الرياضيات
للثالث الثانوي العلمي

تمارين في

قسم الفراغيّة -الأشعة-

تتضمن :

- أسئلة دورات
- نماذج وزارية
- تمارين خارجية امتحانية

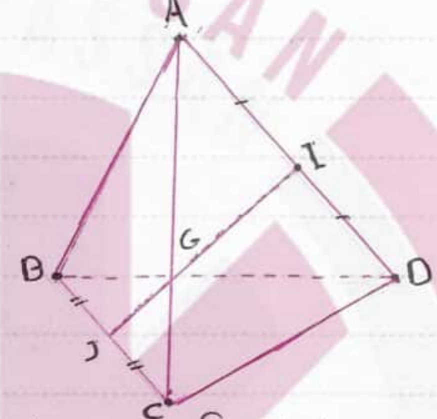
@BAC_MATH_AK

المدرّس : أحمد حسن 0932847372

المدرّس : خليل شيخو 0991736954

التمرين الأول:

ABCD رباعي وجوه مركز ثقله G
I منتصف [AD] ، J منتصف [BC]
أثبت أن النقاط I و G و J تقع على استقامة واحدة.



الحل:

G مركز ABCD فهي مركز الأبعاد للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$
I منتصف [AD] فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,1)$
و J منتصف [BC] فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$
حسب الخاصة التجميعية فإن:
النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$
فالنقاط I و G و J تقع على استقامة واحدة وتكون G تقع في منتصف [IG]

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(2,-1,0)$ والمستوي P الذي معادلته $2x+y-2z+9=0$
اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P:

الحل:

مركز الكرة A ونصف قطرها هو بعد A عن P:

$$R = dest(A,P) = \frac{|2(2)+(-1)-2(0)+9|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{12}{3} = 4$$

ومعادلة الكرة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Longrightarrow$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=16$$

التمرين الثالث:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

1. بين أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة
2. بين أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد
3. استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α, β, γ أعداداً حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

1. $\vec{AB}(9,-1,-1)$ $\vec{AC}(3,-2,1)$
والأشعة غير مرتبطة خطياً لأن مركباتها غير متناسقة فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

.2 $\vec{AC}(3,-2,1)$ $\vec{AD}(-1,-1,1)$

$\vec{AB}(9,-1,-1)$

$\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC} \Rightarrow (-1,-1,1) = a(9,-1,-1) + b(3,-2,1)$

$(-1,-1,1) = (9a+3b, -a-2b, -a+b)$

$$\begin{cases} 9a+3b=-1 \\ -a-2b=-1 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a+3b=-1 & 1 \\ -a-2b=-1 & 2 \\ a-b=-1 & 3 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين 2 و 3 نجد:

نعوض في $-3b=-2 \Rightarrow b=\frac{2}{3}$

الثانية نجد $a-\frac{2}{3}=-1 \Rightarrow a=\frac{-1}{3}$

نعوض في المعادلة الأولى نجد:

$9\left(\frac{-1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)=-1 \Rightarrow -1=-1$ محققة

بالتالي:

$\vec{AD} = \frac{-1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

فالأشعة تقع في مستوٍ واحد والنقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد

.3 $\vec{AD} = \frac{-1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \Rightarrow$

$3\vec{AD} + \vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{0} \Rightarrow$

$3\vec{AD} + \vec{AD} + \vec{DB} - 2\vec{AD} - 2\vec{DC} = \vec{0} \Rightarrow$

$2\vec{AD} + \vec{DB} - 2\vec{DC} = \vec{0} \Rightarrow$

$-2\vec{DA} + \vec{DB} - 2\vec{DC} = 0 \Rightarrow$

$2\vec{DA} - \vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$

إذاً D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$

طريقة ثانية لحل الطلب الثاني والثالث:

بعد ملاحظة أنه في الطلب الثالث طلب منا إثبات D مركز أبعاد لذلك نشكل من النقاط الأربعة ثلاثة أشعة تبدأ بالنقطة D

② $\vec{DA}(1,1,-1)$ $\vec{DB}(10,0,-2)$

$\vec{DC}(4,-1,0)$

$\vec{DA} = a\vec{DB} + \beta\vec{DC} \Rightarrow$

$(1,1,-1) = a(10,0,-2) + \beta(4,-1,0)$

$(1,1,-1) = (10a+4\beta, -\beta, -2a) \Rightarrow$

$10a+4\beta=1$ ① $-\beta=1$ ② $-2a=-1$ ③

من ② و ③ نجد $a=\frac{1}{2}$ و $\beta=-1$ ونعوض في ①

محققة وبالتالي النقاط A , B , C , D تقع في مستوٍ واحد.

③ $\vec{DA} = \frac{1}{2}\vec{DB} - \vec{DC} \Rightarrow 2\vec{DA} - \vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$

إذاً D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,+2)$

التمرين الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$.

1. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

2. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC)

واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

الحل:

1. $\vec{AB}(1,2,4)$ و $\vec{AC}(2,1,-1)$

بالتالي $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=2+2-4=0$

والمثلث ABC قائم في A

$AB=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$, $AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$. $S(ABC)=\frac{1}{2}\sqrt{21\times 6}=\frac{1}{2}\sqrt{126}$

$=\sqrt{\frac{63}{2}}$

2. يكون الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) اذا كان عمود على مستقيمين منه:

$\vec{n}\cdot\vec{AB}(2,-3,1)\cdot(1,2,4)=2-6+4=0$ $\vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}(2,-3,1)\cdot(2,1,-1)=4-3-1=0$ $\vec{n}\perp\vec{AC}$

اذاً $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) ويمر من $A(1,0,-1)$

$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$

$\Rightarrow 2x-3y+z-1=0$

3. حساب بعد D عن المستوي (ABC) وحجم رباعي الوجوه $DABC$

$dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$

$V(D,ABC)=\frac{1}{3}S(ABC)\cdot h=$

$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{63}{2}}\cdot\sqrt{14}=\frac{1}{3}(3\times 7)=7$

التمرين الخامس:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$

و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$

بين مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية

1. المثلث ABC قائم
2. المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)
3. حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V=81$

الحل:

① $\vec{AB}=(3,3,3)$. $\vec{AC}(3,0,-3)$. $\vec{AD}(-3,6,-3)$

$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC}=9+0-9=0$ صحيحة

② $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=-9+18-9=0\Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{AD}$

$\vec{AC}\cdot\vec{AD}=+9+0-9=0\Rightarrow \vec{AC}\perp\vec{AD}$

وبما أن $\vec{AD}$ عمود على كل من $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

فهو عمود على المستوي (ABC) صحيحة

③ $V=\frac{1}{3}S(ABC)\cdot h=$

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\right)\cdot\|\vec{AD}\|$

والقضية خاطئة

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{27}\cdot\sqrt{18}\right)\sqrt{54}=\frac{1}{6}3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6}\ \boxed{=27}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين السادس:

المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق :

$s \in \mathbb{R}$:

$$L: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad L': \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

1- أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها؛

2- جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L , L'

الحل:

1- شعاعي توجيه المستقيمين :

$\vec{u}(0,-1,-2)$, $\vec{u'}(-5,-2,2)$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستقيمان L , L' غير متوازيين لنتحقق فيما إذا كانا متقاطعين بالحل المشترك:

$$\begin{cases} -1 = 4 - 5s \implies s = 1 & (1) \\ 1 - t = 3 - 2s \implies -t + 2s - 2 = 0 & (2) \\ 1 - 2t = -1 + 2s \implies -2t - 2s + 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $s = 1$ نعوض في (2)

نجد $t = 0$ نعوض في (3) نجد

$0 - 2 + 2 = 0 \implies 0 = 0$

محققة بالتالي L , L' متقاطعان

ويقعان في مستوي واحد ولإيجاد

نقطة التقاطع:

نعوض $t = 0$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم L

فنجد نقطة التقاطع هي $A(-1,1,1)$

2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ هو ناظم المستوي المطلوب بالتالي

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0 \implies -b - 2c = 0 \quad (1)$

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0 \implies -5a - 2b + 2c = 0 \quad (2)$

من 1 نجد $b = -2c$ نعوض في (2)

نجد $-5a + 4c + 2c = 0 \implies 5a = 6c \implies a = \frac{6}{5}c$

وبالتالي بفرض $c = 5$ نجد $a = 6$ و $b = -10$

بالتالي $\vec{n}(6,-10,5)$ والمستوي مار من $A(-1,1,1)$

$6(x+1) - 10(y-1) + 5(z-1) = 0 \implies$

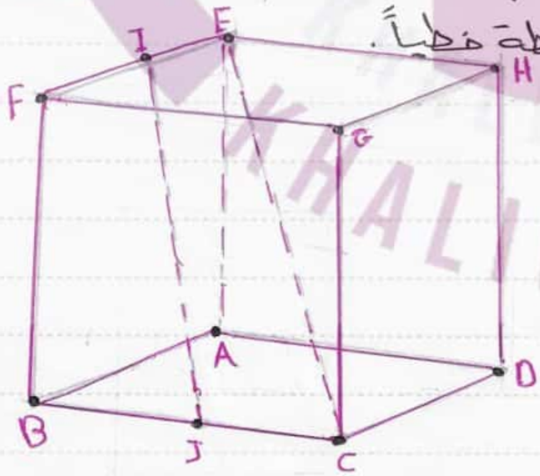
$6x - 10y + 5z + 11 = 0$

التمرين السابع: (نموذج وزاري)

في الشكل المجاور مكعب I و J منتصفات $[BC]$ و $[EF]$

1- أثبت أن $2(\vec{CJ} + \vec{IE}) = \vec{CE} - \vec{CG}$

2- أثبت أن الأشعة $\vec{CE}$ و $\vec{CG}$ و $\vec{IJ}$ مرتبطة خطياً.



الحل:

1) $2(\vec{CJ}+\vec{IE}) = 2\left(\frac{1}{2}\vec{CB}+\frac{1}{2}\vec{FE}\right) =$

$\vec{CB}+\vec{FE} = \vec{GF}+\vec{FE} = \vec{GE} = \vec{GC}+\vec{CE} = \vec{CE}-\vec{CG}$

2) $\vec{IJ} = \vec{IE}+\vec{EC}+\vec{CJ} = (\vec{CJ}+\vec{IE})+\vec{EC} = \frac{1}{2}(\vec{CE}-\vec{CG})-\vec{CE} = -\frac{1}{2}\vec{CE}-\frac{1}{2}\vec{CG}$

والأشعة $\vec{CE}$ و $\vec{CG}$ و $\vec{IJ}$ مرتبطة خطياً

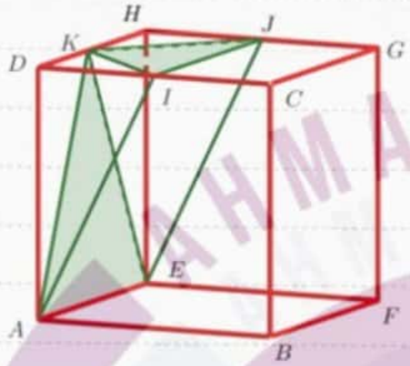
المسألة الأولى: (نموذج وزاري)

تأمل مكعباً ABCDEFGH لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه [DC] و [HG] و [HD] بالترتيب نتخذ $(A;\vec{AB},\vec{AE},\vec{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ:

1. أوجد إحداثيات النقاط A, I, E
2. اكتب معادلة المستوي (AIJE) ~~وحجم الهرم KAIJE~~
3. احسب بعد K عن المستوي (AIJE) وحجم الهرم KAIJE
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي (AIJE) والمار بالنقطة K
5. احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (AIJE)
6. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,a) و (I,β) و (E,γ)

حيث a و β و γ هي أثقال يطلب تعيينها.

ل



الحل:

① $E(0,1,0)$ و $B(1,0,0)$

$A(0,0,0)$ و $I(\frac{1}{2},0,1)$

② $P: ax+by+cz+d=0$

$A\in P \Rightarrow d=0 \quad I\in P \Rightarrow \frac{1}{2}a+c=0$

$\Rightarrow a+2c=0 \quad E\in P \Rightarrow b=0$

$-2cx+cz=0 \Rightarrow P: 2x-z=0$

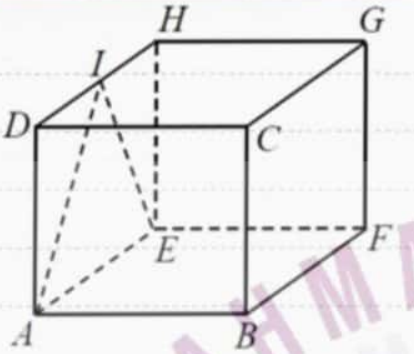
③ $K(0,\frac{1}{2},1) \Rightarrow dist(K,P) = \frac{|0+0-1+0|}{\sqrt{4+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}$

④ $\vec{V}=\vec{n}=(2,0,1) \Rightarrow$

$$d: \begin{cases} x = at+x_0 = 2t \\ y = bt+y_0 = \frac{1}{2} \\ z = ct+z_0 = -t+1 \end{cases} \quad t\in R$$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954



الحل:

1- $I(0, \frac{1}{2}, 1)$, $E(0, 1, 0)$, $A(0, 0, 0)$

2- $G\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3}, \frac{y_A+y_E+y_I}{3}, \frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right)$

$= \left(\frac{0+0+0}{3}, \frac{0+1+\frac{1}{2}}{3}, \frac{0+0+1}{3}\right)$

$= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

3- $3\vec{FM} = \vec{BA} + \vec{EO} \Rightarrow 3\vec{FM} = \vec{FE} + \vec{EO} = \vec{FO}$

$\Rightarrow \vec{FM} = \frac{1}{3}\vec{FO}$

4- $\vec{IA}(0, -\frac{1}{2}, -1)$, $\vec{IE}(0, \frac{1}{2}, -1)$

$\Rightarrow \vec{IA} \cdot \vec{IE} = 0 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

التمرين التاسع: (نموذج وزاري)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا نقطتين $A(2, -1, 0)$ $B(-1, 3, 5)$

والمستوي P الذي يقبل معادلة

$2x - 3y + z - 5 = 0$

1- أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها

2- اكتب معادلة المستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B.

