تعريف التابع الأصلي :

ليكن f تابعا معرفا على المجال I نقول عن التابع F أنه تابع اصلي للتابع f على المجال I إذا وفقط إذا كان F اشتقاقيا على المجال I وكان

$$F'(x) = f(x)$$

مهما تكن $x \in I$

نتائج التعريف :

- كل تابع من النمط $G(x) = F(x) + k$ هو تابع اصلي للتابع f على المجال I
- أيا كان $x_0 \in I$ و $y_0 \in R$ يوجد تابع أصلي وحيد G للتابع f معرفا على المجال I ويحقق $G(x_0) = y_0$
- إذا كان C الخط لبياني للتابع الأصلي $F(x)$ نسمي C عندها منحنيا تكامليا وينتج المنحني التكاملي C_k الموافق للتابع $G(x) = F(x) + k$ بانسحاب على محور التراتيب شعاعه $k\vec{j}$

إذا كان f تابعا مستمرا على مجال I عندئذ يوجد تابع اصلي F للتابع f على المجال I

كيف نثبت أن F تابع أصلي للتابع f على المجال I

نثبت أن F اشتقاقيا على المجال I وأن $F'(x) = f(x)$ مهما تكن $x \in I$

مثال : أثبت أن التابع $F(x) = x^3 + 2x$ تابعا أصليا للتابع $f(x) = 3x^2 + 2$ على R

الحل :

التابع $F(x)$ هو كثير حدود من الدرجة الثالثة فهو اشتقاقي على R ومنه :

$$F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$$

أي أن التابع $F(x)$ هو تابعا أصليا للتابع $f(x)$ على R

قواعد حساب التوابع الأصلية :

f	F	مجال التابع الأصلي	ملاحظات
a	ax	$\mathcal{R}$	$a \in \mathcal{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathcal{R}$	$n \in N$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]0,+\infty[$ $]-\infty,0[$	$n \in Z$ $n < -1$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$	$\alpha \in \mathcal{R} \wedge \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$ $\ln(-x)$	$]0,+\infty[$ $]-\infty,0[$	
e^x	e^x	$\mathcal{R}$	
$\cos x$	$\sin x$	$\mathcal{R}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathcal{R}$	
$\begin{cases} 1+\tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$	$\tan x$	$\mathcal{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$	$k \in Z$
$\begin{cases} 1+\cot^2 x \\ \frac{1}{\sin^2 x} \end{cases}$	$-\cot x$	$\mathcal{R} \setminus \{\pi+\pi k\}$	$k \in Z$
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$	I	$a \neq 0$ F تابع أصلي للتابع f

◈ ملاحظة 1 :

إذا كان G, F تابعين اصليين للتابعين f, g على المجال I كان $G+F$ تابعاً أصلياً للتابع $f+g$ على المجال I نفسه

◈ ملاحظة 2 :

إذا كان F تابعاً اصلياً للتابع f على المجال I وكان λ عدداً حقيقياً كان λF تابعاً أصلياً للتابع λf على المجال I نفسه .

قواعد إيجاد التوابع الاصلية لبعض التوابع المركبة

f	F	ملاحظات
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in Z \wedge n \neq -1$ في حالة $n < -1$ يجب ألا ينعدم u على I
$u'u^a$	$\dfrac{u^{a+1}}{a+1}$	$a \neq \{0,-1\} \wedge u > 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ على I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$ $\ln(-u)$	$u > 0$ على I $u < 0$ على I
$u'e^u$	e^u	
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	

تذكر أن

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos a . \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a . \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a . \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

وتفيدنا هذه العلاقات في تبسيط إيجاد التوابع الاصلية لبعض التوابع المثلثية

التكامل المحدد وخواصه :

تعريفه :

ليكن f تابعا مستمرا على مجال I وليكن F أحد التوابع الأصلية لـ f على هذا المجال وبفرض a, b عددين من المجال I عندها ندعو العدد المعرف بالشكل التالي التكامل المحدد للتابع f من : a إلى b

