بحث النهايات

حالات عدم التعين : $\pm\infty\pm\infty$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$

مبرهنات المثلثية : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

التحويلات الهندسية

$$1-\cos x=2sin^{2}\frac{x}{2}$$

$$\cos x-1=-2sin^{2}\frac{x}{2}$$

$$sin^2x+cos^2x=1$$

$$cos^2\frac{x}{2}-\ sin^2\frac{x}{2}=cosx$$

$$2\ sin\ \frac{x}{2}\ .2\ cos\ \frac{x}{2}=sinx$$

مبرهنات الإحاطة و المقارنة

$\sin\infty$ و $\cos\infty$

- **نعلم ان** $-1<\ \sin x\ <1$
- **نعلم ان** $-1<\ \cos x\ <1$

بعملية اصلاح

$$h\,(\,x\,)<\ \ \mathrm{f}\,(\,\mathrm{x}\,)\ <\mathrm{g}\,(\mathrm{x})$$

$$\lim_{x\to\infty}h\,(\,x\,)\ =\ \lim_{x\to\infty}g\,(x)\ =l$$

وذلك بحسب مبرهنة الإحاطة : $\lim\limits_{x\to\infty}f\,(\,x\,)=l$

مبرهنة المقارنة (احاطة 3) $[f\,(\,x\,)-l\,]<g\,(\,x\,)$ **وكانت**

$\lim\limits_{x\to\infty}g\,(x)=0$ **تكون حسب مبرهنة المقارنة**

ملاحظة :

عندما نضرب ب x او $\sqrt[3]{x}$

نناقش حالتين لكن تبقى النهاية ذاتها

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

استعمال x في غاية الكبر : اعط العدد A الذي يحقق اذا كان $x > a$ كان f (x) ينتمي $\}a , b\{$

نصف القطر $r = b - l$ مركز المجال $l = \frac{a+b}{2}$

يحقق المتراجحة $|f(x) - l| < r$

نهاية تابع مركب :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(f(x)) = g(l)$$

الاستمرار عند قيمة a :

حتى يكون تابع مستمر عند قيمة a يجب ان يحقق

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \quad , \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

الاستمرار على مجال $\{a , b\}$ / $\}a , b\{$:

حتى يكون تابع على مجال $\{a , b\}$ / $\}a , b\{$ يجب ان يكون مستمرا عند كل قيمة داخل المجال وعلى اطراف المجال (في حال كانت المجالات مغلقة)

التابع الجزء الصحيح : (تمرين)

المقاربات :

المقارب الشاقولي : $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

$x = a$ مقارب شاقولي يوازي y y′ والتقارب نحو $oy^{\pm}$

المقارب الافقي : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$

$y = a$ مقارب افقي يوازي X X′ في جوار ال $\pm\infty$

المقارب المائل : $y = ax + b$

البحث عن مقارب المائل :

المدرسان: محمد خطيب و نور صندفي

1) نبحث عن عددين a , b يحققان العلاقات : $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f (x) - ax)$, $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f (x)}{x}$

2) اذا كان التابع كسري ودرجة البسط اكبر من درجة المقام (قسمة اقليدية)

اصبح التابع يكتب بعد القسمة الاقليدية : $f (x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$

$y = ax + b$ مقارب مائل في جوار ال $\pm\infty$

3) اذا كان التابع جذري $f (x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ نكتب $ax^2 + bx + c$ بالصيغة القانونية

اصبح التابع يكتب $f (x) = \sqrt{(ax + b)^2 + c}$

$y = ax + b$ مقارب مائل في جوار ال $+\infty$

$y = -ax - b$ مقارب مائل في جوار ال $-\infty$

<u>اثبات مقارب المائل :</u> $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f (x) - y_\Delta) = 0$

<u>لدراسة الوضع النسبي :</u> ندرس إشارة الفرق : $f (x) - y_\Delta$ ونبين مايلي

متى $f (x) - y_\Delta < 0$ و متى $f (x) - y_\Delta > 0$

انتهى البحث...