5- نعوض في معادلة المستوي

$4t + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{5}$ $N\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$

6- $\vec{AN} = a\vec{AI} + \beta\vec{AE} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) =$

$a\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) + \beta(0, 1, 0) =$

$\left(\frac{1}{2}a, \beta, a\right) \Rightarrow a = \frac{4}{5}$, $\beta = \frac{1}{2}$

$\vec{AN} = \frac{4}{5}\vec{AI} + \frac{1}{2}\vec{AE} = \frac{4}{5}(\vec{AN} + \vec{NI})$
$+ \frac{1}{2}(\vec{AN} + \vec{NE})$

$10\vec{AN} = 8\vec{AN} + 8\vec{NI} + 5\vec{AN} + 5\vec{NE}$

$\Rightarrow -3\vec{NA} + 8\vec{NI} + 5\vec{NE} = \vec{0}$

ومنه N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -3)$ و $(I, 8)$ و $(E, 5)$

التمرين الثامن: (نموذج وزاري)

نُجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 مزوداً بمعلم متجانس $(A; AB, AE, AD)$

حيث I هي منتصف $[DH]$

1- أعط إحداثيات النقاط A, E, I

2- جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI

3- أين تقع النقطة M التي تحقق $3\vec{FM} = \vec{BA} + \vec{EO}$

4- احسب $\vec{IA} \cdot \vec{IE}$

الحل:

1- $\overrightarrow{AB}=(-3,4,5)$ وهو شعاع توجيه المستقيم والشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ هو ناظم على المستوي P

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-6-12+5=-13$

ليسا متعامدين فالمستقيم لا يوازي المستوي فهو قاطع له بنقطة

المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$d:\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=4t-1 \\ z=5t \end{cases}$$

نعوض في معادلات المستوي:

$-6t+4-12t+3+5t-5=0 \Longrightarrow$

$t=\dfrac{2}{13} \Longrightarrow C\left(\dfrac{20}{13},\dfrac{5}{13},\dfrac{10}{13}\right)$

2- إن كل من الشعاعين $\vec{n}$ ، $\overrightarrow{AB}$ يوازي الناظم للمستوي وليكن $\vec{n_o}(a,b,c)$

بالتالي:

$\vec{n_p}\cdot\vec{n_o}=0 \Longrightarrow 2a-3b+c=0 \Longrightarrow$

$6a-9b+3c=0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n_o}=0 \Longrightarrow -3a+4b+5c=0 \Longrightarrow$

$-6a+8b+10c=0$

بالحل المشترك بالجمع نجد:

$-b+13c=0 \Longrightarrow b=13c$

$2a-39c+c=0 \Longrightarrow a=19c$

بإعطاء قيمة ما $c=1$ يكون $\vec{n_o}(19,13,1)$ والمستوي مار بالنقطة $A(2,-1,0)$ بالتالي

$19(x-2)+13(y+1)+(z-0)=0$

$\Longrightarrow Q: 19x+13y+z-25=0$

التمرين العاشر: (نموذج وزاري)

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$
$B(4,3,-1)$

الحل:

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المحور فهي متساوية البعد عن A و B

بالتالي $[AM]^2=[BM]^2$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=$

$(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 \Longrightarrow$

$-4x+2y-6z+14=-8x-6y+2z+26$

$\Longrightarrow 4x+8y-8z-12=0 \Longrightarrow \cancel{x+2y}$

$\{x+2y-4z-3=0\}$

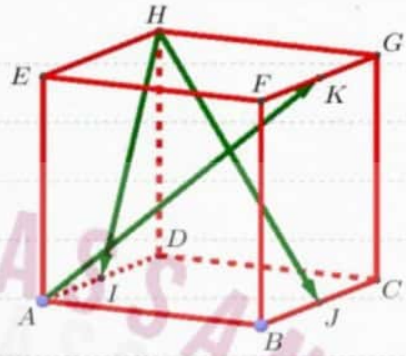
التمرين الحادي عشر (نموذج وزاري)

مكعب $ABCDEFGH$ مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I ، J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$

1- احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{HJ}$ ، $\overrightarrow{HI}$ ، $\overrightarrow{AK}$

2- أوجد عددين حقيقين a و b يحققان المساواة: $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$

ثم استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ ، $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.



الحل:

1. $A(1,0,0)$ و $D(0,0,0)$

$H(0,0,1)$ و $C(0,1,0)$

$J(\frac{1}{2},1,0)$ و $I(\frac{1}{2},0,0)$

$K(\frac{1}{2},1,1)$

$\overrightarrow{AK}(-\frac{1}{2},1,1)$ $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{2},0,-1)$

$\overrightarrow{HJ}(\frac{1}{2},1,-1)$

2. $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ} \Rightarrow (-\frac{1}{2},1,1) = (\frac{a}{2},0,-a) + (\frac{b}{2},b,-b) = (\frac{a+b}{2}, b, -a-b)$

$a+b=-1 \;,\; b=1 \;,\; -a-b=1 \Rightarrow$

$b=1, a=-2 \Rightarrow \overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$

وبما أن $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مستقلة خطياً

فالأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

مرتبطة خطياً.

التمرين الثاني عشر (نموذج وزاري)

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة

من CD تحقق: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J \in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

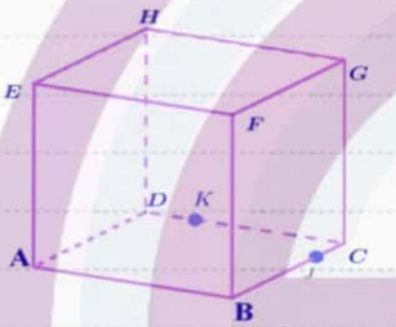
والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط H,E,J,K,G في المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$

2- أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$ ، $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً

3- أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً.

4- أثبت أن المستقيم HK يوازي (EGJ)



الحل:

1. $G(1,1,1)$ $K(\frac{1}{4},0,1)$

$J(1,0,\frac{3}{4})$ $E(0,1,0)$ $H(0,1,1)$

2. $\overrightarrow{EJ}(1,-1,\frac{3}{4})$ $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$

الشعاعين $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتها غير متناسبة.

3. $\overrightarrow{HK} = a\overrightarrow{EJ} + b\overrightarrow{EG} \Rightarrow$

$(\frac{1}{4},-1,0) = a(1,-1,\frac{3}{4}) + b(1,0,1)$

$\Rightarrow$

$(\frac{1}{4},-1,0) = (a+b, -a, \frac{3}{4}a+b) \Rightarrow a+b=\frac{1}{4}$ ①

$a=1$ ②

$\frac{3}{4}a+b=0$ ③

بحل المعادلات الثلاثة نجد $a=1 \;,\; b=-\frac{3}{4}$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK
إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

بالتالي $\vec{HK} = \vec{EJ} - \frac{3}{4}\vec{EG}$

والأشعة $\vec{EJ}, \vec{EG}, \vec{HK}$

مرتبطة خطياً

4. الأشعة $\vec{EJ}, \vec{EG}, \vec{HK}$ مرتبطة خطياً فهي تقع في مستوٍ واحد

بالتالي المستقيم HK يوازي (EGJ)

المسألة الثانية (نموذج وزاري)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$

$C(3,1,-2)$ $D(-4,2,1)$

والمطلوب:

1. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

2. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الرباعي الوجوه $(D.ABC)$

الحل:

1. $\vec{AB}(1,2,4)$ $\vec{AC}(2,1,1)$

$\vec{BC}(1,-1,-5)$

$AB^2 = 1+4+16 = 21$

$AC^2 = 4+1+1 = 6$

$BC^2 = 1+1+25 = 27$

بما أن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فالمثلث ABC قائم في A مساحته:

$S(ABC) = \frac{1}{2} \times \sqrt{21} \times \sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$

2. $\vec{n}\cdot\vec{AB} = (2,-3,1)\cdot(1,2,4)$

$= 2-6+4 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = (2,-3,1)\cdot(2,1,-1)$

$= 4-3-1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AC}$

بالتالي $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC ومار من $A(1,0,-1)$

$(ABC): 2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0$

$\Rightarrow 2x - 3y + z - 1 = 0$

3. $dist(D.ABC) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$

$\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$

$V(D.ABC) = \frac{1}{3} S(ABC) . dist(D.P) =$

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{14} \times \sqrt{14} = 7$

المسألة الثالثة: (نموذج وزاري)

مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه يساوي 3 في المعلم $(A;\frac{1}{3}\vec{AB},\frac{1}{3}\vec{AD},\frac{1}{3}\vec{AE})$

1. عين إحداثيات النقاط G و E و B و D.

2. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG).

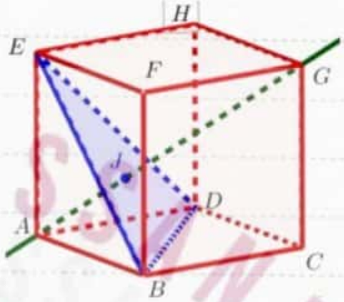
3. أثبت أن المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB).

4. المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها.

5. أثبت أن J هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله.

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

6. احسب حجم رباعي الوجوه AEDB.



الحل:

1. $D(0.3.0)$ $B(3.0.0)$

$E(0.0.3)$ $G(3.3.3)$

2. المستقيم (AG) مار من $A(0.0.0)$ و $\vec{AG}(3.3.3)$ بالتالي: $t\in\mathbb{R}$

$$(AG)\begin{cases} x=3t \\ y=3t \\ z=3t \end{cases}$$

3. $\vec{EB}(3.0.-3)$ $\vec{ED}(0.3.-3)$

$\vec{V}.\vec{ED}$ $(3.3.3)(0.3.-3)=0+9-9=0 \ \vec{V}\perp\vec{ED}$

$\vec{V}.\vec{EB}$ $(3.3.3)(3.0.-3)=9+0-9=0 \ \vec{V}\perp\vec{EB}$

بالتالي المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB)

4. نكتب معادلة المستوي المار من $E(0.0.3)$ وناظمه $\vec{AG}(3.3.3)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow$

$3(x-0)+3(y-0)+3(z-3)=0$

$(EDB): 3x+3y+3z-9=0$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي: $9t+9t+9t-9=0 \Rightarrow \frac{1}{3}$

بالتالي نقطة التقاطع هي $J(1.1.1)$

5. $\vec{EJ}(1.1.-2)$ $\vec{DJ}(1.-2.1)$

$\vec{BJ}(-2.3.3)$

$\vec{BJ}.\vec{ED}=(-2.3.3)(0.3.-3)=0$

$\vec{BJ}\perp\vec{ED}$ BJ ارتفاع

$\vec{DJ}.\vec{EB}=(1.-2.1)(3.0.-3)=0$

$\vec{DJ}\perp\vec{EB}$ DJ ارتفاع

$\vec{EJ}.\vec{BD}=(1.1.-2)(-3.3.0)=0$

$\vec{EJ}\perp\vec{BD}$ EJ ارتفاع

وبالتالي J هي نقطة تلاقي الارتفاعات المثلث EDJ واحداثيات مركز الثقل:

$$\left(\frac{0+3+0}{3} + \frac{0+0+3}{3} + \frac{3+0+0}{3}\right)=(1.1.1)$$

بالتالي J هي نقطة تقاطع الارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله

طريقة ثانية للحل:

المثلث EDJ متساوي الأضلاع لأن أضلاعه أقطار في مربعات مطبوقة بالتالي ارتفاعاته هي متوسطات بالتالي نقطة تقاطعهما هي مركز ثقل المثلث احداثيات مركز الثقل:

$$\left(\frac{0+3,0}{3} + \frac{0+0+3}{3} + \frac{3+0+0}{3}\right)=(1.1.1)$$

بالتالي J هي نقطة تقاطع الارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله.

6. $V(AEDB)=\frac{1}{3}S(ABD).AE=$

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{3\times3}{2}\right)\times3=\frac{9}{2}$

التمرين الثالث عشر (نموذج وزاري)

ABCD رباعي وجوه G مركز ثقل المثلث DBC جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$\|\vec{MB}+\vec{MD}+\vec{MC}\| = \|3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MD}-\vec{MC}\|$

الحل:

بما أن G مركز ثقل المثلث DBC فإن: $\vec{MB}+\vec{MD}+\vec{MC}=3\vec{MG}$

$3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MD}-\vec{MC} =$

$3\vec{MA}-(\vec{MB}+\vec{MD}+\vec{MC}) =$

$3(\vec{MA}-\vec{MG}) = 3\vec{GA}$

بالتالي المساواة المفروضة تكافئ:

$\|3\vec{MG}\| = \|3\vec{GA}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \|\vec{GA}\|$

ومجموعة النقاط M في الفراغ تمثل سطح كرة مركزها G ونصف قطرها GA

المسألة الرابعة: (نموذج وزاري)

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ ، $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\vec{AB}$ شعاعاً ناظماً وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$

وأخيراً لتكن الكرة S التي مركزها A ونصف قطرها AB

1. أثبت أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P

2. جد معادلة الكرة S

3. أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S.

4. أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q.

5. ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

a: أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P, Q.

b: أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [BC]

الحل:

1. المستوي P مار من النقطة $B(3,2,0)$ و $\vec{n}=\vec{AB}(2,1,-1)$ بالتالي

$2(x-3)+1(y-2)-1(z+0)=0 \Longrightarrow$

$P: 2x+y-z-8=0$

2. الكرة S التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها

$R=AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$S: (x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

$\Longrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

3. فالمستوي Q مماس للكرة S $\Leftarrow$

$dist(A,Q)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$

$\dfrac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

4- $\vec{CA}(1,-1,2)$ ، $\vec{n}_Q(1,-1,2)$

بالتالي $\vec{AC} \perp Q$ ولنتحقق أن $C \in Q$

$0-2-2+4=0$ محققة

بالتالي النقطة C هي مسقط النقطة A على المستوي Q.

