رياضيات تخصصية

الهندسة التحليلية

الهندسة التحليلية

٢

إسم الوحدة : الهندسة التحليلية

الجدارة: الالمام بمبادئ الهندسيةاالتحليلية

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- نظام البيان للمعادلة الخطية
- حساب المسافة بين نقطتين
- حساب ميل ومعادلة الخط المستقيم
- كيفية حساب إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور

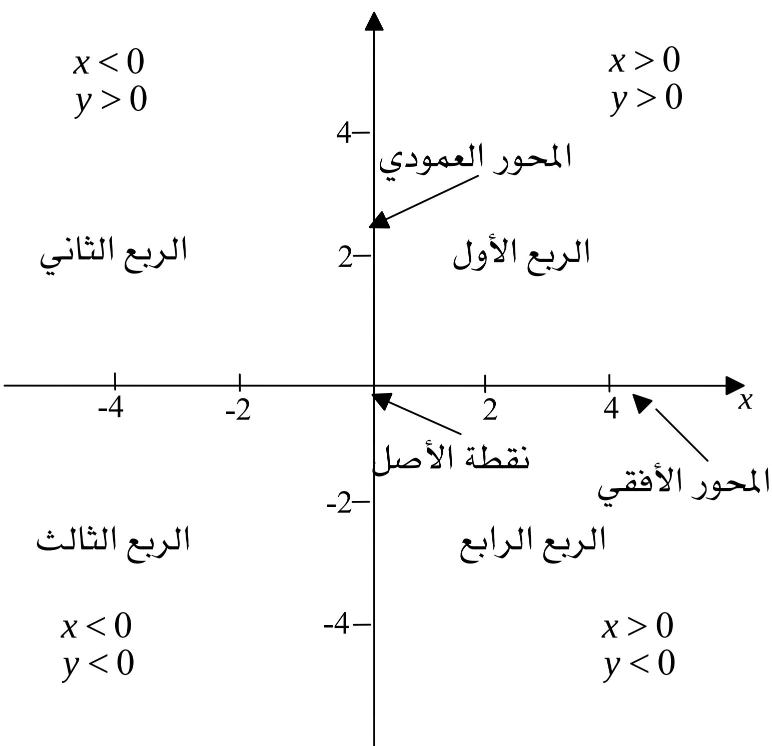
مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ستة ساعات