انت قوي لاتدع احد يستهين بك

المدرسان: محمد خطيب و نور صندقي

بحث الإشتقاق

نصفي مماس = :	تعريف العدد المشتق	دراسة قابلية الاشتقاق
$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^+)$ $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-)$ $f'(a^+) = f'(a^-)$ **التابع يقبل معادلة مماس واحدة** $f'(a^+) \neq f'(a^-)$ **التابع يقبل معادلتي مماس**	$g(x) =$ $g(a) =$ $g'(x) =$ $g'(a) =$ **وذلك بحسب تعريف العدد المشتق** $\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ **التابع اشتقاقي عند a** $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ **التابع غير اشتقاقي عند a** • **ادرس قابلية الاشتقاق** • **ندرس قابلية الاشتقاق عند المجالات المغلقة** • **اثبت ان التابع يقبل مماس شاقولي معادلته** $x = a$

اشتقاق تابع من المرتبة n (بالاستقراء الرياضي)

معادلة المماس : يلزمنا نقطة $m = f'(a)$, $A(a, f(a))$ **ونطبق القانون :**

$$T : y - y_A = m(x - x_A)$$

اشتقاق تابع مركب :

1. **نوجد الفرق (التغيير) بين التابع المعطى وليكن g والتابع الأصلي وليكن f ونسمي** $U(x)$
2. **نشتق** $U(x)$
3. **نعوض** $f'(U(x))$
4. **نطبق القانون :**

$$g'(x) = f'(U(x)) . U'(x)$$

التقريب التآلفي المحلي :

نستخدم التقريب التآلفي المحلي عندما نوجد $f(x_0)$ **حيث** x_0 **من** D_f **و** x_0 **من الصعب إيجاد صورتها ، يعطى القانون :**

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a) . h$$

يجب ان تكون h بأصغر مايمكن

التابع الزوجي :

نقول ان التابع زوجي اذا حقق الشرطين :

$\forall\, x \in Df \quad , -x \in Df$

$f(-x) = f(x)$

وهو متناظر بالنسبة ل $y\,y'$

التابع الفردي :

نقول ان التابع زوجي اذا حقق الشرطين

:

$\forall\, x \in Df \quad , -x \in Df$

$f(-x) = -f(x)$

مركز تناظر :

هي نقطة تقاطع المقارب الشاقولي مع المقارب المائل

$A(a\,, b)$

$\forall\, x \in Df \quad , 2a - x \in Df$

$f(2a - x) + f(x) = 2b$

دراسة اطراد تابع : ندرس اطراد تابع لمعرفة التابع (متزايد – متناقص – ثابت)

خطوات دراسة اطراد تابع :

1. نشتق التابع $f'(x)$
2. نعدم المشتق $f'(x) = 0$
3. نحل المعادلة ونوجد حلول المعادلة ونوجد صور القيم التي عدمت المعادلة
4. جدول اطراد

x	مجموعة التعريف + القيم التي عدمت التابع المشتق
$f'(x)$	إشارات
$f(x)$	أسهم

المدرسان : محمد خطيب و نور صدقي

التغيرات :

الإستفادة من دراسة تغيرات تابع :

1. لرسم تابع
2. حل للمعادلة $f(x) = 0 , \omega$
3. عندما نشتق تابع والتابع المشتق لايمكن معرفة اشاراته نفرض تابع جديد $f'(x) = g(x)$ وندرس تغيرات g
4. اثبات صحة متراجحة $g(x) \leq h(x)$ ننقل الى طرف واحد $g(x) - h(x) \leq 0$ ونفرض تابع $f(x) = g(x) - h(x)$ وندرس تغيرات f
5. عندما ندرس الوضع النسبي بين تابع و معادلة (مماس – مقارب مائل – مستقيم) ولايمكن معرفة اشارته نفرض تابع $g(x) = f(x) - y_{\Delta}$ وندرس تغيرات g

خطوات دراسة تغيرات تابع :

- ننهي عند الأطراف المفتوحة ونوجد صور عند الأطراف المغلقة
- نشتق التابع $f'(x)$
- نعدم المشتق $f'(x) = 0$
- نحل المعادلة ونوجد حلول المعادلة ونوجد صور القيم التي عدمت المعادلة
- جدول تغيرات

مجموعة التعريف + القيم التي عدمت التابع المشتق	x
إشارات	$f'(x)$
أسهم + نهايات	$f(x)$

- ندل على القيم الحدية

لرسم تابع :

- نرسم المقاربات ومعادلات المماس و معادلات المستقيم
- من جدول التغيرات نرسم التابع

التابع المثلثي :

نقول ان التابع f دوري ودوره T اذا تحقق الشرطين :

$$\forall\, x \in Df \quad x+T \in Df$$

$$f\,(\,x+T\,) = f\,(\,x\,)$$

التابعان $\sin ax$ و $\cos ax$ دوريان ودور كل منهما : $T = \frac{2\,\pi}{a}$

التابع $\tan x$ دوري ودوره : $T = \frac{\pi}{a}$ **وان كان التابع زوجي او فردي فيكفي دراسته على نصف المجال**

