذا افترضنا أن الممتد يعطى بالمصفوفة التالية :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (37-8)$$

بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية معينة $(oxyz)$،

كما يعطى بالمصفوفة:

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} I_1' & 0 & 0 \\ 0 & I_2' & 0 \\ 0 & 0 & I_3' \end{pmatrix} \qquad (38-8)$$

بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية أخرى$(ox'y'z')$ لها نفس المبدأ o، يكون $\mathbf{I}$ فيها قطرياً، عندئذ نلاحظ أنه إذا كان $\mathbf{A}$ متجها موازيا لأحد المحاورox' أوoy' أوoz'، وليكن ox' مثلاً، عندئذ يكون:

$$\mathbf{A}=A\ \mathbf{e}_1' \qquad (39-8)$$

من ثم:

$$\mathbf{I}\bullet\mathbf{A}=I_1'\,A\,\mathbf{e}_1'=I_1'\,\mathbf{A} \qquad (40-8)$$

من الواضح أن(8-40) ستكون صحيحة إذا كان $\mathbf{A}$ يوازيoy' أوoz' الاّ أننا سنحصل على I'_2 أو I'_3، على الترتيب. لذلك إذا أردنا معرفة اتجاهox' أوoy' أوoz' بالنسبة للمنظومة القديمة $oxyz$ فما علينا إلا أن نبحث عن متجه يوازي أحد هذه المحاور الجديدة ونكتبه بدلالة مركباته على $oxyz$، ثم نبحث عن متجه ثان يوازي محوراً آخراً، وهكذا دواليك.

يؤول بنا هذا إلى النظرية الأساسية التالية:

"يمكن جعل أي ممتد قطرياً بتدوير منظومة المحاور$oxyz$ إليمنظومةمحاور متعامدة مناسبة $ox'y'z'$ بحيث أن العناصر القطرية الناتجة للمتد فريدة *(unique)* بغض النظر عن ترتيبها، كما أن المحاور الإحداثية للمنظومة الجديدة وحيدة (بالنسبة لنقطة المبدأ o) إلاّ إذا كانت هناك عناصر قطرية متساوية (أو متفسخة عن بعضها) *(degenerate)*."

تدعى العناصر القطرية الناتجة **القيم المميزة** *(eigenvalues or characteristic values)* للمتد، وتدعى المحاور الجديدة للمنظومة الناتجة **محاور أساسية** *(principal axes)*.

لتوضيح هذه النظرية، نفترض أن $\mathbf{I}$ يعطى بالعلاقة (8-37) بالنسبة للمنظومة $oxyz$ وأن $\mathbf{A}$ هو متجه ما يوازي أحد المحار الأساسية التي نبحث عنها، بحيث أنه معطى

بدلالة مركباته على $oxyz$ بالعلاقة:

$$\mathbf{A} = A_x \ \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3$$

لكن، بما أن **A** يوازي أحد المحاور الأساسية للمتد **I**، عندئذ يكون:

$$\mathbf{I} \bullet \mathbf{A} = I'\mathbf{A}$$

أو

$$\mathbf{I} \bullet \mathbf{A} - I'\mathbf{A} = 0$$

حيث تدل I' على القيمة المميزة لـ **I** المتعلقة بالمحور الأساس الذي يوازيه **A**.

بكتابة العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$(\mathbf{I} - I'\mathbf{1}) \bullet \mathbf{A} = 0 \qquad (41-8)$$

نحصل على **معادلة القيمة المميزة** *(Eigenvalue Equation)*.

نحل المعادلة المميزة بأخذ مركباتها على المحاور ox وoy وoz فنجد:

$$\begin{cases} (I_{xx} - I') A_x + I_{xy} \ A_y + I_{xz} \ A_z = 0 \\ I_{yx} \ A_x + (I_{yy} - I') \ A_y + I_{yz} \ A_z = 0 \\ I_{zx} A_x + I_{zy} \ A_y + (I_{zz} - I') \ A_z = 0 \end{cases} \qquad (42-8)$$

تمثل (42-8) مجموعة معادلات خطية متجانسة بدون طرف ثان ولها حل غير بديهي $(A_x = A_y = A_z = 0)$ إذا كان معيّن (أو محدد) الأمثال معدوماً، أي يجب أن يكون:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I' & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I' & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} - I' \end{vmatrix} = 0 \qquad (43-8)$$

يعطينا حل **المعادلة المميزة** *(secular equation)* (8-43) ثلاث قيم لـI' هي القيم المميزة للمتد **I** بالنسبة لمنظومة المحاور الجديدة $ox'y'z'$ التي نحصل على اتجاهات محاورها بالنسبة لـ $oxyz$ بتعويض أول قيمة لـI'، ولتكن I'_1 في (8-42) فنجد النسب $A_x:A_y:A_z$ ، حيث أنه لايمكن تحديد هذه المركبات بشكل مستقل عن بعضها من مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة (8-42) . لذلك يمكن أن نكتب:

$$\mathbf{A}_1 = A_0 (\alpha\, \mathbf{e}_1 + \beta\, \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3) \qquad (44-8)$$

بما أن اتجاه$\mathbf{A}_1$، وليس طوله، هو المهم لذلك نحدد متجه الوحدة المحمول على امتداده:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}} = \frac{(\alpha\,\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\,\mathbf{e}_3)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + g^2}} \qquad (45-8)$$

هذا هو متجه الوحدة للمحور الجديدox' الذي نبحث عنه، وتدل كل من αو βو γ في (8-45) على جيوب تمام توجيه*(direction cosines)* المحورox' بالنسبة لـox وoy وoz.
بنفس الشكل نعوض القيمة الثانية I'_2 لـI' في (8-42) فنجد$\mathbf{A}_2$ ثم$\mathbf{e}'_2$، كذلك نعوض I'_3 فنجد$\mathbf{e}'_3$.

تدعى المتجهات$\mathbf{A}_1$ و$\mathbf{A}_2$ و$\mathbf{A}_3$ ا**لمتجهات المميزة** *(eginvectors)* للمعادلة (8-41).

يمكن البرهان أن جذور المعادلة المميزة (8-43) هي أعداد حقيقية دوماً، كما أن المتجهات المميزة$\mathbf{A}_1$ و$\mathbf{A}_2$ و$\mathbf{A}_3$ هي **متجهات متعامدة** *(orthogonal)* دوماً.

بناء على ما تقدم، نكتب$\mathbf{e}'_1$ و$\mathbf{e}'_2$ و$\mathbf{e}'_3$ بدلالة$\mathbf{e}_1$ و$\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ بالشكل:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \beta_1\;\mathbf{e}_2 + \gamma_1\;\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\,\mathbf{e}_2 + \gamma_2\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \alpha_3\,\mathbf{e}_1 + \beta_3\,\mathbf{e}_2 + \gamma_3\,\mathbf{e}_3 \end{cases} \qquad (46-8)$$

أو

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \equiv (\mathsf{a}) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \qquad (47-8)$$

حيث يطلق على (a) اسم **مصفوفة الدوران** *(rotation matrix)* التي يمكن بوساطتها الإنتقال من المنظومة $oxyz$ إلى $ox'y'z'$. بالطبع فإن مُبادل المصفوفة (a) (أي a^t) هي مصفوفة الدوران من $ox'y'z'$ إلى $oxyz$. ونلاحظ أن:

$$\mathsf{a} \bullet \mathsf{a}^t = 1 \qquad (48-8)$$

لأن (a) هي **مصفوفة متعامدة** *(orthogonal matrix)*.

6-8 تعليقات أساس على القيم المميزة لمتد

أ - إذا كانت القيم المميزة الثلاث لمتد $\mathbf{I}$ متساوية، أي أن $I_1'=I_2'=I_3'$، عندئذ يصبح المتد ثابتاً بالنسبة لمنظومة المحاور الإحداثية الجديدة، إذ نكتبه بالشكل:

$$\mathbf{I} = I_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (49-8)$$

بالتالي فإن أي منظومة محاور $ox'y'z'$، مبدؤها o، هي منظومة محاور أساسية للمتد ونقول إن المتد **متناظر كروياً** *(spherically symmetric)* بالنسبة لـ o، لأن الكرة متناظرة بالنسبة لأي منظومة محاور متعامدة مبدؤها مركز الكرة نفسها.

ب - إذا كانت قيمتان مميزتان للمتد متساويتان، أي أن $I'_1=I'_2$، مثلاً، عندئذ يكون اتجاه المحور الأساس الثالث المتعلق بالقيمة المميزة I'_3 فريداً *(unique)* ومحدداً بطريقة وحيدة، أما المحورين الأساسيين الآخرين المتعلقين بـ I'_1 و I'_2 فهما أي محورين متعامدين موجودين في مستو عمودي على المحور الأساس الثالث، لأنه إذا كان $\mathbf{A}$ متجهاً موجوداً في مستو كهذا عندئذ يكون:

$$\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{e}'_1 + A_2\,\mathbf{e}'_2$$

من ثم:

$$\mathbf{I}\bullet\mathbf{A} = I'_1 A_1 \mathbf{e}'_1 + I'_2 A_2 \mathbf{e}'_2$$

لكن $I'_1 = I'_2$ فيكون:

$$\mathbf{I}\bullet\mathbf{A} = I'_1 (A_1\,\mathbf{e}'_1 + A_2\,\mathbf{e}'_2) = I'_1\,\mathbf{A}$$

هذا يعني، بحسب(41-8)، أن $\mathbf{A}$ يوازي محورً أساساً للمتد $\mathbf{I}$، وبما أن اختياره كان عشوائياً في المستوي $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$، لذلك نقول إن أي محور في هذا المستوي هو محور أساس، ويكون المحور الآخر عموديا عليه.

جـ - إذا كانت القيم المميزة الثلاث مختلفة كلها عن بعضها عندئذ تكون المحاور الأساسية الثلاثة محددة بطريقة فريدة ووحيدة بالنسبة لنقطة المبدأ المعتبرة. أما لو غيرنا نقطة المبدأ فسنجد ثلاثة محاور أساسية جديدة محددة بطريقة وحيدة بالنسبة للمبدأ الجديد، وهكذا.

أخيرا، إذا كان $\mathbf{n}$ متجه وحدة في نظومة محاور مبدؤها o ، معطى بالعلاقة:

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \cos\beta\,\mathbf{e}_2 + \cos\gamma\,\mathbf{e}_3$$

حيث αو βو γ جيوب تمام توجيه $\mathbf{n}$ بالنسبة لـ$\mathbf{e}_1$ و$\mathbf{e}_2$ و$\mathbf{e}_3$ $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$ عندئذ نجد مركبات أي ممتد $\mathbf{I}$ على هذا المتجه من العلاقة:

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{n}\bullet\mathbf{I}\bullet\mathbf{n} \qquad (50-8)$$

8-7 نظرية المحاور المتوازية

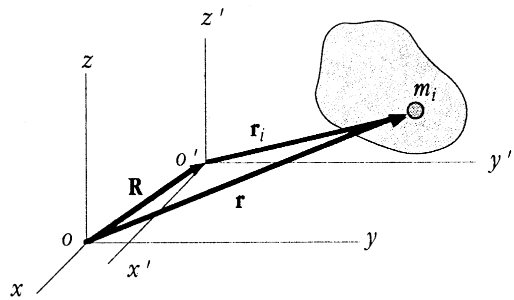
كتبنا نظرية المحاور المتوازية لعزم عطالة جسم يتحرك في مستو بالشكل:

$$I_o = I_{cm} + M R^2$$

حيث I_o عزم عطالة الجسم حول محور مار من نقطة ما o بينما I_{cm} عزم عطالته حول محور مار من مركز كتلته وموازٍ للمحور الأول. أما M فهي كتلة الجسم وR المسافة العمودية بين المحورين.

في حالة الحركة الدورانية العامة لجسم صلب حول نقطة، نكتب نظرية المحاور المتوازية بالنسبة لممتد العطالة مباشرة، إذا لاحظنا أنه إذا نقلنا مبدأ منظومة المحاور من o إلى مركز الكتلة بحيث تكون محاور المنظومة الجديدة موازية لمحاور المنظومة القديمة، وعندئذ نحدد موضع أي كتلة عنصرية m_i من الجسم بالمتجه $\mathbf{r}_i$ حيث نلاحظ من الشكل (4-8) أن:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \qquad (51-8)$$



الشكل (4-8)

لذلك يصير ممتد العطالة معطى بالمعادلة:

$$\mathbf{I}_o = \sum m_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R})^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R})(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R})]$$

أو

$$\mathbf{I}_o = \sum m_i [(\mathbf{r}'^2_i \ \mathbf{1} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i) - (\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R}) + 2\mathbf{R} \bullet \mathbf{r}'_i \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_i \mathbf{R}]$$

لكن

$$\sum m_i (\mathbf{r}'^2_i \ \mathbf{1} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i) = \mathbf{I}_{cm}$$

هو عزم عطالة الجسم بالنسبة لمركز الكتلة، كما أن :

$$\sum m_i (\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R}) = M(\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R})$$

حيث M كتلة الجسم كله، أما الحد الأخير فهو:

$$(2\mathbf{R} \bullet \sum m_i \mathbf{r}_i')\mathbf{1} - (\sum m_i \mathbf{r}_i')\mathbf{R} - \mathbf{R}\sum m_i \mathbf{r}_i' = 0$$

لأن المجموع $\Sigma m_i \mathbf{r}'_i$ يحدد موضع مركز الكتلة للجسم الذي اعتبرناه مبدأ لمنظومة الإحداثية الجديدة، أي أنه في الموضع (0,0,0). من ثم نجد أن:

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{cm} + M(\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R}) \tag{52-8}$$

لنظرية المحاور المتوازية أهمية كبيرة إذ أنه كثيرا مايكون من السهل حساب مركبات ممتد عطالة جسم صلب بالنسبة لمنظومة محاورمبدؤها مركز الكتلة، إلا أن الجسم يتحرك بشكل تبقى فيه نقطة أخرى ثابتة في مكانها، لذلك يفضل في هذه الحالة وضع مبدأ منظومة المحاور عند هذه النقطة، عندئذ نستعمل (8-51) لإيجاد مركبات ممتد العطالة بالنسبة لهذه المنظومة الجديدة.

8 - 8 مثل توضيحي

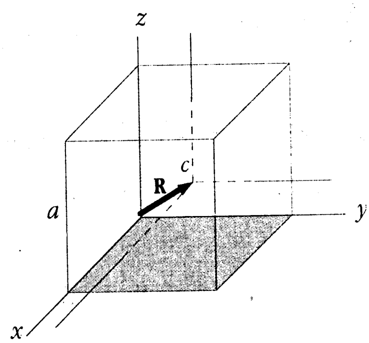
لنوجد ممتد عطالة جسم صلب على شكل مكعب كتلته m طول ضلعه a حول منظومة محاور مبدؤها إحدى زوايا المكعب، تنطبق محاورها على أضلاعه الثلاثة، كما في الشكل (8-5)، ولنقطر هذا الممتد ونحدد المحاور الأساسية له. ثم نكتب مصفوفة الدوران من المنظومة القديمة إلى المحاور الأساسية. أخيراً نكتب ممتد العطالة للمكعب بالنسبة لمنظومة محاور مبدؤها مركزه ومحاورها توازي أضلاعه.

أ - نحسب أولاً مركبات ممتد العطالة بالنسبة لـ$oxyz$ فنكتب الحدود القطرية *(diagonal elements)* أولاً:

$$I_{xx}=\int_M (y^2+z^2)\,dm=\rho\int_0^a\int_0^a\int_0^a (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{3}m\,a^2=\frac{1}{12}(8m\,a^2)$$

حيث وضعنا:

$$m=\rho\,a^3$$



الشكل (5-8)

بنفس الشكل تماماً:

$$I_{yy}=I_{zz}=\frac{1}{12}(8m\,a^2)$$

أما الحدود غير القطرية *(off-diagonal elements)* فهي:

$$I_{xy}=I_{yx}=-\rho\int_0^a\int_0^a\int_0^a xy\,dx\,dy\,dz=-\frac{1}{4}m\,a^2=\frac{1}{12}(-3m\,a^2)$$

كذلك:

$$I_{yz}=I_{zy}=I_{xz}=I_{zx}=\frac{1}{12}(-3m\,a^2)$$

لذلك نكتب ممتد العطالة بالشكل:

$$\mathbf{I}_0=\frac{m\,a^2}{12}\begin{pmatrix}8 & -3 & -3\\ -3 & 8 & -3\\ -3 & -3 & 8\end{pmatrix} \qquad (1)$$

ب - نقوم الآن بتقطير الممتد، فنفترض أن **A** هو متجه يوازي أحد المحاور الأساسية للمكعب، بالنسبة للنقطة o، فيكون:

$$\mathbf{I}_o \bullet \mathbf{A} = I' \mathbf{A}$$

حيث I' القيمة المميزة للمتد المقابلة للمحور الأساسي المفترض.

بكتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$\left(\mathbf{I}_o - I'\mathbf{1}\right) \bullet \mathbf{A} = 0$$

وأخذ مركباتها على ox و oy و oz نجد:

$$\begin{cases} (8-I')A_x & -3A_y & -3A_z = 0 \\ -3A_x & (8-I')A_y & -3A_z = 0 \\ -3A_x & -3A_y & (8-I')A_z = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

حيث أسقطنا الحد $m\,a^2/12$ آنياً ونعود لكتابته في النهاية.

نلاحظ أن(2) تمثل مجموعة معادلات خطية متجانسة ولا تقبل حلاً غير بديهي إلاّ إذا كان:

$$\begin{vmatrix} (8-I')A_x & -3A_y & -3A_z \\ -3A_x & (8-I')A_y & -3A_z \\ -3A_x & -3A_y & (8-I')A_z \end{vmatrix} = 0$$

بفك هذا المعين (أو المحدد *determinent*) نجد:

$$I'^3 - 24I'^2 + 165I' - 242 = 0$$

لحل المعادلة الأخيرة، نجد (بالتجربة) أن أحد الجذور هو $I'=2$، فنقسم المعادلة على $(I'-2)$ فنجد:

$$(I'-2)(I'^2 - 22I' + 121I') = (I'-2)(I'-11)^2 = 0$$

من ثم فالجذور الثلاثة هي $I'_1=I'_2=11$ و $I'_3=2$.

