مبادئ الرياضيات

الاسبوع الاول

المحتوى

1-1 المجموعات.

2-1 جبر المجموعات.

1-1 المجموعات

المجموعة (Set) : هي مجموعة من الاشياء الحسية او المعنوية التي يمكن تحديدها بدقة و تدعى هذه الاشياء بعناصر المجموعة و تكتب على شكل { } و يرمز للمجموعة عادة بحروف انجليزية كبيرة مثل ....,A,B,C

مثال (Example) 1 : المجموعة التي عناصرها 6 , 5 , 2 , 1 هي

A= {1,2,5,6 }

مثال (Example) 2 : مجموعة الحروف المكونة لكلمة APPLE هي

X= {A,P,L,E }

ملاحظة : لا يجوز تكرار العنصر داخل المجموعة بالاضافة الى ان ترتيب العناصر داخل المجموعة غير مهم ففي مثال 1 و مثال 2 بامكاننا كتابة المجموعتين كالاتي :

A= {2,6,1,5 }   X= {P,L,A,E }

بعض أهم المجموعات الشهيرة

1- مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) : و يرمز لها بالرمز N

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

2- مجموعة الأعداد الكلية (Whole Numbers) : و يرمز لها بالرمز W

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

3- مجموعة الاعداد الصحيحة (Integers) : و يرمز لها بالرمز Z

$$\mathbb{Z} = \{......, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

الانتماء (Membership) : عندما يكون العنصر a هو احد عناصر المجموعة A نقول ان العنصر a ينتمي الى المجموعة A و نستخدم الرمز $\in$ للدلالة على هذه العلاقة

وتكتب $a \in A$ فمثلا $1 \in \mathbb{Z}$ $c \in \{c,d,n\}$

و الرمز $\notin$ هو نقيض الرمز $\in$ فمثلا $-1 \notin W$

المجموعة الجزئية (Subset) : نقول عن المجموعة A انها مجموعة جزئية من المجموعة B اذا كانت عناصر المجموعة A تنتمي الى المجموعة B(مع احتمال ان عناصر المجموعة A هي نفسها عناصر المجموعة B) و نعبر عن ذلك بالرمز $A \subseteq B$ كما باستطاعتنا قرائتها B تحوي A . اما اذا B تحوي A ولا تساويها فنعبر عن ذلك بالرمز $A \subset B$ و نقول ان A هي مجموعة جزئية فعلية من A (Proper Subset).

مثال (Example) 3 : 1. $\mathbb{N} \subset W \subset \mathbb{Z}$

2. $A \subseteq A$ لاي مجموعة A

الرمز $\not\subset$ يشير الى نقيض الاحتواء

مثال (Example) 4 : $\{-1,-2,-3\} \not\subset W$

المجموعة الخالية : هي المجموعة التي لا يوجد فيها عناصر و يرمز لها بالرمز $\emptyset$ او { }

المجموعة المنتهية : هي المجموعة التي تحوي عدد منتهي من العناصر

$$A = \{-5,2,4,7,9\}$$

المجموعة غير المنتهية : هي المجموعة التي تحوي عدد غير منتهي من العناصر كمجموعة الاعداد الطبيعية و الكلية و الصحيحة .

$$B = \{1,8,27,64, \ldots \ldots \ldots \ldots\}$$

طرق التعبير عن المجموعات

1- طريقة كتابة العناصر (List of Elements)

تتم بذكر جميع عناصر المجموعة بين قوسين { }

مثال (Example) 5 : اكتب عناصر المجموعات التالية

1. A هي مجموعة الاعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -3 , 3
2. B هي مجموعة مضاعفات العدد اربعة الواقعة بين العددين 5 , 33

الحل (Solution) :

1. $A = \{-2, -1,0,1,2\}$
2. $B = \{8,12,16,20,24,28,32\}$

2 – طريقة الصفة المميزة (Characteristic Property) :

تتم بعدم كتابة عناصر المجموعة و انما كتابة الصفة المميزة لهذه العناصر و التي لا تنطبق على غيرها و هي الطريقة الاكثر استخداما و الاكثر فعالية و خاصة في حال المجموعات غير المنتهية.

مثال (Example) 6 : اكتب المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة

1. A هي مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية
2. B هي مجموعة الطبيعية المحصورة بين العددين 2 , 7

الحل (Solution) :

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ عدد زوجي}\}$ او $A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$

2-1 جبر المجموعات (Algebra of Sets)

1- الاتحاد (Union) : اتحاد مجموعتين A و B مجموعة جديدة تحوي عناصر المجموعتين

و يرمز لهذه العملية ب A ∪ B $A \cup B = \{x|x \in \mathrm{A} \ \ or \ \ x \in \mathrm{B}\}$

مثال (Example) 7 : اذا كانت $A = \{1,2,5,7\}$ و $B = \{1,4,6,7,10,12\}$ اوجد $A \cup B$

الحل (Solution) : $A \cup B = \{1,2,4,5,6,7,10,12\}$

خصائص الاتحاد :

1. $\mathrm{A} \cup B = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$
2. $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$
3. $\mathrm{A} \cup \emptyset = \mathrm{A}$

2 . التقاطع (Intersection) : تقاطع مجموعتين A و B هي مجموعة جديدة تحوي العناصر المشتركة بين المجموعتين و يرمز لهذه العملية ب $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x | x \epsilon \mathrm{A} \ \ and \ x \epsilon \mathrm{B}\}$$

مثال (Example) 8 : اذا كانت $A = \{-1,4,5,6\}$ و $B = \{-1,0,2,4,10\}$ اوجد $A \cap B$

الحل (Solution) : $A \cap B = \{-1,4\}$

خصائص التقاطع :

1. $\mathrm{A} \cap B = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$
2. $\mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A}$
3. $\mathrm{A} \cap \emptyset = \emptyset$

مثال (Example) 9 : اذا كانت $A = \{0,1,3,5\}$ و $B = \{0,2,4,5\}$ و $C = \{1,3,4,6\}$ اوجد ما يلي :

1. $A \cap B$
2. $C \cup B$
3. $(A \cap B) \cup C$
4. $(A \cup C) \cap B$

الحل (Solution) :

1. $A \cap B = \{0,5\}$
2. $C \cup B = \{0,,1,2,3,4,5,6\}$
3. $(A \cap B) \cup C = \{0,1,3,4,5,6\}$
4. $(A \cup C) \cap B = \{0,4,5\}$

المجموعة الشاملة و المتتمة (The Universal Set & The Complement) :

المجموعة الشاملة: هي المجموعة التي تحوي جميع العناصر قيد الدراسة و يرمز لها بالرمز U

المجموعة المتتمة : لتكن U مجموعة شاملة و المجموعة A مجموعة جزئية منها ($A \subseteq U$)
فان متممة المجموعة A هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى المجموعة الشاملة U و لا تنتمي الى
المجموعة A ويرمز لها بالرمز A^c $\quad A^c = \{x \epsilon U | x \notin A\}$

خصائص المجموعة الشاملة و المتتمة : لتكن U مجموعة شاملة وان $A \subseteq U$ فان :

1. $A \cup U = U$ 2. $A \cap U = A$ 3. $A \cap A^c = \emptyset$ 4. $A \cup A^c = U$

5. $\emptyset^c = U \quad , \quad U^c = \emptyset$

مثال (Example) 10 : لتكن $A = \{2,8,12,14\}$ و $U = \{2,4,6,\ldots\ldots,16\}$ و $B = \{2,4,6,8,10,12\}$ اوجد ما يلي :

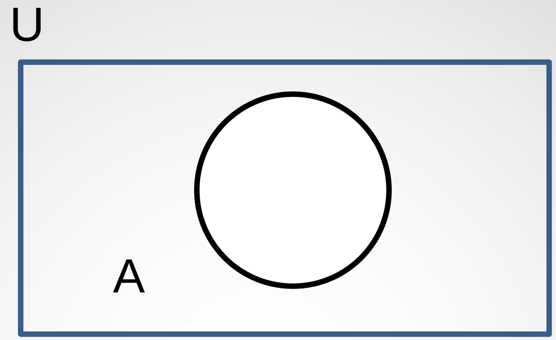
1. A^c 2. B^c 3. $(A \cap B)^c$ 4. $(A \cup B)^c$