مبادئ الهندسة التحليلية

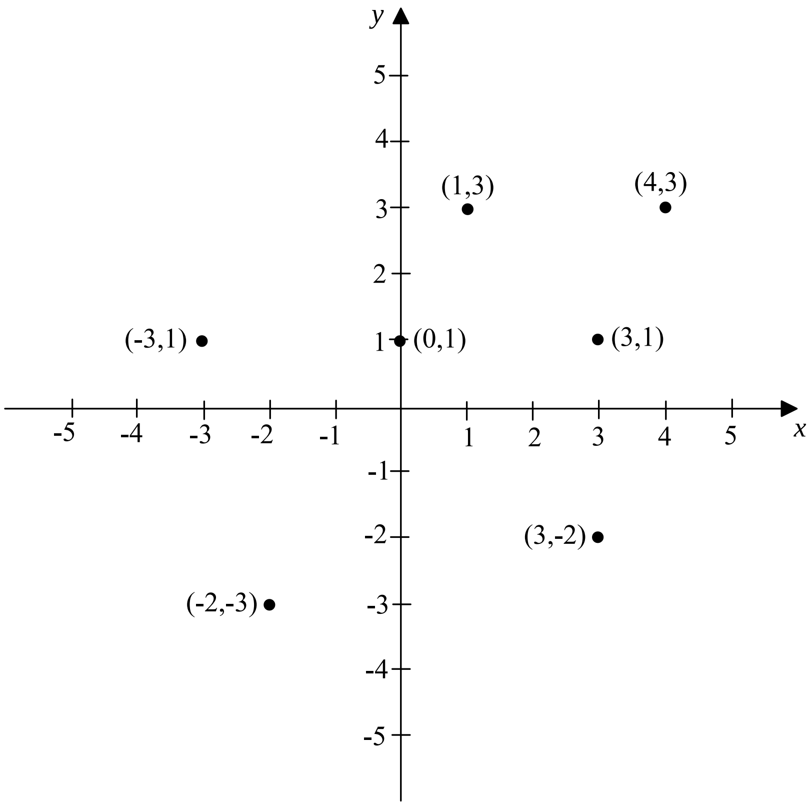
١. نظام المحاور الديكارتي

لقد سبق وعرفنا أن كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بنقطة وحيدة على خط الأعداد. فكذلك يمكن توسيع هذه الفكرة لتشمل نقاط على مستوى. فعلى مستوى ذو بعدان أو محوران xy كل نقطة محددة بزوج مرتب من الأعداد يطلق عليه اسم إحداثيات النقطة. يرمز لهذا الزوج المرتب بـ (a,b) حيث a عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور x و b كذلك عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور y. إحداثيات النقطة تكون معروفة بعد تحديد موقع النقطة بالنسبة للمحور الأفقي x وبالنسبة للمحور العمودي y. تتقاطع المحاور عند النقطة $(0,0)$ والتي تسمى نقطة الأصل. في الرسم 1 تم تحديد اتجاه المحاور بحيث تظهر الأعداد الموجبة على يمين نقطة الأصل بالنسبة للمحور x وفوق نقطة الأصل بالنسبة للمحور y. الأربع مناطق التي شكلتها هذه المحاور تسمى الأرباع وهي مرقمة عكس اتجاه عقارب الساعة. يسمى هذا النظام ذو البعدين نظام المحاور الديكارتي.



الرسم1

تحديد نقطة معينة $P(a,b)$ يعني رسم النقطة في موقعها من المستوى. في الرسم 2 تم رسم النقاط $(3,1)$, $(1,3)$, $(0,1)$, $(3,-2)$, $(-2,-3)$, $(-3,1)$, $(4,3)$. ترتيب الأرقام داخل القوس مهم لأن مثلا الزوجان $(3,1)$, $(1,3)$ ويحددان نقطتين مختلفتين على المستوى.



الرسم 2

٢. المسافة بين نقطتين

المسافة بين نقطتين على خط أفقي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات x للنقطتين. المسافة بين نقطتين على خط عمودي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات y للنقطتين. فمثلا كما يبين الرسم 3 فالمسافة d بين النقطة $(1,2)$ والنقطة $(1,-3)$ هي: $d=|2-(-3)|=5$. أما إذا لم تقع النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ على خط أفقي أو عمودي كما هو موضح في الرسم 4 فالمسافة تكون طول وتر المثلث القائم الزاوية الذي طول أضلاعه (x_2-x_1) و (y_1,y_2) :

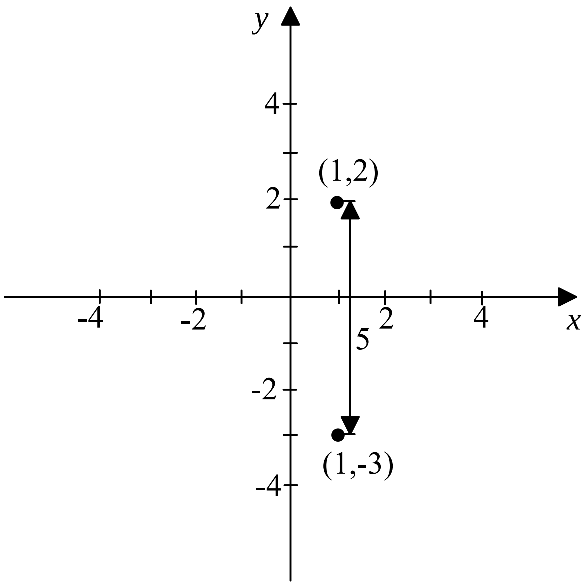
من قانون بيثاغورث:

$$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2 \Rightarrow d=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$$

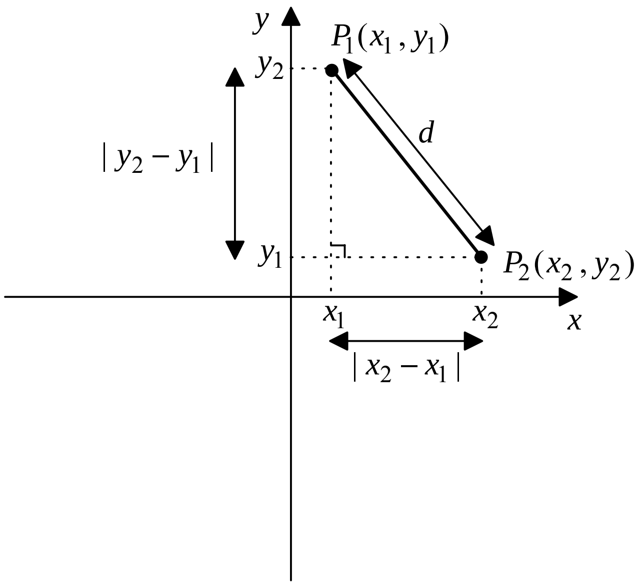
ولأن $|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2$ و $|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)2$