لذلك نكتب ممتد العطالة بالنسبة لمنظومة المحاور الأساسية بالشكل:

$$\mathbf{I}'_o=\frac{m\,a^2}{12}\begin{pmatrix}11&0&0\\0&11&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

إن كون $I'_1=I'_2$ يجعل المحور oz' الجديد محور تناظر للجسم بينما ox' وoy' أي محورين متعامدين واقعين في مستو عمودي على oz'.

لإيجاد اتجاهات هذه المحاور الجديدة نعوض I'_3 في المعادلات (2) فنجد:

$$\begin{aligned}3(2A_x-A_y-A_z)&=0\\3(-A_x+2A_y-A_z)&=0\\3(-A_x-A_y+2A_z)&=0\end{aligned}$$

بطرح الأولى من الثانية نجد $A_x=A_y$ وبالتعويض في الثالثة نجد أن $A_z=A_y$.

لذلك نكتب المتجه $\mathbf{A}$ بالشكل:

$$\mathbf{A}=A_x(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

من ثم فإن متجه الوحدة المحمول عليه هو:

$$\mathbf{k}'=\frac{\mathbf{A}}{A}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

أي أنه محمول على قطر المكعب البادىء من النقطة o .

لإيجاد $\mathbf{i}'$ و$\mathbf{j}'$ نعوض I'_1 أو I'_2 في (2) فنجد 0=0، أي أن مركبات $\mathbf{i}'$ و$\mathbf{j}'$ إختيارية طالما أنهما يقعان في مستو عمودي على $\mathbf{k}'$ ومتعامدان مع بعضهما بنفس الوقت.

إذا إفترضنا أن $\mathbf{i}'$ يقع في المستوي xy، أي أن:

$$\mathbf{i}'=\alpha\,\mathbf{i}+\beta\,\mathbf{j}$$

بما أن $\mathbf{i}'\bullet\mathbf{k}'=0$ و $|\mathbf{i}'\times\mathbf{k}'|=1$ نجد:

$$\alpha+\beta=0$$

و

$$\alpha^2+\beta^2+(\alpha-\beta)^2=1$$

بحل المعادلتين السابقتين نجد:

$$\alpha=-\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

أي أن:

$$\mathbf{i}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

أخيرا، لإيجاد $\mathbf{j}'$ نكتب أن:

$$\mathbf{k}'\times\mathbf{i}'=\mathbf{j}'$$

فنجد:

$$\mathbf{j}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$$

نستنتج من $\mathbf{i}'$ و $\mathbf{j}'$ و $\mathbf{k}'$ أن مصفوفة الدوران من $\mathbf{ijk}$ إلى $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$ هي:

$$(\mathbf{a})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \qquad (3)$$

يمكن اعتبار هذا الدوران مؤلف من دورانين: الأول حول oz بزاوية $45°$ والثاني

حول oy بزاوية θ معطاة بالعلاقة:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

للقارئ أن يتأكد من أن حاصل ضرب مصفوفة الدوران الأول بمصفوفة الدوران الثاني سيعطي (a) المذكورة أعلاه.

بالطبع يمكن الحصول على **I** من (a) (لو عرفناها مسبقا) من (8-35) بوضع:

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}\ a_{lj}\ I_{kl}$$

جـ- أخيراً: نحسب ممتد عطالة المكعب بالنسبة لمنظومة محاور مبدؤها مركز كتلته ومحاورها توازي أضلاعه. فنستخدم نظرية المحاور المتوازية ونكتب:

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}_{cm} + m(\mathbf{R}^2\mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R}) \qquad (4)$$

أو

$$\mathbf{I}_{cm} = \mathbf{I}_o - m(\mathbf{R}^2\mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R})$$

حيث **R** متجه من o إلى مركز الكتلة، أي أن:

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ومنه:

$$\mathbf{R}\mathbf{R} = \frac{a^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

بالتعويض في (4) نجد:

$$\mathbf{I}_{cm} = \frac{m\,a^2}{6}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (5)$$

نستدل من كون $\mathbf{I}$ قطرياً أن المحاور ox' و oy' و oz' التي اخترناها هي محاور أساسية، كما أن كون القيم المميزة الثلاثة متساوية يعني أن المكعب متناظر كروياً بالنسبة لمركز كتلته. أي أن المكعب هو كرة ! بالطبع إن هذا يعني أنه لا يمكن الحكم على الشكل الهندسي لجسم صلب من ممتد عطالته فقط في حالة كون هذا الممتد ثابتاً، لأن المعلومات الناتجة عنه غير كافية في هذه الحالة.

8 - 9 الطاقة الحركية لجسم صلب ومخروط العطالة الدوراني

نعتبر جسماً صلباً يدور حول نقطة ثابتة c بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega}$ ونكتب طاقته الحركية:

$$\begin{aligned}
T &= \sum \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i\, (\omega \times \mathbf{r}_i\,)^2 \\
&= \sum \frac{1}{2} m_i\, (\omega \times \mathbf{r}_i\,) \bullet (\omega \times \mathbf{r}_i\,) \\
&= \sum \frac{1}{2} m_i\, \omega \bullet [\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i\,)]
\end{aligned}$$

أي أن:

$$T = \frac{1}{2}\omega \bullet \mathbf{L} = \frac{1}{2}\,\omega \bullet \mathbf{I} \bullet \omega \qquad (53-8)$$

فإذا كان $\mathbf{I}$ معطى بالعلاقة (8-39) و $\boldsymbol{\omega}$ محدد بمركباته ω_x و ω_y و ω_z لوجدنا:

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2} I_{xx}\,\omega_{xx}^2 + \frac{1}{2} I_{yy}\omega_{yy}^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\omega_{zz}^2 + \\
I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x
\end{aligned} \qquad (54-8)$$

نلاحظ من (8-54) أنه من أجل طاقة حركية ثابتة ما فإن $\boldsymbol{\omega}$ تتغير بحيث تبقى هذه العلاقة محققة. فإذا كتبنا $\boldsymbol{\omega}$ بالشكل:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\alpha\, \mathbf{i} + \cos\beta\, \mathbf{j} + \cos\gamma\, \mathbf{k}) \qquad (55-8)$$

لأصبحت T معطاة بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (56-8)$$

حيث وضعنا:

$$\begin{aligned} I = {} & I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + \\ & 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \end{aligned} \qquad (57-8)$$

فإذا عرّفنا المتجه:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\sqrt{I}}(\cos\alpha\, \mathbf{i} + \cos\beta\, \mathbf{j} + \cos\gamma\, \mathbf{k}) \equiv \rho_x \mathbf{i} + \rho_y \mathbf{j} + \rho_z \mathbf{k} \qquad (58-8)$$

وعوضنا في (57-8) لوجدنا:

$$\begin{aligned} & I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2I_{xy}\rho_x\rho_y \\ & + 2I_{yz}\rho_y\rho_z + 2I_{xy}\rho_x\rho_y + 2I_{zx}\rho_z\rho_x = 0 \end{aligned} \qquad (59-8)$$

نلاحظ أن المعادلة (59-8) تمثل معادلة مجسم قطع ناقص *(ellipsoid)* في الفضاء يدعى هذا المجسم **مجسم قطع العطالة** *(ellipsoid of inertia* أو *momental ellipsoid)*.

من الواضح أنه إذا إنتقلنا إلى منظومة المحاور الأساسية لمتد العطالة لأصبحت معادلة مجسم قطع العطالة على الشكل:

$$I_1\rho_1^2 + I_2\rho_2^2 + I_3\rho_3^2 = 1 \qquad (60-8)$$

حيث تدل ρ_1 وρ_2 وρ_3 على الإحداثيات في المحاور الجديدة.

نلاحظ من (60-8) أنه إذا كانت هناك قيمتان مميزتان متساويتان لمتد العطالة لأصبحت معادلة المخروط على الشكل:

$$I_1(\rho_1^2+\rho_2^2)+I_3\rho_3^2=1 \tag{61-8}$$

هذا يظهر بوضوح تناظر الجسم حول المحور الثالث. أما إذا كانت القيم الثلاث متساوية لأصبحت معادلته مكافئة لمعادلة كرة .

8 - 10 الحركة العامة للأجسام الصلبة

توصف الحركة العامة لجسم صلب في الفضاء بقوانين نيوتن في الحركة :

$$\mathbf{F}_T=\frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt} \tag{62-8}$$

$$\tau_T=\frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{63-8}$$

$$\mathbf{P}_{c.m.}=M\,\mathbf{v}_{c.m.} \tag{64-8}$$

$$\mathbf{L}=\mathbf{I}\bullet\omega \tag{65-8}$$

تصف المعادلتان (8-62) و(8-64) الحركة الإنتقالية لنقطة واحدة من الجسم، هي مركز كتلته، بينما تصف(8-63) و(8-65) الحركة الدورانية لجسم حول نقطة مناسبة.

من الواضح أن هناك تشابهاً بين هاتين المجموعتين من المعادلات إلاّ أن هناك فروقاً أساسية أهمها أنM في (8-64) هي كمية عددية، لذا فإن$\mathbf{P}_{c.m}$ توازي $\mathbf{v}_{c.m}$ دوماً. أما $\mathbf{I}$ في (8-65) فتمثل ممتد العطالة للجسم الصلب وتطبيقه على$\boldsymbol{\omega}$ لايعطي متجهاً موازياً لهذا الأخير بالضرورة. ولذلك فإن $\mathbf{L}$ لايوازي$\boldsymbol{\omega}$ دائماً.

من جهة أخرى، فإن كونM كمية عددية يعني أنها لن تتغير ولن تتأثر بحركة الجسم، أما $\mathbf{I}$ فإن له مركبات منسوبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة، وعندما يتحرك الجسم الصلب تتغير قيم هذه المركبات مما يجعل كتابة قانون نيوتن الثاني بشكله (8-63) ووضع $\mathbf{L}=\mathbf{I}\bullet\boldsymbol{\omega}$ غير مناسب في هذا المقام لكون كل من $\mathbf{I}$ و$\boldsymbol{\omega}$ متغيراً مع الزمن. لذلك فإنه من الأفضل البحث عن طريقة أكثر ملائمة لصياغة (8-63) بحيث تبقى مركبات $\mathbf{I}$ ثابتة مع مرور الزمن مما يجعل إمكانية حل هذه المعادلة أكثر واقعية، وهذا ما نقوم به في الفقرة التالية .

8 - 11 معادلات أولر *(Euler's Equations)*

ذكرنا في الفقرة السابقة أنه عندما يدور جسم صلب فإن مركبات ممتد العطالة **I** بالنسبة لمنظومة محاور إحداثية ثابتة في الفضاء *OXYZ*، التي نكتب المعادلات الأربع من (8-62) إلى (8-65) أعلاه بالنسبة لها دوماً، تتغير مع حركة الجسم. لذلك سنربط بالجسم منظومة محاور إحداثية *oxyz*، لها نفس مبدأ المنظومة الثابتة وهذا يؤول بنا إلى ما وجدناه في الفصل السابع عندما درسنا كيفية تغير قوانين نيوتن عند الإنتقال إلى منظومة محاور دوارة، حيث نعالج في هذه الفقرة الصيغة التى ينتهي إليها قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية عن دوران المحاور.

فإذا كان **L** هو الزخم الزاوي للجسم الصلب بالنسبة لـ *OXYZ*، عندئذ يكون:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

و

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \bullet \omega$$

حيث ω السرعة الزاوية التي يدور بها الجسم حول *o*، كما يدل الرمز d/dt على أن الإشتقاق يتم بالنسبة لمنظومة المحاور الثابتة.

بالإستفادة من العلاقة (7-21) نجد:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{L}} + \omega \times \mathbf{L} \qquad (66-8)$$

حيث يدل الرمز $\dot{\mathbf{L}}$ على أن مشتق **L** هو بالنسبة لمنظومة المحاور المتحركة مع الجسم الصلب، لذلك يكون:

$$\tau = \dot{\mathbf{L}} + \omega \times \mathbf{L} \qquad (67-8)$$

باختيار منظومة **محاور الجسم** *(Body-Fixed axes)* المتحركة لتنطبق على المحاور الأساسية له، وهذا منطقي تماماً طالما أننا سنربط بالجسم منظومة محاور،

فالأجدر أن نختار تلك التي تجعل الحسابات والمعادلات أيسر وأسهل للحل والمحاور الأساسية هي أفضل إختيار. من ثم نكتب:

$$\mathbf{I} = I_x\,\mathbf{i}\mathbf{i} + I_y\,\mathbf{j}\mathbf{j} + I_z\,\mathbf{k}\mathbf{k} \qquad (68-8)$$

و

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \qquad (69-8)$$

ومنه

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\bullet\boldsymbol{\omega} = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\,\omega_y\mathbf{j} + I_z\,\omega_z\mathbf{k} \qquad (70-8)$$

و

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{I}\bullet\boldsymbol{\omega} = I_x\dot{\omega}_x\mathbf{i} + I_y\,\dot{\omega}_y\mathbf{j} + I_z\,\dot{\omega}_z\mathbf{k} \qquad (71-8)$$

حيث نلاحظ أن مشتقات I_x و I_y و I_z تساوي الصفر بالنسبة لمنظومة المحاور المتحركة مع الجسم $oxyz$.

من جهة أخرى فإن:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L} = (I_z - I_z)\omega_z\omega_y\,\mathbf{i} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z\,\mathbf{j} + (I_y - I_x)\omega_y\omega_x\,\mathbf{k} \qquad (72-8)$$

لذلك نجد أن مركبات العلاقة (8-67) على المحاور ox و oy و oz (محاور الجسم) هي:

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_z\omega_y = \tau_x \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = \tau_y \\ I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_y\omega_x = \tau_z \end{cases} \qquad (73-8)$$

تدعى العلاقات(8-73) **معادلات أولر** *(Euler's Equations)* وتستعمل لدراسة تغيرات السرعة الزاوية للجسم الصلب بالنسبة لمحاور الجسم، إذا عرفنا مركبات العزوم الخارجية المؤثرة على هذا الجسم وعناصر ممتد عطالته على هذه المحاور.

ينبغي ألاّ ننسى أن الجسم يتحرك ككل في الفضاء، مما يعني أن محاور الجسم تتحرك بشكل ما ولايمكن الإستفادة من معادلات أولر لمعرفة منحى الجسم في الفضاء.

بذلك نكون قد بدلنا المسألة المطروحة بين أيدينا، وهي تحديد موضع الجسم واتجاهاته في الفضاء في كل لحظة، بمسألة أخرى تتعلق بتحديد سرعته الزاوية وزخمه الزاوي بالنسبة لمحاور تدور معه بشكل مستمر. بالطبع فإن الحل النهائي المنشود في الميكانيك هو حل المسألة الأولى الأساس، إلاّ أننا حالياً ندرس المتغيرات التحريكية للجسم الصلب من وجهة نظر مراقب يدور معه ومرتبط بمحاور الجسم.

ننوه هنا إلى أنه إذا دار الجسم بحيث بقيت إحدى نقاطه ثابتة في مكانها فإننا نعتبرها مبدأً لمحاور الجسم ونحسب مركبات كل من $\mathbf{I}$ و$\boldsymbol{\omega}$ و$\boldsymbol{\tau}$ بالنسبة لها. أما إذا كانت حركة الجسم غير مقيدة على الإطلاق، عندئذ يفضل إتخاذ مركز الكتلة مبدأ هذه المحاور وحساب مركبات الكميات السابقة بالنسبة لها.

8 - 12 دوران جسم صلب بسرعة زاوية ثابتة

نلاحظ من معادلات أولر أنه لايمكن لجسم صلب أن يدور بسرعة زاوية ثابتة حول محور دون تطبيق عزم خارجي على هذا الجسم إلاّ إذا كان هذا المحور محوراً أساساً لأنه إذا كان $\boldsymbol{\omega}$ ثابتاً عندئذ يكون $d\boldsymbol{\omega}/dt = 0$ أي أن $\dot{\mathbf{L}} = 0$، لذا تؤول (8-67) إلى:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \bullet \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}$$

فإذا أردنا أن تكون $\boldsymbol{\tau}=0$ يجب أن يكون $\boldsymbol{\omega}$ موازياً لـ $\mathbf{I}\bullet\boldsymbol{\omega}$ وهذا لايتم إلا إذا كان $\boldsymbol{\omega}$ موازياً لأحد المحاور الأساس للجسم الصلب.

لذلك إذا أردنا جعل دولاب مثلاً يدور بشكل حر بدون تطبيق أي قوة أو عزم خارجي عليه، وجب علينا جعله في حالة إتزان تحريكي، كما يجب أن يكون محور الدوران منطبقا على أحد محاوره الأساسية، كما هو معروف لأي ميكانيكي جيد.

لا ننسى أن نشير إلى أن التعليق السابق يخص جسما صلبا ليس له محور تناظر. أما إذا كان للجسم محور تناظر فسندرس في فقرة لاحقة بشكل واف.

8 - 13 الطاقة الحركية ومعادلات أولر

لنضرب طرفي العلاقة (8-67) عددياً بـ $\boldsymbol{\omega}$ فنجد:

$$\boldsymbol{\omega} \bullet \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \bullet (\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) \qquad (74-8)$$

لكن:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

كما أن:

$$\boldsymbol{\omega} \bullet (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) = 0$$

ونظراً لأن **I** ممتد متناظر لذا يكون:

$$\boldsymbol{\omega} \bullet \mathbf{L} \bullet \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \bullet \mathbf{I} \bullet \boldsymbol{\omega} \qquad (75-8)$$

للقارئ أن يبرهن صحة العلاقة السابقة من أجل أي ممتد متناظر **T** وأي متجهين **A** و **B**. من ثم تصبح المعادلة (8-74) على الشكل:

$$\boldsymbol{\omega} \bullet \boldsymbol{\tau} = [\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \bullet \mathbf{I} \bullet \boldsymbol{\omega}]^{\bullet}$$

حيث نلاحظ أن عملية الإشتقاق للقوس كله تتم بالنسبة لمحاور الجسم التي يكون **I** ثابتاً بالنسبة لها.

بحسب(8-53) فإن ماداخل القوسين في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة هو الطاقة الحركية للجسم الصلب، أي أن المعادلة (8-53) تصير:

$$\boldsymbol{\omega} \bullet \boldsymbol{\tau} = \frac{dT}{dt} = \dot{T} \qquad (76-8)$$

حيث وضَّحنا صراحة أن اشتقاق T هو نفسه بالنسبة لمحاور الفضاء الثابتة أو بالنسبة لمحاور الجسم لأن T كمية عددية.