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

خواصه :

1- $\int_a^b (f + g) = \int_a^b (f) + \int_a^b (g)$

2- $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b (f)$

3- $\int_a^b (f) = - \int_b^a (f)$

4- $\int_a^b (f) = \int_a^c (f) + \int_c^b (f)$

ملاحظة1 : تدعى الخاصة 4 بعلاقة شال في التكامل المحدد وتستخدم عندما يغير التابع قاعدة ربطه ضمن المجال $[a, b]$.

ملاحظة 2 : ليكن f تابعا مستمرا على مجال I وبفرض a, b عددين من المجال I عندها يكون التابع $F = \int_a^x f$ المعرف على I هو التابع الأصلي لـ f الذي ينعدم عند $x = a$

❁ التكامل بالتجزئة :

نفكر في استخدم طريقة التكامل بالتجزئة في التكاملات التالية :

1- $\int_a^b x^n \ln x \, dx$	4- $\int_a^b x^n e^x \, dx$
2- $\int_a^b x^n \cos x \, dx$	5- $\int_a^b e^x \cos x \, dx$
3- $\int_a^b x^n \sin x \, dx$	6- $\int_a^b e^x \sin x \, dx$

ولإيجاده نستخدم القانون التالي :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

وللسهولة نقوم بتشكيل الجدول التالي

u	$\longrightarrow$	u'
	uv	$-\int_a^b u'v$
v'	$\longrightarrow$	v

◆ ملاحظة 1 : **التكاملات الواردة في الجدول الأول هي نموذج للتكاملات التي تحل باستخدام التجزئة وليس لجميعها**

◆ ملاحظة 2 : **في التكاملات من النوع** 1 **نضع** $u = \ln x \quad , v' = x^n$

◆ ملاحظة 3 : **في التكاملات من النوع** 2,3,4 **نضع** $u = x^n \quad , v' = e^x , \cos x , \sin x$

◆ ملاحظة 4 : **قد نستخدم التكامل بالتجزئة لأكثر من مرة حسب قيمة** n

◆ ملاحظة 5 : **في التكاملات** 5 , 6 **لا يهم الاختيار ، المهم هو المحافظة على نفس الاختيار عند استخدام التكامل مرة أخر أثناء الحل حتى نصل للمطلوب**

❀ حساب تكامل بعض التوابع الكسرية :

◈ التكاملات من النمط $\frac{A(x)}{B(x)}$: $\deg A(x) < \deg B(x)$

حيث A كثير حدود و B كثير حدود من الدرجة الثانية واحدي (أمثال x^2 تساوي الواحد) وله جذران حقيقان مختلفان r_1 و r_2 ويكتب بالشكل $B(x) = (x - r_1)(x - r_2)$. عندها يمكن أن نكتب :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{\alpha}{(x - r_1)} + \frac{\beta}{(x - r_2)}$$

وبتوحيد المقامات والمطابقة نحصل على قيمة α و β ويؤول التكامل : $I = \int_a^b \frac{A(x)}{B(x)}$ إلى تكاملات معلومة

◈ التكاملات من النمط $\frac{A(x)}{B(x)}$: $\deg A(x) > \deg B(x)$

في هذه الحالة نجري القسمة الاقليدية لكثير الحدود A على B فنجد .:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

حيث $\deg \mathrm{B}(x) < \mathrm{degR}(x)$ ويكون حساب $\int_a^b Q(x)$ سهل كونه كثير حدود

وحساب $\int_a^b \frac{Q(x)}{B(x)}$ يكون مشابه للحالة الأولى .