فالمسافة بين النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ هي:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



الرسم 4



الرسم 3

مثال ١: أوجد المسافة بين النقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

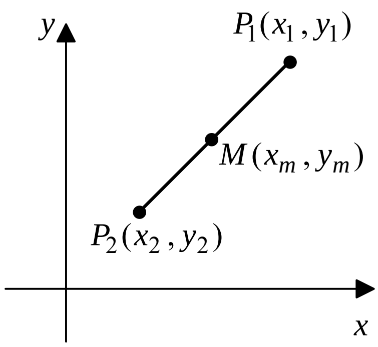
نستخدم قانون المسافة علما بأن $x_1=-3$ ، $x_2=7$ ، $y_1=4$ و $y_2=2$ كالتالي:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-(-3))^2+(2-4)^2}=\sqrt{100+4}=\sqrt{104}\approx 10.2$$

٣. إحداثيات نقطة الوسط

إحداثيات نقطة الوسط (x_m,y_m) لقطعة مستقيمة (كما هو موضح في الرسم 5) هما متوسط إحداثيات x لنقطتي أطراف الخط ومتوسط إحداثيات y لنقطتي أطراف الخط. فيكون القانون كالتالي:

$$(x_m,y_m)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



الرسم 5

مثال ٢: أوجد إحداثيات نقطة الوسط للخط المربوط بالنقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

نستخدم قانون نقطة الوسط علما بأن $x_1=-3$ ، $x_2=7$ ، $y_1=4$ و $y_2=2$ كالتالي:

$$(x_m, y_m)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-3+7}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(2,3)$$

تمارين

تمرين ١: ارسم النقاط التالية على نظام محاور ديكارتي

$1)(2,4)$ $2)(0,-3)$ $3)(-2,1)$ $4)(-5,-3)$

$5)(-3,-5)$ $6)(-4,3)$ $7)(0,2)$ $8)(-2,0)$

تمرين ٢: أوجد المسافة بين النقاط التالية

$1)(6,4),(-8,11)$ $2)(-4,-20),(-10,15)$

$3)(5,-8),(0,0)$ $4)(\sqrt{3},\sqrt{8}),(\sqrt{12},\sqrt{27})$

$5)(a,b),(-a,-b)$ $3)(a-b,b),(a,a+b)$

$7)(x,4x),(-2x,3x)\ x<0$ $8)(x,4x),(-2x,3x)\ x>0$

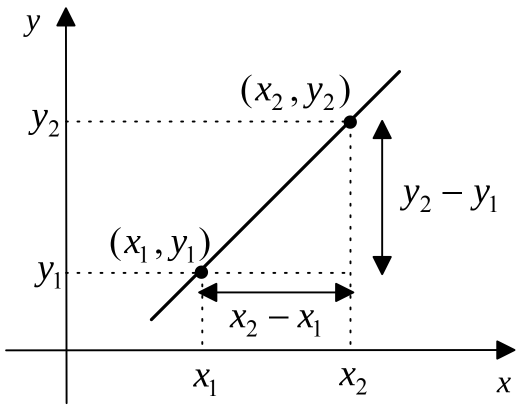
تمرين ٣: أوجد إحداثيات نقطة الوسط للقطع المستقيمة التالية:

$1)(1,-1),(5,5)$ $2)(4,7),(6,10)$ $3)(6,-3),(6,11)$ $4)(2a,0),(0,2b)$

٤. ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم (m) غير العمودي هو قياس عدد الوحدات التي يرتفع (أو ينزل) بها الخط عموديا لكل وحدة تغير أفقيا من اليسار إلى اليمين. عاين النقطتين (x_1,y_2) و (x_2,y_2) على الخط المستقيم في الرسم6. فكلما تحركت من اليسار إلى اليمين على الخط المستقيم سترتفع مسافة معينة تقابلها مسافة معينة في الاتجاه الأفقي، تسمى المسافتان التغير في y $(\Delta y=y_2-y_1)$ والتغير في x $(\Delta x=x_2-x_1)$.