9 - 14 الحل العام لمعادلات أولر لجسم متناظر غير خاضع لعزوم خارجية

إذا تحرك جسم صلب في الفضاء بحيث كانت محصلة العزوم الخارجية المؤثرة عليه مساوية للصفر، عندئذ نقول إنه يدور بشكل حر. أبسط مثل على ذلك أن نقذف كتاباً في الهواء نحو الأعلى، أو نراقب لاعب السيرك الماهر الذى يترك عدة أطباق تدورعلى نهايات قضبان رفيعة متمركزة عند مركز كتلة كل طبق، حيث تكون القوى المؤثرة على الجسم في كل من الحالتين السابقتين مارة من نقطة دورانه أو من مركز كتلته. بالتالي فعزمها حول هذه النقطة أو المركز معدوم، وتصبح معادلات أولر على الشكل:

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_z\omega_y = 0 \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = 0 \\ I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_y\omega_x = 0 \end{cases} \qquad (77-8)$$

فإذا افترضنا أن الجسم الصلب متناظر حول المحور oz، عندئذ يكون:

$$I_x = I_y$$

وتصير المعادلة الثالثة من (8-77) على النحو:

$$I_z\,\dot{\omega}_z = 0$$

أي أن:

$$\omega_z = \text{ثابت}$$

كما تعطي المعادلتان الأولى والثانية من (8-77):

$$\dot{\omega}_x + [\frac{(I_z - I_x)}{I_x}\omega_x]\omega_y = 0$$

و

$$\dot{\omega}_y - [\frac{(I_z - I_x)}{I_x}\omega_z]\omega_x = 0$$

بفرض أن $I_z > I_x$ ووضع

$$\Omega = \frac{(I_z - I_x)}{I_x}\omega_z \qquad (78-8)$$

نجد:

$$\dot{\omega}_x + \Omega\,\omega_y = 0$$

و

$$\dot{\omega}_y - \Omega\,\omega_x = 0$$

باشتقاق الأولى والإستفادة من الثانية نجد:

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2\omega_x = 0$$

ومنه:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_0 \cos(\Omega\, t + \phi) \\ \omega_y = \omega_0 \sin(\Omega\, t + \phi) \end{cases} \qquad (79-8)$$

أي أن:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2 = \text{ثابت} \qquad (80-8)$$

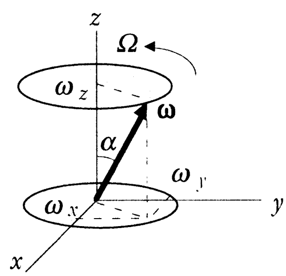
أي تتغير ω_x و ω_y بشكل جبيبي مع الزمن بسرعة زاوية Ω وبينهما فرق في الطور بمقدار $\pi/2$. فمركبة $\boldsymbol{\omega}$ على المستوى xy ترسم دائرة نصف قطرها ω_0 بسرعة زاوية Ω كما في الشكل (8-6)، وتكون جهة دوران هذه المركبة باتجاه **k** إذا كانت $\Omega > 0$، أي إذا كان $I_z > I_x$، أو معاكسة لـ **k** إذا كان $\Omega < 0$ أي $I_z < I_x$، في كلتا الحالتين يكون متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ هو:

$$\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2=\omega_0^2=\text{ثابت} \qquad (81-8)$$

فيرسم $\boldsymbol{\omega}$ يرسم مخروطاً دورانياً بالنسبة لمحاور الجسم تعطى نصف زاويته الرأسية α بالعلاقة:

$$\tan\alpha=\frac{\omega_0}{\omega_z} \qquad (82-8)$$

يدعى هذا المخروط **مخروط الجسم** *(body cone)*.



الشكل (6-8)

أما حركة الجسم بالنسبة لمحاور الفضاء الثابتة، فنجدها بتحديد موضع $\boldsymbol{\omega}$ بالنسبة لإتجاه ثابت في الفضاء.

فإذا لاحظنا أن $\boldsymbol{\tau}=0$ وأن $\boldsymbol{\tau}=d\mathbf{L}/dt$ نستنتج:

$$\mathbf{L}=\text{ثابت} \qquad (83-8)$$

فالزخم الزاوي للجسم الصلب ثابتٌ قيمةً واتجاهاً في الفضاء دوماً، لذلك سنحدد موضع $\boldsymbol{\omega}$ بالنسبة له. فنلاحظ أن الزاوية بينهما β تعطى بالعلاقة:

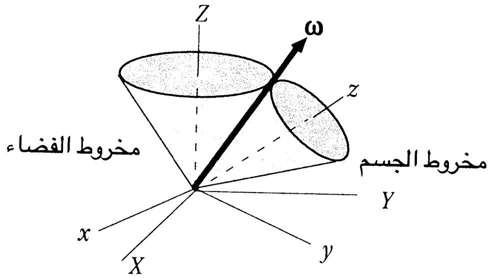
$$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{\omega}\bullet\mathbf{L}}{\omega L}=\frac{\boldsymbol{\omega}\bullet\mathbf{I}\bullet\boldsymbol{\omega}}{\omega L}=\frac{2T}{\omega} \qquad (84-8)$$

لكن $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{L}$ ثابتان بالقيمة، كما أن T ثابتة بحسب العلاقة (76-8) حيث أن:

$$\boldsymbol{\omega} \bullet \boldsymbol{\tau} = \frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow T = \text{ثابت}$$

من ثم فإن β ثابتة أيضاً مما يعني أن $\boldsymbol{\omega}$ يرسم مخروطاً حول $\mathbf{L}$ نصف زاويته الرأسية هي β. يدعى هذا المخروط **مخروط الفضاء** *(space cone)*.

هناك إذاً مخروطان يرسمهما محور الدوران $\boldsymbol{\omega}$، أحدهما ثابت في الفضاء محوره $\mathbf{L}$، وثانيهما دوّار محوره هو محور تناظر الجسم oZ بحيث أن $\boldsymbol{\omega}$ هو خط تماس هذين المخروطين دوماً، كما هو موضح في الشكل (8-7).



الشكل (8-7)

يمكن معرفة فيما إذا كان مخروط الجسم يتدحرج داخل أو خارج مخروط الفضاء بمقارنة الزاوية التي يصنعها $\boldsymbol{\omega}$ مع محور تناظر الجسم التي رمزنا لها بـ α مع تلك التي يصنعها متجه الزخم الزاوي الثابت $\mathbf{L}$ مع هذا المحور التي سنرمز لها بـ θ.

لذلك نختار منظومة محاور الفضاء بحيث ينطبق فيها $\mathbf{L}$ على oZ، بينما نختار منظومة محاور الجسم بحيث ينطبق فيها oz على محور تناظر الجسم ويكون ox عمودياً على $\mathbf{L}$ لأن ox و oy هما أي محورين واقعين في مستو عمودي على oz لأن الجسم متناظر حول محور. فإذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{L}$ و oz عندئذ يكون:

$$L_x = I_x \omega_x = 0$$

و

$$L_y = I_y \omega_y = L \sin\theta$$

و

$$L_z = I_z \omega_z = L\cos\theta$$

بالتالي نجد أن:

$$\frac{L_y}{L_z} = \tan\theta = \frac{I_y}{I_z}\frac{\omega_y}{\omega_z}$$

لكن

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin\alpha\,\mathbf{j} + \omega\cos\alpha\,\mathbf{k}$$

لذلك يكون:

$$\frac{\omega_y}{\omega_z} = \tan\alpha$$

أي أن:

$$\tan\theta = \frac{I_y}{I_z}\tan\alpha \qquad (85-8)$$

فإذا كان $I_y > I_z$ عندئذ يكون $\alpha < \theta$ أي أن مخروط الجسم يقع خارج مخروط الفضاء ويتدحرج على سطحه الخارجي. أما إذا كان $I_y < I_z$ فإن $\alpha > \theta$ أي أن مخروط الجسم يحتوي مخروط الفضاء ويتدحرج حوله. في كلتا الحالتين فإن خط تماس المخروطين يبقى متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$. (انظر الشكل (8-7)).

9 - 15 الدوران الحر لجسم صلب غير متناظر والإتزان الديناميكي

سنعتبر الآن حل معادلات أولر لجسم صلب غير متناظر يدور بشكل حر، ونفترض أن الجسم كان يدور مبدئياً حول أحد محاوره الأساس ثم اهتز فجأة ليدور بشكل ما ليصير لمتجه سرعته الزاوية مركبات حول محاوره الأساس الثلاثة. سندرس شرط استقرار الدوران حول المحور الأساس الذي كان يدور حوله أصلاً، بمعنى أن سرعته الزاوية حول المحورين الآخرين ستبقى صغيرة ومحددة.

فإذا افترضنا أن متجه السرعة الزاوية للجسم كان معطى مبدئيا بالعلاقة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i}$$

ثم صار فجأة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} + \beta \mathbf{k}$$

حيث نعتبر المركبتين α و β صغيرتين لدرجة يمكن إهمال α^2 و β^2 بالمقارنة مع ω_x.

بكتابة أولى معادلات أولر نجد:

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_z \omega_y = 0$$

ولكن $\omega_y = \alpha$ و $\omega_z = \beta$، وبإهمال الحد $\alpha\beta$ نجد أن المعادلة السابقة تعطي:

$$I_x \dot{\omega}_x = 0$$

أي أن:

$$\omega_x = \text{ثابت}$$

أما معادلتي أولر الثانية والثالثة فتعطيان:

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x \omega_z = 0$$
$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_y \omega_x = 0$$

بتعويض ω_y و ω_z بقيمتيهما وملاحظة أن ω_x ثابت، نجد بإشتقاق الأولى والاستفادة من الثانية أن:

$$\ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha = 0$$

حيث وضعنا:

$$\Omega^2 = \frac{(I_x - I_z)(I_x - I_y)}{I_y I_z} \qquad (86-8)$$

فإذا افترضنا أن متجه السرعة الزاوية للجسم كان معطى مبدئيا بالعلاقة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i}$$

ثم صار فجأة:

$$\omega = \omega_x \mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} + \beta \mathbf{k}$$

حيث نعتبر المركبتين α وβ صغيرتين لدرجة يمكن إهمال α^2 وβ^2 بالمقارنة مع ω_x.
بكتابة أولى معادلات أولر نجد:

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_z \omega_y = 0$$

ولكن $\omega_y = \alpha$ و$\omega_z = \beta$، وبإهمال الحد $\alpha\beta$ نجد أن المعادلة السابقة تعطي:

$$I_x \dot{\omega}_x = 0$$

أي أن:

$$\omega_x = \text{ثابت}$$

أما معادلتي أولر الثانية والثالثة فتعطيان:

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x \omega_z = 0$$
$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_y \omega_x = 0$$

بتعويض ω_y وω_z بقيمتيهما وملاحظة أن ω_x ثابت، نجد بإشتقاق الأولى والاستفادة من الثانية أن:

$$\ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha = 0$$

حيث وضعنا:

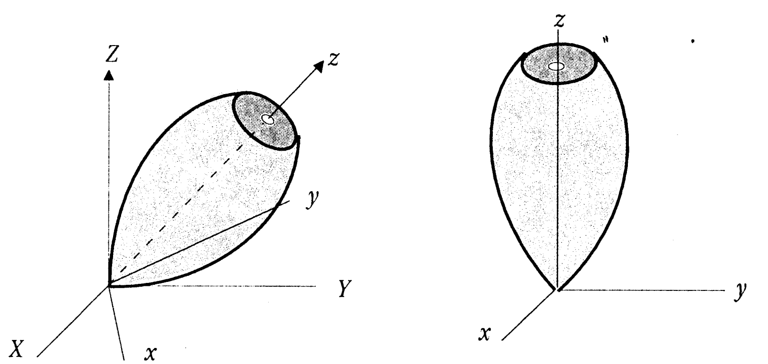
$$\Omega^2 = \frac{(I_x - I_z)(I_x - I_y)}{I_y I_z} \qquad (86-8)$$

فإذا أردنا أن تبقى αمحدودة، وهذا ما نسميه عادة بالإستقرار(*stability*)، عندئذ يجب أن يكون $\Omega^2>0$، أي أنه إما أن يكون $I_x>I_y$ و$I_x>I_z$ أو أن يكون $I_x<I_y$ و $I_x<I_y$.

الآن: حتى يدور جسم صلب حول محور بشكل مستقر، يجب أن يكون هذا المحور محوراً أساساً، كما يجب أن يكون عزم عطالة الجسم حول هذا المحور أكبر أو أصغر عزم عطالة له بالمقارنة مع المحورين الأساسيين الآخرين. هذا ما يدعى **بالإتزان الديناميكي**.

8-16 وصف دوران الجسم الصلب في الفضاء - زوايا أولر(*Euler's angles*)

لقد درسنا في الفقرات السابقة كيف يتغير متجه السرعة الزاوية والزخم الزاوي لجسم صلب بالنسبة لمحاور الجسم دون أن نعير انتباهاً لوضعية الجسم في الفضاء. لكن مهمة الميكانيك الأساسية دوماً هي تحديد موضع وسرعة وتسارع أي جسم مادي بالنسبة لمحاور فضائية ثابتة. لذلك سنقوم في هذه الفقرة بوصف منحى جسم صلب يتحرك بشكل دوراني في الفضاء بوساطة ثلاثة زوايا تنقل منظومة المحاور الإحداثية من محاور الفضاء الثابتة (التي نفترض أن محاور الجسم كانت منطبقة عليها في لحظة ما) إلى محاور الجسم في أي لحظة زمنية تالية. ويمثل الشكل (8-8) حالة الجسم والمحاور الثابتة والمتحركة لحظة البداية وفي أي زمن آخر.



الجسم في اللحظة t ‏ ‏ ‏ الجسم في اللحظة $t = 0$

الشكل (8-8)

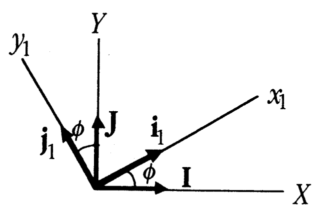
نقوم فيما يلي بالانتقال من المنظومة الثابتة (الوضع الإبتدائي للجسم) إلى منظومة محاور الجسم المتحركة (الوضع الآني للجسم) بوساطة ثلاثة دورانات متعاقبة على النحو الآتي:

أ ـ ندور منظومة المحاور حول oZ بزاوية ϕ فنحصل على منظومة جديدة $x_1y_1z_1$ ينطبق فيها oz_1 على oZ، بينما يصنع ox_1 زاوية ϕ مع oX، كما في الشكل (8-9 أ) بحيث نكتب السرعة الزاوية لهذا الدوران الأول على النحو:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}\mathbf{k}_1 = \dot{\phi}\mathbf{K} \qquad (87-8)$$

كما نكتب:

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \cos\phi\, \mathbf{i}_1 - \sin\phi\, \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{J} = \sin\phi\, \mathbf{i}_1 + \cos\phi\, \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 \end{cases} \qquad (88-8)$$



الشكل (8-9 أ)

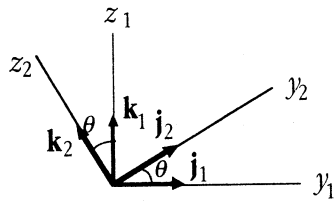
بـ ندور المحاور الجديدة $x_1y_1z_1$ حول ox_1 زاوية θ فنحصل على منظومة أخرى $ox_2y_2z_2$ ينطبق فيها ox_1 على ox_1 بينما يصنع oz_1 زاوية θ مع oz_2، أو مع oZ الأصلي (الشاقولي الثابت في الفضاء)، كما في الشكل (8-9 ب).

من ثم نكتب متجه السرعة الزاوية للدوران الجديد بالشكل:

$$\dot{\theta} = \theta\, \mathbf{i}_1 = \dot{\theta}\, \mathbf{i}_2 \qquad (89-8)$$

كما نكتب من الشكل (8-9 ب) أيضاً:

$$(90-8)\quad \begin{cases} \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{j}_1 = \cos\theta\, \mathbf{j}_2 - \sin\theta\, \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_1 = \sin\theta\, \mathbf{j}_2 + \cos\theta\, \mathbf{k}_2 \end{cases}$$



الشكل (8-9 ب)

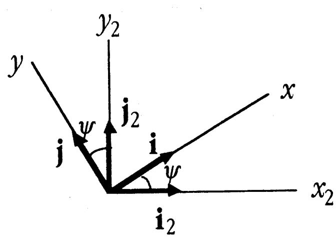
جـ- أخيرا ندور المحاور $x_2y_2z_2$ حول oz_2 بزاوية ψ لنصل إلى محاور الجسم xyz، كما في الشكل (8-9 جـ) بحيث ينطبق oz_2 على oz (الذى نختاره محوراً أساساً من محاور الجسم، وإن كان الجسم متناظراً حول محور ما فنختار oz ليكون ذلك المحور)، كما يصنع ox زاوية ψ مع ox_2.

من ثم نكتب السرعة الزاوية للدوران الأخير بالشكل:

$$(91-8)\quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\psi}\, \mathbf{k}_2 = \dot{\psi}\, \mathbf{k}_2$$

كما نكتب من الشكل (8-9 جـ):

$$(92-8)\quad \begin{cases} \mathbf{i}_2 = \cos\psi\, \mathbf{i} - \sin\psi\, \mathbf{j} \\ \mathbf{j}_2 = \sin\psi\, \mathbf{i} + \cos\psi\, \mathbf{j} \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \end{cases}$$



الشكل (8-9) جـ)

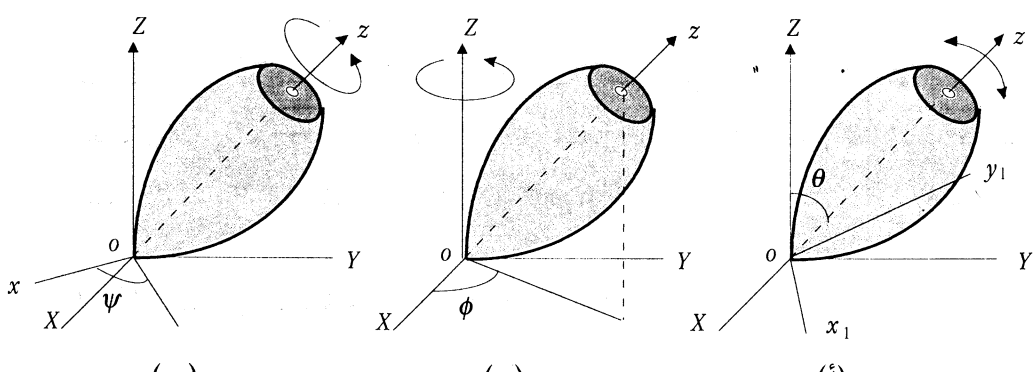
بهذا نكون قد انتقلنا من منظومة الفضاء XYZ لمنظومة الجسم xyz التى يمكن معرفة اتجاهاتها بالنسبة للمنظومة الأولى بمعرفة تغيرات ϕ و θ و ψ في كل لحظة.