◈ عندما نواجد كسر ما من النمط $\frac{A(x)}{B^n(x)}$ بشرط $B(x) \neq 0$ سنكون أمام الحالات التالية :

1) $n \neq 1 , A(x) = B'(x)$

عندئذ :

$$I = \int_a^b \frac{A(x)}{B^n(x)} = \frac{B^{-n+1}(x)}{-n+1}$$

2) $n = 1 , \ A(x) = B'(x)$

$$I = \int_a^b \frac{A(x)}{B(x)} = \begin{cases} \ln B(x) & B(x) > 0 \\ \ln\left(-B(x)\right) & B(x) < 0 \end{cases}$$

3) $n = 1 , \deg A(x) < \deg B(x)$

نضع :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{\alpha}{(x-r_1)} + \frac{\beta}{(x-r_2)} \dots \dots$$

ونتابع كما تعلمنا

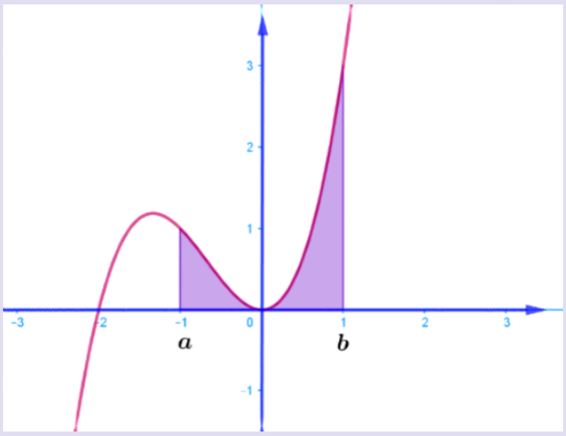
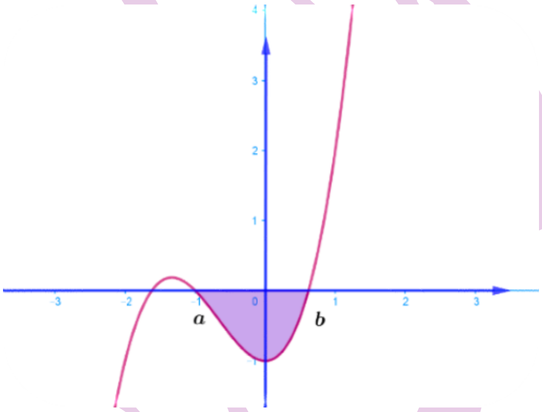
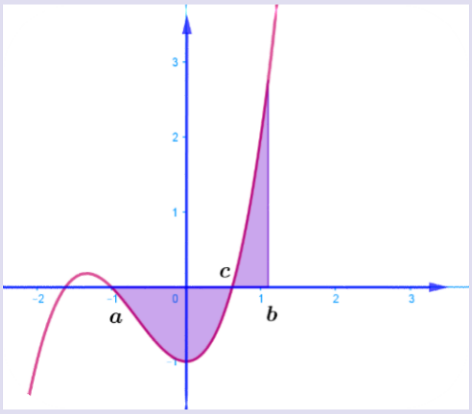
4) $n = 1 \ \deg A(x) > \deg B(x)$