الحل (Solution) :

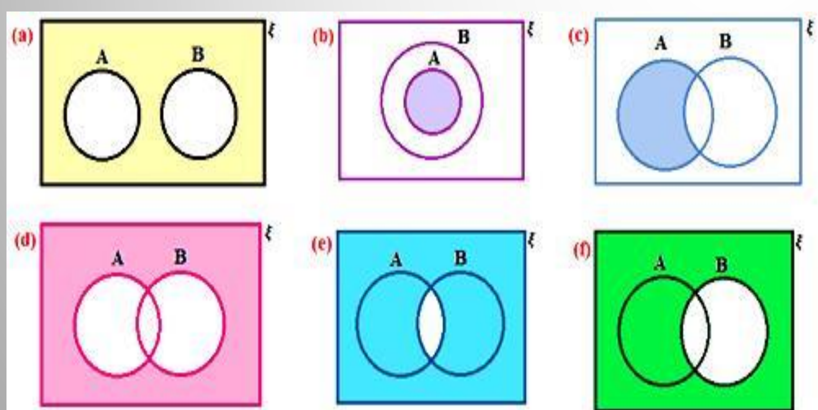
1. $A^c = \{4,6,10,16\}$
2. $B^c = \{14,16\}$
3. $(A \cap B)^c = \{4,6,10,14,16\}$
4. $(A \cup B)^c = \{16\}$

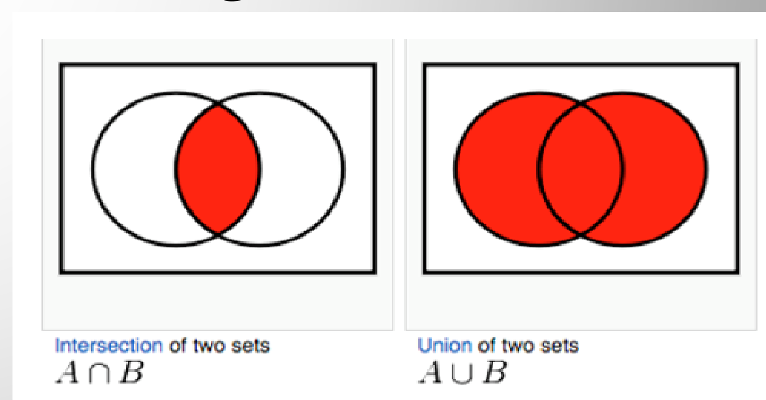
اشكال ڤن (Venn Diagrams) :

و تعتبر من اهم الطرق لتمثيل المجموعات و العمليات عليها حيث يتم تمثيل المجموعة الشاملة U بمستطيل و المجموعات الجزئية بدوائر داخل هذا المستطيل.



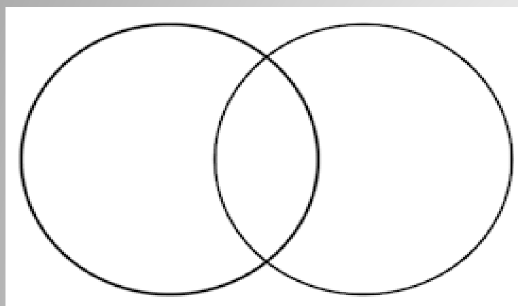
اشكال ڤن لبعض العمليات على المجموعات

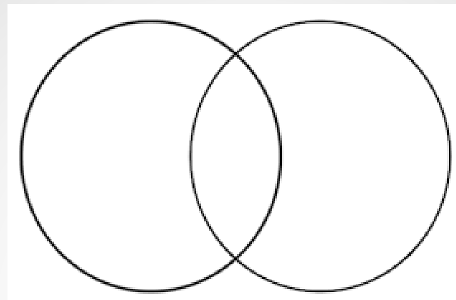


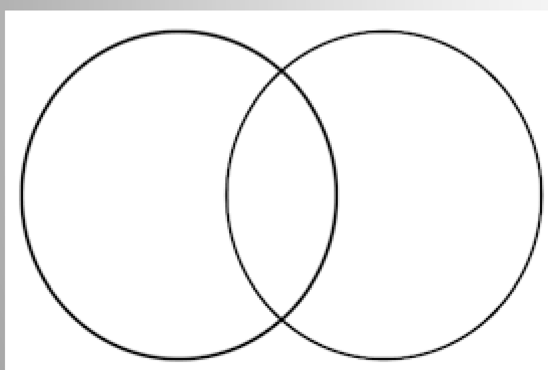


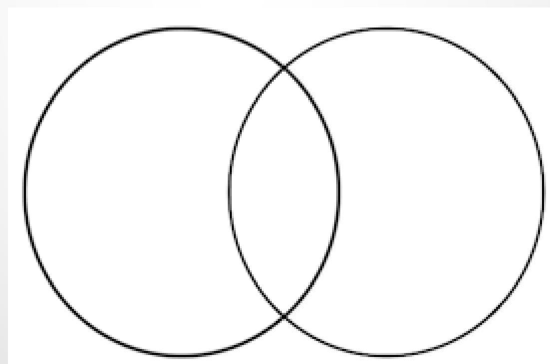
مثال (Example) 11 : لتكن $U = \{1,2,3,\dots\dots,10\}$ و $A = \{1,3,5,6,8\}$ و $B = \{2,4,6,8,9\}$

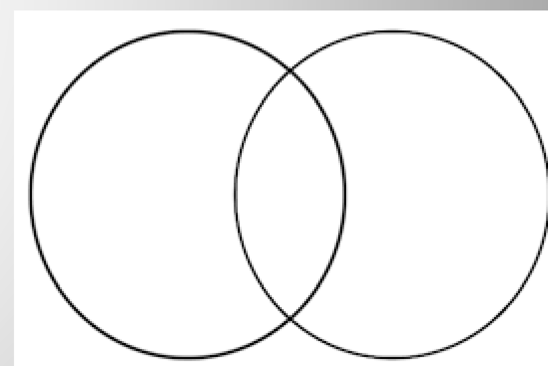
1. مثل هذه المجموعات باشكال فن
2. حدد منطقة $A \cap B$
3. حدد منطقة $A \cup B$
4. حدد منطقة $A \cap B^c$
5. حدد منطقة $A^c \cup B^c$











اسئلة عامة و اجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الأسبوع الثاني

المحتوى

الخواص الحسابية لمجموعة الأعداد الصحيحة

- المضاعفات والقواسم
- القاسم المشترك الأكبر
- المضاعف المشترك الأصغر

الخواص الحسابية لمجموعة الأعداد الصحيحة
$(Arithmetic\ on\ Integers)$

مجموعة الأعداد الصحيحة هي $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعة مضاعفات عدد صحيح (Multiples of an Integer):

ليكن $k \in \mathbb{Z}$ فإن مجموعة مضاعفات العدد الصحيح k تعرف بأنها M_k حيث :

$\mathrm{M}_k = \{nk | n\epsilon\mathbb{Z}\} = \{0, \pm k, \pm 2k, \pm 3k, \dots\}$

خصائص مجموعة المضاعفات:

ليكن $k \in \mathbb{Z}$ عندئذٍ:

1. إذا كان $k \neq 0$ فإن M_k مجموعة غير منهية.
2. إذا كان $k = 0$ فإن $\mathrm{M}_k = \{0\}$.

مثال1: أوجد M_3, M_5, M_{-4} .

$$\mathrm{M}_3 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\}$$
$$\mathrm{M}_5 = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots\}$$
$$\mathrm{M}_{-4} = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots\}$$

قابلية القسمة (Divisibility):

العدد b يقبل القسمة على العدد a إذا كان العدد b هو مضاعف للعدد a حيث $a \neq 0$ فإن ناتج قسمة $\left(b \div a = \frac{b}{a}\right)$ هو عدد صحيح دون باقي.