لابأس من الإشارة إلى أن تعريف هذه الزوايا ليس عاماً بل قد يختلف من كتاب لآخر وقد اتبعنا في الكتاب الحالي مصطلح ماريون (انظر المراجع).

تكون السرعة الزاوية الكلية للجسم الصلب هي مجموع السرع الزاوية للدورانات الثلاثة، أي أن:

$$\omega = \dot{\phi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{i}_1 + \dot{\psi}\mathbf{k} \qquad (93-8)$$

نلاحظ من معادلة متجه السرعة الزاوية أنه إذا تغيرت θ فقط مع بقاء ϕ و ψ ثابتتين فإن الجسم يدور حول المحور ox_1 (أو **خط العقد** *Line of nodes*) بحيث يتغير بعد المحور oz المتعلق بالجسم عن المحور oZ (الشاقولي الثابت)، كما في الشكل (8-10أ). أما عندما تتغير ϕ فقط مع بقاء θ و ψ ثابتتين فإن الجسم يكون مائلاً عن الشاقول ويدور حوله بسرعة زاوية $\dot{\phi}$ بدون أن يفتل حول نفسه أو يتأرجح خلال دورانه، كما في الشكل (8-10ب). أخيراً عندما تتغير ψ فقط مع بقاء θ و ϕ ثابتتين فإن الجسم يفتل حول محوره oz بدون أن يدور حول الشاقول oZ أو يتأرجح خلال فتله، كما في الشكل (8-10جـ) .



(جـ) (ب) (أ)

الشكل (8-10)

لنكتب الآن دالة لاغرانج للجسم الصلب بالتعبير عن طاقته الحركية مستفيدين من

المعادلة (8-53) ووصف $\boldsymbol{\omega}$ بدلالة مركباته على المحاور الأساس المرتبطة بالجسم $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$. فنكتب (8-93) مرة أخرى بعد الاستفادة من (8-88) و(8-90) و(8-92):

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\,\sin\theta\,\sin\psi \\ \omega_y = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\,\sin\theta\cos\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{cases} \qquad (95-8)$$

وتصبح الطاقة الحركية للجسم عندئذ معطاة بالعلاقة :

$$T = \frac{1}{2} I_x\,\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y\,\omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z\,\omega_z^2 \qquad (96-8)$$

حيث نلاحظ أنها ستكون بشكل عام دالة (تابعاً) معقدة للزوايا θ و ϕ و ψ ومشتقاتها كما أن المحاور oZ و ox_1 و oz ليست متعامدة، أي أن الحدود الحاوية على الجداءات المختلطة $\dot{\theta}\dot{\psi}$ و $\dot{\psi}\dot{\phi}$ و $\dot{\theta}\dot{\phi}$ لن تختفي في هذه الحال.

أما إذا كان للجسم محور تناظر (الذي نختاره ليكون oz)، عندئذ يكون $I_x=I_y$ وتصير T معطاة بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{2} I_x\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z\,(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 \qquad (97-8)$$

بعد الحصول على الطاقة الحركية يمكن كتابة طاقة الوضع $V=V(\theta,\phi,\psi)$ أو القوى العامة Q_θ و Q_ϕ و Q_ψ، وهي العزوم حول المحاور oZ و ox_1 و oz، على الترتيب، بحسب المسألة المدروسة، ثم نكتب دالة لاغرانج اللازمة لدراسة حركة الجسم في الفضاء.

8 - 17 البلبل المتناظر *(The Symmetric Top)*

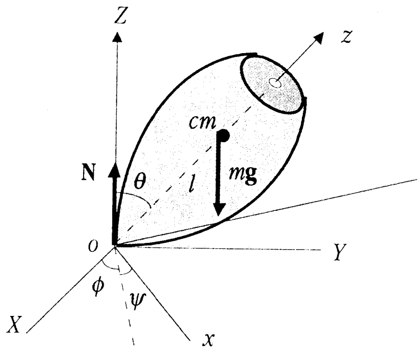
سندرس في هذه الفقرة دوران البلبل المتناظر (أو الدوّامة) المؤلف من جسم متناظر حول المحور oz (أي أن $I_x=I_y$) حول نقطة ثابتة o تقع على محوره ويقع مركز كتلته C على بعد l من o، كما في الشكل (8-11). بذلك يخضع البلبل لقوتي الثقل $m\mathbf{g}$ ورد الفعل $\mathbf{N}$.

نلاحظ أن طاقة وضع البلبل هي:

$$V = m\,g\,z_{c.m.} = m\,g\,l\cos\theta \qquad (98-8)$$

بالتالي نكتب دالة لاغرنج من (8-97) و (8-98) على النحو:

$$L = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - m\,g\,l\cos\theta \qquad (99-8)$$



الشكل (8-11)

من الواضح أن L لايحوي ψ و ϕ، أي أنهما إحداثيان مهملان ونكتب:

$$p_\psi = \frac{dL}{d\dot{\psi}} = I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \text{ثابت} \qquad (100-8)$$

و

$$p_\phi = \frac{dL}{d\dot{\phi}} = I_x \dot{\phi}\ \sin^2\theta + I_z \cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_x \dot{\phi}\ \sin^2\theta + p_\psi \cos\theta \qquad (101-8)$$

بكتابة الطاقة الكلية نجد:

$$E = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + m\,g\,l\cos\theta \qquad (102-8)$$

لكن

$$\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = \frac{p_\psi}{I_z}$$

و

$$\dot{\phi}\sin\theta = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_x \sin\theta}$$

فيكون:

$$E = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + (\frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{I_x \sin\theta})^2) + \frac{P_\psi^2}{2I_z} + m\,g\,l\cos\theta \qquad (103-8)$$

أو:

$$E' = \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 +' V(\theta)' \qquad (104-8)$$

حيث:

$$E' = E - \frac{P_\psi^2}{2I_z} \qquad (105-8)$$

و:

$$' V(\theta)' = \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_x \sin^2\theta} + m\,g\,l\cos\theta \qquad (106-8)$$

نجد من المعادلة (104-8) :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_x}(E' -' V(\theta)'} \qquad (107-8)$$

ومنه:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' -' V(\theta)'}} = \sqrt{\frac{2}{I_x}}\,(t - t_0) \qquad (108-8)$$

بإيجاد θ يمكن إيجاد p_ψ و p_ϕ ثم ψ و ϕ، ونكون قد قمنا بحل المسألة كاملة.

1-17-8 مناقشة حركة البلبل بطريقة الطاقة

أ ـ $\omega_z=0$: البلبل لايفتل حول محور تناظره

نلاحظ مباشرة أن $p_\psi=I_z\omega_z=0$ وتصير المعادلة (103-8) على النحو:

$$E=\frac{1}{2}I_x\dot{\theta}^2+\frac{p_\phi^2}{2I_x\sin^2\theta}+m\,g\,l\cos\theta \qquad (108-8)$$

هذه المعادلة مطابقة لمعادلة البندول الكروي الذي درسناه سابقاً.

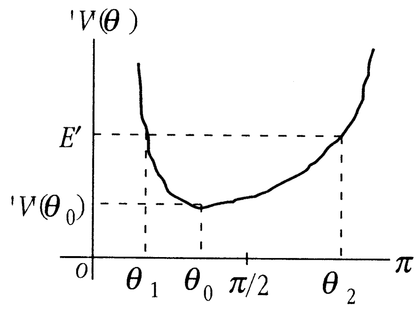
ب ـ $\omega_z\neq0$ البلبل يفتل حول محور تناظره

في هذه الحالة نعود للمعادلة (106-8) ونبحث عما إذا كان لـ$'V(\theta)'$ نهايات صغرى، فنكتب:

$$\frac{d'\,V(\theta)'}{d\theta}=-m\,g\,l\sin\theta+\frac{(p_\phi-p_\psi\cos\theta)(p_\psi-p_\phi\cos\theta)}{I_x\sin^3\theta} \qquad (109-8)$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن $d'\,V(\theta)'/d\theta>0$ عند $\theta=\pi$ وأن $d'\,V(\theta)'/d\theta<0$ عند $\theta=0$ لذا يجب أن يكون معدوماً عند قيمة ما لـ θ محصورة بين الصفر وπ معطاة بالعلاقة:

$$m\,g\,l\sin^4\theta_0+(p_\phi-p_\psi\cos\theta_0)(p_\psi-p_\phi\cos\theta_0)=0 \qquad (110-8)$$



الشكل (12-8)

يمكن التحقق من أن قيمة θ هذه أقل من $\pi/2$ بدراسة المشتق $d'V(\theta)'/d\theta$ عندما $\theta < \pi/2$ و $\theta > \pi/2$ فنجد أنه سالب في الحالة الأولى وموجب في الثانية مما يعني أن تغيرات $'V(\theta)'$ مع θ ستكون مشابهة لما هو موضح بالشكل (8-12).

نبدأ مناقشة الحركة بدراسة الإحتمالات التالية:

أولا: إذا كان $E' = 'V(\theta_0)'$ عندئذ تكون $\dot{\theta} = 0$ دائماً ويدور البلبل حول oZ (الشاقول الثابت) صانعاً معه زاوية ثابتة θ_0، وتعطى سرعته الزاوية خلال دورانه بالعلاقة:

$$\dot{\phi}_0 = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta_0}{I_x \sin^2\theta_0} \qquad (111-8)$$

لكن البلبل لايمكن أن يحقق الحركة السابقة إلا إذا كان فتله ω_z حول محوره سريعاً بدرجة كافية، لأن حل المعادلة (8-110) بالنسبة للمقدار $p_\phi - p_\psi \cos\theta_0$ يعطي:

$$p_\phi - p_\psi \cos\theta_0 = \frac{1}{2} I_x \frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m\,g\,l\,I_x \cos\theta_0}{I_z^2\,\omega_z^2}}\right] \qquad (112-8)$$

ونلاحظ أن هناك حلاً مقبولاً لهذه المعادلة طالما أن:

$$\frac{4m\,g\,l\,I_x \cos\theta_0}{I_z^2\,\omega_z^2} \le 1$$

أي أن:

$$\omega_z \ge \sqrt{\frac{4m\,g\,l\,I_x \cos\theta_0}{I_z^2}} \qquad (113-8)$$

فلايمكن للبلبل أن يدور صانعاً زاوية ثابتة مع الشاقول إذا كانت ω_z أصغر من قيمة معينة $(\omega)_{z\,min}$ هي:

$$(\omega_z)_{min} = \sqrt{\frac{4m\,g\,l\,I_x \cos\theta_0}{I_z^2}} \qquad (114-8)$$

أما إذا كانت $\omega_z > (\omega_z)_{min}$ عندئذ توجد قيمتان ممكنتان لـ $p_\phi - p_\psi \cos\theta_0$ فهناك سرعتان زاويتان ممكنتان للدوران حول oZ، $(\dot{\phi})_{max}$ و $(\dot{\phi})_{min}$ الموافقتان للإشارتين + و - في (112-8)، على الترتيب. يمكن إيجاد القيم التقريبية لهاتين السرعتين عندما يفتل البلبل بسرعة كبيرة حول محوره، أي عندما $\omega_z >> (\omega_z)_{min}$، حيث نلاحظ أن:

$$\frac{4m\,g\,l\,I_x \cos\theta_0}{I_z^2\,\omega_z^2} << 1$$

أي أن:

$$\left(1 - \frac{4m\,g\,l\,I_x \cos\theta_0}{I_z^2\,\omega_z^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4m\,g\,l\,I_x \cos\theta_0}{I_z^2\,\omega_z^2}\right)$$

لذلك نجد أن الإشارة الموجبة في (112-8) تعطي:

$$(\dot{\phi}_0)_{max} \approx \frac{I_z\,\omega_z}{\cos\theta_0} \qquad (115-8)$$

كما تعطي الإشارة السالبة:

$$(\dot{\phi}_0)_{min} \approx \frac{mgl}{I_z\,\omega_z} \qquad (116-8)$$

يمكن للعين المجردة مشاهدة البلبل وهو يدور بالسرعة الصغرى أما السرعة العالية فلا يمكن ملاحقتها. ونلاحظ أن $(\dot{\phi}_0)_{max}$ موجبة في كلا الحالتين، أي أن البلبل يدورحول الشاقول بالإتجاه الموجب، أي بإتجاه محور تناظره oz.

ثانياً: إذا كان $E' > V(\theta_0)'$ عندئذ نلاحظ من الشكل (12-8) أنه من أجل قيمة محددة لـ E' فإن هناك زاويتان θ_1 و θ_2 يصبح عندها $E' = V(\theta)'$ بالتالي تكون عندهما $\dot{\theta} = 0$، أي أن محور البلبل يتذبذب بين θ_1 و θ_2 اقتراباً وابتعاداً عن الشاقول خلال دورانه حوله (وفتله حول محوره طبعاً). يطلق على هذه الحركة

الإهتزازية إسم **تذبذب** *(nutations)* ونجد الزاويتين θ_1 وθ_2(زاويتي الدوران) بوضع $\dot{\theta}=0$ في (8-103) فنجد:

$$E' = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I_x \sin^2\theta} + m\,g\,l\cos\theta \qquad (117-8)$$

نلاحظ في كل الأحوال أن حركة البلبل تعتمد على E' و p_ϕ و p_ψ التي تتحدد جميعها من شروط البدء.

الآن: لو أمعنا النظر في حركة البلبل وراقبنا دورانه حول الشاقول للاحظنا أن هناك احتمال أن يتغير اتجاه دورانه بحسب إشارة سرعته الزاوية $\dot{\phi}$التي نجدها من العلاقة:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{I_x \sin^2\theta} \qquad (118-8)$$

فإذا افترضنا أن $|p_\psi| < |p_\phi|$ عندئذ نكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\psi\left(\dfrac{p_\phi}{p_\psi} - \cos\theta\right)}{I_x \sin^2\theta}$$

وبوضع:

$$\frac{p_\phi}{p_\psi} = \cos\theta_c \qquad (119-8)$$

تصير (8-118) على النحو:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\psi}{I_x \sin^2\theta}(\cos\theta_c - \cos\theta) = \frac{I_z\omega_z}{I_x \sin^2\theta}(\cos\theta_c - \cos\theta) \qquad (120-8)$$

نستنتج من المعادلة السابقة أنه إذا كانت $\theta > \theta_c$ فإن $\cos\theta < \cos\theta_c$ ويكون $\dot{\phi} > 0$،

أما إذا كانت $\theta < \theta_c$ فإن $\cos\theta > \cos\theta_c$ ويكون $\dot{\phi} < 0$.

أي أنه إذا تغيرت الزاوية θ التي يصنعها محور تناظر الجسم مع الشاقول بحيث تكون في مرحلة ما أكبر من زاوية ثابتة θ_c (محددة من شروط البدء) ثم تصير أصغر منها فإن السرعة الزاوية لدوران البلبل حول الشاقول تغير اتجاهها بالتأكيد وتصبح إشارة $\dot{\phi}$ مغايرة لإشارة ω_z قطعاً.

نحدد الآن فيما إذا كانت θ_c أكبر أو أصغر من الزاوية θ_2 (زاوية الدوران الكبرى)، فنلاحظ من (8-108) أن:

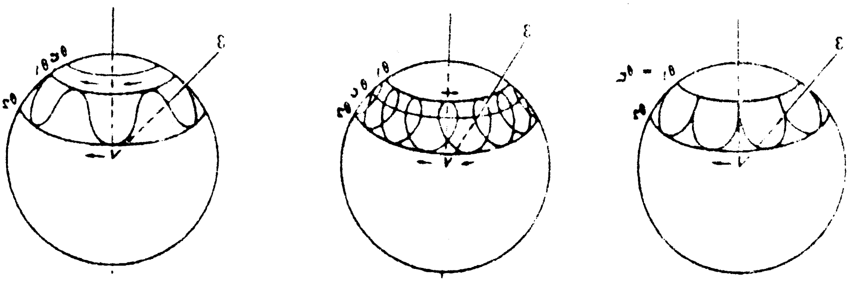
$$\left.\frac{d' V(\theta)'}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_c} = -m\, g\, l \sin\theta_c < 0$$

عندما $0 < \theta < \pi$ أي أن ميل المنحني الممثل لـ $V(\theta)'$ عندما $\theta = \theta_c$ سالب، بالتالي يجب أن تكون $\theta_c < \theta_0$ أي أن $\theta_c < \theta_2$ حتما لأن $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$.

يبقى دراسة احتمالي كون θ_c أكبر أو أصغر من θ_1. فإذا كانت $\theta_c < \theta_1$ أي أن $\cos\theta_c > \cos\theta_1$ عندئذ ستتغير θ بحيث تبقى دائما أكبر من θ_c (لأن θ محصورة بين θ_1 وθ_2)، أي $\cos\theta < \cos\theta_c$ على الدوام وتبقى إشارة $\dot{\phi}$ هي نفسها فيدور محور تناظر البلبل ليرسم منحنيا مشابها لذلك الموضح في الشكل (8-13أ) إذ أن محور البلبل يدور حول الشاقول بنفس الإتجاه دوما مع أنه يتذبذب اقتراباً وابتعاداً عن هذا الشاقول بين الزاويتين θ_1 وθ_2. أما إذا كانت $\theta_c > \theta_1$ عندئذ ستمر θ بمرحلتين تكون في أولاهما أصغر من θ_c (أي أن إشارة $\dot{\phi}$ مغايرة لإشارة ω_z) بينما تصير في المرحلة الثانية أكبر من θ_c وتصبح إشارة $\dot{\phi}$ مماثلة لإشارة ω_z وهذا يعني أن جهة دوران محور تناظر البلبل حول الشاقول ستتغير خلال تذبذبه بين θ_1 وθ_2 وسيرسم منحنيا مشابها لذلك الموضح في (8-13ب).