5- a: يكون d هو الفصل المشترك للمستويين إذا احقق معادلتيهما:

$P: 2t+12-5t-4+3t-8=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

$Q: t-12+5t+8-6t+4=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

اذاً المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q.

b: لتكن H منتصف $[BC]$ فيكون

$\vec{BC}=(-3,0,-1)$ و $H\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$

$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0(y-2)-1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$

$\Rightarrow 3x+z-4=0$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي نجد $6t+8-6t=8$

$\Rightarrow 8=8$

اذاً المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

التمرين الرابع عشر (نموذج وزاري)

لتكن النقاط $A(3,5,2)$ $B(2,-1,3)$ $C(0,-2,2)$ والمطلوب:

1- احسب احداثيات منتصف القطعة $[AC]$

2- احسب مركبات الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

3- عين احداثيات K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

الحل:

1- $I\left(\frac{3+0}{2},\frac{5-2}{2},\frac{2+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$

2- $\vec{AB}(-1,-6,1)$ $\vec{AC}(-3,-7,0)$

3- يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع اذا كان

$\vec{CK}=\vec{BA} \Rightarrow (x_K-0, y_K+2, z_K-2)=(1,6,-1)$

$\Rightarrow K(1,4,1)$

المسألة الخامسة (نموذج وزاري)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقطتان $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$

والمستوي P الذي معادلته:

$P: x-y+3z-4=0$

والمطلوب:

1- جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P والمار من النقطتين A و B

2- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار A ويعامد المستوي P.

3- عين احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P

4- أعط معادلة المجموعة E المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\vec{AM}\cdot\vec{BM}=0$ وما طبيعة المجموعة E

الحل:

1- بفرض $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ولدينا

$\vec{AB}(1,1,2)$ $\vec{n}_P(1,-1,3)$

بالتالي $\vec{n_Q}\cdot\vec{n_P}=0$ ---- ①

$\vec{n_Q}\cdot\vec{AB}=0$ ---- ②

$a-b+3c=0$ (1)

$a+b+2c=0$ (2)

بالجمع $2a+5c=0 \Rightarrow a=\frac{-5}{2}c$

نفرض $c=2$ بالتالي $a=-5$ ومنه $b=1$ بالتالي معادلة المستوي Q

$-5(x-2)+(y-0)+2(z-4)=0 \Rightarrow$

$-5x+y+2z+2=0$

2- المستقيم d مار من $A(1,-1,2)$ ويعامد المستوي P بالتالي: $\vec{u}=\vec{n_P}(1,-1,3)$

بالتالي التمثيل الوسيطي للمستقيم d هو:

$$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1 \\ z=3t+2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

3- النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P هي نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P.

$t+1+t+1+9t+6-4=0 \Rightarrow$

$11t=4 \Rightarrow t=\frac{-4}{11} \Rightarrow$

$A'(\frac{7}{11},\frac{-7}{11},\frac{10}{11})$

4- نفرض $M(x,y,z)$

$\vec{AM}\cdot\vec{BM}=0 \Rightarrow$

$(x-1,y+1,z-2)\cdot(x-2,y-0,z-4)=0$

$x^2-3x+2+y^2+y+z^2-6z+8=0$

$\Rightarrow (x^2-3x+\frac{9}{4})+(y^2+y+\frac{1}{4})+(z^2-6z+9)=-10+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+9 \Rightarrow$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-3)^2=\frac{6}{4}$

مجموعة النقاط M هي كرة مركزها $\Omega(\frac{3}{2},\frac{1}{2},3)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$

التمرين الخامس عشر: (نموذج وزاري)

ABCD رباعي وجوه مركز ثقله G فيه K مركز ثقل الوجه BCD أثبت أن النقاط K,A,G تقع على استقامة واحدة وعين موضع G على القطعة المستقيمة [AK]

الحل:

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(D,1)$ $(C,1)$ $(B,1)$

K مركز ثقل الوجه BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D,1)$ $(C,1)$ $(B,1)$

حسب الخاصية التجميعية للنقاط تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(K,3)$ $(A,1)$

إذاً النقاط A, G, K تقع على استقامة واحدة ومنه G يقع على [AK]

و $\vec{AG}=\frac{3}{4}\vec{AK}$

المسألة السادسة: (نموذج وزاري)

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات فيه $AE = 1$, $AD = 4$, $AB = 2$ وليكن I منتصف [AD] والنقطة J تحقق $\vec{FJ} = \frac{1}{4}\vec{FG}$

نتأمل المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AD}, \vec{AE})$ والمطلوب:

1- جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات كل من I - J

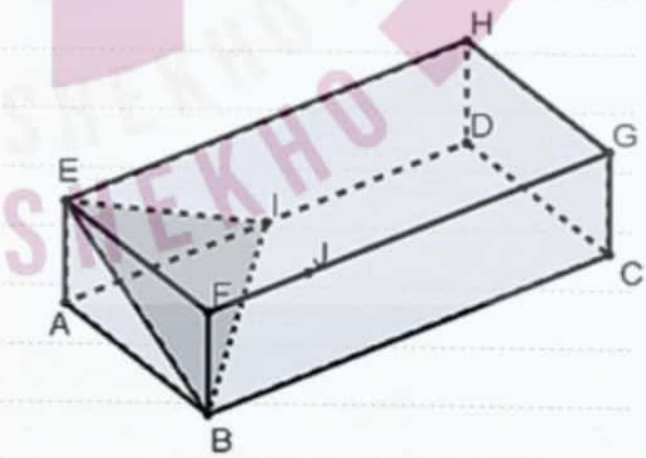
2- أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي $x+y+2z-2=0$

3- بين نوع المثلث EIB ثم احسب مساحته

4- احسب بعد G عن المستوي (EIB)، واستنتج حجم رباعي الوجوه G - EIB

5- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودياً على المستوي (EIB)

6- استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة [BI]



الحل:

1- $G(2,4,1)$ $H(0,4,1)$ $F(2,0,1)$

$C(2,4,0)$ $E(0,0,1)$ $D(0,4,0)$

$B(2,0,0)$ $A(0,0,0)$

I منتصف [AB] و $\vec{FJ} = \frac{1}{4}\vec{FG}$

بالتالي $J(2,1,1)$ $I(0,2,0)$

2- بما أن B على محور التراتيب I على محور الفواصل E على محور الرواقم

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$$

$$\Rightarrow x+y+2z-2=0$$

3- $(EI)^2 = (0-0)^2+(2-0)^2+(0-1)^2 = 5$

$(EB)^2 = (2-0)^2+(0-0)^2+(1-0)^2 = 5$

$(BI)^2 = (0-2)^2+(2-0)^2+(0-0)^2 = 8$

نلاحظ أن المثلث متساوي الساقين قاعدته $BI = 2\sqrt{2}$ وبفرض E' منتصف القاعدة

$$EE' = \sqrt{5-2} = \sqrt{3} \Rightarrow S_{EIB} = \frac{EE'.BI}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

4- $$dist(G,EIB) = \frac{|1(2)+1(4)+2(1)-2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow V_{GEIB} = \frac{1}{3}h.S = \frac{1}{3}\sqrt{6}.\sqrt{6} = 2$$

5- d يمر بالنقطة $J(2,1,1)$ وعمودي على EIB إذاً $\vec{u}_d = \vec{n}_{EIB}(1,1,2)$

إعداد المدرسين:
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos(\vec{AB},\vec{AC})$ -2
$= 4\cdot4\cos(\frac{\pi}{3}) = 4\cdot4\cdot\frac{1}{2} = 8$

التمرين الساتع عشر: (نموذج وزاري)
لتكن النقاط $A(1,-1,2)$
$D(0,0,2)\ C(2,3,-1)\ B(2,1,0)$
والمطلوب:
1- عين احداثيات G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط
$(D,1)\quad(C,2)\quad(B,2)\quad(A,1)$
2- حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق
$\|\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}+\vec{MD}\|=6$
3- جد معادلة للمجموعة S.
الحل:
1- G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة
$(A,1)\quad(B,2)\quad(C,2)\quad(D,1)$

$x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \frac{1(1)+2(2)+2(2)+1(0)}{1+2+2+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \frac{1(-1)+2(1)+2(3)+1(0)}{6} = \frac{7}{6}$

$z_G = \frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \frac{1(2)+2(0)+2(-1)+1(2)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$G\left(\frac{3}{2},\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$

بالتالي
$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1 & t\in\mathbb{R}\\ z=2t+1\end{cases}$

6- إن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EIB)
لأن المستقيم d مار من J وعمودي على EIB بالتالي
$(t+2)+(t+1)+2(t+1)-2=0 \Rightarrow$
$6t+3=0 \Rightarrow t=\frac{-1}{2} \Rightarrow J'(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$
$\vec{BJ'}(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0),\quad \vec{BI}(-2,2,0) \Rightarrow$
$\vec{BI}=4\vec{BJ'}$
اذاً النقاط I, J', B تقع على استقامة واحدة اذاً J' تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

التمرين السادس عشر: (نموذج وزاري)
ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 فيه I منتصف $[CD]$
1- وضع النقطة M المحققة للعلاقة
$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{BI}$
2- احسب العدد $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
الحل:
$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{BI}=$ (1)
$\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AC})-\vec{BI}=\frac{1}{2}(2\vec{AI})-\vec{BI}=$
$\vec{AI}-\vec{BI}=\vec{AI}+\vec{IB}=\vec{AB} \Rightarrow$
M تنطبق على B

2_

$\|\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}+\vec{MD}\| = 6 \Rightarrow$

$\|6\vec{MG}\| = 6 \Rightarrow 6MG = 6 \Rightarrow MG=1$

بالتالي S مجموعة النقاط M تمثل معادلة كرة مركزها G نصف قطرها $r=1$

3_ $S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{7}{6})^2+(z-\frac{1}{3})^2=1$

المسألة السابعة: (نموذج 8 وزاري)

ليكن لدينا المكعب ABCDEFGH طول حرفه 1 و T نقطة من [AB] تحقق $\vec{AT}=\frac{2}{5}\vec{AB}$

و N نقطة من [AD] تحقق $\vec{AN}=\frac{2}{5}\vec{AD}$

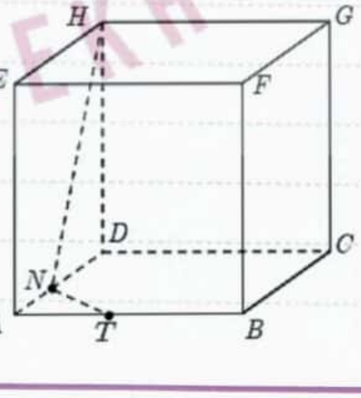
1_ في المعلم المتجانس $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ جد احداثيات النقاط H, F, N, T

2_ جد الشعاعين $\vec{NT}$ $\vec{NH}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT)

3_ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF)

4_ استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

5_ اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) ما طبيعته



الحل:

1_ $F(1,0,1)$ $H(0,1,1)$ $G(1,1,1)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $C(1,1,0)$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$

$T(\frac{2}{5},0,0)$ $N(0,\frac{2}{5},0)$

2_ $\vec{NT}(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0)$, $\vec{NH}(0,\frac{3}{5},1)$

وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (HNT) بالتالي:

(1) $\vec{n}\perp\vec{NT} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{NT}=0 \Rightarrow \frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=0 \Rightarrow a=b$

(2) $\vec{n}\perp\vec{NH} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{NH}=0 \Rightarrow \frac{3}{5}b+c=0$

بفرض بالتالي $b=5$ و $a=5$ و $c=-3$

ومنه $\vec{n}(5,5,-3)$ والمستوي يمر من $H(0,1,1)$

$5(x-0)+5(y-1)-3(z-1)=0 \Rightarrow$

$(HNT): 5x+5y-3z-2=0$

3_ المستقيم (EF) مار من $E(0,0,1)$ وشعاع توجيهه هو $\vec{EF}(1,0,0)$ بالتالي

$$EF\begin{cases} x=t \\ y=0 \quad t\in R \\ z=1 \end{cases}$$

4_ $\vec{n}(5,5,-3)$ $\vec{u}(1,0,0) \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=5\neq 0$

ومنه (EF) قاطع للمستوي

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) في معادلة المستوي (HNT)

$5(t)+5(0)-3(1)-2=0 \Rightarrow$

$5t-5=0 \Rightarrow t=1$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) نجد نقطة التقاطع هي $(1,0,1)$ وهي نفسها النقطة F

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

5- F نقطة تقاطع المستقيم (FF) مع المستوي (TNH) وبالتالي المستوي التقاطع هو $(HNTF)$ بما أن المستويان $(ABCD)$ و $(EFGH)$ متوازيان والمستوي (TNH) قاطع لهما بالتالي الفصلين المشتركين (NT) و (HF) متوازيين والمقطع شبه منحرف

$$HN=\sqrt{0+\frac{9}{25}+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$FT=\sqrt{\frac{9}{25}+0+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

بالتالي $HN=FT$ فالمقطع شبه منحرف متساوي الساقين

التمرين الثامن عشر: (نموذج وزاري)

ادرس وضع المستقيمين d, d' المعرفين كما يلي:

$$d\begin{cases}x=2t-5\\ y=t-2\\ z=-\frac{1}{2}t+3\end{cases} t\in\mathbb{R} \qquad d'\begin{cases}x=s+5\\ y=5\\ z=2s+5\end{cases} s\in\mathbb{R}$$

الحل:

شعاع توجيه المستقيم d هو $\vec{u}(2,1,-\frac{1}{2})$

وشعاع توجيه المستقيم d' هو $\vec{u'}(1,0,2)$

$\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي d, d' غير متوازيين نبحث عن التقاطع:

$2s+5=-\frac{1}{2}t+3$ (1)

$2=t-2$ (2)

$s+5=2t-5$ (3)

من (2) نجد $t=4$ نعوض في (3):

$2s+5=-\frac{1}{2}(4)+3 \Rightarrow s=-2$

نعوض في (1): $-2+5=2(4)-5 \Rightarrow 3=3$ محققة

إذاً d, d' متقاطعان ويقعان في مستوي واحد ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t=4$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d نجد نقطة التقاطع هي $(3,2,1)$

التمرين التاسع عشر: (نموذج وزاري)

1) اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$

2) تحقق أن المستوي P الذي معادلته $P: x-y+z+3=0$ يمس الكرة S

الحل:

1. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Rightarrow$

$x^2+y^2+z^2=3$

2. $dist(O,P)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$

$\frac{|0-0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}=R$

المسألة الثامنة:

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 نأخذ المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\vec{AB}=2\vec{i}$ $\vec{AD}=2\vec{j}$ $\vec{AE}=2\vec{k}$

1- اكتب معادلة المستوي (GBD)

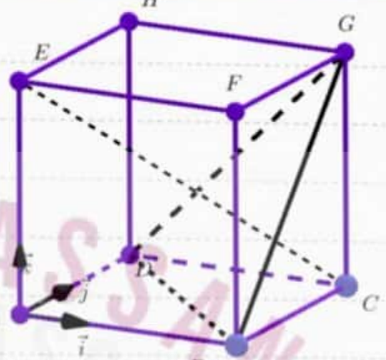
2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)

3- جد إحداثيات النقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $\vec{EM}=\frac{1}{3}\vec{EC}$

5- أثبت تعامد المستقيمين $(HM), (EC)$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954



الحل:

1- $H(0,2,2)$ $G(2,2,2)$

$F(2,0,2)$ $E(0,0,2)$ $D(0,2,0)$

$C(2,2,0)$ $B(2,0,0)$ $A(0,0,0)$

$\vec{GD}(-2,0,-2)$ $\vec{GB}(0,-2,-2)$

وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GBD) بالتالي

$\vec{n} \perp \vec{GB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{GB}=0 \Rightarrow -2b-2c=0 \Rightarrow b=-c$ ①

$\vec{n} \perp \vec{GD} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{GD}=0 \Rightarrow -2a-2c=0 \Rightarrow a=-c$ ②

بفرض $c=-1$ بالتالي $a=1$ و $b=1$

ومنه $\vec{n}(1,1,-1)$ والمستوي يمر من $B(2,0,0)$

$1(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0 \Rightarrow$

$(GBD): x+y-z-2=0$

2- المستقيم مار من $E(0,0,2)$ وشعاع توجيهه $\vec{EC}(2,2,-2)$ بالتالي:

$$(EC): \begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=-2t+2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

3- نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC) في معادلة المستوي (GBD)

$2t+2t+2t-2-2=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3} \Rightarrow$

$I\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

4- بفرض $M(x,y,z)$ بالتالي:

$\vec{EM}=\frac{1}{3}\vec{EC} \Rightarrow (x,y,z-2)=\frac{1}{3}(2,2,-2)$

$\Rightarrow (x,y,z-2)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right) \Rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

5- $\vec{EC}(2,2,-2)$ $\vec{HM}\left(\frac{2}{3},\frac{-4}{3},\frac{-2}{3}\right)$

$\Rightarrow \vec{HM}\cdot\vec{EC}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow$

$\vec{HM}\perp\vec{EC}$ المستقيمين متعامدين

التمرين (20):

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d, d':

$$d: \begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2 \\ z=-3t+3 \end{cases} t\in\mathbb{R} \qquad d': \begin{cases} x=s \\ y=-3s+3 \\ z=-s+1 \end{cases} s\in\mathbb{R}$$

وهل المستقيمين d, d' يقعان في مستوٍ واحد؟

علل إجابتك؟

الحل:

$\vec{u}=(1,-3,-3)$ شعاع توجيه d

$\vec{v}=(1,-3,-1)$ شعاع توجيه d' غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة بالتالي d', d غير متوازيين فهما إما متقاطعين أو متخالفين

نحل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} t+1=s \\ -3t+2=-3s-3 \\ -3t+3=-s+1 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s=-1 & ① \\ t-s=\frac{5}{3} & ② \\ 3t-s=2 & ③ \end{cases}$$

نلاحظ التناقض بين المعادلة (1) والمعادلة (2) فجملة المعادلات متناقضة وليس لها حلول بالتالي المستقيمان d', d متخالفان ولا يقعان في مستو واحد.

التمرين (21):

نتأمل المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقطتين $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$

والمطلوب اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB]

الحل:

لتكن H منتصف [AB] فيكون $H(\frac{3}{2},-1,1)$ فيكون $\vec{BA}(1,2,0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1\left(x-\frac{3}{2}\right)+2(y+1)+0(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$x+2y-\frac{3}{2}+2=0 \Rightarrow 2x+4y+1=0$$

التمرين (22)

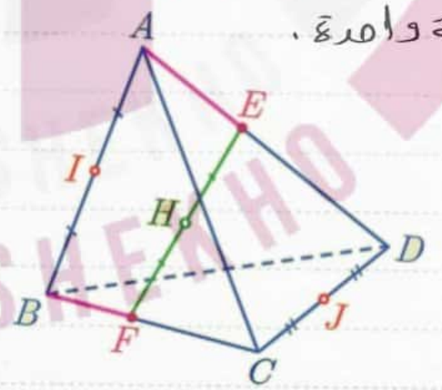
ABCD رباعي وجوه a عدد حقيقي

I, J هما على الترتيب منتصفا [AB] [CD]

و E و F نقطتان تحققان $AE=a\vec{AD}$

و $\vec{BF}=a\vec{BC}$ و H منتصف [EF]

أثبت أن النقاط I ، J ، H تقع على استقامة واحدة.



الحل:

$\vec{BF}=a\vec{BC} \Leftarrow$ F مركز الأبعاد المتناسبة ل $(B,1-a)$ (C,a)

$\vec{AE}=a\vec{AD} \Leftarrow$ E مركز الأبعاد المتناسبة

ل (D,a) $(A,1-a)$

وبما أن H منتصف [EF] بالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة ل $(E,1)$ و $(F,1)$

حسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة ل (D,a) (C,a), $(B,1-a)$, $(A,1-a)$

أيضاً:

J منتصف [CD] بالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة ل (C,a) و (D,a)

I منتصف [AB] بالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة ل $(A,1-a)$ $(B,1-a)$

بحسب الخاصة التجميعية:

تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$

هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2a)$ و $(J,2a)$

وهذا يعني أن النقاط I ، J ، H تقع على استقامة واحدة.

التمرين (23)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي P الذي معادلته $P: x+2y+z-1=0$ والمطلوب:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P

ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

$$dist(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|1(1)+2(-2)+(0)-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{6}$$

الكرة مركزها $A(1,-2,0)$ ونصف قطرها $R = dist(A,P) = \frac{4}{6}$ معادلتها:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \Rightarrow$

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = \frac{16}{36}$

المسألة التاسعة:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $C(4,0,0)\ B(1,2,1)\ A(1,1,0)$

والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة.

2- أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $x+3y-3z-4=0$

لتكن المستويان P,Q معادلتيهما: $P: x+2y-z-4=0$ و $Q: 2x+3y-2z-5=0$

3- أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d التمثيلات الوسيطية التالية:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P, Q، (ABC).

5- احسب بعد A عن المستقيم d.

الحل:

1) $\vec{AB}(0,1,1)$ $\vec{AC}(3,-1,0)$

الشعاعان غير مرتبطان خطياً والنقاط ليست على استقامة واحدة

2- نعوض احداثيات النقاط في معادلة المستوي $x+3y-3z-4=0$

$(1)+3(1)-3(0)-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow A\in(ABC)$

$(1)+3(2)-3(1)-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow B\in(ABC)$

$(4)+3(0)-3(0)-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow C\in(ABC)$

بالتالي معادلة المستوي (ABC) هي

$x+3y-3z-4=0$

3- يكون d هو الفصل المشترك للمستويين إذا حقق معادلتيهما:

$P: t-2+6-t-4=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

$Q: 2t-4+9-2t-5=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

إذا المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين Q, P

4- نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي (ABC) نجد:

$t-2+9-3t-4=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$

5- بفرض A' المسقط القائم لـ A على d

وبالتالي $A'(t-2,3,t)$ و $\vec{AA'}(t-3,2,t)$

و $\vec{u}(1,0,1)$

$\vec{AA'}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow t-3+t=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow$

$A'\left(\frac{-1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$

$\vec{AA'}=\left(\frac{-3}{2},2,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \|\vec{AA'}\| = \sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{9}{4}} =$

$\sqrt{\frac{34}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}}$

التمرين 24:

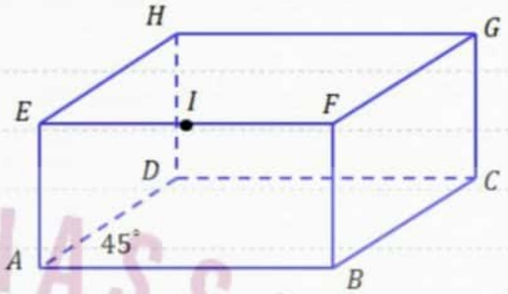
$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=2$

وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$

1- احسب $\vec{AB}$ ، $\vec{AD}$

2- عين موضع النقطة M التي تحقق

$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{GH}$



الحل:

1- $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AD}\|\cdot\cos\widehat{DAB} =$
$2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

2- $\vec{AM} = \vec{AB}+\vec{BF}+\frac{1}{2}\vec{GH} = \vec{AF}+\frac{1}{2}\vec{GH}$
$=\vec{AF}+\frac{1}{2}\vec{FE} = \vec{AF}+\vec{FI} \Rightarrow \vec{AM}=\vec{AI}$
ومنه M منطبقة على I

المسألة العاشرة:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{k},\vec{j})$ لدينا النقاط
$C(4,0,0)$ $B(1,0,-1)$ $A(2,1,3)$
$E(1,-1,1)$ $D(0,4,0)$

1- جد $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{CE}$
أثبت أن النقاط E.D.C ليست واقعة على استقامة واحدة
أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)
اكتب معادلة المستوي (CDE)
احسب بعد B عن المستوي (CDE)
اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE)

الحل:

1- $\vec{AB}(-1,-1,-4)$ $\vec{CD}(-4,4,0)$
$\vec{CE}(-3,-1,1)$

2- الشعاعين $\vec{CD},\vec{CE}$ غير مرتبطين خطياً
لأن مركباتهما غير متناسبة فالنقاط
E.D.C ليست على استقامة واحدة.

3- $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = (-1,-1,4)\cdot(-4,4,0) =$
$4-4+0=0 \Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{CD}$
$\vec{AB}\cdot\vec{CE} = (-1,-1,-4)\cdot(-3,-1,1)=$
$3+1-4=0 \Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{CE}$
بالتالي (AB) يعامد المستوي (CDE)

4- المستوي (CDE) مار من $C(4,0,0)$
وناظمه $\vec{n} = \vec{AB}(-1,-1,-4)$ بالتالي:
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
$\Rightarrow -1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0$
$-x-y-4z+4=0 \Rightarrow x+y+4z-4=0$

5- $dist(B,(CDE)) = \frac{|ax_B+by_B+cz_B+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
$=\frac{|(1)+(0)+4(-1)-4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$

6- الكرة مركزها B( ) ونصف قطرها
$R=dist(B,(CDE))=\frac{7}{\sqrt{18}}$ معادلتها:
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\Rightarrow$
$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=\frac{49}{18}$

التمرين 25:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان
$A(1,0,1)$ $B(0,1,1)$ والمطلوب:
1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A
ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$
2- أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان

الحل: 1

$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t+z_0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+b_0 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=ct+z_0 \end{cases}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

2- $\vec{AB}(-1,1,0), \vec{u}(2,2,1) \Longrightarrow$

$\vec{u}\cdot\vec{AB} = -2+2+0=0 \Rightarrow$

$\vec{u}\perp\vec{AB}$ فالمستقيمين (AB) و d متعامدين

المسألة (11)

نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ لمكعب ABCDEFGH والمطلوب:

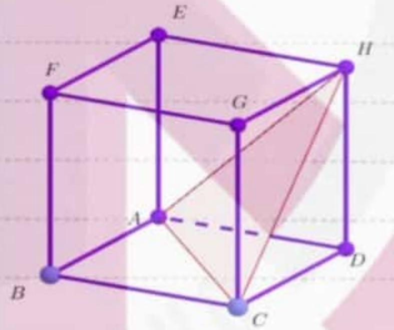
1- اكتب احداثيات كلاً من النقاط A C D E H

2- اكتب معادلة المستوي (ACH)

3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: -2x+2y-2z+1=0$ يوازي المستوي (ACH)

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F, I, D على استقامة واحدة.

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.



الحل:

1) $F(1,0,1)$ $G(1,1,1)$ $H(0,1,1)$

$C(1,1,0)$ $D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$

2) $\vec{AH}(0,1,1)$ $\vec{AC}(1,1,0)$ وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ACH)

بالتالي: ① $\vec{n}\perp\vec{AC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \boxed{a=-b}$

② $\vec{n}\perp\vec{AH} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AH}=0 \Rightarrow b+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-b}$

بفرض $b=-1$ بالتالي $a=1$ و $c=1$ ومنه $\vec{n}(1,-1,1)$ والمستوي يمر من $A(0,0,0)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow$

$(ACH): x-y+z=0$

3) $\vec{n}_{ACH}(1,-1,1), \vec{n}_P(-2,2,-2) \Rightarrow \vec{n}_P=-2\vec{n}_{ACH}$

شعاعي الناظمين مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة فالمستويين متوازيين.

4) مركز ثقل المثلث ACH هو:

$I\left(\frac{0+1+0}{3}, \frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

و $D(0,1,0)$ $F(1,0,1)$

$\vec{DI}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \vec{DF}(1,-1,1) \Rightarrow \vec{DI}=\frac{1}{3}\vec{DF}$

الشعاعين مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة فالنقاط F, I, D على استقامة واحدة.

5) الكرة مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ معادلتها:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Rightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$

$dist(\Omega, ACH) = \frac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$

$\frac{|1(1)-(-1)+(1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = R$

بالتالي المستوي (ACH) يمس الكرة S.

التمرين (26):

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,1,-2)$ $B(-1,2,1)$

والمستوي P الذي معادلته: $P: 3x-y-3z-8=0$

1) أثبت أن المستقيم (AB) يعامد على المستوي P.

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عيّن احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P.