وبعبارة أخرى نقول أن العدد a قاسم للعدد b ونكتب ذلك بالعبارة $(a|b)$ وإذا لم يكن العدد a يقسم العدد b نكتب ذلك بالعبارة $(a \nmid b)$.

مجموعة قواسم عدد صحيح (Divisors of an Integer):

يرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح b بالرمز D_b حيث:

$$D_b = \{a \epsilon \mathbb{Z} |\ a \neq 0, a|b\}$$

مثال(Example): أوجد قواسم العدد 18.

الحل$(solution)$:

$$D_b = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$

خصائص مجموعة القواسم:

إذا كان $a\epsilon\mathbb{Z}$ فإن:

1. إذا كان $a \neq 0$ فإن D_a مجموعة منتهية.
2. إذا كان $a = 0$ فإن $D_a = \mathbb{Z} - \{0\}$.

نظرية (Theorem): لتكن $a,b,c \in \mathbb{Z}$ فإن:

1. $1|b$ و $a|a$ و $a \nmid 0$ لأي عدد صحيح $a \neq 0$.
2. إذا كان $a|b$ فإن $a|-b$.
3. إذا كان $a|b$ و $b|a$ فإما $a = b$ أو $a = -b$.
4. إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $a|c$.
5. إذا كان $a|b$ فإن $ac|bc$ لكل $c \neq 0$.
6. إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $a|(b \pm c)$.

مثال (Example):

$4 \nmid 9, \qquad 2|8, \qquad 5|0, \qquad ,0 \nmid 7$

مثال (Example): أوجد مجموعة قواسم كلاً من الأعداد 7 و 10 و 9.

الحل($Solution$):

$$D_7 = \{\pm 1, \pm 7\}$$

$$D_{10} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

$$D_{12} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

اختبارات قابلية القسمة:

1. قابلية القسمة على 2: يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 2 إذا كان رقم أحاده أحد الأرقام التالية:
0,2,4,6,8 ويسمى العدد في هذه الحالة عدداً زوجياً

مثال(Example):

الأعداد 152,916 ,210 ,504 ,168, كلها أعداد زوجية تقبل القسمة على 2 بينما العدد 453 لا يقبل القسمة على 2 لأن رقم أحاده 3.

2. قابلية القسمة على 3: يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3.

مثال(Example):

العدد 2352 يقبل القسمة على العدد 3 وذلك لأن مجموع أرقامه 12 وهو من مضاعفات العدد 3 .

3. قابلية القسمة على4: يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 4 إذا كان العدد الناتج من رقمي أحاده وعشراته يقبل القسمة على 4.

مثال(Example):

العدد 5124 يقبل القسمة على العدد 4 وذلك لأن العدد الناتج من رقمي آحاده وعشراته 24 وهو من مضاعفات العدد 4, بينما العدد 1318 لا يقبل القسمة على 4 وذلك لأن العدد الناتج من رقمي آحاده وعشراته 18 وهو ليس من مضاعفات العدد 4.

4. قابلية القسمة على 5: يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 5 إذا كان رقم أحاده صفر أو خمسة.

مثال(Example):

العددان 35 و 310 يقبلان القسمة على 5 لأن أحاديهما 5 و 0 على التوالي .

بينما العدد 306 لا يقبل القسمة على 5 لأن أحاده 4.

الأعداد الأولية (Prime Numbers):

ليكن p عدداً طبيعياً أكبر من واحد , يسمى p عدد أولياً إذا كان لا يقبل القسمة إلا على نفسه والواحد بمعنى أخر:

$$D_p = \{\pm 1, \pm p\}.$$

الأعداد الأولية $= \{2,3,5,7,11,13,17,19,23, \dots\}$

نظرية (Theorem): كل عدد صحيح يمكن تحليله إلى حاصل ضرب أعداد أولية تسمى عوامله الأولية.

مثال($Example$):

حلل الأعداد التالية إلى عواملها الأولية : 24 ,60 ,51 ,42.

الحل:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \qquad 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7 \qquad 51 = 3 \times 17$$

القاسم المشترك الأكبر (The Greatest Common Divisor):

ليكن $a,b \in \mathbb{Z}$ فإن أكبر قاسم مشترك موجب للعددين a و b
يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ويرمز له بالرمز $g\ c\ d\ (a,b)$

مثال(Example):

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين: 18,24.

الحل:

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$
$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$g\ c\ d\ (18,24) = 2 \times 3$$
$$g\ c\ d\ (18,24) = 6$$

المضاعف المشترك الأصغر(Least Common Multiple):

ليكن $a,b \in \mathbb{Z}$ فإن أصغر مضاعف مشترك موجب للعددين a و b
يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ويرمز له بالرمز $l\ c\ m\ (a,b)$

مثال(Example):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين: -84 ,-36.

الحل($Solution$):

$$-36 = -(2 \times 2 \times 3 \times 3)$$
$$-84 = -(2 \times 2 \times 3 \times 7)$$
$$l\ c\ m\ (-36, -84) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$
$$l\ c\ m\ (-36, -84) = 252$$

اسئلة عامة و إجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الأسبوع الثالث

المحتوى

- مجموعة الأعداد النسبية $(\mathbb{Q})$
- العمليات الحسابية على الأعداد النسبية
- النسبة المئوية
- مجموعة الأعداد غير النسبية (I)

مجموعة الأعداد النسبية($\mathbb{Q}$)
Set of Rational Numbers

العدد النسبي: هو العدد الذي يمكن كتابته على شكل بسط و مقام من أعداد صحيحة والمجموعة التي تحوي جميع الأعداد النسبية هي:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m,n \epsilon \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

العمليات الحسابية على الأعداد النسبية (*Arithmetic on Rationales*):

مثال (Example)1:

أوجد قيمة كل مما يلي:

$$1)\ \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$2)\ \frac{3}{5} - \frac{2}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{2}{20}$$

$$3)\ \frac{3}{5} \times 6 = \frac{3}{5} \times \frac{6}{1} = \frac{18}{5}$$

$$4)\ \frac{2}{9} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

خصائص الأعداد النسبية:

إذا كانت $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ فإن:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$ (صيغة الضرب التبادلي)

2. $\frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b}$ لأي $c \neq 0$

3. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$

4. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

5. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$ لأي $c \neq 0$

مثال (Example)2:

أي من العبارات التالية صحيحة:

1. $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$ 2. $\frac{4}{5} = \frac{8}{16}$ 3. $\frac{-3}{2} = \frac{-9}{6}$

الحل(Solution) :

نلاحظ باستخدام طريقة الضرب التبادلي (طريقة المقص):

1. $\frac{3}{7} \times \frac{12}{28} \Rightarrow 3 \times 28 = 12 \times 7 = 84$ (العبارة صحيحة)

2. $\frac{4}{5} \times \frac{8}{16} \Rightarrow 4 \times 16 \neq 8 \times 5\,, \quad 64 \neq 40$ (العبارة خاطئة)

3. $\frac{-3}{2} \times \frac{-9}{6} \Rightarrow -3 \times 6 = 2 \times (-6) = -18$ (العبارة صحيحة)

مثال (Example)3:

ضع المقادير التالية بأبسط صورة:

1. $\frac{3}{21}$ 2. $\frac{-28}{42}$ 3. $\frac{32}{120}$

الحل (Solution) :

1. $\frac{3}{21} = \frac{3}{3\times 7} = \frac{1}{7}$

2. $\frac{-28}{42} = \frac{-2\times 2\times 7}{2\times 3\times 7} = \frac{-2}{3}$

3. $\frac{32}{120} = \frac{2\times 2\times 2\times 2\times 2}{2\times 2\times 2\times 3\times 5} = \frac{4}{15}$

مقارنة الأعداد النسبية $(Comparability\ of\ Rationals)$:

للمقارنة بين عددين نسبيين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نتبع الخطوات التالية :

1. نجعل مقام كل كسر موجبة .
2. نضرب مقام الثاني في بسط الأول. ad, cb $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \Rightarrow$
3. نضرب مقام الأول في بسط الثاني.
4. نقارن الناتجين (ad, cb):

- إذا كان $ad > cb$ فإن $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
- إذا كان $ad < cb$ فإن $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
- إذا كان $ad = cb$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال(Example) 4:

قارن العددين النسبيين $\frac{7}{-10}$, $\frac{-2}{3}$.