أخيراً، إذا كانت $\theta_c = \theta_1$ عندئذ تصبح $\dot{\phi} = 0$ عندما $\theta = \theta_1$ وبالتالي فإن $\dot{\phi}$ لاتغير إشارتها تماماً خلال دوران البلبل بل تصبح السرعة الزاوية لهذا الدوران حول الشاقول معدومة آنياً عندما يقترب المحور من الشاقول عند الزاوية θ_1، ثم يتابع

دورانه عندما تصير $\theta_1 < \theta$ ويرسم المحور منحنياً مشابهاً لذلك الموضح في الشكل (13-8 جـ).



(أ) (ب) (جـ)

الشكل (13-8)

2-17-8 مناقشة حركة البلبل بالطريقة التحليلية

يمكن التوصل إلى معظم النتائج السابقة بالطريقة التحليلية إذا وضعنا $\cos\theta = u$ في المعادلة (103-8) أي أن $\sin^2\theta = 1 - u^2$، و $\dot{u} = -(\sin\theta)\dot{\theta} = -(1-u^2)^{1/2}\dot{\theta}$ فنجد، بعد الإصلاح، أن:

$$\dot{u}^2 = f(u) \qquad (121-8)$$

حيث:

$$f(u) = (1-u^2(2E - I_z\omega_z^2 - 2mglu)I_x^{-1} - (p_\phi - I_z\omega_z u)^2 I_x^{-2} \qquad (122-8)$$

ويكون من(121-8):

$$dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

أي أن:

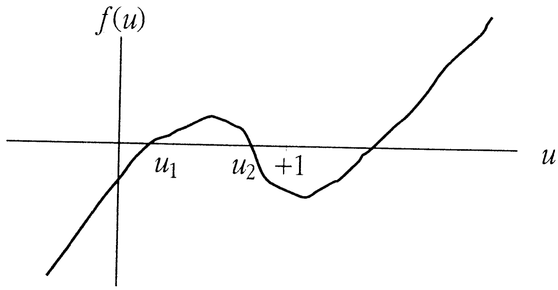
$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \qquad (123-8)$$

بماأن $f(u)$ دالة من الدرجة الثالثة في u فإن التكامل (123-8) سيعطي دالة قطعية *(elliptic function)* إلاّ أنه لاحاجة لإجراء التكامل لمناقشة الحركة، لأن $f(u)$ يجب أن

يبقى موجباً دوماً حتى تبقى t مقداراً حقيقياً، لذلك ستتحدد الحركة بقيم θ التى تجعل $f(u)\geq 0$. بحصر θ بين 0 و $\pi/2$ نجد أن u ستتغير بين 1+ و 0.

إذا رسمنا $f(u)$، كما في الشكل (8-14)، نلاحظ أن هناك قيمتان لـ u هما u_1 و u_2 بين الصفر و 1، أي أن حدود تذبذب محور البلبل محصورة بين زاويتين θ_1 و θ_2، وإذا كان الجذران u_1 و u_2 متساويان، عندئذ يدور البلبل حول الشاقول صانعاً زاوية ثابتة معه.

تتوافق هذه النتائج مع ما وجدناه عند مناقشة الحركة بطريقة الطاقة.



الشكل (8-14)

8 - 18 البلبل النائم (The Sleeping Top)

من المعروف لكل من لعب يوماً ببلبل أنه إذا بدأ البلبل حركته بسرعة دوران كبيرة حول محوره (أي فتل عال) فإن محوره يبقى شاقولياً تقريباً وثابتاً إلى أن يفقد البلبل بعضاً من طاقته نتيجة احتكاك نقطة ارتكازه مع الأرض ، فيبدأ المحور بالميلان رويداً رويداً وتبدأ ظواهر التذبذب ويزداد الميل إلى أن يقع البلبل.

إن بقاء المحور شاقولياً في البدء وثباته في ذلك الموضع هو مانطلق عليه إسم **البلبل النائم**. ويمكن ايجاد الشرط الذي يجب أن تحققه سرعة الفتل حول محور تناظر البلبل حتى ينام من المعادلة (8-122) ووضع $\dot{\theta}=\theta=0$، أي يجب أن يكون:

$$f(u)=(1-u^2(2E-I_z\omega_z^2-2mglu)I_x^{-1}-(p_\phi-I_z\omega_z u)^2 I_x^{-2}=0 \qquad (124-8)$$

لكن في هذه الحالة فإن:

$$E = mgl + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

و

$$p_\phi = I_z \omega_z$$

لذلك تصير (124-8) على الشكل:

$$(1-u^2)[\frac{2mgl}{I_x}(1+u) - \frac{I_z \omega_z^2}{I_x^2}] = 0$$

فحتى يكون لـ $f(u)$ جذر واحدمضاعف عند u=1 (أي θ =0) يجب أن يكون المقدار مابين القوسين[ ] في المعادلة السابقة يساوي الصفر. ويجب أن يكون الجذر الثالث الناتج عنه أكبر من الواحد، أي أن:

$$u_3 = \frac{I_z^2 \omega_z^2}{2I_x mgl} - 1 > 1$$

فنجد:

$$\omega_z \geq \sqrt{\frac{4I_x mgl}{I_z^2}} \qquad (125-8)$$

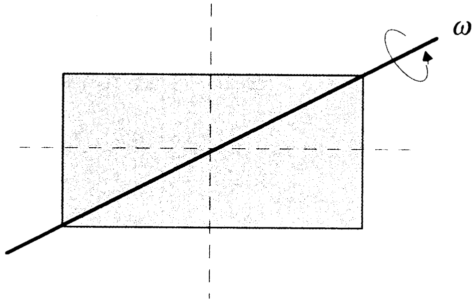
نستنتج إذاً أنه حتى ينام البلبل يجب أن يدور حول محوره بسرعة زاوية أكبر أو تساوي $\sqrt{4I_x mgl / I_z^2}$.

لقد كان بالإمكان الوصول إلى نفس النتيجة مباشرة لو لاحظنا من (113-8) أنه عندما $\theta_0 = 0$ فإن ω_z تصير مطابقة لـ (125-8).

8 - 19 مثال

يدور متوازي مستطيلات أبعادهa و $2a$ و $3a$ حول قطر كبير فيه بسرعة زاوية ω. جد طاقته الحركية والزاوية بين متجه السرعة الزاوية والزخم الزاوي بالنسبة لمبدأ منظومة إحداثية مبدؤها مركز المتوازي ومحاورها توازي وجوهه.

الحل: من الواضح أنه بسبب تناظر الجسم فإن منظومة محاور الجسم المطلوبة هي محاور أساس ، كما في الشكل (15-8) ونكتب من الجدول 6-1 مباشرة :



الشكل (15-8)

$$I_1 = \frac{m}{12}[(2a)^2 + (3a)^2] = \frac{13}{12} ma^2$$

$$I_2 = \frac{m}{12}[a^2 + (3a)^2] = \frac{10}{12} ma^2$$

$$I_3 = \frac{m}{12}[a^2 + (2a)^2] = \frac{5}{12} ma^2$$

كما نحلل متجه السرعة الزاوية (تحقق من ذلك):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{14}} (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$$

وتصير الطاقة الحركية من (8-54):

$$T = \frac{1}{2} [I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2] = \frac{7}{24} ma^2\omega^2$$

أما الزخم الزاوي فنجده بكتابة:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \bullet \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{ma^2\omega}{12\sqrt{14}} (13\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3)$$

أخيراً نجد الزاوية بين ωو L بكتابة:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\omega}.\mathbf{L}}{|\omega||L|} = \frac{\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\ \sqrt{L_1^2+L_2^2+L_3^2}} = 0.929$$

أي أن $\theta \approx 22°$.

مسائل

1-8 حول الممتد التالي: $\mathbf{T}=\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$ حيث $\mathbf{A}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{B}=5\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ إلى منظومة محاور جديدة دارت حول المحور oz زاوية $45°$.

2-8 أكتب مصفوفة الممتد الناظمي *(orthogonal tensor)* الذي يؤدي إلى دوران منظومة المحاور الإحداثية زاوية α حول المحور oz. حلل $\mathbf{T}$ إلى ممتد متناظر وآخر غير متناظر. ما هو التعليل الهندسي لهذا التحليل؟

3-8 جد القيم المميزة والمتجهات المميزة للممتد المذكور في المسألة 8-1.

4-8 قطّر الممتد التالي :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: يمكن تحليل المعادلة المميزة كما أن كل جذورها أعداد صحيحة .

5-8 برهن أن القوة الطاردة: $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ هي دالة خطية لمتجه الموضع $\mathbf{r}$ وجد العلاقة التي تعطي الممتد المقابل له (على شكل مجموع ثنائيات). اكتب مصفوفة مركبات هذا الممتد.

6-8 ما المحاور الأساسية والقيم المميزة المقابلة لها للممتد المذكور في المسألة 8-5؟

7-8 جد ممتد العطالة لعمود طوله l وكتلته m حول مركزه. استعمل هذه النتيجة لإيجاد ممتد العطالة حول مركز هرم متساوي الأضلاع ومؤلف من ستة أضلاع متساوية. برهن أنه يمكن كتابة هذا الممتد مباشرة من اعتبارات التناظر المتوفرة في الهرم.

8-8 أحسب عزم عطالة مخروط قائم ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a حول منظومة محاور مبدؤها عند رأس المخروط وينطبق على محوره. احسب مركبات ممتد العطالة للمخروط ثم حوله الى منظومة محاور يقع مبدؤها عند مركز كتلة المخروط وجد عزوم العطالة الأساسية .

9-8 جد ممتد العطالة لمتوازي مستطيلات كتلته M وأطوال أضلاعه a و b و c مستخدماً أقل عدد من العمليات الجبرية حول محاور تمر من مركز المتوازي بحيث يكون oz موازياً للضلع c بينما oy يكون موازياً لقطر المستطيل المؤلف من الضلعين a و b .

10-8 تقع كتلتان $M/4$ و $M/8$ على سطح كرة كتلتها M ونصف قطرها R بحيث تبعدان عن بعضهما زاوية $45°$. جد المحاور الأساس ومركبات ممتد العطالة حول هذه المحاور بالنسبة لمركز الكرة. جد ممتد العطالة حول محاور موازية للمحاور الأساس ومارة من مركز الكتلة.

11-8 جد ممتد العطالة لمستطيل كتلته m وأبعاده $b{\times}a$.

12-8 تدور صفيحة مستطيلة الشكل طولها a وعرضها b وكتلتها m حول أحد أقطارها بسرعة زاوية ثابتة ω. ما قيمة واتجاه $\mathbf{L}$ بالنسبة لركن المستطيل التي يمر منه محور الدوران؟

13-8 ما قيمة واتجاه $\mathbf{L}$ في المسألة السابقة بالنسبة لمركز الصفيحة وما العزم اللازم حتى يدور بهذا الشكل؟

14-8 برهن أنه إذا خضع جسم متناظر لعزم حول محور تناظره (أي أن $\tau_1=\tau_2=0$ و $\tau_3\neq0$) فإن المقدار: ثابت$=\omega_1^2+\omega_2^2$. وضح كيف يمكن الإستفادة من كون $\tau_3(t)$ معطى لإيجاد كل من ω_1 و ω_2 و ω_3.

15-8 كتطبيق مباشر على المسألة السابقة، اعتبر جسماً متناظراً حراً في الفضاء مدفوعاً بمحرك نفاث مركب بشكل متناظر بالنسبة لمحور تناظر الجسم بحيث يؤمن عزماً ثابتاً حول هذا المحور. جد الحل العام لمتجه السرعة الزاوية بدلالة الزمن بالنسبة لمحاور الجسم وصف كيف يتحرك هذا المتجه بالنسبة للجسم.

16-8 ما هي مركبات ممتد العطالة لمكعب طول ضلعه a وكتلتهm وتنطبق المحاور ox و oy و oz على أضلاعه الثلاثة المتقاطعة؟ ما الزخم الزاوي والطاقة الحركية لهذا المكعب بالنسبة لنقطة المبدأ مع العلم أنه يدور حولها بسرعة زاوية ثابتة $\mathbf{\omega} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$؟

17-8 يفتل مخروط قائم نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h وكتلته m بحيث تبقى ذروته ثابتة ويصنع محوره زاوية ثابتة αمع المحور الشاقوليoz بينما يدور حوله بسرعة زاوية ω_0. جد ω_0.

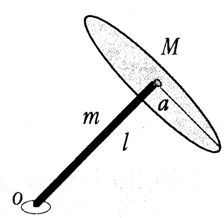
18-8 يوضع مكعب طول ضلعه a وكتلته M بحيث تنطبق أضلاعه على المحاور ox و oy وoz. ما الزخم الزاوي لهذا المكعب إذا دار حول oz بسرعة زاوية ثابتة ω؟

19-8 جد المصفوفة (a_{ij}) التي تحول مركبات متجه من محاور الفضاء الى محاور الجسم. عبر عن (a_{ij}) بدلالة زوايا أولر. (مساعدة: يمكن اعتبار هذا التحول عبارة عن ثلاثة دورانات متعاقبة بزاويا θو ϕ وψحول محاور مناسبة وبترتيب محدد).

20-8 اكتب دالة هاميلتون لجسم يدور بشكل حر بدلالة θ وϕوψو p_θ و p_ϕ و p_ψ. عبّر عن أمثال هذه الإحداثيات بدلالةI_1 وI_3 وI_3-I_1. تذكر أن $H= T+ V$.

21-8 اكتب دالة لاغرانج لبلبل متناظر تنزلق نهاية محوره علىطاولة ملساء بدون احتكاك. ناقش بدقة الفروق في الحركة بين هذه الحالة وتلك العائدة الى بلبل يدور مع بقاء نقطة تماسه مع الطاولة ثابتة.

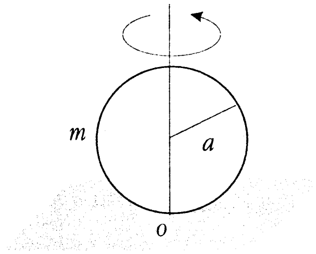
22-8 يتألف بلبل من قرص نصف قطرهa وكتلتهM وقضيب رفيع كتلته m وطوله l يرتبط بالقرص عند المركز، كما في الشكل (15-8). ماالسرعة الزاوية التي يجب أن يفتل بها القرص حول محوره حتى ينام إذا بقيت نقطة التماس مع الأرض ثابتة؟



الشكل (15-8)

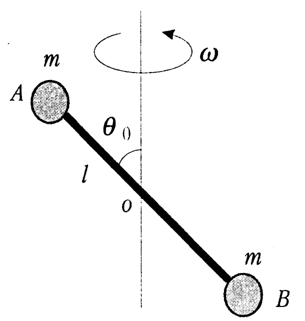
23-8 حل المسألة السابقة في حالة مخروط نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h.

24-8 تفتل قطعة نقود نصف قطرها a وكتلتها m حول قطر شاقولي فيها، كما في الشكل (16-8)، بسرعة زاوية ω. برهن أن الحركة مستقرة إذا كان $\omega^2 > 4g/a$.



الشكل (16-8)

25-8 يتألف جسم صلب (dumbbell) من كتلتين متساويتين m معلقتين بطرفي قضيب AB طوله l وكتلته مهملة، كما في الشكل (17-8)، بحيث يدور النظام بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور شاقولي يصنع زاوية ثابتة θ_0 مع A. برهن أن الزخم الزاوي يرسم مخروطاً حول AB نصف زاويته الرأسية $\pi/2 - \theta_0$ وأن قيمة $\mathbf{L}$ هي: $(ml^2\omega \sin\theta_0)/2$.



الشكل (17-8)

26-8 برهن أن العزم اللازم لإبقاء المنظومة المذكورة في المسألة 25-8 تدور بتلك الطريقة هو $(ml^2\omega^2 \sin^2\theta_0)/4$ وحدد إتجاهه.

27-8 إفترض أن قطعة النقود في المسألة 24-8 قد فتلت بسرعة زاوية ω_0 حول قطر لها يصنع زاوية α مع الشاقول بحيث تبقى النقطة o ثابتة. جد السرعة الزاوية التي ستدور بها قطعة النقود بفرض أنه لا يوجد تذبذب.

28-8 يتدحرج مخروط نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h وكتلته M على سطح أفقي بسرعة زاوية ω بحيث تبقى ذروته ثابتة دوماً. برهن أن الطاقة الحركية الدورانية هي $T = 3Mh^2(a^2+6h^2)\omega^2/40(a^2+h^2)$.

29-8 برهن أنه إذا دارت قطعة مستوية بشكل حر($\boldsymbol{\tau}$=0) فإن مركبة السرعة الزاوية ω_1 في مستوي الصفيحة ثابتة بالقيمة مع كون ω_3 غير ثابتة بالضرورة. (مساعدة: استخدام نظرية المحاور المتعامدة). ماشكل القطعة إذا كان: ثابت= ω_3؟

30-8 يدور قرص متجانس كتلته m ونصف قطره a بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور مار من مركزه ويصنع زاوية $45°$ مع محوره. ما قيمة وإتجاه زخمه الزاوي؟

31-8 يدور جسم صلب متناظر في الفضاء بسرعة زاوية ω حول مركز كتلته بوجود عزم ناتج عن قوى الإحتكاك بين الجسم والهواء معطاة بـ $-c\omega$. برهن أن مركبة $\boldsymbol{\omega}$ على محور تناظر الجسم تتناقص بشكل أسي *(exponentially)* مع الزمن. برهن أيضا أن الزاوية بين السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}$ ومحور التناظر تتناقص بشكل منتظم إذا كانت مركبة عزم العطالة حول هذا المحور هي أكبر عزم عطالة أساس للجسم.

نظرية الاهتزازات الصغيرة

(Theory of Small Oscillations)

9 - 1 تمهيد: طاقة الوضع والاتزان والاستقرار

درسنا في الفصول السابقة الحركة الاهتزازية لبعض المنظومات كالبندول البسيط أو البندول المركب أو نظام مؤلف من جسيم مرتبط بزنبرك. وقد تميزت هذه المنظومات كلها بأن لها درجة حرية واحدة، أما في هذا الفصل فسندرس الحركة الاهتزازية لمنظومات لها أكثر من درجة حرية واحدة مستخدمين معادلات لاغرانج لكتابة معادلات الحركة وإيجاد الترددات الطبيعية التي يمكن للمنظومة أن تهتز بها.