ملاحظات لقراءة الخط البياني :

- **اذا طلب إيجاد صورة عدد a أي طلب إيجاد $f\,(\,a\,)$ نرسم مستقيم $x = a$ ونحدد نقطة تقاطع التابع مع المستقيم وتكون $f\,(\,a\,)$ ترتيب نقطة التقاطع**
- **اذا طلب منا عدد حلول المعادلة $f\,(\,a\,) = b$ فإننا نرسم مستقيم $y = a$ ونحدد عدد مرات التقاطع مع الخط C ويكون عدد التقاطع المرات هو عدد الحلول**
- **في حال طلب تعيين الحلول (ماحلول) فإن الحلول هي فواصل النقاط التقاطع مع الخط البياني**
- **اذا طلب منا إيجاد $f\,'\,(\,a\,)$ نميز حالتين :**

المماس الأفقي : $f\,'\,(a) = 0$

المماس المائل : نحدد نقطتان تنتميان للماس ولتكن A , B ونحسب الميل من العلاقة : $m_{AB} = \frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$

- **اذا طلب منا تعيين D_f نميز حالتين :**

اذا كان التابع غير منقطع فمجموعة تعريفه من مجال واحد

اذا كان التابع منقطع فمجموعة تعريفه هيه عبارة عن عدة مجالات

- **اذا طلب منا تحديد حلول المتراجحة $f\,(\,x\,) \geq b$**

نرسم المستقيم $y = b$

المدرسان : محمد خطيب و نور صندفي

نحدد فاصلة نقطة التقاطع المستقيم السابق مع الخط البياني C ولتكن الفاصلة هنا هي a

مجموعة حلول المتراجحة تكون هيه قيم x التي تجعل الخط البياني C يقع فوق المستقيم $y = b$

- **اذا طلب منا تحديد حلول المتراجحة** $f\,(\,x\,) \le b$

نطبق الخطوات السابقة ذاتها وتكون حلول المتراجحة هي قيم X التي تجعل

الخط البياني C تحت المستقيم $y = b$

- **لتعيين معادلة مماس او معادلة مقارب مائل او معادلة مستقيم**

نحدد نقطتان تنتميان للمعادلة ولتكن A , B ونحسب الميل من العلاقة $m_{AB} = \frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$

ثم نمررها من نقطة و نطبق القانون :

$$T : y - y_A = m\,(\,x - \,x_A\,)$$

<u>ملاحظات لقراءة جدول التغيرات :</u>

- **اذا وجد الرمز || في السطر الثاني أي ان التابع غير اشتقاقي عند A فهو يقبل مماس شاقولي عند X = A**
- **اذا وجد الرمز || في السطر الثاني والثالث أي ان التابع غير معرف عند A**
- **اذا وجد صفر في السطر الثاني أي ان التابع يقبل مماس أفقي ولماذا ؟ لان المماس الافقي ميله 0**
- **في جدول التغيرات :**

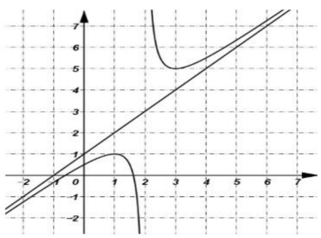
x	a
$f\,'(\,x\,)$	$f\,'(\,a\,)$
$f\,(\,x\,)$	$f\,(\,a\,)$

انتهى البحث...

انت قوي لاتدع احد يستهين بك

الرسمات والجداول :

السؤال الأول : ليكن C_f الخط البياني المرسوم جانبا المعرف على R \ { 2 } والمطلوب :



- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to2^-} f(x)$
- دل على القيم الحدية مبينا نوعها
- ماعدد حلول المعادلة f (x) = 0
- اكتب معادلة المقارب المائل Δ
- أوجد احداثيات مركز التناظر

السؤال الثاني : نجد في الجدول التغيرات f المعرف على R والمطلوب :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	4	↗	6

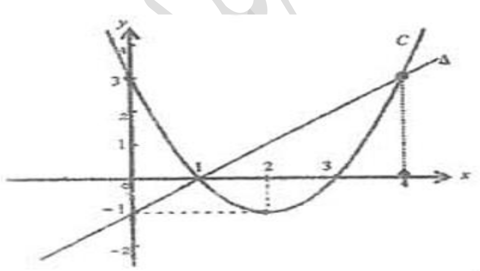
- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ مع ذكر المقاربات ان وجدت
- عين القيم الحدية مبينا نوعها
- هل $f(5)=4$ قيمة حدية ؟
- اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=\ln(f(x))$