الحل (Solution) :

بما أن مقام الكسر $\frac{7}{-10}$ سالب نضرب البسط والمقام في (-1) فيصبح $\frac{-7}{10}$ وبعدها نطبق قاعدة الضرب التبادلي فينتج $-20 > -21$ وهذا يعني أن $\frac{7}{-10} > \frac{-2}{3}$.

كثافة الأعداد النسبية $(Density\ of\ Rationals)$:

ليكن a,b عددين نسبيين حيث أن $a < b$ يمكننا إيجاد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية التي تقع بين العددين أي بعبارة أخرى يمكننا إيجاد عدد نسبي بين أي عددين نسبيين وهذه الخاصية تسمى خاصية الكثافة وهي غير متحققة للأعداد الصحيحة, فمثلاً لا يمكننا إيجاد عدد صحيح بين العددين الصحيحين 3 و 4.

مثال(Example) 5:

أوجد أربعة أعداد نسبية بين العددين $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

الحل (Solution) :

بفرض أن الأعداد الأربعة المطلوب إيجادها هي: c_1, c_2, c_3, c_4

- $c_1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{12}$
- $c_2 = \frac{c_1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{11}{24}$
- $c_3 = \frac{c_2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{11}{24}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{23}{48}$
- $c_4 = \frac{c_3+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{33}{48}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{47}{96}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{23}{48} < \frac{47}{96} < \frac{1}{2}$$

تحويل الأعداد من الصورة الكسرية إلى الصورة العشرية والعكس:

الكسر العشري $(Decimal\ Fraction)$:

كل كسر مقامه $1000,100,10$,...يمكن كتابته على صورة أخرى تسمى الصورة العشرية مثلاً $\frac{2}{10}$ يكتب بالصورة 0.2 والكسر $\frac{2}{100}$ يكتب بالصورة 0.02 وهكذا

مثال(Example) 6: عبر عن الكسور $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{13}{4}$ بالصورة العشرية:

$$\frac{1}{5}=\frac{1\times 20}{5\times 20}=\frac{20}{100}=0.20=0.2$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1\times 125}{8\times 125}=\frac{125}{1000}=0.125$$

$$\frac{13}{4}=\frac{13\times 25}{4\times 25}=\frac{325}{100}=3.25$$

النسبة المئوية $(Percentage)$:

هي طريقة للتعبير عن عدد على شكل كسر مقامه يساوي 100 ويرمز للنسبة المئوية بالرمز % على سبيل المثال 45% (تقرأ خمسة وأربعين بالمائة).

مثالُ(Example)7:

حول النسب المئوية التالية إلى كسور اعتيادية في أبسط صورة.

1. 7.5% 2. 35% 3. 45%

الحل (Solution) :

1. $7.5\% = \frac{7.5}{100} = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}$
2. $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$
3. $45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

مثال(Example)8:

حول النسب المئوية التالية إلى كسر عشري.

1. 7.5%
2. 35%
3. 45%

الحل (Solution) :

1. $7.5\% = 0.075$
2. $35\% = 0.35$
3. $45\% = 0.45$

مثال(Example)9:

حول الكسور التالية إلى نسب مئوية.

1. $\frac{2}{5}$ 2. $\frac{16}{25}$ 3. 0.43 4. 0.007

الحل (Solution) :

1. $\frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$

2. $\frac{16}{25} \times 100\% = 64\%$

3. $0.43 \times 100\% = 43\%$

4. $0.007 \times 100\% = 0.7\%$

تطبيقات على النسبة المئوية:

مثال(Example)10:

إذا كانت نسبة النجاح في اختبار الرياضيات 73% وكان عدد الطلاب الذين تقدموا للاختبار 200 طالباً. أوجد عدد الطلبة الناجحين في هذا الاختبار.

الحل (Solution) : عدد الطلاب الناجحين في الاختبار $= 73\% \times 200$

$$= \frac{73}{100} \times 200$$

$= 146$ طالباً

مثال(Example) 11:

يتقاضى خالد راتباً شهرياً مقدارهُ 7000 ريال, وفي أحد الشهور قررت الشركة التي يعمل بها خالد زيادة رواتب موظفيها, فإذا أصبح راتب خالد بعد الزيادة 7630 ريال, فما هي النسبة المئوية للزيادة؟

الحل (Solution) :

مقدار الزيادة في الراتب $= 7630 - 7000$

$= 630$ ريال

لنفرض أن النسبة المئوية للزيادة التي حصل عليها خالد $x\%$

$$\frac{x}{100} \times 7000 = 630$$

$$x = 9$$

هذا يعني أن مقدار النسبة المئوية للزيادة التي حصل عليها خالد كانت 9%

مثال(Example)12:

إذا قام أحد المحلات التجارية بعمل تخفيضات بنسبة 20%, وقمت بشراء سلعة سعرها الأصلي قبل التخفيض 80 ريال, فاحسب ما يلي:

1. مقدار التخفيض في سعر السلعة.
2. سعر السلعة بعد التخفيض.

الحل (Solution) :

1.مقدار التخفيض $= 80 \times \frac{20}{100}$

$= 16$ريال

2.سعر السلعة بعد التخفيض $= 80 - 16$

$= 64$ ريال

مجموعة الأعداد غير النسبية (I)
$Set\ of\ Irrational\ Numbers$

ويرمز لها بالرمز I , وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة بسط و مقام من الأعداد الصحيحة و من أمثلة الأعداد الغير نسبية:

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{3}+1, \pi, e\ , 0.23135\ \ldots$$

ملاحظة: ليس كل كسر عشري غير منتهي يعتبر عدد غير نسبي ومثال ذلك الكسور العشرية غير الدورية

فمثلاً العدد $0.333333\ \ldots$ و يكتب بالصورة $0.\bar{3}$ وهو كسر عشري دوري غير منتهي يمكننا كتابته على صورة بسط ومقام من الأعداد الصحيحة كما يلي :

$$0.333333\ \ldots\ = 0.\bar{3} = \frac{1}{3}$$

اسئلة عامة وإجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الأسبوع الرابع

المحتوى

- مجموعة الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$):
- خصائص الأعداد الحقيقية
- خط الأعداد الحقيقية والفترات الحقيقية
- القيمة المطلقة

مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$
$Set\ of\ Real\ Numbers$

يرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$ وهي من أهم مجموعات الأعداد في الرياضيات وتشمل مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الغير نسبية أي أن $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$
والعلاقة التي تربط بين مجموعات الأعداد هي:

$$\mathbb{N} \subset W \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

خصائص الأعداد الحقيقية:

إذا كان $a,b,c \in \mathbb{R}$ فإن:

1. خاصية الإبدال $(Commmutative\ Law)$

في عملية الجمع: $a + b = b + a$.

في عملية الضرب: $ab = ba$.