لندرس أولاً شرط قيام منظومة بحركة اهتزازية بسيطة حول وضع اتزان مستقر، فنفترض أن المنظومة محافظة أي أن طاقة وضعها تعتمد على الإحداثيات العامة فقط:

$$V = V(q_1, q_2, \ldots q_n)$$

كما وجدنا في الفصل السادس أن القوى العامة مشتقة من V حسب العلاقات:

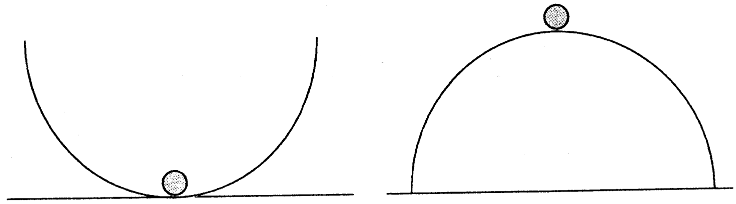
$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{1-9}$$

نعرف وضع الاتزان بأنه النقطة التي تكون كل القوى العامة معدومة عنده، أي أن:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \tag{2-9}$$

تضمن هذه المعادلات أن تبقى المنظومة ساكنة إذا كانت كذلك في البداية، أما إذا دُفعت قليلاً عن وضع الاتزان وعادت إليه فإننا نقول إن اتزانها **مستقر** *(stable)*، وإن لم تعد فإننا نقول إن الاتزان **غير مستقر** *(unstable)*. أما إذا تحركت إلى وضع مختلف عن وضع الاتزان وبقيت ساكنة عنده فنقول إن الاتزان **محايد** *(neutral)*.

كمثل على الاتزان المستقر وغير المستقر، نعتبر كرة موضوعة على ذروة نصف كرة، كما في الشكل (9-1أ)، أو عند قعرها، كما في الشكل (9-1 ب).



الشكل (9-1)

الآن بما أن المنظومة محافظة، نكتب:

$$T+V=T_0+V_0$$

أو

$$T-T_0=-(V-V_0) \qquad (3-9)$$

حيث T_0 الطاقة الحركية للمنظومة عند وضع الاتزان (لحظة إعطائها دفعة بسيطة) و V_0 طاقة وضعها آنئذ. فإذا كانت طاقة الوضع أكبر مايمكن عند وضع الاتزان عندئذ يكون $V-V_0$ سالباً أي أن $T-T_0$ سيكون موجباً أي T ستزداد كلما ابتعدت المنظومة عن وضع الاتزان وهذا يعطي حالة اتزان غير مستقر قطعياً.

من جهة أخرى إذا كانت طاقة الوضع عند الاتزان أصغر ما يمكن عندئذ يكون $V-V_0$ موجباً و $T-T_0$ سالباً، أي أن T ستتناقص كلما ابتعد الجسم عن الاتزان، ونستنتج أن الاتزان مستقر في هذه الحالة.

فشرط الاتزان المستقر هو أن تكون طاقة الوضع أصغر مايمكن عند وضع الاتزان.

إذا كانت للمنظومة درجة حرية واحدة، أي أن:

$$V=V(q) \qquad (4-9)$$

عندئذ يكون عند وضع الاتزان :

$$\frac{dV}{dq}=0 \tag{5-9}$$

نعبر عن شرط الاتزان على النحو :

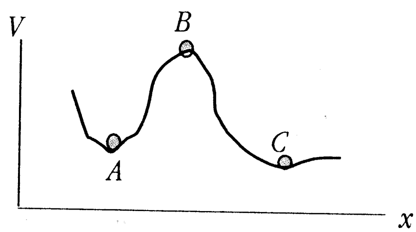
$$\frac{d^2V}{dq^2}>0 \quad \text{(اتزان مستقر)} \tag{6-9}$$

و

$$\frac{d^2V}{dq^2}<0 \quad \text{(اتزان غير مستقر)} \tag{7-9}$$

أما إذا كان $d^2V/dq^2=0$ فيجب علينا أن ندرس مشتقات من مراتب أعلى.

توضح النقاط A وB وC، في الشكل (9-2)، أوضاع اتزان مستقر وغير مستقر ومحايد، على الترتيب.



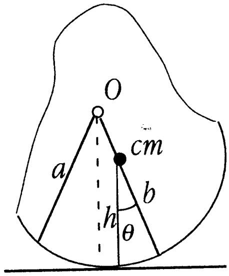
الشكل (9-2)

❑ مثل 9-1

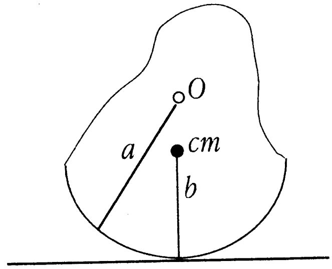
لندرس شرط اتزان جسم m له قعر مدور، كروي أو اسطواني، نصف قطر تقعره a وبعد مركز كتلته عن نقطة تماسه مع مستو أفقي b، كما في الشكل (9-3أ) الذي يمثل وضع الاتزان، ولنفترض أننا دورناه زاوية θ عن هذا الوضع بحيث يصير ارتفاع مركز الكتلة عن المستوي الأفقي h كما في الشكل 9-3 ب).

نكتب طاقة الوضع على النحو

$$V=mgh=mg[a-(a-b)\cos\theta]$$



الشكل (9-1ب)



الشكل (9-1أ)

بالاشتقاق نجد:

$$\frac{dV}{d\theta}=mg(a-b)\sin\theta$$

أي أن:

$$\frac{dV}{d\theta}=0 \quad \text{عندما} \quad \theta=0$$

فـ $\theta=0$ هو وضع اتزان ، كما أن:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=mg(a-b)\cos\theta$$

و

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=mg(a-b) \quad \text{عندما} \quad \theta=0$$

فوضع الاتزان مستقر إذا كان $a>b$، أي عندما يكون مركز الكتلة واقعاً تحت مركز تقعر الجسم . □

9-2 نشر طاقة الوضع كسلسلة قوى

إذا كان لدينا منظومة لها درجة حرية واحدة q ونشرنا طاقة وضعها $V(q)$ حول النقطة $q=a$ نجد:

$$V(q)=\kappa_0+\kappa_1(q-a)+\frac{1}{2!}\kappa_2(q-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\kappa_n(q-a)^n+\ldots$$

حيث:

$$\kappa_n = \left(\frac{d^n V}{dq^n} \right)_{q=a}$$

إذا كانت $q=a$ وضع اتزان عندئذ يكون $\kappa_1=0$ ويختفي الحد الخطي من السلسلة السابقة، فنحصل على:

$$V(q) = \kappa_0 + \frac{1}{2!}\kappa_2 (q-a)^2 + \ldots \tag{8-9}$$

يعتمد استقرار الاتزان عند $q=a$ على أول حد غير معدوم بعد κ_0 في النشر السابق. فإذا كان هذا الحد زوجياً في n عندئذ يكون الاتزان مستقراً إذا كان المشتق d^nV/dq^n موجباً، أما إذا كان المشتق سالباً أو n فردية فإن الاتزان غير مستقر. ولمعرفة سبب ذلك نفترض أن n هي مرتبة أول حد غير معدوم، وعندها نجد أنه من أجل أي ابتعاد بسيط عن الاتزان يكون:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial q} \approx -\kappa_n (q-a)^{n-1}$$

فحتى يكون الاتزان مستقراً يجب أن يكون اتجاه F نحو a، أي سالباً إذا كان $q>a$ وموجباً إذا كان $q<a$. ولايمكن لهذا أن يتحقق الاّ إذا كانت κ_n موجبة و n زوجية.

في معظم الحالات العملية المهمة يكون $n=2$ أي أن طاقة الوضع هي دالة تربيعية للإزاحة، بينما القوة دالة خطية معها. فإذا نقلنا مبدأ الاحداثيات إلى النقطة $q=a$ واخترنا $V(0)=0$، عندئذ يمكن كتابة:

$$V = \frac{1}{2}\kappa_2 q^2 \tag{9-9}$$

وذلك بإهمال حدود من مرتبة أعلى في q.

بنفس الشكل، إذا كان لدينا منظومة متعددة درجات الحرية فيمكن أن

نجد تحويلاً خطياً بحيث يكـون $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ وضع اتزان إن وجد. يمكن عندئذ نشر طاقة الوضع بالشكل:

$$V(q_1, q_2, \ldots q_n) = \frac{1}{2}(\kappa_{11} q_1^2 + 2\kappa_{12} q_1 \, q_2 + \kappa_{22} q_2^2 + \ldots) \qquad (10-9)$$

حيث:

$$\kappa_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right)_{q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0}$$

و

$$\kappa_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_{q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0}$$

وهكذا دواليك، حيث وضـعنا$V(0,0, \ldots 0) = 0$، كما أن الحد الخطي في السلسلة يساوي الصفر لأننا ننشر حول وضع الاتزان.

يسمى الحد ضمن القوسين في (10-9) **الشكل التربيعي** *(quadratic form)* وإذا كان موجبا أو يساوي الصفر من أجل كل الإحداثيات q_k عندئذ يكون وضع الاتزان $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ مستقراً. يتحقق ذلك إذا كان:

$$\begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad |\kappa_{11} > 0|$$

وهكذا.

9-3 اهتزاز منظومة ذات درجة حرية واحدة

يمكن كتابة طاقة الحركة لمنظومة ذات درجة حرية واحدة على النحو :

$$T = \frac{1}{2} \mu \, \dot{q}^2 \qquad (11-9)$$

حيث يمكن أن تكون الأمثال μ ثابتة أو دالة للإحداثي العامq. في كل الأحوال يمكن نشر μ كسلسلة قوى فيq ، لنكتب:

$$\mu(q)=\mu(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu}{dq}\right)_{q=0}dq+\cdots \qquad (12-9)$$

فإذا كانت q=0 وضع اتزان عندئذ يمكن اعتبار الثوابت μ صغيرة بحيث يمكن افتراض أن:

$$\mu=\mu(0)=\text{ثابت} \qquad (13-9)$$

كتقريب مقبول. ونكتب دالة لاغرانج من العلاقة (9-9) على النحو:

$$L=T-V=\frac{1}{2}\mu\dot{q}^2-\frac{1}{2}\kappa q^2 \qquad (14-9)$$

حيث $\kappa=\kappa_2=(d^2V/dq^2)_{q=0}$.

نكتب معادلات لاغرانج للحركة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial L}{\partial q}$$

فنجد:

$$\mu\ddot{q}+\kappa q=0 \qquad (15-9)$$

من ثم إذا كان q=0 موضع اتزان مستقر، أي أن κ>0، عندئذ تهتزq بشكل بسيط حوله بسرعة زاوية ωمعطاة بالعلاقة:

$$\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \qquad (16-9)$$

وتتغير q حول موضع الاتزان مع الزمن وفق المعادلة:

$$q=q_0\cos(\omega t+\varepsilon) \qquad (17-9)$$

حيث q_0 السعة العظمى و ε الطور الابتدائي.

يتعين هذان الثابتان من الشروط البتدائية .

❐ مثل 9-2

لنجد تردد الاهتزازات الصغيرة للجسم الذي درسناه في المثل 9-1 بفرض أن التماس مع الأرض تام الخشونة بحيث لاينزلق الجسم بتاتاً. عندئذ تصير سرعة مركز الكتلة هي $b\dot{\theta}$ تقريباً في حالة الاهتزازات الصغيرة. وتصير الطاقة الحركية معطاة بالعلاقة:

$$T=\frac{1}{2}m(m\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2$$

حيث I_{cm} عزم عطالة الجسم بالنسبة لمركز الكتلة . وكذلك فإن طاقة الوضع هي :

$$V(\theta)=mg[a-(a-b)\cos\theta]$$

$$=[a-(a-b)(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots]$$

$$=\frac{1}{2}mg(a-b)\theta^2+\text{ثابت}+\text{حدود من مراتب أعلى}$$

ونكتب دالة لاغرانج على النحو:

$$L=\frac{1}{2}(mb^2+I_{cm})\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mg(a-b)\theta^2 \quad .$$

بإهمال الحدود الثابتة والحدود ذات المراتب الأعلى من الدرجة الثانية.

بمقارنة العلاقة السابقة بـ(9-14) و (9-15) نجد أن:

$$\mu=mb^2+I_{cm}$$

و

$$\kappa=mg(a-b)$$

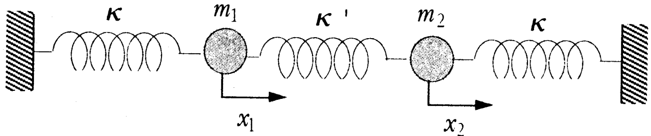
وتكون الحركة حول وضع الاتزان $\theta=0$ مستقرة تقريباً بتردد يساوي:

$$\omega=\sqrt{mg(a-b)/mb^2+I_{cm}} \quad ❐$$

---

9 - 4 الهزازان البسيطان المرتبطان *(Coupled Harmonic Oscillators)*

سندرس في هذه الفقرة حالة خاصة لمنظومة ذات عدة درجات من الحرية وهي الهزازين البسيطين المرتبطين لما له من أهمية تطبيقية وقابل للتعميم على الحالات الأكثر تعقيداً. فنعتبر جسيمين متماثلين كتلة الواحد m مرتبطين ببعضهما بواسطة ثلاثة زنبركات خفيفة اثنين منها متماثلين k وثالث k'، كما في الشكل (9-4)، وسنفترض أن الحركة تتم أفقياً فقط. ولذا يكون هناك درجتين من الحرية نرمز لهما بـ x_1 و x_2 وتمثلان ابتعاد الجسيمين عن وضع اتزان كل منهما.



الشكل (9-4)

بكتابة الطاقة الحركية للنظام نجد:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \qquad (18-9)$$

وطاقة الوضع:

$$V=\frac{1}{2}\kappa x_1^2+\frac{1}{2}\kappa'(x_2-x_1)+\frac{1}{2}\kappa x_2^2 \qquad (19-9)$$

ومن ثم نجد دالة لاغرانج:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-[\frac{1}{2}\kappa x_1^2+\frac{1}{2}\kappa'(x_2-x_1)+\frac{1}{2}\kappa x_2^2] \qquad (20-9)$$

ونكتب معادلتي الحركة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=\frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=\frac{\partial L}{\partial x_2} \qquad (21-9)$$

فنجد :

$$(22-9)\qquad \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases}$$

أو:

$$(23-9)\qquad \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k}{m}x_2 + \dfrac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

نلاحظ هنا أنه لولم يكن الجسيمان مرتبطان بالزنبرك k' لتحرك كل منهما حركة اهتزازية بسيطة بتردد $\omega = (k/m)^{1/2}$، لذا فمن الطبيعي أن نجرب حلاً لكل من x_1 و x_2 يعتمد على الزمن بطريقة توافقية بسيطة، أي أن:

$$(24-9)\qquad \begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega t \\ x_2 = A_2 \cos \omega t \end{cases}$$

بتعويض هاتين المعادلتين في معادلات الحركة نجد:

$$(25-9)\qquad \begin{cases} -\omega^2 A_1 \cos \omega t + \dfrac{k}{m} A_1 \cos \omega t + \dfrac{k'}{m}(A_1 - A_2)\cos \omega t = 0 \\ -\omega^2 A_2 \cos \omega t + \dfrac{k}{m} A_2 \cos \omega t + \dfrac{k'}{m}(A_1 - A_2)\cos \omega t = 0 \end{cases}$$

باختصار العامل. المشترك $\cos\omega t$ وجمع الحدود المتشابهة نجد:

$$(26-9)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right) A_1 - \dfrac{k'}{m} A_2 = 0 \\ -\dfrac{k'}{m} A_1 + \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right) A_2 = 0 \end{cases}$$

تمثل العلاقتين السابقتين الشروط الواجب على الأمثال A_1 و A_2 تحقيقها ليكون فرضنا حلاً مقبولاً. فإما أن يكون $A_1 = A_2 = 0$ أو أن يكون معين (محدد) الأمثال مساوياً للصفر، أي:

$$(27-9) \qquad \begin{vmatrix} \frac{k+k'}{m}-\omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

تسمى (27-9) **المعادلة المميزة** *(secular equation)*.

بفك المعادلة المميزة نجد:

$$(28-9) \qquad (\frac{k+k'}{m}-\omega^2)^2-(\frac{k'}{m})^2=0$$

وهي معادلة تربيعية في ω^2 جذراها هما:

$$\omega_a=(\frac{k}{m})^{1/2}$$

$$\omega_b=(\frac{k+2k'}{m})^{1/2}$$

يدعى ω_a و ω_b **الترددين الطبيعيين** *(normal frequencies)* للمنظومة.

يكون الحلان المكنان هما:

$$(29-9) \qquad x_1=A_1\cos\omega_a t \qquad x_2=A_2\cos\omega_a t$$

و

$$(30-9) \qquad x_1=B_1\cos\omega_b t \qquad x_2=B_2\cos\omega_b t.$$

يجدر الانتباه إلى أن الجذرين السالبين للمعادلة المميزة لن يعطيا حلين مختلفين لأن $\cos\omega t=\cos(-\omega t)$ إلاّ أن السعات العظمى A_1 و B_1 و A_2 و B_2 ليست مستقلة عن بعضها ذلك أنه إذا عوضنا قيم ω في (26-9) فإننا نجد مايلي:

(أ) إذا كان $\omega=\omega_a$ يكون:

$$(\frac{k+k'}{m}-\frac{k}{m})A_1+\frac{k'}{m}A_2=0$$

وبالاختصار نجد:

$$A_1 = A_2 \tag{31-9}$$

(ب) إذا كان $\omega = \omega_b$ نجد:

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \frac{k+2k'}{m}\right)B_1 - \frac{k'}{m}B_2 = 0$$

أي أن:

$$B_1 = -B_2 \tag{32-9}$$

لذا يمكن التعبير عن الحلين (9-29) و (9-30) على النحو:

$$x_1 = A\cos\omega_a t \qquad x_2 = A\cos\omega_a t \tag{33-9}$$

و

$$x_1 = B\cos\omega_b t \qquad x_2 = -B\cos\omega_b t \tag{34-9}$$

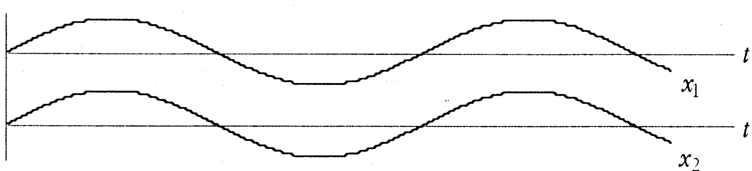
ولايعود هناك ضرورة للرموز السفلى.

تدعى الاهتزازات الناتجة **الحالات الطبيعية** *(normal modes)* ، بينما تدعى ω_a و ω_b **الترددات الطبيعية** *(normal frequencies)*.