الحل:

1- $\vec{n}_P(3,-1,-3)$, $\overrightarrow{AB}(-3,1,3) \Rightarrow \vec{n}_P = -\overrightarrow{AB}$

الشعاعين مرتبطين خطياً بالتالي المستقيم (AB) يعامد على المستوي P

-2 $(2,1,-2)$ $\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$

$$(AB): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + b_0 \quad t \in R \\ z = ct + z_0 \end{cases} \qquad (AB): \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \quad t \in R \\ z = 3t - 2 \end{cases}$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) في معادلة المستوي:

$-9t + 6 - t - 1 - 9t + 6 - 8 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{3}{19} \Rightarrow A'\left(\frac{29}{19}, \frac{22}{19}, \frac{-29}{19}\right)$

المسألة 12:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة A والمستويات

$R: x - z - 1 = 0$

$Q: x + y + z - 1 = 0$ $P: 2x - y + 2z - 2 = 0$

والمطلوب:

1- أثبت أن المستويان Q, P يتقاطعان في الفصل المشترك Δ اكتب تمثيلاً وسيطياً له

2- تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر في النقطة

3- أثبت أن المستويات Q, P, R تتقاطع بنقطة يطلب تعيين احداثياتها.

4- احسب بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

الحل: 1- $\vec{n}_P(2,-1,2)$ $\vec{n}_Q(1,1,1)$ شعاعي الناظمين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك لكتابة الفصل المشترك نجمع معادلتي المستويين

$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$

$Q: x + y + z - 1 = 0 \xRightarrow{\text{بالجمع}}$

$3x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow x + z - 1 = 0 \Rightarrow$

$x = -z + 1$

نعوض في المعادلة التالية نجد:

$-z + 1 + y + z - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$

نفرض $z = t$ بالتالي $x = -t + 1$ ومنه

$$\Delta: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

-2 $\vec{u}_\Delta(-1,0,1)$. $\vec{n}_Q(1,0,-1) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = -\vec{n}_Q$

الشعاعين مرتبطان خطياً بالتالي المستقيم Δ يعامد المستوي R

نعوض احداثيات النقطة $A(1,2,0)$ في معادلة المستوي R نجد $x - t + 1 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 0$

$R: x - z - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

بالتالي المستوي R يمر من النقطة A

3- نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي R نجد $-t + 1 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 0$

بالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في النقطة $I(1,0,0)$

4- النقطة تنتمي للمستوي R العمودي على المستقيم Δ ويتقاطع معه في النقطة I بالتالي:

$dist(A, \Delta) = AI \sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (0)^2} = 2$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين: 27

نتأمل المستويين

$P_1: 2x - y + z + 1 = 0$

$P_2: x + y - z = 0$

1- بين أن المستويين متعامدان

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً لتقاطعهما المشترك

الحل:

1- $\vec{n}_{P_1}(2,-1,1)$ $\vec{n}_{P_2}(1,1,-1)$ $\Longrightarrow$

$\vec{n}_{P_1} \cdot \vec{n}_{P_2} = 2 - 1 - 1 = 0$

شعاعي الناظمين متعامدين فالمستويين متعامدين

2- $P_1: 2x - y + z + 1 = 0$

$P_2: x + y - z = 0$ بالجمع $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

نفرض $z = t$ ونعوض في المعادلة التالية نجد

بالتالي: $y = t + \frac{1}{3}$

$$D: \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = t + \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

التمرين: 28

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقاط

$C(-1,1,2)$ $D(0,0,1)$

$A(1,0,0)$ $B(4,3,-3)$ المطلوب:

1- أثبت أن $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً

2- أثبت أن الأشعة $\vec{AD}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ مرتبطة خطياً

3- استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ حيث أن α, β, γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

1- الشعاعان $\vec{AB}(3,3,-3)$ $\vec{AC}(-2,1,2)$

$\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

2) لتكن $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$

$(-1,0,1) = a(3,3,-3) + b(-2,1,2) \Longrightarrow$

$(-1,0,1) = (3a-2b, 3a+b, -3a+2b)$

$$\begin{cases} 3a - 2b = -1 \\ 3a + b = 0 \\ -3a + 2b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = -1 & 1 \\ -3a - b = 0 & 2 \\ -3a + 2b = 1 & 3 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ① و ② نجد $-3b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

نعوض في ② $-3a - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{9}$

نعوض في ③ نجد $-3\left(\frac{-1}{9}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 1 = 1$

محققة بالتالي: $\vec{AD} = \frac{-1}{9}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

أي $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ و $\vec{AD}$ مرتبطة خطياً.

3) $\vec{AD} = \frac{-1}{9}\vec{AB} + \frac{3}{9}\vec{AC} \Rightarrow 9\vec{AD} = -\vec{AB} + 3\vec{AC} \Longrightarrow -9\vec{DA} = -\vec{AD} - \vec{DB} + 3\vec{AD} + 3\vec{DC}$ $\quad 9\vec{DA} + \vec{DA} - \vec{DB} - 3\vec{DA} + 3\vec{DC} = \vec{0} \Longrightarrow 7\vec{DA} - \vec{DB} + 3\vec{DC} = \vec{0}$

أي D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(A,7)$ و $(B,-1)$ و $(C,3)$

مسألة 13:

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E قاعدته مربع طول ضلعه 3 $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$ نختار المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$ والمطلوب:

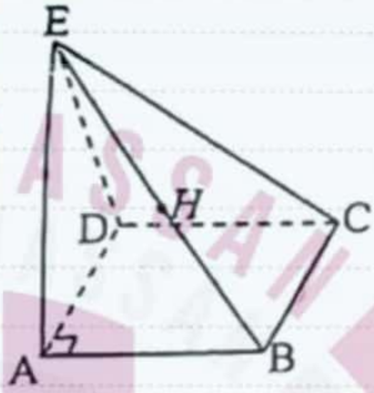
1- عين إحداثيات A, B, C, D, E

2- جد معادلة المستوي (EBC)

3- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC)

4- استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC)

5- احسب حجم رباعي الوجوه (AEBC)



الحل:

1- A(0.0.0) B(3.0.0) C(3.3.0) D(0.3.0) E(0.0.3)

2- $\vec{EB}(3.0.3)$ $\vec{EC}(3.3.-3)$

غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

ليكن $\vec{n}(a.b.c)$ شعاعاً ناظماً على المستوي (EBC)

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{EB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{EC}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a-3c=0\\ 3a+3b-3c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=c\\ a+b-c=0\end{cases}$$

نفرض $c=1$ بالتالي $a=1$ و $b=0$

ومنه $\vec{n}(1.0.1)$ والمستوي مار من $E(0.0.3)$

$(x-0)+0(y-0)+1(z-3)=0 \Rightarrow$

$(EBC): x+z-3=0$

3- المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u}=\vec{n}(1.0.1)$ ويمر من $A(0.0.0)$

$$d: \begin{cases}x=at+x_A\\ y=bt+y_A\\ z=ct+z_A\end{cases} t\in\mathbb{R} \Rightarrow d: \begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=t\end{cases} t\in\mathbb{R}$$

4- $E(0.0.3)\ ,\ B(3.0.0) \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}.0.\frac{3}{2}\right)$

بما أن المستقيم d يعامد المستوي (EBC) فإن المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC) هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EBC) بالتالي نعوض معادلة المستقيم في المستوي

$t+t-3=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2}.0.\frac{3}{2}\right)\ A'=H$

5- المثلث EBC قائم في B و $BC=3$ و $EB=|\vec{EB}|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

بالتالي $S_{EBC}=\frac{EB\times BC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times 3}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$AH=|\vec{AH}|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$V=\frac{1}{3}S_{EBC}\times AH=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}\times 3}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}$

التمرين 29:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1.1.-2)$

1- أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P

2- اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

الحل:

1- نعوض إحداثيات A في معادلة المستوي فنجد $2+1+6+2\neq 0$ غير محققة إذاً $A\notin P$

2- بما أن P, Q متوازيين فإن $\vec{n_Q}=\vec{n_P}(2.1.-3)$ والمستوي مار من $A(1.1.-2)$

$2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0 \Rightarrow$

$Q: 2x+y-3z-9=0$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

التمرين 30 :

المستقيمان d, d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d': \begin{cases} x = 2s-1 \\ y = s-2 \\ z = 3s-2 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \qquad d: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

المطلوب :

1- أثبت أن d, d' متقاطعان ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع

2- جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d, d'

الحل :

1- شعاع توجيه المستقيم d هو $\vec{u}(1, 2, -1)$

وشعاع توجيه المستقيم d' هو $\vec{u'}(2, 1, 3)$

u و u' غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة بالتالي d, d' غير متوازيين

نبحث عن التقاطع :

$2s-1 = t+2$ ① $\quad s-2 = 2t+1$ ②

$3s-2 = -t$ ③

بجمع ① مع ③ : $5s-3 = 2 \Rightarrow s = 1$

نعوض في ③ نجد $t = -1$

نعوض في ② $1-2 = -2+1 \Rightarrow -1 = -1$

محققة إذاً d, d' متقاطعان ويقعان في مستوي واحد ولإيجاد نقطة التقاطع : نعوض $t = -1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d نجد نقطة التقاطع هي $I(1, -1, 1)$

2- $\vec{u'}(2, 1, 3)$ $\vec{u}(1, 2, -1)$ ولنفرض ناظم المستوي المطلوب $\vec{n}(a, b, c)$

إن كل من الشعاعين $\vec{n}, \vec{AB}$ يوازي الناظم للمستوي ولكن بالتالي :

$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Rightarrow a+2b-c = 0 \qquad 3a+6b-3c = 0$

$\vec{n}\vec{u'} = 0 \Rightarrow 2a+b+3c = 0 \Rightarrow 2a+b+3c = 0$

$\xRightarrow{\text{بالجمع}} 5a+7b = 0 \Rightarrow a = \frac{-7}{5}b$

$\Rightarrow -6a+8b+10c = 0$

نفرض $b = -5 \Rightarrow a = 7$ نعوض في المعادلة الأولى نجد $c = -3$ ومنه $\vec{n}(7, -5, -3)$

والمستوي مار بالنقطة $I(1, -1, 1)$ بالتالي :

$7(x-1) - 5(y+1) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow$

$Q: 7x - 5y - 3z - 9 = 0$

المسألة 14 :

مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2

O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$

نختار المعلم متجانس $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$

1- جد إحداثيات النقاط A, B, G, H, O

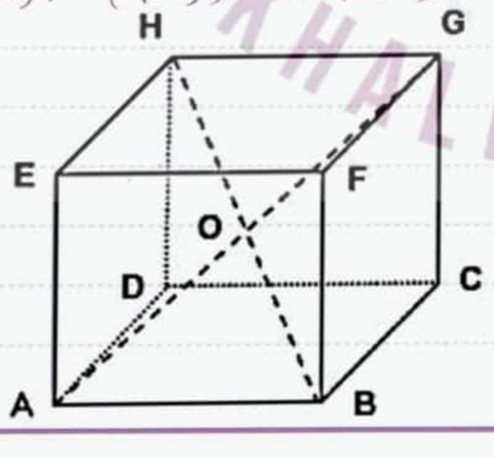
2- أعط معادلة للمستوي (GOB)

3- احسب $\vec{OB} \cdot \vec{OG}$ واستنتج $\cos \widehat{GOB}$

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC)

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

6- جد الأعداد الحقيقية a, β, γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A, a) (B, β) (C, γ)



إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

الحل: 1: $A(0.0.0)$ $B(2.0.0)$ $C(2.2.0)$

$D(0.2.0)$ $E(0.0.2)$ $F(2.0.2)$

$G(2.2.2)$ $H(0.2.2)$ $O(1.1.1)$

2- $\overline{OB}(1.-1.-1)$ $\overline{OG}(1.1.1)$

وبفرض $\vec{n}(a.b.c)$ ناظم المستوي $(G.oB)$ بالتالي:

$\vec{n}\perp\overline{OG} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overline{OG}=0 \Rightarrow a+b+c=0$ (1)

$\vec{n}\perp\overline{OB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overline{OB}=0 \Rightarrow a-b-c=0$ (2)

بجمع المعادلتين نجد $2a=0 \Rightarrow a=0$

نعوض في (1) نجد $c=-b$ بفرض $b=1$

بالتالي $c=-1$ ومنه $\vec{n}(0.1.-1)$

والمستوي يمر من $B(2.0.0)$

$0(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0 \Rightarrow$

$(GBD): y-z=0$

3- $\overline{OB}(1.-1.-1)$ $\overline{OG}(1.1.1)$, $\|\overline{OB}\| = \sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$, $\|\overline{OG}\|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$\overline{OB}\cdot\overline{OG}=1-1-1=-1 \Rightarrow \cos\widehat{GOB} = \dfrac{\overline{OB}\cdot\overline{OG}}{\|\overline{OB}\|\times\|\overline{OG}\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{3}$

4- المستقيم (DC) مار من $D(0.2.0)$ وشعاع توجيه $\overline{DC}(2.0.0)$ بالتالي

$$(EC): \begin{cases} x=2t \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

5- $\vec{n}(0.1.-1)$ $\overline{DC}(2.0.0)$

$\Rightarrow \vec{n}\cdot\overline{DC}=0+0+0=0$

الشعاعين متعامدين بالتالي المستقيم يوازي المستوي

6- $\overline{DA}(0.-2.0)$ $\overline{DB}(2.-2.0)$ $\overline{DC}(2.0.0)$

$\overline{DA}=a\overline{DB}+b\overline{DC} \Rightarrow (0.-2.0)=a(2.-2.0)+b(2.0.0)$

$(0.-2.0)=(2a+2b.-2a.0)$

$$\begin{cases} 2a+2b=0 \\ -2a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a & ① \\ a=1 & ② \end{cases}$$

نعوض 2 في 1 نجد $a=1$ و $b=-1$

بالتالي: $\overline{DA}=\overline{DB}-\overline{DC} \Rightarrow \overline{DA}-\overline{DB}+\overline{DC}=0$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,-1)$ و $(C,1)$ ومنه $\alpha=1$ $\beta=-1$ $\gamma=1$

التمرين 31:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,0,1)$ $B(1,-2,1)$ $C(5,0,5)$ $D(6,2,5)$ والمطلوب:

1- أثبت أن $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ غير مرتبطين خطياً

2- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث $\overline{AD}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$ واستنتج أن A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد

الحل:

1- $\overline{AC}(3.0.4)$ $\overline{AB}(-1.-2.0)$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

2- $\overline{AD}=a\overline{AB}+\beta\overline{AC} \Rightarrow (4.2.4)=a(-1.-2.0)+\beta(3.0.4)$

$(4.2.4)=(-a+3\beta,-2a,4\beta)$

① $-a+3\beta=4$ ② $2a=2 \Rightarrow a=-1$

③ $4\beta=4 \Rightarrow \beta=1$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

نعوض $\beta=1$ $\alpha=-1$ في المعادلة الأولى نجد $1+3=4 \Rightarrow 4=4$ محققة

بالتالي: $\vec{AD}=-\vec{AB}+\beta\vec{AC}$ والأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً والنقاط D,C,B,A تقع في مستوٍ واحد.