السؤال الثالث : نتأمل جدول التغيرات التابع f المعرف على R وخطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	3

- $\lim_{\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\to-\infty} f(x)$
- اكتب معادلة المقارب الافقي للخط البياني C
- دل على القيم الحدية مبينا نوعها
- اوجد $f(\,]-1\,,2[\,)$
- ماعدد حلول المعادلة $f(x)=0$

السؤال الرابع : نتأمل الشكل المرسوم جانبا وليكن C خطه البياني للتابع f المعرف على R والمطلوب :



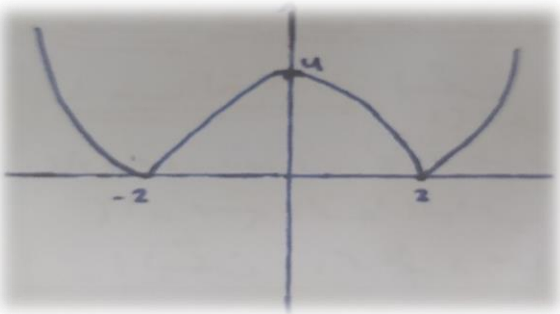
- دل الفيم الحدية المحلية للتابع f مبين نوع كل منها
- اكتب مجموع حلول المتراجحة $\lim_{\to+\infty} f(x)$
- ما حلول المعادلة $f(x)=Y_\Delta$
- اكتب معادلة المستقيم Δ

السؤال الخامس: **الجدول الاتي هو جدول تغيرات f المعرف على $\}0 , +\infty\{$ وخطه البياني C والمطلوب :**

x	0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	-1	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- **دل الفيم الحدية المحلية للتابع f مبين نوع كل منها**
- **اكتب مجموع حلول المتراجحة $f\ (x) \le 0$**
- **ماعدد حلول المعادلة $f\ (\ x\ ) = 0$**
- **اكتب معادلة للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل**
- **ارسم المماسات السابقة للخط C ثم ارسم الخط C**

السؤال السادس: **ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :**



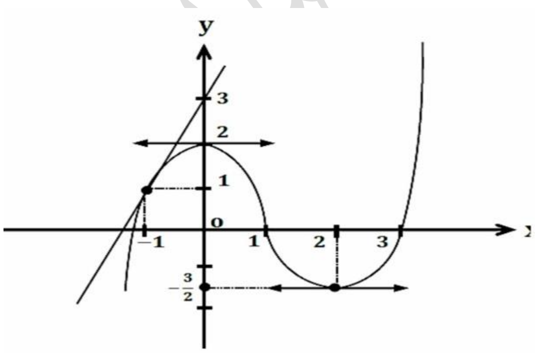
- **ماعدد حلول المعادلة $f\ (\ x\ ) = 0$**
- **احسب قيمة المشتق عند النقطة x = 0 ثم اكتب معادلة المماس T عند x = 0**
- **عين صورة المجال $I = \{\ -2\ , 2\ \}$**
- **دل على القيم الحدية مبينا نوعها**

السؤال السابع: **الجدول الاتي هو جدول تغيرات f المعرف على R والمطلوب**

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

- **أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$**
- **اوجد معادلة المقارب الافقي**
- **هل يوجد مماسات افقية ؟**
- **ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 0$**
- **هل $f\ (\ 2\ ) = 4$ قيمة حدية ؟ ولماذا**

السؤال الثامن: **ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R والمطلوب**



- **احسب $f'(2)$, $f(2)$**
- **دل على القيم الحدية للتابع f**
- **عين $f(\{\ 1\ , 3\ \})$**
- **أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$**
- **ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 2$**

المدرس: محمد خطيب

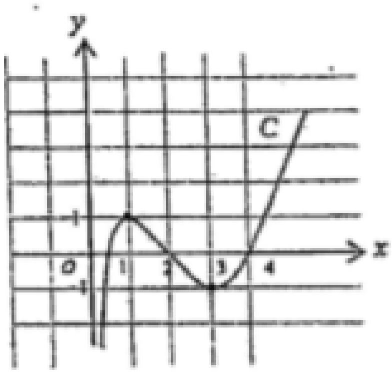
<u>السؤال التاسع</u>: الجدول الاتي هو جدول تغيرات f والمطلوب :

x	0		1		3
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	−3	↘	−4	↗	0

- **أوجد a , b اذا علمت ان التابع يكتب بالشكل :**

$$f\,(\,x\,) = ax^2 + bx - 3$$

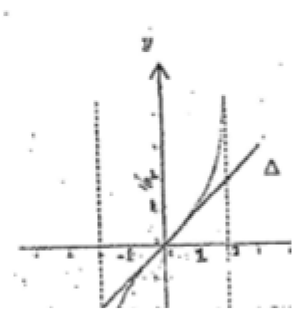
- **ارسم C**



<u>السؤال العاشر</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\}\,0\,,+\infty\,\{$ والمطلوب :