تتميز الحالات الطبيعية بأن كل الإحداثيات تهتز بنفس التردد. ففي الحالة المدروسة فإن المنظومة تهتز بالتردد ω_a بحيث أن:

$$x_1 = x_2$$

تدعى هذه الحالة **المتناظرة** *(symmetric mode)* كما هو موضح بالشكل (9-5).

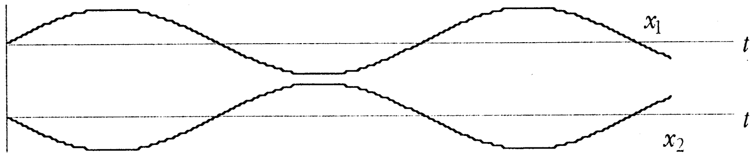


الشكل (9-5)

أما الاهتزاز بالتردد ω_b فيعطي :

$$x_1 = -x_2$$

تدعى هذه الحالة **عكس التناظر** *(antisymmetric mode)*. يمثل الشكل (9-6) هذا الوضع .



الشكل (9-6)

الحل الكامل

لنجد الآن الحل الكامل للمسألة بالعودة إلى معادلات الحركة (9-24) وملاحظة أنها تقبل حلاً يحوي $\sin\omega t$ بدلاً من $\cos\omega t$ مما ينتج عنه نفس النتائج تماماً، أي أن:

$$x_1 = A' \cos\omega_a t \qquad x_2 = A' \cos\omega_a t \tag{35-9}$$

و

$$x_1 = B' \cos\omega_b t \qquad x_2 = -B' \cos\omega_b t \tag{36-9}$$

هي حلول مقبولة. وبما أن المعادلات التفاضلية خطية فيمكن جمع أكثر من حل لها ويكون الناتج حلاً مقبولاً. لذا نكتب الحل العام على النحو:

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t + B\cos\omega_b t + B'\sin\omega_b t \\ x_2 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t - B\cos\omega_b t - B'\sin\omega_b t \end{cases} \tag{37-9}$$

تتحدد السعات العظمى من الشروط الابتدائية، فنجد أنه في اللحظة $t=0$ يكون:

$$x_1(0) = A + B \qquad x_2(0) = A - B$$

كذلك، باشتقاق العلاقات بالنسبة للزمن ووضع $t=0$ نجد:

$$\dot{x}_1(0) = A'\omega_a + B'\omega_b \qquad \dot{x}_2(0) = A'\omega_a - B'\omega_b$$

بحل المعادلات السابقة نجد:

$$\begin{cases} A=\frac{1}{2}[x_1(0)+x_2(0)] & B=\frac{1}{2}[x_1(0)-x_2(0)] \\ A'=\frac{1}{2}[\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0)] & B'=\frac{1}{2}[\dot{x}_1(0)-\dot{x}_2(0)] \end{cases} \qquad (38-9)$$

تسمح لنا المعادلات السابقة بمعرفة بأي من الترددين ستثار المنظومة حسب الشروط الابتدائية. فإذا دُفع الجسمان في البداية بنفس المقدار والاتجاه وتركا، عندئذ تكون الشروط الابتدائية هي: $x_1(0)=x_2(0)$ و $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$. تعني هذه النتيجة أن الوضع المتناظر سيثار فقط لأن كل الثوابت ستكون معدومة ماعدا A.

من جهة أخرى، إذا بدأت الحركة بجذب الجسمين بنفس المقدار باتجاهين متعاكسين عندئذ تصير الشروط الابتدائية $x_1(0)=-x_2(0)$ و $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$. في هذه الحالة تكون كل الثوابت معدومة باستثناء B ويثار الوضع معاكس التناظر فقط.

عندما تكون الشروط الابتدائية مغايرة للحالتين المذكورتين أعلاه فإن المنظومة تهتز بترددات مزيج من الترددين الطبيعيين ω_a و ω_b.

9-5 الإحداثيات الطبيعية *(Normal Coordinates)*

عند دراسة حركة هزازين مرتبطين عرفنا إحداثيين q_a و q_b بالعلاقتين:

$$\begin{cases} q_a=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2) \\ q_b=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2) \end{cases} \qquad (39-9)$$

من ثم سنكتب دالة لاغرانج بدلالة هذين الإحداثيين، حيث نلاحظ أن:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_a+q_b) \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_a-q_b) \end{cases} \qquad (40-9)$$

ومنه

$$T=\frac{m}{2}\frac{(\dot{q}_a+\dot{q}_b)^2}{2}+\frac{m}{2}\frac{(\dot{q}_a-\dot{q}_b)^2}{2}=\frac{m}{2}\dot{q}_a^2+\frac{m}{2}\dot{q}_b^2$$

و

$$V=\frac{k}{2}\frac{(q_a+q_b)^2}{2}+\frac{k}{2}\frac{(q_a-q_b)^2}{2}+\frac{k'}{2}q_b^2=\frac{k}{2}q_a^2+\frac{k''}{2}q_b^2$$

تؤول دالة لاغرانج إلى:

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}_a^2+\frac{m}{2}\dot{q}_b^2-\frac{k}{2}q_a^2-\frac{k''}{2}q_b^2 \qquad (42-9)$$

حيث:

$$k''=k+2k'$$

بكتابة معادلتي لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}=\frac{\partial L}{\partial q_b} \qquad و \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}=\frac{\partial L}{\partial q_a}$$

نجد:

$$m\ddot{q}_b=-kq_b \qquad و \qquad m\ddot{q}_a=-kq_a$$

هاتان المعادلتان منفصلتين مباشرة ولذا يكون حل كل واحدة من الشكل:

$$\begin{cases} q_a=A\cos(\omega_a t+\varphi_a) \\ q_b=A\cos(\omega_b t+\varphi_b) \end{cases} \qquad (43-9)$$

حيث وضعنا:

$$\omega_a=(\frac{k}{m})^{1/2}$$
$$\omega_b=(\frac{k''}{m})^{1/2}=(\frac{k+2k'}{m})^{1/2}$$

يتضح لنا من الحلين السابقين أنه من أجل أي حركة ممكنة للمنظومة فإن q_a

ستهتز بتردد ω_a وتهتز q_b بتردد ω_b.

تدعى كل من q_a و q_b بـ **إحداثي طبيعي** *(normal coordinate)* للمنظومة.

في الحالة العامة فإن كل إحداثي طبيعي يتألف من مجموع خطي للإحداثيات بحيث تؤول الطاقة الحركية وطاقة الوضع إلى مجموع مقادير تربيعية للإحداثيات الطبيعية فقط، كما تكون معادلات لاغرانج منفصلة تلقائياً، كما هو الحال في المعادلات(9-42). ينتج عن ذلك أن لكل إحداثي طبيعي تردد واحد فقط يتميز بأنه من أجل كل حالة طبيعية هناك إحداثي طبيعي له تردده الطبيعي. فعندما تهتز منظومة ما بتردد طبيعي واحد فقط فإن كل الإحداثيات تهتز بذلك التردد ويكون هناك إحداثي طبيعي واحد فقط غير معدوم.

في حالة هزازين مرتبطين نكتب:

(أ) الوضع المتناظر *(symmetric mode)*:

$\omega=\omega_a$ و q_a هي الإحداثي الفاعل ، و $q_b=0$, $x_1=x_2$

(ب) الوضع معاكس التناظر *(antisymmetric mode)* :

$\omega=\omega_b$ و q_b هي الإحداثي الفاعل ، و $q_a=0$, $x_1=-x_2$

9 - 6 الإحداثيات الطبيعية لأي منظومة ذات درجتي حرية

لإيجاد الإحداثيات الطبيعية لأي منظومة لها درجتين من الحرية نعود إلى معادلتي السعة العظمى (9-26) اللتين تحددان الشروط الواجب توافرها ليكون لمعادلات الحركة حل مقبول.

في الحالة العامة نكتب هاتين المعادلتين على النحو التالي:

$$\frac{A_1}{A_2}=c=\frac{x_1}{x_2}$$

حيث c عدد يتحدد عندما نجد الترددات الطبيعية، ويكون لهذا العدد قيمة مختلفة باختلاف التردد الطبيعي وقد وجدنا في المثل السابق أن $c=+1$ أو $c=-1$.

من الواضح أنه إذا عرفنا إحداثيين جديدين بالعلاقتين:

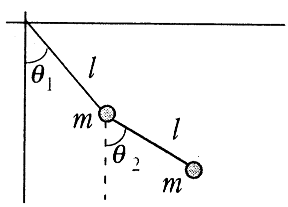
$$\begin{cases} q_a = x_1 - c_1 x_2 \\ q_b = x_1 - c_2 x_2 \end{cases} \qquad (44-9)$$

حيث c_1 وc_2 قيمتي c عندئذ تكون q_a و q_b الإحداثيين الطبيعيين بالضرورة لأن أحدهما سيكون معدوماً عندما تهتز المنظومة بتردد طبيعي لها. ومن الواضح أن أي مضاعف ثابت للكميتين المعرفتين بالعلاقتين (44-9) هو أيضاً إحداثي طبيعي .

مثل 2-9 البندول المضاعف *(The double pendulum)*

لندرس حركة بندول مضاعف مؤلف من خيط طوله $2l$ نهايته مثبتة بالسقف بينما يعلق بنهايته الأخرى جسيم صغير كتلته m وآخر عند وسطه، كما في الشكل (9-7).

بفرض أن اهتزازات المنظومة ستبقى في نفس المستوي، عندئذ نحدد حركة الجسيمين بالإحداثيين θو φ، على الترتيب. كما تكون سرعة كل واحد هي $l\dot{\theta}$ و $l(\dot{\theta}+\dot{\varphi})$ وطاقة وضعهما $-mgl\cos\theta$ و $-mgl(\cos\theta+\cos\varphi)$، على الترتيب أيضاً.



الشكل (9-7)

نكتب دالة لاغرانج:

$$L=\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2+\frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+2mgl\cos\theta+mgl\cos\varphi$$

بحسب معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial\theta} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}$$

نجد:

$$ml^2\ddot{\theta}+ml^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})=-2mgl\sin\theta$$
$$ml^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})=-mgl\sin\varphi$$

بفرض أن $\sin\theta\approx\theta$ و $\sin\varphi\approx\varphi$ وترتيب الحدود نجد:

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}+\dfrac{2g}{l}\theta+\ddot{\varphi}=0 \\ \ddot{\theta}+\ddot{\varphi}+\dfrac{g}{l}\varphi=0 \end{cases} \qquad (45-9)$$

كما نجد المعادلة المميزة من معين (محدد) الأمثال:

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2+\dfrac{2g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+\dfrac{g}{l} \end{vmatrix}=0$$

أو

$$\omega^4-4\omega^2(\frac{g}{l})+2(\frac{g}{l})^2=0$$

فيكون الترددان الطبيعيان هما:

$$\begin{cases} \omega_a=\sqrt{\dfrac{g}{l}(2-\sqrt{2})} \\ \omega_b=\sqrt{\dfrac{g}{l}(2+\sqrt{2})} \end{cases} \qquad (46-9)$$

فإذا اهتزت المنظومة بأحد الترددين الطبيعيين عندئذ نجد أن (45-9) تعطي:

$$(-2\omega^2+2\frac{g}{l})\ \theta=\omega^2\varphi$$

بتعويض قيمتي ω من (46-9) في هذه العلاقة نجد العلاقتين اللتين تربطان بين θ و φ للحالتين الطبيعيتين:

الوضع المتناظر $\omega=\omega_a$ و $\varphi=+\sqrt{2}\theta$

الوضع معاكس التناظر $\omega=\omega_b$ و $\varphi=-\sqrt{2}\theta$

مما تقدم ينتج أن للثابت c في المعادلة (44-9) قيمتين ممكنتين هما $\pm\sqrt{2}$ ، ويكون الإحداثيان الطبيعيان:

$$q_a=\varphi+\sqrt{2}\theta$$
$$q_b=\varphi-\sqrt{2}\theta$$

يمكن البرهان على أن دالة لاغرانج ستكون مؤلفة من مجموع مربعات فقط عند استخدام الإحداثيين الطبيعيين السابقين . ❐

9-7 النظرية العامة للمنظومات المهتزة

سندرس فيما يلي حركة منظومة لها n درجة حرية والتي يمكن كتابة طاقة الحركة لها على النحو:

$$T=\frac{1}{2}\mu_{11}\dot{q}_1^2+\mu_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\mu_{22}\dot{q}_2^2+\ldots=\sum_j\sum_k\frac{1}{2}\mu_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k \qquad (47-9)$$

ذلك بفرض أنه لايوجد قيود متحركة عليها.

بما أن المنظومة تهتز حول وضع اتزان لها، لذا سنفترض أن الأمثال μ ثابتة وأن قيمهم هي تلك عند وضع الاتزان. كما سنفترض أيضاً أننا قمنا بإجراء تحويل مناسب لمنظومة المحاور الإحداثية بحيث يقع وضع الاتزان عند الموضع:

$$q_1=q_2=\ldots=q_n=0$$

بحسب ماتقدم نكتب طاقة الوضع على النحو:

$$V=\frac{1}{2}\kappa_{11}q_1^2+\kappa_{12}q_1q_2+\frac{1}{2}\kappa_{22}q_2^2+\ldots=\sum_j\sum_k\frac{1}{2}\kappa_{jk}\,q_j\,q_k \qquad (48-9)$$

وتصير دالة لاغرانج بالشكل:

$$L=\sum_j\sum_k \frac{1}{2}(\mu_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k-\kappa_{jk}\,q_j\,q_k) \tag{49-9}$$

ونكتب معادلات الحركة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$$

التي تعطي:

$$\sum_j(\mu_{jk}\,\ddot{q}_j+\kappa_{jk}\,q_j)=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{50-9}$$

إذا كان هناك حل من الشكل:

$$q_k=A_k\cos\omega t \qquad (k=1,2,\ldots n) \tag{51-9}$$

عندئذ نجد بالتعويض المباشر أن المعادلة التالية يجب أن تكون محققة دوماً:

$$\sum_j(-\mu_{jk}\omega^2+\kappa_{jk})A_j=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{52-9}$$

ونجد حلاً غير بديهي للمعادلات السابقة بفرض أن معين الأمثال يساوي الصفر، أي أن:

$$\begin{vmatrix} -\mu_{11}\omega^2+\kappa_{11} & -\mu_{12}\omega^2+\kappa_{12} & \cdots \\ -\mu_{21}\omega^2+\kappa_{21} & -\mu_{22}\omega^2+\kappa_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0 \tag{53-9}$$

تمثل المعادلة المميزة السابقة كثير حدود من المرتبة n في ω جذورها هي مربعات الترددات الطبيعية للمنظومة.

وجود الإحداثيات الطبيعية

بما أنه لايمكن للطاقة الحركية أن تكون سالبة، لذا يجب أن يكون أي تمثيل لها بالإحداثيات العامة موجباً دوماً. وبحسب نظرية في التحويلات الخطية تقول إن .

أمثال الكميتين:

$$\sum_j \sum_k b_{jk}\, x_j\, x_k \qquad \text{و} \qquad \sum_j \sum_k a_{jk}\, x_j\, x_k$$

تحقق

$$b_{jk} = b_{kj} \qquad \text{و} \qquad a_{jk} = a_{kj}$$

عندها إذا كان الأول موجباً دوماً عندئذ يوجد تحويل خطي من الشكل:

$$x_k = \sum_j c_{kj}\, y_j \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

بحيث يؤول كثيرا الحدود السابقين إلى مجموع مربعات، أي أن :

$$\sum_j \sum_k a_{jk}\, x_j\, x_k = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$$

و

$$\sum_j \sum_k b_{jk}\, x_j\, x_k = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \ldots + \beta_n y_n^2$$

تنص النظرية أيضاً على أن جذور المعادلة المميزة:

$$\begin{vmatrix} -\gamma_{11}\omega^2 + b_{11} & -\gamma_{12}\omega^2 + b_{12} & \cdots \\ -\gamma_{21}\omega^2 + b_{21} & -\gamma_{22}\omega^2 + b_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

مطابقة لجذور المعادلة:

$$\begin{vmatrix} -\gamma\alpha_1\omega^2 + \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma\alpha_1\omega^2 + \beta_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

وبتطبيق النظرية المذكورة في حالتنا هذه نجد نستنتج أنه يوجد مجموعة إحداثيات:

$$\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n$$

تعطى بالتحويل الخطي:

$$q_k = \sum_j c_k \, \bar{q}_j \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{54-9}$$

بحيث أن T و V تصيران مجموعي مربعات من الشكل:

$$T = \frac{1}{2}(\bar{\mu}_1 \dot{\bar{q}}_1^2 + \bar{\mu}_2 \dot{\bar{q}}_2^2 + \ldots + \bar{\mu}_n \dot{\bar{q}}_n^2) \tag{55-9}$$

و

$$V = \frac{1}{2}(\bar{\kappa}_1 \bar{q}_1^2 + \bar{\kappa}_2 \bar{q}_2^2 + \ldots + \bar{\kappa}_n \bar{q}_n^2) \tag{56-9}$$

وتصير دالة لاغرانج نتيجة لهذا التحويل:

$$L = \sum_k \frac{1}{2}(\bar{\mu}_k \, \dot{\bar{q}}_k^2 - \bar{\kappa}_k \, \bar{q}_k^2) \tag{57-9}$$

ونجد معادلات الحركة عندئذ:

$$\bar{\mu}_k \, \ddot{\bar{q}}_k + \bar{\kappa}_k \, \bar{q}_k = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{58-9}$$

وحلولها:

$$\bar{q}_k = \bar{A}_k \cos(\omega t + \varphi_k) \tag{59-9}$$

حيث:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_k}{\bar{\mu}_k}}$$

بذلك تكون الكميات $\bar{q}_k$ هي الإحداثيات الطبيعية، والترددات الطبيعية المرافقة لها هي ω_k.

بحسب النظرية التي ذكرناها آنفاً فإن الترددات الطبيعية هي جذور المعادلة المميزة (9-53) التي يمكن كتابتها بدون معرفة الإحداثيات الطبيعية.

أما إيجاد التحويل الضروري لإيجاد الإحداثيات الطبيعية (المعادلة (9-56))، فيستوجب تقطير مصفوفة، كما فعلنا في الحركة العامة للجسم الصلب.