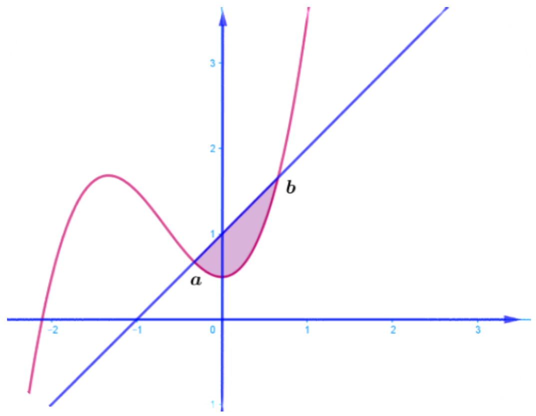
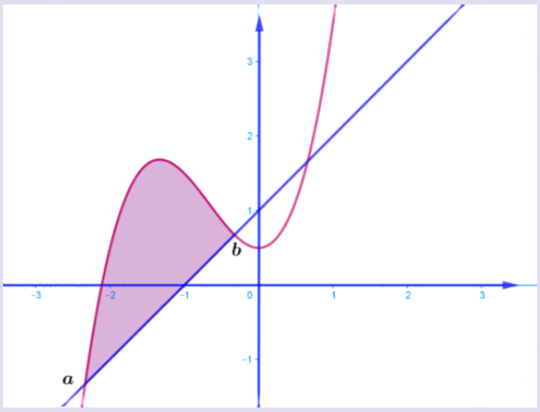
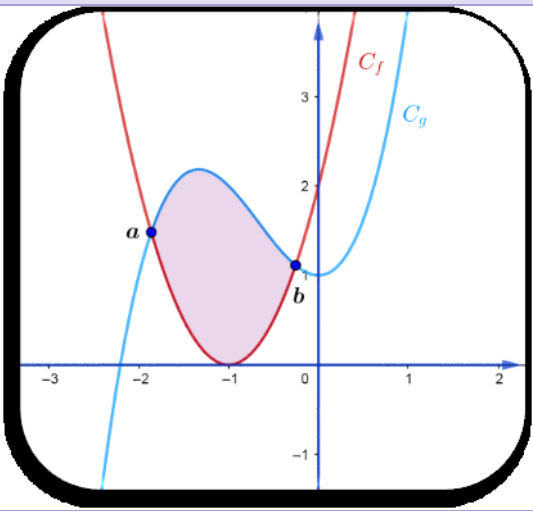
في هذه الحالة نجري القسمة الاقليدية لكثير الحدود A على B فنجد .:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

ونتابع كما تعلمنا

التكامل المحدد و حساب المساحة :

المساحة المطلوبة	الحالة المطلوبة
$s = \int_a^b f(x)dx$	
$s = -\int_a^b f(x)dx$	
$s = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	

$$s=\int_a^b (y_\Delta - f)dx$$	
$$s=\int_a^b (f - y_\Delta)dx$$	
$$s=\int_a^b (g - f)dx$$	

الملاحظات :

- المساحة مقدار موجب دوما ولذلك يجب التأكد من صيغة التكامل المستخدمة بما يتوافق مع الحالات السابقة والرسم البياني
- عند طلب مساحة محددة بين خط بياني ومستقيم أو بين خطين بيانيين ندرس التقاطع و الوضع النسبي بينهما لمعرفة حدود التكامل (يمكن التعويض بقيمة عددية لمعرف الوضع النسبي)

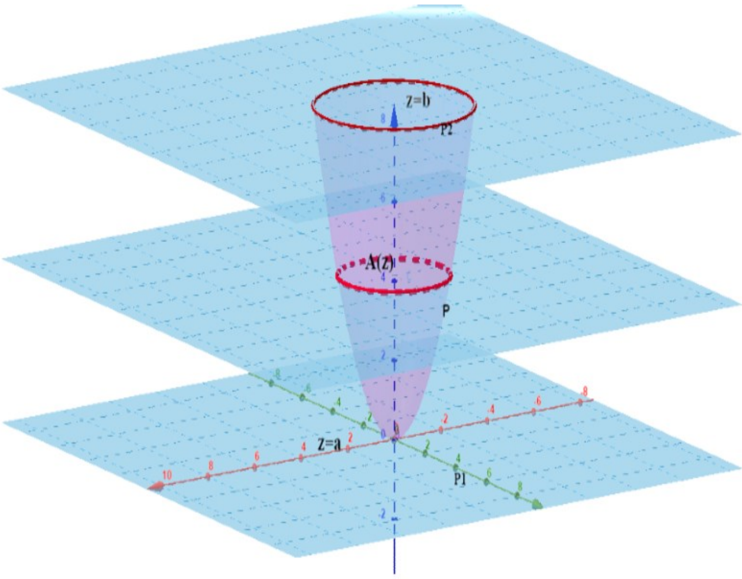
التكامل المحدد و حساب حجوم المجسمات :