مسألة 15:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط

$A(-1,2,3)$ $B(2,1,1)$ $C(-3,4,-1)$ $D(3,1,1)$

والمطلوب:

1- جد $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ وبين أن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC)

3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC)

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$

5- نفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,-1)$ $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (AB) (CG) متوازيان

الحل:

1) $\vec{AB}(3,-1,-2)$ $\vec{AC}(-2,2,-4)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=-6-2+8=0$

الشعاعان متعامدان فالمستقيمان (AB) و (AC) متعامدان

2) $\vec{n}\cdot\vec{AB}=6-4-2=0$ $\vec{n}\cdot\vec{AC}=-4+8-4=0$

بالتالي الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) والمستوي مار من $B(2,1,1)$ ومنه:

$$2(x-2)+4(y-1)+1(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$(ABC): 2x+4y+z-9=0$$

3) المستقيم d يعامد المستوي بالتالي: $\vec{u}=\vec{n}(2,4,1)$ ويمر من $D(3,1,1)$

$$d:\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases} t\in\mathbb{R} \qquad d:\begin{cases} x=2t+3 \\ y=4t+1 \\ z=t+1 \end{cases} t\in\mathbb{R}$$

4) $$dist(D,ABC)=\frac{|ax_D+by_D+cz_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2(3)+4(1)+(1)-9|}{\sqrt{4+16+1}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$S_{ABC}=\frac{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}{2}=\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}{2}=\frac{\sqrt{14}\times 2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2\times7\times2\times3}=2\sqrt{21}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{21})\times\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{4}{3}$$

5- G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,-1)$ $(C,2)$ بالتالي

$$\vec{GA}-\vec{GB}+2\vec{GC}=0 \Rightarrow \vec{GA}+\vec{BG}+2\vec{GC}=0 \Rightarrow \vec{BA}=-2\vec{GC}$$

الشعاعين $\vec{GC}$ و $\vec{BA}$ مرتبطين خطياً فالمستقيمين (AB) و (CG) متوازيان.

طريقة ثانية:

نوجد إحداثيات G ثم مركبات الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{CG}$ ثم نثبت الارتباط الخطي لهما.

تمرين 32 :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا $A(2,1,2)$ والمستوي

$P: 2x+y-2z-4=0$

1- احسب بعد النقطة A عن المستوي P

2- اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل :

1) $dist(A,P)=\frac{|2(2)+(1)-2(2)-4|}{\sqrt{4+1+4}}$

$=\frac{3}{3}=1$

2) مركز الكرة A و نصف قطرها هو بعد A عن P :

$R=dest(A,P)=1$

ومعادلة الكرة :

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Rightarrow$

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$

تمرين 33 :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

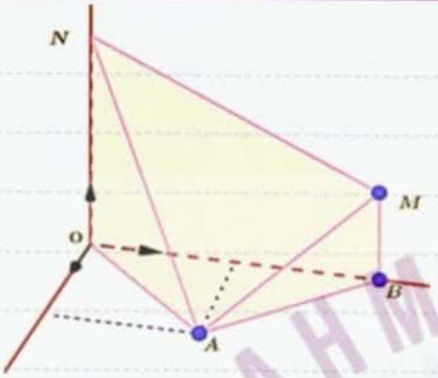
$B(0,6,0)$ $N(0,0,3)$ $M(0,6,2)$

$A(1,3,0)$ والمطلوب

1- اكتب معادلة للمستوي (AMN)

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN)

3- أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$



الحل :

1- $M(0,6,2)$ $N(0,0,3)$ $B(0,6,0)$

$O(0,0,0)$ $A(1,3,0)$

$\vec{AM}(-1,3,2)$ $\vec{AN}(-1,-3,3)$ وبفرض

$\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (AMN) بالتالي

$\vec{n}\perp\vec{AM} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AM}=0 \Rightarrow -a+3b+2c=0$

$\vec{n}\perp\vec{AN} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AN}=0 \Rightarrow -a-3b+3c=0$

نجمع المعادلتين نجد $-2a+5c=0 \Rightarrow a=\frac{5}{2}c$

نفرض $c=2$ بالتالي $a=5$ نعوض في (1)

نجد $b=\left(\frac{1}{3}\right)$ للتخلص من الكسور نضرب المركبات

بـ 3 ومنه $\vec{n}(15,1,6)$ والمستوي يمر

من $N(0,0,3)$

$15(x-0)+1(y-0)+6(z-3)=0 \Rightarrow$

$(AMN): 15x+y+6z-18=0$

2- المستقيم Δ مار من $O(0,0,0)$ ويقبل

$\vec{n}(15,1,6)$ شعاع توجيه له بالتالي

$$Ec: \begin{cases} x=15t \\ y=t \\ z=6t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

3- المستوي مار من $(0,6,1)$ منتصف $[BM]$

وناظمه $\vec{n}=\vec{BM}(0,0,2)$ معادلة

$0(x-0)+0(y-6)+2(z-1)=0$

$\Rightarrow z-1=0$

تمرين 34:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$

1- احسب $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ واستنتج $\cos(\widehat{BAC})$

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:

$\|2\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|$

الحل:

1- $\vec{AB}(-2,1,0)$, $\vec{AC}(-2,0,1) \Rightarrow$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (-2,1,0)\cdot(-2,0,1) = 4+0+0 = 4$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$, $\|\vec{AC}\| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$

2- $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = 3\vec{MG} \Rightarrow$

$2\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC} = 6\vec{MG}$

$\|2\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\| = \|\vec{AB}\| \Rightarrow$

$\|6\vec{MG}\| = \|\vec{AB}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \frac{1}{6}\|\vec{AB}\|$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{1}{6}AB$

المسألة 16:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان P و Q؛

$P: x-y+2z-1=0$, $Q: 2x+y+z+1=0$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعين بفصل مشترك d

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d

3- اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين P , Q

4- جد إحداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيم d والمستوي R

5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

الحل:

1- $\vec{n}_Q(2,1,1)$ $\vec{n}_P(1,-1,2)$ الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك d.

2- $P: x-y+2z-1=0$
$Q: 2x+y+z+1=0$ $\xRightarrow{\text{بالجمع}}$ $3x+3z=0 \Rightarrow$ $x=-z$

نعوض في المعادلة الثانية نجد:

$-2z+y+z+1=0 \Rightarrow y=z-1$

نفرض $z=t$ بالتالي $x=-t$, $y=t-1$

ومنه

$$\Delta: \begin{cases} x=-t \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

3- لدينا $\vec{n}_Q(2,1,1)$ $\vec{n}_P(1,-1,2)$ ولنفرض $\vec{n}_R(a,b,c)$

$$\begin{cases} \vec{n}_R\cdot\vec{n}_P=0 \\ \vec{n}_R\cdot\vec{n}_Q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+2c=0 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \text{بالجمع}$$

$\Rightarrow 3a+3c=0 \Rightarrow a=-c$

بفرض $c=-1$ بالتالي $a=1$, $b=-1$ ومنه $\vec{n}_R(1,-1,-1)$ والمستوي R المار بالنقطة $A(1,1,2)$

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$(x-1)-(y-1)-(z-2)=0 \Longrightarrow$

$x-y-z+2=0$

4- نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي R

$-t-t+1-t+2=0 \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow$

$B(-1,0,1)$

5- النقطة A تنتمي للمستوي R العمود على d بالتالي النقطة $B(-1,0,1)$ هي مسقط A على d بالتالي:

$dest(A,d)=AB=\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}$

$=\sqrt{6}$

6- مركز الكرة $A(1,1,2)$ ونصف قطرها هو بعد A عن Q:

$R=dest(A,Q)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$

$\dfrac{|2(1)+(1)+(2)+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

معادلة الكرة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$

$=R^2 \Longrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$

التمرين 35:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $B(1,-1,1)$ $A(0,1,-1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S.

الحل:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المحور منى مساوية البعد عن A و B بالتالي:

$MA=MB \Longrightarrow MA^2=MB^2$

$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \Longrightarrow$

$x^2+y^2-2y+1+z^2+2z+1=$

$x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-2z+1$

$2x-4y+4z-1=0 \Longrightarrow$

$x+2y-4z-3=0$

مجموعة النقاط S هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

المسألة 17:

في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $C(1,0,1)$ $B(1,1,0)$ $A(2,-2,2)$ $D(0,0,1)$ والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط B,C,D لا تقع على استقامة واحدة

2- أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD)

3- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)

4- عين إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)

5- اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

الحل:

1- $\vec{BC}(0,-1,-1)$ $\vec{BD}(-1,-1,1)$

الشعاعان غير مرتبطان خطياً والنقاط ليست واقعة على استقامة واحدة

2_ نعوض احداثيات النقاط في معادلة المستوي $x+3y-3z-4=0$

$1+0-1=0 \Rightarrow 0=0\ B\in(BCD)$

$0+1-1=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow C\in(BCD)$

$0+1-1=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow D\in(BCD)$

بالتالي $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD)

3_ المستقيم Δ مار من $A(2,-2,2)$ ويقبل $\vec{n}(0,1,1)$ شعاع توجيه له:

$$\Delta:\begin{cases} x=2 \\ y=t-2 & t\in\mathbb{R} \\ z=t+2 \end{cases}$$

4_ النقطة K هي نقطة تقاطع Δ مع المستوي (BCD) بالتالي نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي (BCD) نجد

$t-2+t+2-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\left(2,\frac{-3}{2},\frac{5}{2}\right)$

5_ مركز الكرة هو I منتصف $[AD]$ ومنه $I\left(1,-1,\frac{3}{2}\right)$

نصف قطر الكرة هو AD بالتالي

$R=\frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{4+4+1}}{2}=\frac{3}{2}$

$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$

تمرين 36 :

نتأمل في معلم $(O\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(-3,-1,0)$ $B(3,-3,2)$ المطلوب

1_ جد النقطة M على محور التراتيب متساوية البعد عن النقطتين A و B.

2_ جد معادلة الكرة التي يكون $[MB]$ قطراً فيها

الحل:

1_ M على محور التراتيب $M(0,y,0)$

$AM^2=BM^2 = (0+3)^2+(y+1)^2+(0+0)^2 = (0-3)^2+(y+3)^2+(0-2)^2$

$9+y^2+2y+1 = 9+y^2+6y+9+4$

$-4y=12 \Rightarrow y=-3$

$\Rightarrow M(0,-3,0)$

2_ مركز الكرة هو منتصف $[MB]$ وليكن K

$\Rightarrow K\left(\frac{3}{2},-3,1\right) \Rightarrow$

$MB=\sqrt{(3-0)^2+(3+3)^2+(2-0)^2}=$

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}=2K \Rightarrow K=\frac{\sqrt{13}}{2}$

اذاً معادلة الكرة :

$$(x-\tfrac{3}{2})^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\frac{13}{4}$$

مسألة 18:

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه وفيه الأوجه BCD , BAD , BAC مثلثات قائمة في B وتقع A,C,D على كرة مركزها B ونصف قطرها يساوي 6 ولتكن النقطة I منتصف $[CD]$ و K منتصف $[AB]$ والنقطة E تحقق العلاقة $\overline{BE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

والنقطة F تحقق العلاقة $\overline{DF} = \frac{2}{3}\overline{DA}$

وأخيراً النقطة G منتصف [EF]

نتأمل المعلم المتجانس $(B; \frac{1}{6}\overline{BC}, \frac{1}{6}\overline{BD}, \frac{1}{6}\overline{BA})$

① جد إحداثيات رؤوس رباعي الوجوه والنقاط G, F, E, K, I

2. أثبت أن النقاط G, K, I تقع على استقامة واحدة

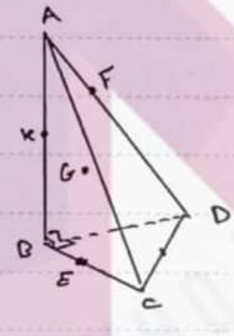
3. جد مساحة المثلث BCD واستنتج حجم رباعي الوجوه $A-BCD$

4. جد معادلة المستوي ACD

5. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (BG) وادرس تقاطعه مع المستوي ACD

6. احسب بعد النقطة I عن المستقيم (BG)

7. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمر بالنقاط A, C, D.



الحل:

1. $(B; \frac{1}{6}\overline{BC} + \frac{1}{6}\overline{BD} + \frac{1}{6}\overline{BA})$

$B(0,0,0)$ $C(6,0,0)$ $D(0,6,0)$

$A(0,0,6)$ $I(3,3,0)$ $K(0,0,3)$

$\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$

$(x,y,z) = \frac{1}{3}(6,0,0) = (2,0,0)$

$E(2,0,0)$

$\overline{DF} = \frac{2}{3}\overline{DA}$

$(x, y-6, z) = \frac{2}{3}(0,-6,6) = (0,-4,4)$

$\begin{cases} x = 0 \\ y-6 = -4 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow F(0,2,4)$

2. $G(1,1,2)$ $\overline{IG}(-2,-2,2)$ $\overline{IK}(-3,-3,3)$

$\frac{-2}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

نلاحظ أن المركبات متناسبة والشعاعان $\overline{IK}$ و $\overline{IG}$ مرتبطان خطياً.