- **أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**
- **دل على القيم الحدية للتابع f مبينا نوعها**
- **جد حلول المتراجحة $f\,'\,(\,x\,) \leq 0$**
- **عين صورة المجال $I = \{\,1, 3\,\}$**

<u>السؤال الحادي عشر</u>: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\}\,-2\,,+2\,\{$ والمطلوب :



- **أوجد $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+2} f(x)$**
- **أوجد $f\,(\,0\,)\,,f\,'\,(\,0\,)$**
- **هل f التابع فردي ام زوجي**
- **اكتب معادلة المماس Δ**

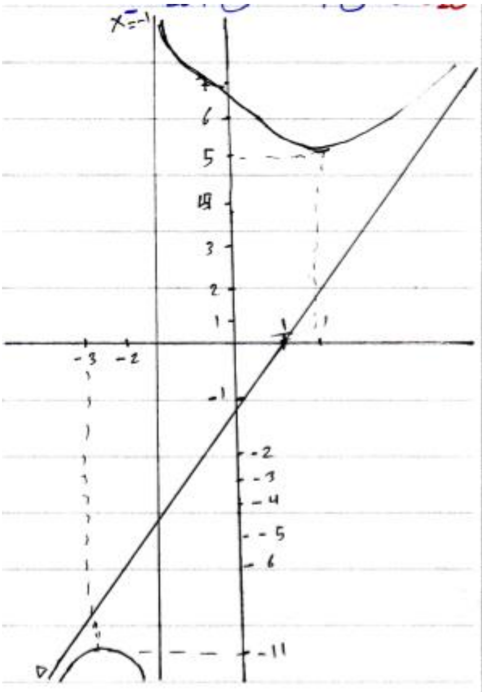
<u>السؤال الثاني عشر</u>: الجدول الاتي هو جدول تغيرات f والمطلوب

:

x	$-\infty$		−2		1		3		5		$+\infty$
f'		−	||	+	0	+	||	−	0	+	
f	5	↘	0	↗	2	↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘	1	↗	7

- **أوجد Df**
- **اوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة مع ذكر المقاربات ان وجدت**
- **عين القيم الحدية مبين نوعها**
- **هل يوجد مقارب مائل ؟ ولماذا**
- **اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها X = 1**

المدرس : محمد خطيب



- ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 3$
- أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

<u>السؤال الثالث عشر</u>: ليكن C الخط البياني للتابع f والمطلوب :

- أوجد Df ثم انهي عند الأطراف المفتوحة مع ذكر المقارب الشاقولي
- عين القيم الحدية مبينا نوعها
- اكتب معادلة المقارب المائل Δ
- نظم جدولا تغيرات f

اذا علمت ان التابع يكتب بالشكل : $f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x+1}$

أثبت وجود مقارب مائل وادرس الوضع النسبي

<u>السؤال الرابع عشر</u>: الجدول الاتي هو جدول تغيرات f والمطلوب :

x	$-\infty$		-2			3		$+\infty$
$f'(x)$		-	//	+	+1	//	-2	--
$f(x)$	1	↘ $-\infty$	//	$-\infty$	↗	0	↘	-3

- أوجد $\lim_{x\to-2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
- هل يوجد مقاربات غير مائلة ؟
- هل يوجد مماس شاقولي ؟ إذا امكن وجوده اكتب معادلة المماس الشاقولي
- هل يوجد مماس افقي ؟ ولماذا
- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين ومن اليسار في النقطة التي فاصلتها x = 3
- ماعدد حلول المعادلة $f(x) + 1 = 0$

بحث اللوغاريتمي النيبري

----- التابع اللوغاريتمي النبري $\ln(x)$ معرف على R_{+}^{*} ومستقره الفعلي R

----- نسمي e أساس اللوغاريتم

<u>مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي</u> :

G (x) <u>درجة أولى</u>

اشارة X موجبة $Df: \}a^{\pm}, +\infty\{$ $g(x) > 0$ $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$