2. خاصية التجميع $(Associative\ law)$

في عملية الجمع: $a + (b + c) = (a + b) + c$

في عملية الضرب: $a(bc) = (ab)c$

3. خاصية التوزيع $(Distributive\ Law)$:

$$a(b+c)=(ab)+(ac)$$

4. العنصر المحايد $(Identity\ Element)$:

في عملية الجمع العنصر المحايد هو 0 أي أن: $a+0=0+a=a$

في عملية الضرب العنصر المحايد هو 1 أي أن: $a.1=1.a=a$

5. المعكوس $(Inverse)$:

المعكوس الجمعي للعدد الحقيقي a هو $(-a)$ أي أن: $a+(-a)=(-a)+a=0$

المعكوس الضربي للعدد الحقيقي a (حيث أن $a\neq 0$) هو $(\frac{1}{a})$ أي أن :

$$a\frac{1}{a}=\frac{1}{a}a=1$$

خصائص الأعداد الحذف:

لأي $a,b,c \in \mathbb{R}$:

1. إذا كان $a + c = b + c$ فإن $a = b$
2. إذا كان $c \neq 0$ وكان $ac = bc$ فإن $a = b$
3. ذا كان $ab = 0$ فإما $a = 0$ أو $b = 0$

مثال(Example) 1 :

أوجد ناتج ما يلي:

1. $(-4)+6$
2. $7\times(-5)$
3. $17-9-3$
4. $17-(9-3)$
5. $8\times(5+2)$
6. $9\times(7-4)$
7. $\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\frac{4}{7}\div\frac{-3}{\sqrt{2}}$

الحل (Solution) :

1. $(-4)+6=2$
2. $7\times(-5)=-35$
3. $17-9-3=5$
4. $17-(9-3)=11$
5. $8\times(5+2)=56$
6. $9\times(7-4)=27$
7. $\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\times 2}{5\times 2}-\frac{\sqrt{3}\times 5}{2\times 5}=\frac{6}{10}-\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{6-5\sqrt{3}}{10}$
8. $\frac{4}{7}\div\frac{-3}{\sqrt{2}}=\frac{4}{7}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{21}$

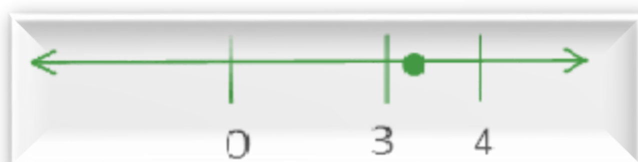
خط الأعداد الحقيقية $(The\ Real\ line)$:

يكمن تمثيل الأعداد الحقيقية هندسياً بمجموعة من النقاط تقع على خط مستقيم يسمى خط الأعداد الحقيقية حيث يعتمد موقع النقطة حسب قيمة العدد الذي تمثله.

فإذا كان العدد الحقيقي a أكبر من العدد الحقيقي b فإن العدد a يقع على يمين العدد b على خط الأعداد الحقيقية.

مثال(Example)2: عين العدد $\frac{10}{3}$ على خط الأعداد الحقيقية.

الحل$(Solution)$:



تسمى العبارة الرياضية التي تحوي على أي من الرموز ($\leq$, $<$, $\geq$, $>$) بالمتباينة .

العبارة الرياضية (المتباينة)	المعنى
$a > b$	a أكبر من b
$a \geq b$	a أكبر من أو يساوي b
$a < b$	a أكبر من b
$a \leq b$	a أكبر من أو يساوي b

مثال(Example)3:

حدد أي من المتباينات التالية صحيحة وأي منها خاطئة.

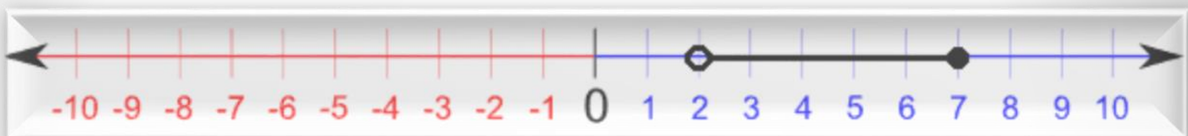
1. $4 > 7$ متباينة خاطئة
2. $-9 < 5$ متباينة صحيحة
3. $6 \geq 6$ متباينة صحيحة
4. $-5 \leq -15$ متباينة خاطئة

الفترات الحقيقية $(Real\ Intervals)$

المجموعة A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية حيث:

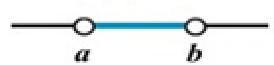
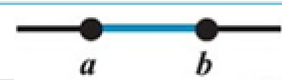
$$A = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 7\}$$

والتي تمثل على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل:



وهذا يعني أن المجموعة A تحوي جميع الأعداد الحقيقية الواقعة بين العددين 2 و 7 متضمنة العدد 7 ولا تحوي العدد 2.

والجدول التالي يبين أشكال الفترات ونوعها وتمثيلها

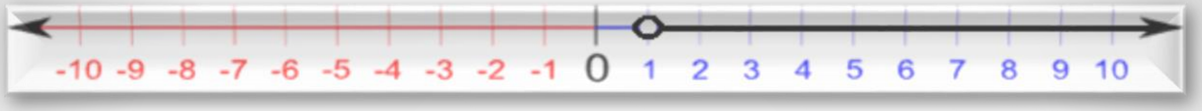
الفترة	المتباينة	تمثيلها على خط الأعداد	نوعها
(a, b)	$a < x < b$		فترة مفتوحة
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$		فترة مغلقة
$(a, b]$	$a < x \leq b$		مفتوحة من اليسار مغلقة من اليمين
$[a, b)$	$a \leq x < b$		مغلقة من اليسار مفتوحة من اليمين

نصف الفترة $(Half\ Intervals)$:

المجموعة A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية حيث:

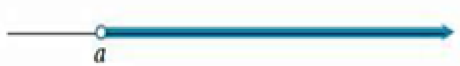
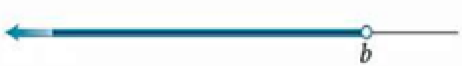
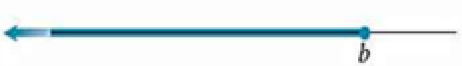
$$A = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$$

والتي تمثل على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل:



وتسمى A فترة نصف مفتوحة من اليسار ونرمز لها بالرمز $(1,\infty)$.

والجدول التالي يبين أشكال هذه الفترات

نوعها	تمثيلها على خط الأعداد	المتباينة	الفترة
فترة مفتوحة		$x > a$	(a,∞)
فترة مغلقة		$x \geq a$	$[a,\infty)$
فترة مفتوحة		$x < b$	$(-\infty, b)$
فترة مغلقة		$x \leq b$	$(-\infty, b]$

مثال(Example)4:

مثل الفترات التالية على خط الأعداد الحقيقية:

1. $(-1, \infty)$ 2. $[0,4]$ 3. $(-5, 4]$

4. $(-\infty, 5)$ 5. $(-\infty,2]$ 6. $(1,6)$

مثال(Example) 5:

أكتب المتباينات التالية على صورة فترات:

1. $-3 < x \leq 9$ 2. $5 \leq x < 8$ 3. $x \geq -3$

4. $x < 4$ 5. $-4 \leq x \leq -1$ 6. $\mathrm{x} \leq -2$

القيمة المطلقة

$Absolute\ Value$

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي a يرمز لها بالرمز $|a|$ وتعرف على أنها العدد محذوف منه الإشارة السالبة إن وجدت:

$$|a|=\begin{cases}-a, a<0\\ a, a\geq 0\end{cases}$$

مثال(Example) 6:

$|5| = 5,\quad |0| = 0,\quad |-3| = 3,\quad |6-7| = 1,\quad \left|-\frac{6}{5}\right| = \frac{6}{5}$

خصائص القيمة المطلقة:

إذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ فإن:

1. $|a| \geq 0.$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$
3. $|a.b| = |a||b|$

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad , b \neq 0$

5. $|a - b| = |b - a|$

6. $|a + b| \leq |a| + |b|$

7. $|a - b| \geq |a| - |b|$

مثال(Example)7:

احسب قيمة كل مما يلي:

1. $|3-7| = 4$

2. $-|12-5| = -7$

3. $\left|\frac{-5+3}{-2}\right| = \frac{|-2|}{|-2|} = 1$

4. $\left|\frac{-3}{4}+\frac{2}{5}\right| = \left|\frac{-15+8}{20}\right| = \left|\frac{-7}{20}\right| = \left|\frac{7}{20}\right|$