فبهذا التعريف يصبح قانون الميل كالتالي:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الرسم6

عند استخدام القانون نلاحظ أن: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

٥. معادلة الخط المستقيم

١,٥. طريقة الميل ونقطة

يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم إذا كان الميل وإحداثيات نقطة معينة على الخط معروفين. لنفرض أن m هو ميل الخط والنقطة هي (x_1, y_1). إذا كانت (x, y) نقطة أخرى على الخط إذن من قانون الميل: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ومن هذا القانون نصل إلى معادلة الخط المستقيم كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

مثال٣: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة $(1, -2)$

الحل:

في هذا المثال $m = 3$ و $(x_1, y_1) = (1, -2)$ إذن بالتعويض المباشر في القانون نجد:

$$y = 3(x - 1) + (-2) = 3x - 3 - 2 = 3x - 5$$

إذن معادلة الخط المستقيم هي: $y = 3x - 5$

مثال٤: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و $(2,5)$

الحل:

في هذه الحالة نستخدم النقطتين لإيجاد ميل الخط ثم نستخدم هذا الميل مع إحدى النقطتين المعطاة لإيجاد معادلة الخط بنفس الطريقة المذكورة في المثال ٣.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

إذن باستخدام $m=-1$ والنقطة $(4,3)$ مثلا تكون معادلة الخط كالتالي:

$$y=-1(x-4)+3=-x+4+3=-x+7$$

٢,٥. طريقة الميل والجزء المقطوع

عادة ما نحتاج إلى كتابة معادلة الخط المستقيم بطريقة أخرى تسمى طريقة الميل والجزء المقطوع. وفي هذه الحالة يكون شكل المعادلة كالتالي:

$$y=mx+b$$

حيث m هو ميل الخط و b يمثل الجزء (أو المسافة) المقطوع (ة) على المحور y عند النقطة $(0,b)$.

وكذلك يمكن استخدام هذا الشكل من المعادلة لإيجاد معادلة الخط المستقيم كما هو موضح في المثال التالي

مثال ٥: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 2 ويمر بالنقطة $(1,3)$

الحل:

بتعويض قيمة الميل في شكل المعادلة المعطاة أعلاه يكون لدينا: $y=2x+b$

ثم نعوض قيم إحداثيات النقطة التي يمر بها الخط لإيجاد قيمة الجزء المقطوع b، فتصبح المعادلة:

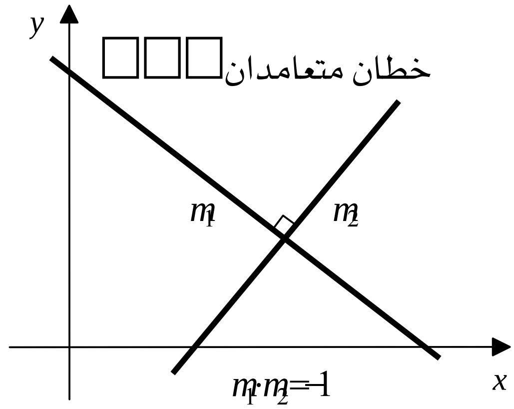
$3=2\times1+b$ ومنه $b=3-2=1$ وبالتالي معادلة الخط المستقيم المطلوبة هي: $y=2x+1$

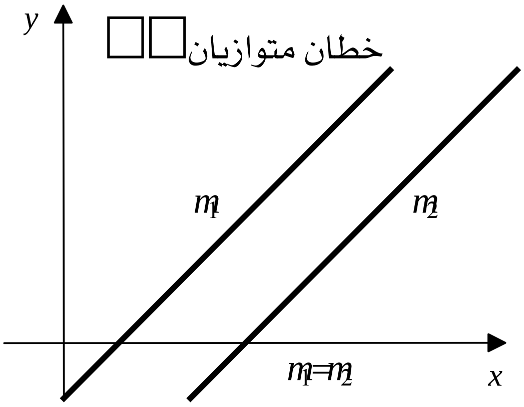
خلاصة معادلات الخطوط المستقيمة

- شكل المعادلة (الميل ونقطة): $y=m(x-x_1)+y_1$
- شكل المعادلة (الميل والجزء المقطوع): $y=mx+b$
- شكل المعادلة (الخط يمر بنقطة الأصل): $y=mx$
- الخط الأفقي(الميل يساوي صفر): $y=b$
- الخط العمودي (الميل غير معرف): $x=a$

٦. الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة

يمكن استخدام ميل الخط المستقيم لمعرفة هل خطان هما متوازيين أو متعامدين كما هو موضح في الرسم 8. وبالتحديد فيكون الخطان غير عموديين ومتوازيين إذا وفقط إذا كان ميلاهما متساويين $(m_1 = m_2)$ ويكونان متعامدين إذا وفقط إذا كان ميل أحد الخطوط يساوي معكوس الثاني مع تغيير الإشارة $(m_1 = -\dfrac{1}{m_2})$.