اشارة X سالبة $Df: \}-\infty, a^{\pm}\{$ $g(x) < 0$ $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$

G (x) <u>درجة ثانية</u>

إشارة x^2 موجبة (برا الجذرين) $Df: \}-\infty, x_1\{\cup\}x_2, +\infty\{$

إشارة x^2 سالبة (جوا الجذرين) $Df: \}x_1, x_2\{$

G (x) <u>كسري</u>

إشارات متماثلة (برا الجذرين) $Df: \}-\infty, x_1\{\cup\}x_2, +\infty\{$

إشارات متماثلة (جوا الجذرين) $Df: \}x_1, x_2\{$

g(X) <u>مرفوع لتربيع أو قيمة مطلقة</u> R\{القيم التي تعدم الوغاريتم}

خواص اللوغاريتمي :	<u>للرسم</u> :
$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a.b)$	$\ln(1) = 0$ $\ln(2) = 0.7$
$\ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$	$\ln(3) = 1.1$ $\ln(5) = 1.7$
$\ln(a)^n = n.\ln(a)$	$\ln(7) = 1.9$ $e \cong 2.7$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	$e^2 \cong 7.3$ $\frac{1}{e^2} = 0.13$
$\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(a)$	$\sqrt{e} = 1.6$

ملاحظة : لايجوز
اصطلاح تابع قبل
إيجاد مجموعة

مشتق التابع اللوغاريتمي : $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ $\qquad$ $f(x) = \ln g(x)$

حل المعادلات والمتراجحات اللوغاريتمية :

المعادلـــــــة :

الشكل الأول : $\ln(g(x)) = \ln(h(x))$

خـــــطــــوات الحـــــــــل :

1) **نوجد** Df **لكل لكل** In **ثم نوجد** $D = D1 \cap D2 \cap D3 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (**شرط الحل النهائي**)
2) **نستخدم الخواص ان وجدت**
3) **نأخذ** e **الطرفين**
4) **ننقل الى طرف واحد ونحل المعادلة**
5) **نحتار المقبول ونرفض المرفوض ونمسي** $S\{\quad\}$ **مجموعة الحلول**

الشكل الثاني: $aIn^2(g(x)) + b\ln(g(x)) + c = 0$

تشبه المعادلة من الدرجة الثانية ..... **نفرض** $\ln(g(x)) = y$ **أي اصبح التابع** $ay^2 + by + c$
نحلها كمعادلة درجة ثانية

المتراجحة (لها نفس اشكال المعادلة)

خـــــطــــوات الحـــــــــل :

1) **نوجد** Df **لكل لكل** In **ثم نوجد** $D = D1 \cap D2 \cap D3 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (**شرط الحل النهائي**)
2) **نستخدم الخواص ان وجدت**
3) **نأخذ** e **الطرفين**
4) **ننقل الى طرف واحد ونحل المعادلة**
5) **نوجد شرط حل المتراجحة وليكن** $D1$ **ثم نوجد التقاطع** $D2 = D1 \cap D$

المدرس : محمد خطيب و نور صندفي

النهايات اللوغاريتمية

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = 0$
$\lim\limits_{x\to0} x.\ln x = 0$
$\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln(x-1)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x}{\ln(x+1)} = 1$
$\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x-1}{\ln x} = 1$
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

انتهى البحث..

انت قوي لاتدع احد يستهين بك

المدرس . محمد خطاب و نور صندي

بحث الأسي النيبري

----- **التابع الأسي النبري** $exp = e^x$ **معرف على** R **ومستقره الفعلي** R_+^*

<u>التابع العكسي</u> : هو تبديل كل Y ب X وكل X ب Y وهو متناظر نحو Y = X

<u>الأسئلة المتاحة للتابع العكسي</u> :

1) **اوجد التابع العكسي ل F**

2) **ماهي مجموعة التابع العكسي**

3) **ماهو مستقر التابع العكسي**

4) **استنتج رسم التابع العكسي**

<u>مجموعة تعريف التابع الأسي</u> : $f(x) = e^{g(x)} \quad Df : Dg$

<u>اشتقاق التابع الأسي</u> : $f(x) = e^{g(x)} \qquad f'(x) = g'(x)\ e^{g(x)}$

<u>المعادلات</u> :