5. $-\frac{|4-9|}{6} = \frac{-5}{6}$

المسافة بين نقطتين$(Distance\ Between\ Two\ Points)$:

لتكن A و B نقطتين على خط الأعداد الحقيقية وتمثلان العددين a و b على الترتيب فإن

المسافة $d(a,b)$ بين النقطتين A و B تعرف على أنها:

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b|$$

مثال(Example) 7:

أوجد المسافة بين النقطتين A و B اللتين تمثلان العددين a و b في كل مما يلي:

1. $a = -3,\ b = 9$
2. $a = 3,\ b = 14$

الحل$(Solution)$:

1. $a = -3,\ b = 9$

   $d(a,b) = |b-a| = |9-(-3)| = 12$

2. $a = 3,\ b = 14$

   $d(a,b) = |b-a| = |14-3| = 11$

اسئلة عامة و إجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الأسبوع الخامس

المحتوى

- القوى والأسس
- الجذور
- الأسس الحقيقية

القوى والأسس:

إذا كان a عدداً حقيقياً وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$a^n = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{n}$$

حيث أن a^n هي القوة النونية للعدد a أو (a أس n) ونسمي a الأساس و n الأس.

أمثلة (Examples):

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$(-2)^5 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

ملاحظة: $-2^2 = -(2 \cdot 2)$ بينما $(-2)^2 = -2 \cdot -2$

قوانين الأسس:

إذا كان كل من $a,b \in \mathbb{R}$ وكان $m,n \in \mathbb{N}$ فإن:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , a \neq 0.$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4. $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad , b \neq 0.$

6. $a^0 = 1 \qquad$, a $\neq 0.$

7. $a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad , a \neq 0.$

مثال(Example) 1:

أوجد ناتج ما يلي:

1. -5^2

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

3. 4^0

4. $(3 \times (-4))^2$

5. $\left(\frac{7^{12}}{7^{14}}\right)$

6. $(3^{-4} \times 3^5)^4$

الحل(Solution):

1. $-5^2 = -25$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

3. $4^0 = 1$

4. $(3 \times (-4))^2 = (3^2 \times (-4)^2) = 9 \times 16 = 144$

5. $\left(\frac{7^{12}}{7^{14}}\right) = 7^{12-14} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

6. $(3^{-4} \times 3^5)^4 = (3^{-4+5})^4 = (3^1)^4 = 3^4 = 81$

الجذور:

إذا كان n عدد زوجي و $b > 0$ فإن $\sqrt[n]{b} = a$ حيث a هو العدد الموجب الذي يحقق $b^n = a$

أما إذا كان n عدد فردي فإن $\sqrt[n]{b} = a$ هو العدد الذي يحقق $b^n = a$ سواءً كان العدد b سالباً أو موجباً.

مثال(Example)2:

الجذر التربيعي للعدد 25 هو العدد 5 فقط أما الجذر التربيعي للعدد -25 فهو غير موجود

الجذر التكعيبي للعدد 8 يساوي 2 والجذر التكعيبي للعدد -8 يساوي -2

قوانين الجذور:

إذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad , b \neq 0$

ملاحظات:

1. إذا كان $n = 2$ فنكتب $\sqrt{a}$ بدلاً من $\sqrt[2]{a}$.
2. لأي عدد حقيقي a فإن $|a| = \sqrt{a^2}$.
3. $-a^{\frac{1}{n}}$ تعني $-\sqrt[n]{a}$ بينما $(-a)^{\frac{1}{n}}$ تعني $\sqrt[n]{-a}$.

مثال(Example)3:

أوجد قيمة الجذور التالية:

1. $-25^{\frac{1}{2}}$ 2. $(-64)^{\frac{1}{3}}$ 3. $\sqrt[4]{81}$ 4. $\sqrt{\frac{9}{49}}$ 5. $\sqrt{3}\sqrt{12}$

الحل$(Solution)$:

1. $-25^{\frac{1}{2}} = -5$ 2. $(-64)^{\frac{1}{3}} = -4$ 3. $\sqrt[4]{81} = 3$

4. $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$ 5. $\sqrt{3}\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$:

إذا كان a عدداً حقيقياً وكان n و m عددان طبيعيان بحيث أن $a^{\frac{1}{n}}$ معرف , فنعرف العدد $a^{\frac{m}{n}}$ بأنه:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

لاحظ في هذه الحالة أن:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

مثال (Example) 4 :

أوجد قيمة الجذور التالية:

1. $\sqrt[3]{-2^3}$ 2. $\sqrt{(-4)^6}$ 3. $\sqrt[4]{z^8}$ 4. $(4)^{\frac{3}{2}}$ 5. $\sqrt[3]{27x^9z^3}$

الحل$(Solution)$:

1. $\sqrt[3]{-2^3} = -2$

2. $\sqrt{(-4)^6} = (-4)^{\frac{6}{2}} = (-4)^3 = -64$

3. $\sqrt[4]{z^8} = z^{\frac{8}{4}} = z^2$

4. $(4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{64} = 8$

5. $\sqrt[3]{27x^9z^3} = \sqrt[3]{27}\ \sqrt[3]{x^9}\ \sqrt[3]{z^3} = 3x^3z$

الأسس الحقيقية:

ليكن a و b عددين حقيقين بحيث أن $a > 0$ عندئذٍ يوجد عدد حقيقي موجب c يحقق المعادلة $c = a^b$. نسمي c القوة a^b لأساس a .

مثال) Example 5:

أستخدم الألة الحاسبة لإيجاد $e^{\pi}, 5^{\sqrt{3}}$

الحل($solution$):

$$e^{\pi} = 23.1406926$$

$$5^{\sqrt{3}} = 16.2424508$$

اسئلة عامة و إجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الاسبوع السادس

المحتوى

- العبارة الجبرية.
- العمليات على العبارات الجبرية.

العبارة الجبرية (Algebraic Expression)

المتغير (Variable) : هو عبارة عن رمز جبري يعبر عن اعداد حقيقية و يرمز له باحد الرموز

$x, y, z, w, \ldots$ ..

العبارة الجبرية : هي صيغة من متغيرات و اعداد حقيقية مرتبطة فيما بينها بواسطة العمليات الجبرية و الجذور و الاسس

مثال (Example) 1 :

$$x^2+5 \qquad \frac{2x-5y^2}{\sqrt{z}} \qquad \frac{3}{5}x^{-2}\sqrt{\frac{y}{z}} + xyz^3$$

الحد الجبري (Algebraic term) : هو اي عبارة جبرية تكتب على الشكل ax^n حيث

$a \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{W}$

ax^n

المعامل

الاس

المتغير

يمكن للحد الجبري ان يكون بدلالة اكثر من متغير فمثلا bx^ny^m هو حد جبري بالمتغيرين x و y و المعامل الثابت b .

درجة الحد الجبري (Degree) : هي مجموع اسس متغيراته .

مثال (Example) 2 :

الحد الجبري	8	$3x^2$	$-7x^2y^3$	$2xyz^4$
المعامل	8	3	-7	2
الدرجة	0	2	5	6

درجة العبارة الجبرية : هي اعلى درجة حد من حدودها الجبرية المكونة لها.

مثال (Example) 3 :

العبارة الجبرية	$2x^3+7x-5$	$2x^4y^3+5xy^2$	$-4xyz+5x^2+9y$
الدرجة	3	7	3

الحدود الجبرية المتشابهه (Like terms) : هي الحدود التي تحوي نفس المتغير و نفس الاس (الدرجة) .