إذاً G, K, I تقع على استقامة واحدة.

3. لدينا $BC = BD = 6$

والمثلث BCD قائم في B

$A_{BCD} = \frac{BC \times BD}{2} = 18$

$V = \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

بما أن BAC و BAD قائمان في B

AB عمودي على المستوي BCD الارتفاع هو AB

القاعدة هي المثلث BCD إذاً

$V = \frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36$

4. بما أن النقاط D, C, A يقع كل منها على أحد محاور الإحداثيات إذاً معادلة المستوي تكون بالشكل:

$(ACD): \frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$

$(ACD): x + y + z - 6 = 0$

5) شعاع التوجيه $\vec{u} = \overline{BG}(1,1,2)$

لتكن $B(0,0,0)$ نقطة من المستقيم

$BG: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in R$

نوجد الجداء السلمي لناظم المستوي مع شعاع التوجيه

$(1)(1)+(1)(1)+(1)(2) = 4 \neq 0$

إذا المستقيم BG لا يوازي المستوي ACD

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم BG في معادلة المستوي ACD $x+y+z-6=0$

$t+t+2t-6=0$

نعوض في المعادلات الوسيطة للمستقيم $\Leftarrow$ $t=\frac{3}{2}$ إذا نقطة التقاطع $(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$

إذا المستقيم (BG) يقطع المستوي ACD في نقطة وحيدة هي $(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$

6- لتكن النقطة $I'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة I مع المستقيم (BG) وبالتالي $\vec{II'}$ يعامد BG لدينا I' نقطة من المستقيم BG إذاً $I'(t,t,2t)$

$\vec{II'}(t-3,t-3,2t) \quad \vec{II'}\cdot\vec{BG}=0$

$\Rightarrow (t-3)(1)+(t-3)(1)+(2t)(2)=0$

$\Rightarrow 6t-6=0 \Rightarrow t=1$

$I'(1,1,2)$

البعد $= \|\vec{II'}\| = \sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{3}$

7) معادلة الكرة التي مركزها B

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

المركز $B(0,0,0)$ نصف القطر $R=6$

$x^2+y^2+z^2=36$

التمرين 137

ABCD رباعي وجوه النقاط P, Q, R, K, I تحقق

$\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AD}$, $\vec{BQ}=\frac{1}{3}\vec{BD}$ R منتصف [CD]

$\vec{CK}=\frac{2}{3}\vec{CB}$ I منتصف [AB] .

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

(A;2) (B;2) (C;1) (D;1)

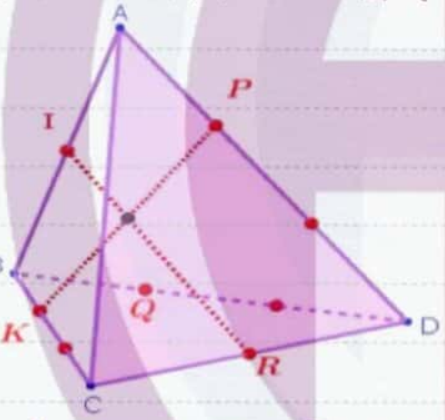
المطلوب:

1- أثبت أن المستقيمان (IR) و(PK) متقاطعان

2- عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A;2) (C;1)

3- عين المجموعة المكونة من النقاط M التي تحقق:

$\|2\vec{AM}+\vec{CM}\| = \|2\vec{BM}+\vec{DM}\|$



الحل:

1- $\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AD} \Rightarrow 3\vec{AP}=\vec{AP}+\vec{PD} \Rightarrow$

$2\vec{AP}-\vec{PD}=0 \Rightarrow 2\vec{PA}+\vec{PD}=\vec{0}$

إذاً P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A;2) (D;1)

$\vec{CK}=\frac{2}{3}\vec{CB} \Rightarrow 3\vec{CK}=2\vec{CK}+2\vec{KB} \Rightarrow$

$\vec{CK}-2\vec{KB}=0 \Rightarrow \vec{KC}+2\vec{KB}=0$

إذاً K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (B;2) (C;1) وبما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A;2) (B;2) (C;1) (D;1)

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (K;3) (P;3) إذاً G تقع على المستقيم (PK)

R منتصف [CD]

إذاً R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (C;1) (D;1)

و I منتصف [AB]

إذاً I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A;2) (B;2)

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A;2) (B;2) (C;1) (D;1)

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (I;3) (R;3)

إذاً G تقع على المستقيم (IR)

بالتالي المستقيمان (IR) و(PK) متقاطعان في G

2) حسب تعريف مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين :

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

إذاً النقطة J تقع على القطعة المستقيمة [AC] بحيث $AJ = \frac{1}{3}AC$

3- لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A;2) (C;1).

أياً كانت M نقطة من الفراغ نجد :

(المبرهنة) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MC} = (a+b)\overrightarrow{MJ}$

$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MJ}$

من العلاقة $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

طريقة أولى: $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{BD}$

حسب العلاقة $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

طريقة ثانية: $3\overrightarrow{BQ} = (\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QD})$

$-3\overrightarrow{QB} - (-\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}) = \vec{0}$

$-2\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QD} = 0$

ومنه $2\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD} = 0$

فإن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B;2) (D;1)

أياً كانت M نقطة من الفراغ نجد :

$2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MQ}$

$\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\| = \|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\|$

من الشرط المعطى $\|3\overrightarrow{MJ}\| = \|3\overrightarrow{MQ}\|$

$3\|\overrightarrow{MJ}\| = 3\|\overrightarrow{MQ}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MJ}\| = \|\overrightarrow{MQ}\|$

بالتالي مجموعة النقاط M هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [QJ]

المسألة: 19

نتأمل في معلم متجانس النقاط :

$A(-\frac{1}{2},3,1)$ $B(-1,0,2)$ $C(2,1,1)$ $D(-3,3,-1)$

1- a) أثبت أن النقاط B,C,D تعين مستوٍ وأوجد معادلته.

b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته

2) a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)

b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)

3) احسب حجم رباعي الوجوه (ABCD)

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

4. a) أثبت أن النقاط B,C,D تقع على كرة مركزها A.

b) احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها.

الحل:

a- $\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B) = (3, 1, -1)$

$\overrightarrow{BD}(x_D - x_B, y_D - y_B, z_D - z_B) = (-2, 3, -3)$

$$\frac{3}{-2} \neq \frac{1}{3}$$

فالشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما فالنقاط B,C,D لا تقع على استقامة واحدة فهي تعين مستو.

إيجاد معادلة المستوي (BCD).

يمكن بأكثر من طريقة سنكتفي بطريقتين:

الطريقة الأولى:

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ أحد الأشعة الناظمة على المستوي (BCD)

1) $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow 3a+b-c=0$

2) $\vec{n} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \Rightarrow -2a+3b-3c=0$

بما أنه يوجد عدد غير منته من أشعة النواظم على المستوي (BCD) نحدد إحداها باختيار $c=1$ نعوض في جملة المعادلتين (1) و (2)

$3a+b-1=0 \quad (1')$

$-2a+3b-3=0 \quad (2')$

نضرب طرفي (1') بالعدد (-3)

$-9a-3b+3=0 \quad (1'')$

$-2a+3b-3=0 \quad (2')$

بجمع (1'') مع (2')

$-11a=0 \Rightarrow a=0$

نعوض في (1') نجد $3(0)+b-1=0 \Rightarrow b=1$

فيكون شعاع ناظم المستوي (BCD) هو $\vec{n}(0,1,1)$ فتكون معادلة المستوي

$(BCD): a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$

$(BCD): 0(x+1)+1(y-0)+1(z-2)=0$

$(BCD): y+z-2=0$

ملاحظة: بعد إيجاد $\vec{n}(0,1,1)$ شعاع ناظم المستوي (BCD) يمكننا إيجاد معادلة المستوي كما يلي:

$(BCD): ax+by+cz+d=0$

$(BCD): 0x+y+z+d=0$

$(BCD): y+z+d=0$

وبما أن المستوي (BCD) مار من النقطة $B(-1,0,2)$ نجد

$(0)+(2)+d=0 \Rightarrow d=-2$

فتصبح معادلة المستوي: $(BCD): y+z-2=0$

الطريقة الثانية:

أثبتنا أن الشعاعين $\overrightarrow{BC}(3,1,-1)$ $\overrightarrow{BD}(-2,3,-3)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما حسب تعريف المستوي (BCD) هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$

$(x+1, y, z-2) = \alpha(3,1,-1) + \beta(-2,3,-3)$

$(x+1, y, z-2) = (3\alpha-2\beta, \alpha+3\beta, -\alpha-3\beta)$

$$\begin{cases} x+1 = 3\alpha - 2\beta & (1) \\ y = \alpha + 3\beta & (2) \\ z-2 = -\alpha - 3\beta & (3) \end{cases}$$

من 3 نجد $z-2 = -(\alpha+3\beta) \quad (4)$

فنعوض (2) في (4) نجد $z-2=(-y)$ ومنه:

$(BCD): y+z-2=0$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

b) نوجد الجداء السلمي للشعاعين $\vec{BC}$ و $\vec{BD}$

$\vec{BC}(3,1,-1)$ $\quad$ $\vec{BD}(-2,3,-3)$

$\vec{BC}\cdot\vec{BD} = (3)(-2)+(1)(3)+(-1)(-3)=0$

بالتالي الشعاعان $\vec{BC}$ و $\vec{BD}$ متعامدان

فالمثلث BCD قائم في B

يمكن معرفة نوع المثلث BCD كما يلي: بحساب أطوال أضلاع المثلث BCD:

$\vec{BC}(3,1,-1) \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{9+1+1}=\sqrt{11} \Rightarrow BC^2=11$

$\vec{BD}(-2,3,-3) \Rightarrow \|\vec{BD}\|=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}\Rightarrow BD^2=22$

$\vec{CD}(-5,2,-2) \Rightarrow \|\vec{CD}\| = \sqrt{25+4+4}=\sqrt{33} \Rightarrow CD^2=33$

نلاحظ أن $CD^2=BC^2+BD^2$ فالمثلث BCD قائم في B حسب عكس فيثاغورث

حساب مساحة المثلث BCD:

$S=\frac{1}{2}\times\|\vec{BC}\|\times\|\vec{BD}\| = \frac{1}{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{22}$

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{2} = \frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{11}{\sqrt{2}}$

7) a) $(BCD): y+z-2=0$ $\quad A(-\frac{1}{2},3,1)$

8. إثبات أن النقطة A خارج المستوي (BCD)

نعوض إحداثيات A في معادلة الـ (BCD)

$3+1-2=2\neq0$

نلاحظ أن A لا تحقق معادلة (BCD) وبالتالي النقطة A خارج المستوي (BCD)

b) $(BCD): \overset{a}{0}x+\overset{b}{1}y+\overset{c}{1}z-2=0$ $\quad A(-\frac{1}{2},3,1)$

$dist(A,(BCD)) = \frac{|y_A+z_A-2|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}$

$dist(A,(BCD)) = \frac{|3+1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2|}{\sqrt{2}}$

$dist(A,(BCD)) = \frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

3- حساب حجم الرباعي الوجوه (ABCD)

h ارتفاع رباعي الوجوه (ABCD) هو بعد الرأس A عن القاعدة (BCD)

$V=\frac{1}{3}S_b h=\frac{1}{3}\times\frac{11}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\frac{11}{3}$

4) a) $BA=\sqrt{(-\frac{1}{2}+1)^2+(3-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{\frac{41}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

$CA=\sqrt{(-\frac{1}{2}-2)^2+(3-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{\frac{41}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

$DA=\sqrt{(-\frac{1}{2}+3)^2+(3-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{\frac{41}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

نلاحظ أن $BA=CA=DA$ فالنقاط B, C, D تقع على سطح كرة مركزها A

b) حساب R:

$R=BA=CA=DA=\frac{\sqrt{41}}{2}$

معادلة الكرة S:

$S: (x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

$S: (x+\frac{1}{2})^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{41}{4}$

التمرين 38:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$C(2,0,0)$ $\quad B(1,-2,-3)$ $\quad A(1,-1,-2)$

1) برهن أن النقاط A, B, C تعين مستوياً ثم تحقق أن معادلته الديكارتية هي $x+y-z-2=0$

2) ليكن المستويان Q, P معادلتاهما:

$Q: 3x+2y-z+10=0$

$P: x-y-2z=0$

ادرس تقاطع المستويات (ABC) و P و Q.