9 - 8 حركة منظومة عامة بوجود قوى دافعة خارجية وقوى تخامد

درسنا حتى الآن الحركة الاهتزازية لمنظومة غير خاضعة لقوى خارجية دافعة أو قوى تخامد، وإذا تواجدت قوى من هذا النوع عندئذ نكتب دالة لاغرانج، كما في درسنا ، على النحو:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k}+Q_k \qquad (60-9)$$

حيث تدل Q_k على قوى التخامد العامة التي تعطى بالعلاقة:

$$Q_k=-c_{1k}\,\dot{q}_1-c_{2k}\,\dot{q}_2-\cdots-c_{nk}\,\dot{q}_n \qquad (61-9)$$

وتكون معادلات الحركة الناتجة مشابهة لحالة حركة غير متخامدة (المعادلات (9-50)) باستثناء وجود الحدود $\dot{q}_k$ في هذه الحالة.

من الممكن في أغلب الحالات (ولكن ليس دائماً بالضرورة) إيجاد تحويل إلى إحداثيات عامة بحيث تكتب معادلات الحركة على النحو:

$$\bar{\mu}_k\,\ddot{\bar{q}}_k+c_k\,\dot{\bar{q}}_k+\bar{\kappa}_k\,\bar{q}_k=0 \qquad (62-9)$$

بحيث أن:

$$\bar{q}_k=\bar{A}_k\,e^{-\lambda_k t}\cos(\omega_k t+\varphi_k) \qquad (63-9)$$

نلاحظ أن سعة الحركة المتخامدة تتلاشى مع مرور الزمن بشكل أسي، كما يمكن أن تكون الحركة غير اهتزازية عندما يكون التخامد عالياً جداً أو حرجاً، كما درسنا في الفصل الأول.

أخيراً، إذا كانت هناك قوى أخرى غير القوى الدافعة الخطية أو قوى التخامد، كالقوى التي تتغير جيبياً مع الزمن، عندئذ يمكن إدخالها بشكل مباشر $Q_{kext}\cos\omega t$ (أو $Q_{kext}\, e^{i\omega t}$) في كل معادلة للحركة (9-60) ويكون شكل معادلة الحركة بالإحداثيات الطبيعية هو :

$$\bar{\mu}_k \; \ddot{\bar{q}}_k + c_k \; \dot{\bar{q}}_k + \bar{\kappa}_k \; \bar{q}_k = Q_k \; e^{i\omega t} \qquad (64-9)$$

فإذا كانت المنظومة مثلاً خاضعة لقوة خارجية وحيدة تتغير جيبياً مع الزمن بتردد مساو لأحد الترددات الطبيعية للمنظومة نفسها عندئذ يكون الإحداثي الطبيعي هو ذلك الذي يكون له أكبر سعة عندما تؤول الحركة إلى الاهتزازات الدائمة. وفي الواقع إذا كان معامل التخامد صغيراً جداً عندئذ يكون ذلك الإحداثي هو الوحيد الممكن للمنظومة.

9-9 اهتزازات سلك محمّل بكتل صغيرة

سندرس في هذه الفقرة اهتزازات منظومة بسيطة مؤلفة من سلك مرن مثبت من طرفيه ومُحمَّل بجسيمات صغيرة كتلة الواحدة m وعددها n موضوعة عند أبعاد متساوية من بعضها. تفيد هذه المسألة في فهم النظرية العامة للاهتزازات الصغيرة وتقود إلى مفهوم الحركة الموجية التي نعتبرها في الفقرة التالية.

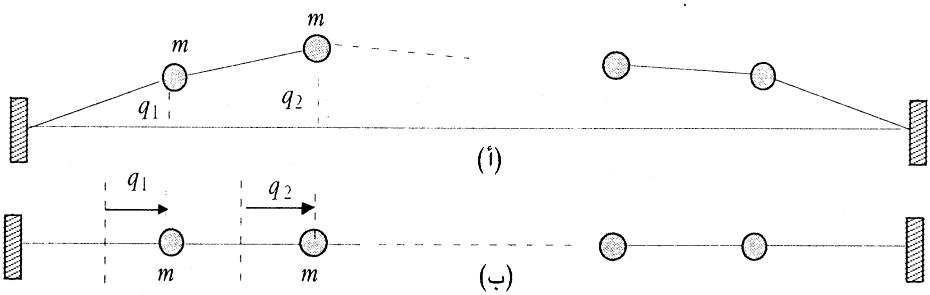
لنرمز للسعة الآنية (البعد الآني عن وضع الاتزان) للجسيمات بالإحداثيات q_1, q_2 q_n , ... , من الواضح أن هناك نوعين من الحركات يمكن لكل جسيم القيام بهما وهما الاهتزاز للأعلى وللأسفل، أي اهتزازات عرضية *(transverse motion)*، كما في الشكل (9-8 أ)، أو اهتزاز لليمين ولليسار بشكل مواز للسلك أي حركة طولية *(longitudinal motion)*، كما في الشكل (9-8 ب).

سنفترض في دراستنا هذه أن الحركة هي من إحدى النوعين وليست مزيجاً

منهما كما هي الحال في الاهتزازات الفعلية لمنظومة كهذه.

لنكتب الطاقة الحركية:

$$T=\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2) \qquad (65-9)$$



الشكل (9-8)

وباستخدام الرمز ν للإشارة إلى أي جسيم عندئذ نجد في حالة الاهتزازات الطولية أن استطالة السلك بين الجسيمين ν و $\nu+1$ تكون:

$$q_{\nu+1}-q_\nu$$

وتكون طاقة الوضع لهذا الجزء من السلك هي:

$$\frac{1}{2}K(q_{\nu+1}-q_\nu)^2$$

حيث K معامل مرونة ذلك الجزء الواصل بين الجسيمين.

أما في حالة الاهتزازات العرضية فإن المسافة بين الجسيمين ν و $\nu+1$ هي:

$$[h^2+(q_{\nu+1}-q_\nu)^2]^{1/2}=h+\frac{1}{2h}(q_{\nu+1}-q_\nu)^2+\cdots$$

حيث h المسافة بين الجسيمين في وضع الاتزان.

يمكن تقريب استطالة السلك على النحو:

$$\Delta l=\frac{1}{2h}(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2$$

فإذا كان S هو الشد في السلك عندئذ تكون طاقة الوضع لهذا الجزء:

$$S\Delta l=\frac{S}{2h}(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2$$

ينتج عن ذلك أن أن طاقة وضع المنظومة كلها سواء كانت الحركة طولية أم عرضية هي مجموع مربعات من الشكل:

$$V=\frac{k}{2}[q_1^2+(q_2-q_1)^2+\cdots+(q_n-q_{n-1})^2+q_n^2] \qquad (66-9)$$

حيث:

$$k=\frac{K}{h} \qquad \text{(الحركة العرضية)}$$

أو

$$k=K \qquad \text{(الحركة الطولية)}$$

تعطى دالة لاغرانج في هذه الحالة بالعلاقة:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\nu}[m\dot{q}_{\nu}^2-k(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2] \qquad (67-9)$$

ومن معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\nu}}=\frac{\partial L}{\partial q_{\nu}}$$

نجد:

$$m\ddot{q}_{\nu}=-(q_{\nu}-q_{\nu-1})+k(q_{\nu+1}-q_{\nu}) \qquad (68-9)$$

حيث $\nu=1,2,\ldots,n$

تمثل (68-9) n معادلة تفاضلية مرتبطة *(coupled oscillations)*، لحلها نفترض أن

الإحداثيات q تتغير جيبياً مع الزمن ونجرب حلاً من الشكل:

$$q_{\nu} = a_{\nu}\, e^{i\omega t} \qquad (69-9)$$

حيث $a\nu$ سعة حركة الجسيم ν.

بتعويض الحل التجريبي المذكور في (68-9) نجد علاقة إرجاع *(recursion formula)* للسعات $a\nu$:

$$-m\omega^2 a_{\nu} = k(a_{\nu-1} - 2a_{\nu} + a_{\nu+1}) \qquad (70-9)$$

تحدد العلاقة السابقة موضع بداية ونهاية السلك بوضع:

$$a_0 = a_{n+1} = 0 \qquad (71-9)$$

من ثم نجد المعين (المحدد) المميز:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 & \cdots & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m\omega^2+2k \end{vmatrix} = 0 \qquad (72-9)$$

بما أن هذا المعين من المرتبة n فيكون هناك n جذراً أو قيمة للتردد ω محققة للمعادلة المميزة. بدلاً من محاولة إيجادهم جبرياً، يمكن الاستفادة من العلاقة الإرجاعية (70-9) على النحو التالي:

لنعرف الكمية φ المرتبطة بالسعة $a\nu$ بالعلاقة:

$$a_{\nu} = A\sin(\nu\varphi) \qquad (73-9)$$

بالتعويض المباشر في (70-9) نجد:

$$-m\omega^2 A\sin(\nu\varphi) = kA[\sin(\nu\varphi - \varphi) - 2\sin(\nu\varphi) + \sin(\nu\varphi + \varphi)] \qquad (74-9)$$

التي تختصر بسهولة إلى:

$$m\omega^2 = k(2-2\cos\varphi) = 4k\sin^2\frac{\varphi}{2} \qquad (75-9)$$

أو

$$\omega = 2\omega_0 \sin\frac{\varphi}{2} \qquad (76-9)$$

حيث

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (77-9)$$

تعطي(76-9) الترددات الطبيعية بدلالة الكمية φالتي لم نحددها بعد، الاّ أنه من الواضح أن نفس العلاقة ستكون صحيحة سواء بغض النظر عن الطريقة التي كتبنا السعة الآنية a_ν بها سواء كانت $A\cos(\nu\varphi)$، أو $Ae^{i\nu\varphi}$ أو$Ae^{-i\nu\varphi}$، أو أي مجموع خطي من هذه الكميات. الاّ أن $a_\nu = A\sin(\nu\varphi)$ هو الشكل الوحيد الذي يحقق شرط النهاية الأولى $a_0=0$، لذا نستعين بشرط النهاية الثانية $a_n=0$ لإيجاد القيمة الحقيقية لـ φ فنلاحظ أنه لايتحقق الاّ إذا كان:

$$(n+1)\varphi = N\pi \qquad (78-9)$$

حيثN عدد صحيح، لوجدنا عندئذ أن:

$$a_{n+1} = A\sin(N\pi) = 0$$

بتحديد φ نستطيع إيجاد الترددات الطبيعية من العلاقة:

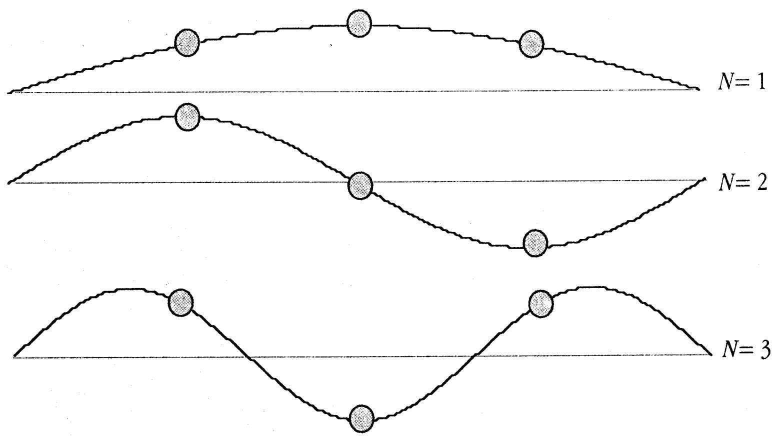
$$\omega_N = 2\omega_0\sin\left(\frac{N\pi}{2n+2}\right) \qquad (79-9)$$

كما نجد من (73-9) و (78-9) أن سعة الاهتزازات للحالات الطبيعية هي:

$$a_\nu = A\sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right) \qquad (80-9)$$

ترمز الأعداد $\nu=1,2,\ldots,n$ إلى رقم الجسيم المدروس، بينما تدل الأعداد $N=1,2,\ldots,n$ إلى الحالة الطبيعية (*normal mode*) التي تهتز بها المنظومة.

يوضح الشكل (9-9) الحالات الطبيعية المختلفة كما رسمناها من المعادلة (80-9) حيث اعتبرنا عدد الجسيمات على السلك (باستثناء النهايتين) $n=3$ ورسمنا الحالات الطبيعية الثلاث الأولى $N=1,2,3$ فقط.



الشكل (9-8)

تكون معادلة الحركة للمنظومة عندما تهتز بتردد طبيعي واحد فقط معطاة بالعلاقة:

$$q_\nu = a_\nu \cos(\omega_N t) = A \sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right)\cos(\omega_N t) \qquad (81-9)$$

أما الاهتزازات العامة (كل الترددات المكنة) فهي مجموع خطي للترددات الطبيعية من الشكل:

$$q_\nu = \sum_{N=1}^{n} A_N \sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right)\cos(\omega_N t + \varphi_N) \qquad (82-9)$$

حيث تتحدد قيمتي A_ν و φ_ν من الشروط الابتدائية.

في حالة كون عدد الجسيمات n أكبر بكثير من عدد الحالات الطبيعية N تصير-

النسبة $N\pi/(2n+2)$ صغيرة، لذا نقرب (79-9) إلى:

$$\omega_N \approx N\left(\frac{\pi\omega_0}{n+1}\right) \tag{83-9}$$

أي أن الترددات الطبيعية هي مضاعفات صحيحة من التردد الأصغر$\pi\omega_0/(n+1)$، أي أنه يمكن اعتبار هذا التردد الأصغر كتردد أساس *(fundamental frequency)* بينما تكون بقية الترددات هي المتوافقات الثانية والثالثة وهكذا دواليك. تزداد دقة هذه العلاقة الخطية كلما زاد عدد الجسيمات على السلك.

مسائل

1-9 حدد نقاط الاتزان الممكنة ونوعها لجسيم يتحرك على خط مستقيم إذا خضع لجهود معطاة بالعلاقات التالية (كل الثوابت موجبة):(أ) $V(x)=kx^2/2+k^2/x$ (ب) $V(x)=k(x^4-b^2x^2)$ (جـ) $V(x)kxe^{-bx}$. جد تردد الاهتزازات الصغيرة حول مواضع الاتزان المستقر في الحالات المذكورة.

2-9 يتحرك جسيم في مستو بطاقة وضع من الشكل: $V(x)=k(x^2+y^2-2bx-4by)$. برهن أن هناك وضع اتزان مستقر واحد للجسيم وحدد نوعه . (k و b ثابتان موجبان).

3-9 تعطى طاقة الوضع لجسيم يتحرك على خط مستقيم بالعلاقة : $V(x)=-kx^2/2$ ($k>0$) بحيث أن القوة المؤثرة عليه هي قوة "إبعاد" من الشكل $F=kx$ و $x=0$ هي نقطة اتزان غير مستقر. برهن أنه إذا كانت الشروط الابتدائية $x=x_0$ و $v_0=0$ فإن حركة الجسيم ستكون $x(t)=x_0(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})/2$ حيث $\alpha=\sqrt{k/m}$.

4-9 تعلق كتلة m عند منتصف حبل خفيف طوله $2l$ ومشدود بين نقطتين. برهن أن طاقة وضع النظام تعطى بالعلاقة: $V(y)=2T[(y^2-2l(y^2+l^2)^{1/2}]-mgy$ حيث T الشد في الحبل وy ارتفاعm عن وضع الاتزان برهن أن وضع الاتزان يتحدد من جذور العلاقة $u^4-2au^3+a^2u^2-2au+a^2=0$ حيث $u=y/l$ و $a=mg/4kl$.

5-9 تتزن قطعة مكعبة منتظمة كتلتها m وطول ضلعها $2a$ على ذروة كرة خشنة نصف قطرها b. برهن أن طاقة الوضع تعطى بـ: $V(\theta) = mg[a(a+b)\cos\theta + b\theta\sin\theta]$ حيث θ زاوية الميل. برهن أن وضع الاتزان يقع عند $\theta=0$ وأنه مستقر أو غير مستقر بحسب كون a أصغر أو أكبر من b.

6-9 انشر طاقة الوضع في المسألة السابقة كسلسلة قوى في θ وحدد اتزان المنظومة عندما $a=b$.

7-9 تسكن نصف كرة صلبة منتظمة نصف قطرها a على ذروة نصف كرة نصف قطرها b بحيث يكون السطحان الكرويان على تماس. برهن أن الاتزان ممكن إذا كان $a<3b/5$.

8-9 جد تردد الاهتزازات الشاقولية الصغيرة للكتلة المذكورة في المسألة 9-4.

9-9 جد تردد الاهتزازات الصغيرة للمكعب المذكور في المسألة 9-5.

10-9 جد تردد الاهتزازات الصغيرة لنصف الكرة المذكورة في المسألة 9-7.

11-9 تهتز كرة معدنية صغيرة نصف قطرها a على السطح الداخلي لنصف كرة مقلوبة نصف قطرها b. برهن أن دور الاهتزازات الصغيرة هو $2\pi[7(b-a)/5g]^{1/2}$ وجد قيمته إذا كان $b=1\text{ m}$ و $a=1\text{ cm}$.

12-9 جد حركة كل كتلة للمنظومة الموضحة في الشكل (9-4) إذا كانت الشروط الابتدائية هي: $x_1(0)=2a$ و $\dot{x}_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$ وبرهن أنها تماثل الخفقان.

13-9 برهن أنه إذا كان ارتباط الكتلتين في المسألة السابقة ضعيفاً $\kappa' \ll \kappa$ فإن الجسمين يتبادلان الطاقة بتردد $[2\pi/(\kappa/m)^{1/2}](\kappa/2\kappa')$ تقريباً.

14-9 حدد الترددات الطبيعية للبندول المضاعف إذا كان طول البندولين مختلفين .

15-9 اكتب معادلات الحركة لثلاث كتل متماثلة محملة على حبل خفيف مشدود وجد الترددات الطبيعية لهذه المنظومة.

المراجع

1- *Mechnics*, W. Arthur, and S.K. Fenster. New York: Holt-Rinhehart, and Winston, 1969

2- *Introduction to Theoretical Mechanics*, R.A. Becker. New York: McGraw Hill, 1954.

3- *Mechanics,* K.R. Symon. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1977.

4- *Theoretical Mechanics,* M.R. Spiegel. Schaum Outline Series: MCGraw-Hill, 1967.

5- *Classical Dynamics of Systems and Particles,* J.B. Marion, and S.T. Thornton. 3rd ed. Orlando: Hacourt-Brace-Govanovich, 1988.

6- *Analytical Mechanics,* G.R. Fowles, 4th ed. Philadelphia: Saunders, 1986.