مثال (Example) 4 : حدد الحدود الجبرية المتشابهه في ما يلي :

$7x^2$, $9x^3y^2$, $5x^2y^3$, $9x^2$, $9x^2y^3$, $-3x^3y^2$

مثال (Example) 5 : اكتب العبارة الجبرية الاتية بابسط صورة.

$$3x - 4x^2 - 5x^2y + 7x^2 + 6x^2y - 5x$$

$$3x - 4x^2 - 5x^2y + 7x^2 + 6x^2y - 5x = 3x - 5x - 4x^2 + 7x^2 - 5x^2y + 6x^2y$$
$$= -2x + 3x^2 + x^2y$$

كثيرات الحدود (polynomials) : هي العبارة الجبرية المركبة من اكثر من حد جبري تكون الاسس للمتغير اعداد كلية فمثلا $5x^2 + 3x - 2$ هو كثير حدود في المتغير x من الدرجة الثانية .

العمليات على العبارات الجبرية

جمع و طرح العبارات الجبرية :

يتم طرح العبارات الجبرية عن طريق جمع و طرح الحدود المتشابهه

مثال (Example) 6 : اوجد ناتج ما يلي بابسط صورة .

1 - $(5x^3 - 3x^2 + 4x + 2) + (2x^3 + 7x^2 + 9x - 10)$

2 - $(9x^2 + 4xy + 2z) + (-4x^2 + 5xy - 8z)$

3 - $(4x + 2x^2) + (3 - 7x^2 + x) + (2x + 7)$

الحل (Solution) :

1- $(5x^3 - 3x^2 + 4x + 2) + (2x^3 + 7x^2 + 9x - 10)$

$$= 5x^3 - 3x^2 + 4x + 2 + 2x^3 + 7x^2 + 9x - 10$$
$$= 5x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 7x^2 + 4x + 9x + 2 - 10$$
$$= 7x^3 + 4x^2 + 13x - 8$$

2 -

$$(9x^2 + 4xy + 2z) + (-4x^2 + 5xy - 8z)$$

$$= 9x^2 - 4x^2 + 4xy + 5xy + 2z - 8z$$
$$= 5x^2 + 9xy - 6z$$

3 -

$$(4x + 2x^2) + (3 - 7x^2 + x) + (\ 2x + 7)$$

$$= 4x + 2x^2 + 3 - 7x^2 + x + 2x + 7$$
$$= -5x^2 + 7x + 10$$

ملاحظة : عندما نقوم بضرب عبارة جبرية باشارة سالب فانها تعمل على تغيير اشارة جميع الحدود داخل العبارة الجبرية فمثلا $-(3x^2 - 5x + 4) = -3x^2 + 5x - 4$

مثال (Example) 7 : اوجد ناتج طرح $x^3 - 4x^2 + x$ من $5x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

الحل (Solution) :

$$(5x^3 + 3x^2 - 9x + 2) - (x^3 - 4x^2 + x)$$
$$= 5x^3 + 3x^2 - 9x + 2 - x^3 + 4x^2 - x$$
$$= 4x^3 + 7x^2 - 10x + 2$$

ضرب حد جبري في اخر :

عند ضرب حد جبري بحد جبري اخر نضرب المعاملات معا و المتغيرات معا

مثال (Example) 8 : اوجد ناتج عمليات الضرب الاتية :

-1 $(4x^2)(5x^3)$ -2 $5(-8x^4)$ - 3 $(-3xy^2)(9x^2)$

-4 $(-8x^6y^5)(3xy^3)$

الحل (Solution) :

1- $(4x^2)(5x^3) = (4 \times 5)(x^2 \times x^3) = 20x^{2+3} = 20x^5$

2- $5(-8x^4) = (5 \times -8)x^4 = -40x^4$

3- $(-3xy^2)(9x^2) = (-3 \times 9)(x \times x^2)(y^2) = -27x^3 y^2$

4- $(-8x^6y^5)(3xy^3) = (-8 \times 3)(x^6 \times x)(y^5 \times y^3) = -24x^7y^8$

ضرب حد جبري في عبارة جبرية :

عند ضرب حد جبري في عبارة جبرية فاننا نستخدم قانون التوزيع (ضرب الحد الجبري بجميع حدود هذه العبارة).

مثال (Example) 9 : اوجد ناتج عمليات الضرب التالية

1- $7(5x - 4y + 3)$

2- $3x(9x - 2)$

3- $-6x^2(2x^3 - 11x^2 + 8)$

4- $(4x^2y)(5x^3y^2 - 2y + 6x)$

: (Solution) الحل

1- $7(5x-4y+3)=7(5x)+7(-4y)+7(3)=35x-28y+21)$

2- $3x(9x-2)=3x(9x)+3x(-2)=27x^2-6x$

3- $-6x^2(2x^3-11x^2+8)=-6x^2(2x^3)-6x^2(-11x^2)-6x^2(8)$

$=-12x^5+66x^4-48x^2$

4-
$(4x^2y)(5x^3y^2\ -2y+6x)=(4x^2y)(5x^3y^2)+(4x^2y)(-2y)+(4x^2y)(6x)$

$=20x^5y^3-8x^2y^2+24x^3y$

ضرب عبارة جبرية في اخرى :

عند ضرب عبارة جبرية باخرى نقوم بضرب كل حد بالعبارة الجبرية الاولى بالعبارة الجبرية الثانية.

مثال (Example) 10 : اوجد ناتج عمليات الضرب التالية

1- $(x+3)(x+4)$ 2- $(4x^2+9)(2x-5)$ 3- $(2x-y)(3x+2y)$

الحل (Solution) :

1- $(x+3)(x+4) = x(x+4) + 3(x+4)$

$= x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12$

2- $(4x^2+9)(2x-5) = 4x^2(2x-5) + 9(2x-5)$

$= 8x^3 - 20x^2 + 18x - 45$

3- $(2x-y)(3x+2y) = 2x(3x+2y) - y(3x+2y)$

$= 6x^2 + 6xy - 3xy - 2y^2 = 6x^2 + 3xy - 2y^2$

حالات خاصة في الضرب :

-1 $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ ضرب مجموع حدين مع حاصل طرحهم

(Multiplying sums and differences of two terms)

-2 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ المربع الكامل (perfect square)

- 3 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

مثال (Example) 11 : اوجد ناتج ما يلي باستخدام الحالات الخاصة .

-1 $(2x-3y)(2x+3y)$ - 2 $(4x+5y)^2$ -3 $(x-6y)^2$

الحل (Solution) :

1- $(2x-3y)\,(2x+3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

2- $(4x+5y)^2=(4x)^2+2(4x)(5y)+(5y)^2=16x^2+40xy+25y^2$

3- $(x-6y)^2=x^2-2x(6y)+(6y)^2=x^2-12xy+36y^2$

قسمة حد جبري على اخر :

عند قسمة حد جبري على اخر نقسم المعاملات ثم نقسم المتغيرات

تذكر : $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

مثال (Example) 12 : اوجد ناتج عمليات القسمة التالية.

-1 $\frac{4x^3}{2}$ -2 $\frac{21x^4}{3x}$ -3 $\frac{-12x^5}{18x^2}$ -4 $\frac{-14x^3y^6}{-7x^2y^4}$

الحل (Solution) :

1- $\frac{4x^3}{2} = \frac{4}{2}x^2 = 2x^2$

2- $\frac{21x^4}{3x} = \frac{21}{3}\frac{x^4}{x} = 7x^{4-1} = 7x^3$

3- $\frac{-12x^5}{18x^2} = \frac{-12}{18}\frac{x^5}{x^2} = -\frac{2}{3}x^{5-2} = -\frac{2}{3}x^3$

4- $\frac{-14x^3y^6}{-7x^2y^4} = \frac{-14}{-7}\frac{x^3}{x^2}\frac{y^6}{y^4} = 2xy^2$

قسمة عبارة جبرية على حد جبري :

تذكر : $\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$

مثال (Example) 13 : اوجد ناتج عمليات القسمة التالية .