الشكل الأول : $e^a = e^b$

In الاطراف $\quad a = b$

الشكل الثاني : $a^b = c^d$

$$e^{b\ln a} = e^{d\ln c}$$

In الاطراف $\quad b\ln a = d\ln c$

الشكل الثالث : $ae^{2x} + be^x + c = 0$

نفرض $e^x = t \qquad at^2 + bt + c = 0$

<u>لاتنسى</u> بعد إيجاد t_2 , t_1 **نرجع ال t لاصلها وهو** e^x

خواص الأسي :

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^b = e^{a.b}$$

$$e^{\ln(a)} = a$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^a.e^b = e^{a+b}$$

استنتاج رسم تابع :

- C_1 **ينتج عن C بالتناظر بالنسبة ل Y′Y** $f_1(x) = f(-x)$
- C_1 **ينتج عن C بالتناظر بالنسبة ل X′X** $f_1(x) = -f(x)$
- C_1 **ينتج عن C بالتناظر بالنسبة للمبدأ** $f_1(x) = -f(-x)$
- C_1 **ينتج عن C بالانسحاب الشعاعي** $\overrightarrow{aj}$ $f_1(x) = f(x) + a$
- C_1 **ينتج عن C بالانسحاب الشعاعي** $\overrightarrow{-a}$ $f_1(x) = f(x+a)$
- C_1 **ينتج عن C بأخذ نظير كل y سالبة الى الموجبة** $f_1(x) = |f(x)|$

انتهى البحث...

انت قوي لاتدع احد يستهين بك

المدرسان: محمد خطيب و نور صدقي

بحث المتتاليات

دراسة اطراد متتالية

إشارة الفرق :	**النسبة** :	**فرض تابع**
$U_{n+1} - U_n > 0$ متزايدة تماما $U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة تماما $U_{n+1} - U_n = 0$ ثابتة مجموع	$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ متزايدة تماما $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ متناقصة تماما $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ ثابتة أس عاملي	$U_n = f(n)$ ونشتق التابع $f'(x)$ $f'(x) > 0$ متزايدة تماما $f'(x) < 0$ متناقصة تماما $f'(x) = 0$ ثابتة

اشارة الفرق $U_{n+1} - U_n = b$ ▬ $U_{n+1} = U_n + b$

النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n} = a$ ▬ $U_{n+1} = aU_n$

الاستقراء الرياضي $U_{n+1} = aU_n + b$

المتتالية الحسابية :

تعريف : **هو كل حد ينتج عن الحد السابق بجمعه بعدد r**

اثبات : $U_{n+1} - U_n = r$

كتابة Un بدلالة n : $U_n = U_k + (n-k)r$, $U_n = U_1 + (n-1)r$, $U_n = U_0 + nr$

المجموع : $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ $\qquad$ $S_n = U_i + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots U_j$

عدد الحدود $\frac{j-i}{k} + 1 = n$ $\qquad$ $l = U_j$, $\qquad$ $a = U_i$,

ثلاث حدود متعاقبة : $b = \frac{a+c}{2}$

المتتالية الهندسية :

تعريف : **هو كل حد ينتج عن الحد السابق بضربه بعدد q**

اثبات : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

كتابة Un بدلالة n : $U_n = U_0 \,.\, q^n$, $U_n = U_1 \,.\, q^{n-1}$, $U_n = U_k \,.\, q^{n-k}$

المجموع : $S_n = a \,.\frac{1-q^n}{1-q}$ $S_n = U_i + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . . U_j$

عدد الحدود $\frac{j-i}{k} + 1 = n$ $a = U_i$

ثلاث حدود متعاقبة : $b^2 = a \,. c$

البرهان بالتدريج (الاستقراء الرياضي)

- **لإثبات صحة الخاصة (E (n صحيحة تتعلق بالعدد الطبيعي n في حالة** $n \geq n_0$
- **نأثبت صحة العلاقة في الحالة القاعدية** $n = n_0$ **أي نأثبت** E (n_0) **صحيحة**
- **نأثبت في حال** $n \geq n_0$ **أن الخاصة** E (n) **صحيحة تكون** E (n+1) **صحيحة**

أي بصيغة عامة نفترض ان الخاصة E (n) **صحيحة <u>ونسميها *</u> ثم نبرهن صحتها من اجل** E (n +1) **ومنه تكون** E (n) **صحيحة أيا كانت** $n \geq n_0$

<u>الاستفادة من البرهان بالتدريج :</u>

1) إثبات صحة مساواة **2) إثبات صحة متراجحة** **3) إثبات مقدار (من مضاعفات العدد ما)**