الرسم 7

مثال ٦ : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر من خلال النقطة $(2,-1)$ في كل من الحالات التالية:

a) الخط موازي للخط المستقيم $2x-3y=5$

b) الخط متعامد على الخط المستقيم $2x-3y=5$

الحل:

أولا نجد ميل الخط المستقيم المعطى بترتيب المعادلة على شكل $y = mx + b$ كالتالي:

$$2x-3y=5 \Rightarrow -3y = -2x+5 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

إذن ميل هذا الخط المستقيم هو $\frac{2}{3}$ وبالتالي:

a) ميل الخط المستقيم المطلوب $m = \frac{2}{3}$ لأن الخط المعطى موازي له. إذن الآن لدينا ميل ونقطة فيمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بالطريقة المذكورة سابقا كالتالي:

$$y = m(x-x_1)+y_1 = \frac{2}{3}(x-2)+(-1) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - 1 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

b) في هذه الحالة الميل المطلوب يساوي معكوس الميل المعطى بتغيير الإشارة لأنه متعامد عليه أي:

$m=-\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$ وباقي الحل يكون كما في الفقرة a) أي:

$$y=-\frac{3}{2}(x-2)+(-1)=-\frac{3}{2}x+\frac{6}{2}-1=-\frac{3}{2}x+\frac{4}{2}=-\frac{3}{2}x+2$$

٧. نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور

عادة ما نحتاج إلى معرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور. تكون إحداثية y تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور x وتكون إحداثية x تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور y. أي نعوض في المعادلة بـ $x=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور y ثم بـ $y=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور x.

مثال ٧: أوجد إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم التالي: $y=2x+3$ مع المحاور.

الحل:

التقاطع مع المحور y : $x=0\rightarrow y=2\times 0+3=3$ إذا نقطة التقاطع مع المحور y هي: $(0,3)$

التقاطع مع المحور x : $y=0\rightarrow 2x+3=0\rightarrow x=-\frac{3}{2}$ إذا نقطة التقاطع مع المحور y هي: $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

تمارين

تمرين ١: ارسم الخطوط التي تمر بالنقطة المعطاة مع كل ميل من (a) إلى (d)

$1)(2,3): \quad (a)0 \quad (b)1 \quad (c)-2 \quad (d)$ غير معرف

$2)(-4,1): \quad (a)3 \quad (b)-3 \quad (c)\frac{1}{3} \quad (d)0$

تمرين ٢: أوجد ميل الخطوط المستقيمة التي تمر بالنقاط التالية:

$1)(3,-4),(5,2) \qquad 2)(2,1),(2,5) \qquad 3)(1,2),(-2,4) \qquad 4)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

تمرين ٣: أوجد ميل ونقطة التقاطع مع المحاور (إذا كان ذلك ممكنا) للخطوط التالية

$1)\,x+5y=20 \qquad 2)\,6x-5y=15 \qquad 3)\,x=4 \qquad 4)\,y=-1$

تمرين ٤: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية:

$1)(2,1),(0,-3) \qquad 2)(-3,-4),(1,4) \qquad 3)(0,0),(-1,3)$

$4)(-3,6),(1,2) \qquad 5)(1,-2),(3,-2) \qquad 6)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

تمرين ٥: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة ولديه الميل المعطى

$1)(0,3),m=\frac{3}{4} \quad 2)(0,0),m=\frac{2}{3} \quad 3)(-2,4),m=-\frac{3}{5}$

$4)(0,2),m=4 \quad 5)(0,4),m=0 \quad 6)(-1,2),m$ غير معرف

تمرين ٦: أوجد معادلة الخط العمودي اذي يتقاطع مع المحور x عند النقطة 3

تمرين ٧: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة في الحالات التالية:

(a) يكون الخط فيها موازي للخط المعطى

(b) يكون الخط فيها متعامد على الخط المعطى

$1)(2,1)\,,\,4x-2y=3 \qquad 2)(-3,2)\,,\,x+y=7 \qquad 3)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\,5x+3y=0$

$4)(-6,4)\,,\,3x+4y-7=0 \qquad 5)(2,5)\,,\,x=4 \qquad 6)(-1,0)\,,\,y=-3$