ليكن S مجسما يحدده المستويان $P_1\ (z = a)\ \ , P_2(z = b)$ في معلم متجانس نرمز بالرمز V إلى حجم هذا المجسم وبالرمز $\mathcal{A}(z)$ ألى مساحة مقطع المجسم بالمستوي p الذي يوازي $P_1\ (z = a)\ \ , P_2(z = b)$

بحيث $(a \le z \le b)$

نقبل بأن الحجم V يعطى بالعلاقة :

$$V = \int_a^b \mathcal{A}(z)dz$$



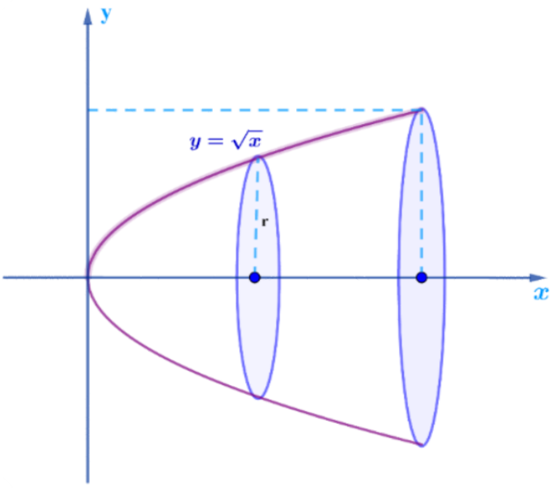
مثال : ليكن التابع $f(x) = \sqrt{x}$ المعرف على المجال من $[0,4]$ والمطلوب أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران للخط البياني للتابع حول المحور xx' على المجال المذكور

بأخذ مقطع هذا المجسم بمستوي عمودي على محور الفواصل في النقطة $(x,0)$ حيث $(0 \le x \le 4)$ نجد أن المقطع دائرة نصف قطرها

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{x}$$

$$\mathcal{A}(x) = \pi x$$

$$V = \int_0^4 \mathcal{A}(x)dx = \int_0^4 \pi x dx = \left[\frac{\pi x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$



تصنيف تمارين أيجاد تابع اصلي بحسب نوع التابع :

التوابع من النمط $f(x) = ax^n$ حيث $n \neq -1$ $F(x) = a\frac{x^{n+1}}{n+1}$	
$f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3 \qquad I = \mathcal{R}$	$f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2} \qquad I =]-\infty, 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^4} \qquad I =]0, +\infty[$	$f(x) = \frac{2}{x^2} + x \quad , F(1) = 0$
$\int_2^{-1} (x^2 - 4x + 3)\, dx$	

التوابع من النمط $f(x) = (ax+b)^n$ حيث $a \neq 0 , n \neq -1$ $F(x) = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	
$f(x) = (1-2x)^4 \qquad I = \mathcal{R}$	$f(x) = (2x-1)^3 \qquad I = \mathcal{R}$
$f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2} \qquad I =]-\infty, \frac{1}{3}[$	$f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} \quad , F(0) = 0$
$f(x) = \frac{1}{1-2x+x^2} \qquad I =]1, +\infty[$	$f(x) = \sqrt{(2x-1)^3} \qquad I =]\frac{1}{2}, +\infty[$
$\int_0^{2} \sqrt{2x+1}\, dx$	