الحل:

1- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A , y_B-y_A , z_B-z_A) = (0,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}(x_C-x_A , y_C-y_A , z_C-z_A) = (1,1,2)$

$$\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{2}$$

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة فهي تعين مستوٍ (ABC)

يمكن إيجاد معادلة المستوي (ABC) بأكثر من طريقة سنكتفي بطريقة واحدة:

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ أحد أشعة الناظم على المستوي (ABC)

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -b-c=0 \quad (1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow a+b+2c=0 \quad (2)$

بما أنه يوجد عدد غير منته من أشعة الناظم على المستوي (BCD) نختار $c=1$ مثلاً: نعوض في (1) و(2)

$-b-1=0 \quad (1')$

$a+b+2=0 \quad (2')$

من (1') نجد $b=-1$ نعوض في (2') نجد $a=-1$ فيكون شعاع ناظم للمستوي (ABC) هو $\vec{n}(-1,-1,1)$

فتكون معادلة المستوي:

$(ABC): a(x-x_C)+b(y-y_C)+c(z-z_C)=0$

$-1(x-2)-1(y-0)+1(z-0)=0$

$-x+2-y+z=0$

$(ABC): x+y-z-2=0$

ملاحظة: بعد إيجاد $\vec{n}(-1,-1,1)$ شعاع ناظم المستوي (ABC) يمكننا إيجاد معادلة المستوي كما يلي:

$(ABC): ax+by+cz+d=0$

$(ABC): -x-1y+1z+d=0$

وبما أن المستوي (ABC) مار من النقطة $C(2,0,0)$ نجد:

$-(2)-1(0)+1(0)+d=0 \Rightarrow d=2$

فتصبح معادلة المستوي $(ABC): x+y-z-2=0$

2)

$$S:\begin{cases} (ABC)\ x+y-z-2=0 & \text{---}(L_1)\\ P: x-y-2z=0 & \text{---}(L_2)\\ Q: 3x+2y-z+10=0 & \text{---}(L_3)\end{cases}$$

$$S':\begin{cases} x+y-z-2=0 & \text{---}(L_1)\\ 2y+z-2=0 & \text{---}(L_1-L_2)=(L_2')\\ -y+2z+16=0 & \text{---}(-3L_1+L_3)=(L_3')\end{cases}$$

$$S'':\begin{cases} x+y-z-2=0 & \text{---}(L_1)\\ 2y+z-2=0 & \text{---}(L_2')\\ 5z+30=0 & \text{---}((L_2')+2(L_3'))=(L_3'')\end{cases}$$

$$S''':\begin{cases} x+y-z-2=0 & \text{---}(L_1)\\ 2y+z-2=0 & \text{---}(L_2')\\ z+6=0 & \text{---}(L_3'')\end{cases}$$

من (L_3'') نجد أن $\boxed{z=-6}$ نعوض في (L_2') نجد أن $\boxed{y=4}$ ثم نعوض في (L_1) نجد $\boxed{x=-8}$

$(x,y,z)=(-8,4,-6)$ فالجملة تقبل حلاً وحيداً أي أن المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة $I(-8,4,-6)$

-2 طريقة ثانية لحل جملة المعادلات الثلاث للمستويات (ABC) و P و Q:

$$S:\begin{cases}(ABC): x+y-z-2=0 & --(L_1)\\ P: x-y-2z=0 & --(L_2)\\ Q: 3x+2y-z+10=0 & --(L_3)\end{cases}$$

من (L_1) و (L_2) نجد:

$x+y=z+2 \quad (L_1')$

$x-y=2z \quad (L_2')$

بالجمع: $x=1+\frac{3}{2}z \quad (L_4)$

نعوض في (L_1'): $1+\frac{3}{2}z+y=z+2$

$y=1-\frac{1}{2}z \quad (L_5)$

نعوض (L_4) و (L_5) في (L_3)

$3+\frac{9}{2}z+2-z-z+10=0$

$\frac{5}{2}z+15=0$

$5z+30=0$

$z=-\frac{30}{5} \Rightarrow z=-6$

نعوض في (L_4) و (L_5)

$x=1+\frac{3}{2}(-6)=-8$

$y=1-\frac{1}{2}(-6)=4$

فالجملة تقبل حلاً وحيداً

$(x,y,z)=(-8,4,-6)$

أي أن المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة: $I(-8,4,-6)$

تمرين 39:

$$d\begin{cases}x=3s+2\\ y=-s-1\\ z=s+1\end{cases} \qquad d'\begin{cases}x=t+1\\ y=2t-3\\ z=-t+2\end{cases}$$

1) أثبت أن d, d' متقاطعان

2) جد إحداثيات نقطة التقاطع I

الحل:

1) $\vec{u}(3,-1,1)$ $\vec{u'}(1,2,-1)$ $\frac{3}{1}\neq\frac{-1}{2}$

المركبات غير متناسبة فالمستقيمان d, d' إما متخالفان أو متقاطعان

$t+1=3s+2 \quad ---L_1$

$2t-3=-s-1 \quad ---L_2$

$-t+2=s+1 \quad ---L_3$

من L_1: $t=3s+1$ نعوض بـ L_2:

$2(3s+1)-3=-s-1$

$6s+2-3=-s-1 \Rightarrow 7s=0 \Rightarrow s=0$

نعوض بـ L_1: $t+1=3(0)+2$

$\Rightarrow t=1$

نعوض الآن في L_3:

$-1+2=0+1 \Rightarrow 1=1$ محققة

إذاً جملة المعادلات $[L_1, L_2, L_3]$ لها حل وحيد فالمستقيمان متقاطعان

وإيجاد I: $s=0$ $t=1$

$I(2,-1,1)$

مسألة 20 :

في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ نتأمل المكعب $(ABCDEFG)$ طول ضلعه 2

I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$

K منتصف $[FB]$.

1- جد معادلة المستوي (IJK) ثم احسب مساحة المثلث IJK.

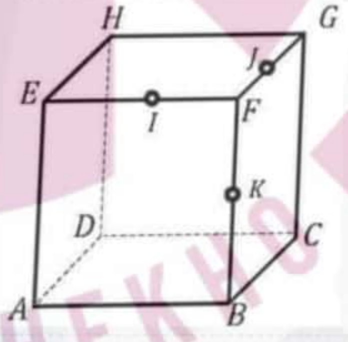
2- احسب بعد F عن المستوي (IJK) ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $FIJK$

3- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DF) وتحقق أن (DF) يعامد المستوي (IJK)

4- جد احداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة F على المستوي (IJK)

5- a) تحقق أن N نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث IJK

b) استنتج بعد N عن المستقيم (IK)



الحل :

1- $J(2,1,2)$ $I(1,0,2)$ $K(2,0,1)$

$D(0,2,0)$ $F(2,0,2)$

$\overrightarrow{IK}(1,0,-1)$ $\overrightarrow{IJ}(1,1,0)$

غير مرتبطة خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظمياً للمستوي (IJK)

$\overrightarrow{IJ}\cdot\vec{n}=0$ $a+b=0$

$\overrightarrow{IK}\cdot\vec{n}=0$ $a-c=0$

نفرض $a=1 \Rightarrow \boxed{b=-1} \Rightarrow \boxed{c=1}$

$\vec{n}(1,-1,1)$

$1(x-1)-1(y-0)+1(z-2)=0$

$(IJK): x-y+z-3=0$

$IJ=\sqrt{2}$ $IK=\sqrt{2}$ $JK=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{JK}(0,-1,-1)$

والمثلث IJK متساوي الأضلاع .

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $dist(F,IJK)=\frac{|2+2-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=h$

$V=\frac{1}{3}S_{IJK}\cdot h$

$V=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{6}$

3) $\overrightarrow{DF}(2,-2,2)$

$$(DF):\begin{cases}x=2t\\ y=-2t+2\\ z=2t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$\overrightarrow{DF}(2,-2,2)$ $\vec{n}(1,-1,1)$

مرتبطان خطياً .

ومنه المستقيم (DF) يعامد المستوي (IJK)

4) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (DF) في معادلة المستوي (IJK)

$2t+2t+2t-5=0$

$t=\frac{5}{6} \Rightarrow N\left(\frac{10}{6},\frac{2}{6},\frac{10}{6}\right)$

5) بما أن المثلث IJK متساوي الأضلاع تكون فيه نقطة تلاقي الارتفاعات هي مركز ثقله

$x=\frac{2+1+2}{3}=\frac{5}{3}$

$y=\frac{0+0+1}{3}=\frac{1}{3}$

$z=\frac{1+2+2}{3}=\frac{5}{3}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

ومنه نستنتج أن N نقطة تلاقي الارتفاعات ومركز ثقل المثلث IJK.

6- بعد N عن المستقيم (IK) هو طول NL حيث L منتصف $[IK]$ ومسقط N على $[IK]$.

$L(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$ $\overrightarrow{NL}(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$

$NL=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

$dist(N,(IK))=\frac{\sqrt{6}}{6}$

التمرين 40:

مكعب طول حرفه $ABCDEFGH$ يساوي 1 والنقطة K منتصف $[BC]$ ولنختر معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

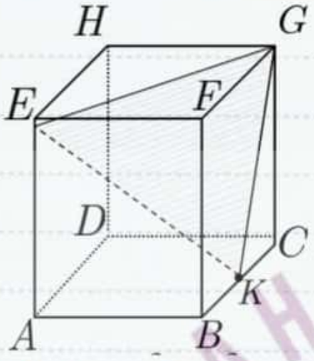
1- جد إحداثيات النقاط E و F و G و K

2- أثبت أن $\vec{n}(2,-2,1)$ ناظم على المستوي (EGK)

3- أثبت أن معادلة المستوي (EGK) هي $2x-2y+z-1=0$

4- أثبت أن بعد النقطة F عن المستوي (EGK) يساوي $\frac{2}{3}$ ثم تحقق أن المسقط القائم للنقطة F على المستوي (EGK) هي النقطة $L(\frac{5}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9})$

5- احسب مساحة المثلث EFG واستنتج حجم رباعي الوجوه $KEFG$ ثم استنتج مساحة المثلث EGK.



الحل:

1- $E(0,0,1)$ $G(1,1,1)$ $K(1,\frac{1}{2},0)$ $F(1,0,1)$

2- إثبات أن $\vec{n}(2,-2,1)$ ناظم على المستوي (EGK)

$\overrightarrow{EG}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{EK}(1,\frac{1}{2},-1)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EK}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-1}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=(2)(1)+(-2)(1)+(1)(0)=0$

فالشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{EG}$ متعامدان (1)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EK}=(2)(1)+(-2)(\frac{1}{2})+(1)(-1)=0$

فالشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{EK}$ متعامدان (2)

من (1) و (2) نجد أن $\vec{n}(2,-2,1)$ ناظم على المستوي (EGK)

3- المستوي (EGK) يقبل الشعاع $\vec{n}(2,-2,1)$ ناظماً عليه ويمر بالنقطة $E(0,0,1)$ فمعادلته:

$2(x-0)-2(y-0)+1(z-1)=0$

ومنه $2x-2y+z-1=0$

طريقة ثانية:

بعد إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EK}$ غير مرتبطين خطياً نتحقق من أن النقاط E و G و K تحقق معادلة المستوي المعروضة

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

4) $dist(F,(EGK)) = \dfrac{|2(1)-2(0)+1-1|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

للتحقق أن المسقط القائم للنقطة F على المستوي (EGK) هي النقطة $L\left(\frac{5}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$

يجب أن نثبت الشرطين الآتيين:

الشرط الأول: النقطة $L\left(\frac{5}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$ تنتمي إلى المستوي (EGK)

$2\left(\frac{5}{9}\right)-2\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)-1=\frac{10-8+7}{9}-1=1-1=0$

فالنقطة L تنتمي إلى المستوي (EGK)

الشرط الثاني: $dist(F,(EGK)) = FL$

$FL=\sqrt{\left(1-\frac{5}{9}\right)^2+\left(0-\frac{4}{9}\right)^2+\left(1-\frac{7}{9}\right)^2}$

$FL=\sqrt{\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}}=\sqrt{\frac{36}{81}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

فالشرط الثاني محقق:

فالمسقط القائم للنقطة F على المستوي (EGK) هي النقطة $L\left(\frac{5}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$

طريقة ثانية:

الشرط الأول: النقطة $L\left(\frac{5}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$ تنتمي إلى المستوي (EGK)

الشرط الثاني: نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{LF}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً.

$\overrightarrow{LF}\left(1-\frac{5}{9},0-\frac{4}{9},1-\frac{7}{9}\right)$ ومنه $\overrightarrow{LF}\left(\frac{4}{9},-\frac{4}{9},\frac{2}{9}\right)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{LF}=\frac{2}{9}\vec{n}$ فالشعاعان $\overrightarrow{LF}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً

5) $S(EFG)=\frac{1}{2}\times(1)\times(1)=\frac{1}{2}$

$V(EFGK)=\frac{1}{3}\times S(EFG)\times h$

h يساوي بعد النقطة K عن المستوي (EFG) وهي تساوي طول حرف المكعب $\boxed{1}$

$\boxed{V(EFGK)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}}$

تمرين 41:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستقيمان اللذان تمثيلهما الوسيطي:

$d:\begin{cases}x=3+t\\ y=2t\\ z=1-t\end{cases}$ $\quad d:\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}t'\\ y=-2-t'\\ z=3+\frac{1}{2}t'\end{cases}\ t'\in\mathbb{R}$

1- أثبت أن المستقيمين d و d' متوازيان وغير منطبقين.

2- أوجد نقطة A من المستقيم d ونقطة B من المستقيم d' ثم تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}_d(1,2,-1)$ غير مرتبطين خطياً ثم اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d و d'.

الحل:

1) $\vec{u}_d(1,2,-1)$ $\quad \vec{u}_{d'}\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{-1}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

المركبات متناسبة فشعاعي التوجيه

$\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{d'}$ مرتبطان خطياً فالمستقيمان

d و d' إما أن يكونا متوازيان

أو منطبقان.

. نأخذ نقطة من أحدهما وليكن d بفرض $t=0$

$A(3,0,1)$

نعوضها في المعادلات الوسيطة لـ d'

$3 = 1 - \frac{1}{2}t'$ (1

$0 = -2 - t'$ (2

$1 = 3 + \frac{1}{2}t'$ (3

من (2) نجد $t' = -2$ نعوض في (1)

$3 = 1 - \frac{1}{2}(-2) \Rightarrow 3 \neq 2$

غير محققة فالنقطة $A \notin d'$

فالمستقيمان d و d' متوازيان وغير منطبقين

(2 $A(3,0,1) \in d$

لنوجد النقطة من d' بفرض $t'=0$

$B(1,-2,3) \in d'$

$\vec{AB}(-2,-2,2) \quad \vec{u}_d(1,2,-1)$

$\frac{-2}{1} \neq \frac{-2}{2}$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان

$\vec{AB}$ و $\vec{u}_d$ غير مرتبطان خطياً.

بفرض $\vec{n}_P(a,b,c)$

$\vec{n}_P \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$-2a - 2b + 2c = 0$

$\vec{n}_P \perp \vec{u}_d \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 0$

$(a,b,c)\cdot(1,2,-1) = 0 \Rightarrow$

$a + 2b - c = 0$

بفرض $c = 1$

$-2a - 2b + 2 = 0 \Rightarrow$

$a + 2b - 1 = 0$

بالجمع $\Leftarrow$ $-a + 1 = 0$

$\boxed{a = 1} \quad \boxed{b = 0}$

$\vec{n}_P(1,0,1) \quad A(3,0,1)$

$1(x-3) + 0(y-0) + 1(z-1) = 0$

$x - 3 + z - 1 = 0$

$P: x + z - 4 = 0$