4) دراسة جهة اطراد متتالية معرفة بعلاقة تدريجية : $U_0 = C$ $U_{n+1} = aU_n + b$

نوجد الحدود الأولى : U_0 , U_1 , U_2 , U_3

$U_0 > U_1 > U_2 > U_3$ **نكمل بالاستقرار** $U_{n+1} - U_n < 0$ **متناقصة تماما**

$U_0 = U_1 = U_2 = U_3$ **نكمل بالاستقراء** $U_{n+1} - U_n = 0$ **ثابتة**

$U_0 < U_1 < U_2 < U_3$ **نكمل بالاستقرار** $U_{n+1} - U_n > 0$ **متزايدة تماما**

تخمين U_n بدلالة n

$$U_{n+1} = aU_n + b \qquad U_0 = C$$

نكتب الجدول التالي .

n	0	1	2	3	4
U_n	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4
a^n	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4

نواجه الحالتين :

- **اذا كان ناتج جمع او طرح عناصر السطر الثاني مع السطر الثالث يساوي عدد ثابت يكون** $U_n = k \pm a^n$ ⟵ $U_n \pm a^n = k$
- **في حال لم تتحقق الحالة السابقة نوجد r <u>على المسودة</u>** $r = \frac{b}{1-a} - c$ **ثم نضرب عناصر السطر الثالث ب r** $U_n = k \pm ra^n$ ⟵ $U_n \pm ra^n = k$

<u>لاتنسى</u> : هذه الطريقة لاتحتاج الى الاستقراء الرياضي الى في حال طلب تعيين او اثبات

<u>مثال على ماسبق</u> : المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ **معرفة وفق** :

$U_0 = 2 \qquad U_{n+1} = 2U_n - 3$ **والمطلوب** :

- **احسب** U_4 , U_3 , U_2 , U_1 **ثم خمن** U_n **بدلالة** n
- **بحساب عبارة** $U_n - 3$ **عبر عن** U_n **بدلالة** n

<u>مثال</u>: a , b , c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية احسبها علما أن

$$a \,.\, b \,.\, c = 64$$

$$a + b + c = 14$$

المدرسان : محمد خطيب و نور صندوقي

<u>مثال</u>: **a , b , c ثلاث أعداد حقيقية . $a \neq 0$ نعلم ان a , b, c هي ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية نرمز الى أساسها بالرمز q ، كما نعلم ان 3a , 2b ,c هي ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية ...... احسب q**

انتهى البحث..

انت قوي لاتدع احد يستهين بك

المدرسان : محمد خطيب و نور صندفي

بحث النهاية المتتالية

حالة المتتالية الهندسية :

$-1 < q < 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
$q = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
$q > 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
$q < -1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

جد العدد n_0 بحيث يحقق اذا كان $n > n_0$ كان $U_n \in]a , b[$

$r = b - l$ نصف القطر ، $l = \dfrac{a+b}{2}$ مركز المجال

$|U_n - l| \le r$ يحقق المتراجحة

ملاحظات هامة :

- **تبقى مبرهنات الإحاطة ذاتها**
- **نستطيع ان نفرض المتتالية تابع وننهي التابع هي نفسها نهاية المتتالية**
- **بس طلب نهاية U_{n+1} نحل المعادلة $f(x) = x$ يكون الحل L**

المتتاليتان المتجاورتان :

تكون متتالية متزايدة وأخرى متناقصة وتكون نهاية الفرق تساوي الصفر

المدرس : محمد خطيب و نور صدقي

تقارب متتالية

$$m \leq U_n \leq M$$

العدد الراجح :

- **اثبات عنصر راجح** $U_n - M \leq 0$
- **كل متتالية متزايدة فهي محدودة من الأعلى بالعدد الراجح**
- **كل متتالية متزايدة فاصغر اعدادها الراجحة هو نهايتا**

العدد القاصر :

- **اثبات عنصر قاصر** $U_n - m \geq 0$
- **كل متتالية متناقصة فهي محدودة من الادنى بالعدد القاصر**
- **كل متتالية متناقصة فاكبر اعدادها القاصرة هو نهايتا**

أهي متقاربة ؟ علل تقارب المتتالية

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

فهي متقاربة نحو العدد L $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$

تمثيل حدود متتالية :

- **نرسم** Y = X
- **نحدد على محور الفواصل** U_0
- **نرسم مستقيم شاقولي نحو التابع**
- **نرسم مستقيم افقي نحو** Y = X
- **نرسم مستقيم شاقولي نحو محور الفواصل لننشئ** U_1

انتهى البحث..

انت قوي لاتدع احد يستهين بك

نور صدقي