التوابع من النمط $f(x)=u'(x)u(x)^n$ حيث $a\neq 0\,,n\neq -1$

$$F(x)=\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$$

$\int_0^1 te^{t^2-1}\,dt$	$\int_2^{-1}(x-2)(x^2-4x+3)\,dx$
$f(x)=\frac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}$ $\quad I=\mathcal{R}$	$f(x)=2e^{3x-1}$ $\quad I=\mathcal{R}$
$f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$ $\quad ,F(0)=0$	$f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$ $\quad I=]-1,3[$
$f(x)=\sin x\,.\cos^2 x$ $\quad ,F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$f(x)=\cos x\,(\sin^2 x-3\sin x)$ $\quad I=\mathcal{R}$
$f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$ $\quad I=]-\infty,-1[$	$f(x)=\frac{1}{x^2}\times e^{-\frac{2}{x}}$ $\quad I=\mathcal{R}_+^*$
$f(x)=x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ $\quad I=\mathcal{R}$	$f(x)=2e^{2-3x}$ $\quad I=\mathcal{R}$

التوابع من النمط $f(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x)\geq 0$

$$F(x)=2\sqrt{u(x)}$$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ $\quad I=]-\infty,\frac{3}{2}[$	$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-2x}}$ $\quad I=]-\infty,\frac{1}{2}[$
$f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}}$ $\quad I=\mathcal{R}$	$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad I=]1,+\infty[$
$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$ $\quad I=]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$	$f(x)=\frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$ $\quad I=]1,+\infty[$
	$\int_0^3\frac{dt}{\sqrt{t+1}}$

التوابع من النمط $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ حيث

$$F(x)=\begin{cases} \ln u(x) & ,u(x)>0 \\ \ln(-u(x)) & ,u(x)<0 \end{cases}$$

$f(x)=\frac{1}{x-4} \qquad I=]4,+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x-4} \qquad I=]-\infty,4[$
$f(x)=\frac{5}{4x-3} \qquad I=]-\infty,\frac{3}{4}[$	$f(x)=-\frac{1}{3-x} \qquad ,F(1)=1$
$f(x)=\frac{2x-1}{x+1} \qquad I=]-1,+\infty[$	$f(x)=\cot x \qquad I=]-\pi,0[$
$f(x)=\frac{3x+2}{2x-1} \qquad I=]\frac{1}{2},+\infty[$	$f(x)=\frac{x+1}{x-2} \qquad I=]-\infty,2[$
$f(x)=\tan x \qquad ,I=]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$	$f(x)=\frac{3x+1}{2x} \qquad I=]0,+\infty[$
$f(x)=\cot x \qquad I=]0,\pi[$	$f(x)=\frac{2x-1}{(x+2)^2} \quad I=]-\infty,-2[$
$f(x)\frac{x+1}{x^2-4} \quad I=]-\infty,-2[$	$f(x)=\frac{x+3}{x^2-1} \quad I=]1,+\infty[$
$f(x)=\frac{2x-1}{x^2+x} \quad I=]-1,0[$	$f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-2} \quad I=]2,+\infty[,$
$f(x)=\frac{x}{x^2-x-6} \quad I=]-2,3[$	$\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-9}dx$
$\int_{-2}^{-1}\frac{x-3}{x}dx$	$I=\int_{0}^{2}\frac{4x-5}{2x+1}dx$
$I=\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-1}dx$	$\int_{1}^{2}\frac{x^3}{x^4+2}dx$

التكاملات بالتجزئة	
$\int_1^e (x-1)\ln x\,dx$	$\int_1^2 (t-2)e^{2t}\,dt$
$\int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2-1)e^x\,dx$	$\int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx$
$I=\int_1^e x\ln x\,dx$	$N=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$
$K=\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$	$J=\int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx$
$M=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$	$L=\int_0^{\pi/3} x\sin 3x\,dx$
$f(x)=x\cdot\cos x\ I=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2\cdot\cos 3x\quad I=\mathbb{R}$
$f(x)=x^2\cdot e^x\quad I=\mathbb{R}$	$f(x)=x\cdot\sin 2x\quad I=\mathbb{R}$
$f(x)=x^2\cdot\sin 2x\quad I=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2\cdot\ln x\quad I=]0,+\infty[$