1- $\frac{6x-12y+21}{3}$ 2- $\frac{5x^5+20x^4-10x^2}{10x^2}$ 3- $\frac{2x^3y^3-8x^4y^5+4x^2y^2}{2xy^2}$

الحل (Solution) :

1- $\frac{6x-12y+21}{3} = \frac{6x}{3} - \frac{12y}{3} + \frac{21}{3} = 2x - 4y + 7$

2- $\frac{5x^5+20x^4-10x^2}{10x^2} = \frac{5x^5}{10x^2} + \frac{20x^4}{10x^2} - \frac{10x^2}{10x^2} = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 1$

3- $\frac{2x^3y^3-8x^4y^5+4x^2y^2}{2xy^2} = \frac{2x^3y^3}{2xy^2} - \frac{8x^4y^5}{2xy^2} + \frac{4x^2y^2}{2xy^2} = x^2y - 4x^3y^3 + 2x$

اسئلة عامة و اجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الاسبوع السابع

المحتوى

- تحليل العبارات الجبرية.

تحليل العبارات الجبرية (Factoring Algebraic Expression)

تحليل العبارة الجبرية هو كتابتها كحاصل ضرب عبارات جبرية اخرى تسمى عوامل.

مثال : كثير الحدود $x^2 + 5x + 4$ يمكن كتابته كحاصل الضرب $(x + 4)(x + 1)$ اي ان

$x + 1$ و $x + 4$ هما عوامل لكثير الحدود $x^2 + 5x + 4$

تذكر : التحليل عملية عكسية للضرب

التحليل باخراج العامل المشترك الاكبر(Factoring by Taking the Greatest Common Factor)

تتم هذه العملية باخراج العامل المشترك العددي الاكبر من كل حد و باخراج الرمز الجبري المشترك باصغر قوة من كل الحدود .

مثال (Example) 1 : حلل المقدار الجبري $15x^3 + 6x$

الحل (Solution) : اولا نوجد العامل المشترك الاكبر بين الحدين $15x^3$ و $6x$

$$15x^3 = 3 \times 5 \times x \times x \times x$$
$$6x = 2 \times 3 \times x$$

$$\mathrm{GCF} = 3x$$

$$15x^3 + 6x = 3x(5x^2 + 2)$$

$$\frac{15x^3}{3x} \qquad \frac{6x}{3x}$$

مثال (Example) 2 : حلل العبارات الجبرية التالية باخذ العامل المشترك الاكبر.

1- $9x^2 + 6x$

2- $8x^2 - 12xy$

3- $16x^2y^3 + 6x^2y - 10xy^2$

4- $3x(x + 5) - 2(x + 5)$

الحل (Solution) :

-1

$$\begin{array}{c} 9x^2 = 3 \times 3 \times x \times x \\ 6x = 2 \times 3 \times x \\ \hline \mathrm{GCF} = 3x \end{array}$$

$$9x^2 + 6x = 3x(3x + 2)$$

-2

$$8x^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x$$
$$12xy = 2 \times 2 \times 3 \times x \times y$$

$$\text{GCF} = 2 \times 2 \times x = 4x$$

$$8x^2 - 12xy = 4x(2x - 3y)$$

-3

$$16x^2y^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y \times y$$
$$6x^2y = 2 \times 3 \times x \times x \times y$$
$$10xy^2 = 2 \times 5 \times x \times y \times y$$

$$\text{GCF} = 2 \times x \times y = 2xy$$

$$16x^2y^3 + 6x^2y - 10xy^2 = 2xy(8xy^2 + 3x - 5y)$$

-4

$$3x(x+5) = 3 \times x \times (x+5)$$
$$2(x+5) = 2 \times (x+5)$$

GCF $= x+5$

$$3x(x+5) - 2(x+5) = (x+5)(3x-2)$$

التحليل بالتجزئة (Factoring by Grouping)

تستخدم هذه الطريقة في حال وجود اربعة حدود يمكن تجزئتها الى مجموعتين بحيث نضع عامل مشترك لكل حدين في المجموعة الواحدة خاص بهما .

مثال (Example) 3 : حلل $x^3 + x^2 + 2x + 2$

الحل (Solution) :

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x^3 + x^2) + (2x + 2)$$

$$= x^2(x+1) + 2(x+1)$$

$$= (x+1)(x^2+2)$$

مثال (Example) 4 : حلل ما يلي

-1 $6x^3 - 9x^2 + 4x - 6$ -2 $2xy + 15zw - 3xw - 10yz$

الحل (Solution):

1- $6x^3 - 9x^2 + 4x - 6 = 3x^2(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$$= (2x - 3)(3x^2 + 2)$$

2- $2xy + 15zw - 3xw - 10yz = 2xy - 3xw + 15zw - 10yz$

$$= x(2y - 3w) - 5z(-3w + 2y)$$

$$= (2y - 3w)(x - 5z)$$

تحليل ثلاثي الحدود (Trinomial)

ثلاثي الحدود هو اي عبارة جبرية تكتب على الشكل $ax^2 + bx + c$ حيث $a,b,c \in \mathbb{R}$ لكن $a \neq 0$.

لتحليل ثلاثي الحدود يوجد حالتين اما $a = 1$ او $a \neq 1$

الحالة الاولى : اذا كان معامل x^2 هو العدد 1 $(a = 1)$ فان ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ يحلل باتباع الخطوات التالية

1. **نرتب الحدود تنازليا حسب قوى x**
2. **نبحث عن عددين d و e بحيث $c = de$ و $b = d + e$**
3. **ينتج لدينا $ax^2 + bx + c = (x + d)(x + e)$**

ملاحظة : اذا كان الحد الاخير c موجبا فان العددين d و e لهما نفس الاشارة و اشارتهما هي نفس اشارة b اما اذا كان الحد الاخير c سالبا فان العددين d و e مختلفي الاشارة و اكبرهما قيمة عددية له نفس اشارة العدد b

مثال (Example 5) : حلل كل مما يلي

$x^2 + 2x - 3$ -1 $x^2 + 6x + 8$ - 2 $x^2 - 10x + 21$ -3 $x^2 - 2x - 15$ -4

الحل (Solution) :

1- نبحث عن عددين حاصل ضربهما -3 و حاصل جمعهما 2 وهما العددان 3 و -1

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x - 1)$$

2- $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

3- $x^2 - 10x + 21 = (x - 7)(x - 3)$

4- $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

الحالة الثانية : اذا كان معامل x^2 لا يساوي العدد 1 فاننا نستخدم طريقة المقص التي نوردها في المثال التالي.

مثال (Example) 6 : حلل $6x^2 + 7x + 2$

الحل (Solution) :

1- نحلل الحد الاول $6x^2$ الى عاملين كلاهما يحوي المتغير x :

$6x^2 = (6x)(x)$ او $6x^2 = (3x)(2x)$

2- نحلل العدد الاخير 2 الى عواملة الممكنة

$2 = (2)(1)$ او $2 = (-2)(-1)$

3- نرسم سهمين متقاطعين و نضع تحليل $6x^2$ مع كل تحليل للحد الاخير (2) كالتالي

$\begin{matrix} 6x & 1 \\ x & 2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 6x & -1 \\ x & -2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 6x & 2 \\ x & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 6x & -2 \\ x & -1 \end{matrix}$

$(6x+2)(x+1)$ $(6x-2)(x-1)$ $(6x+1)(x+2)$ $(6x-1)(x-2)$

$\begin{matrix} 3x & 1 \\ 2x & 2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 3x & -1 \\ 2x & -2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 3x & 2 \\ 2x & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 3x & -2 \\ 2x & -1 \end{matrix}$

$(3x+2)(2x+1)$ $(3x-2)(2x-1)$ $(3x+1)(2x+2)$ $(3x-1)(2x-2)$

ثم نضرب كل قوسين لنجد ايها حاصل ضربها $6x^2 + 7x + 2$ بالتالي

$$6x^2 + 7x + 2 = (3x+2)(2x+1)$$

تحليل الفرق بين مربعين (Difference of two squares):

تسمى العبارة $a^2 - b^2$ بعبارة الفرق بين مربعين و تحلل على النحو التالي

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مثال (Example) 7 : حلل كل مما يلي

1- $x^2 - 16$ 2- $25x^2 - 81y^2$ 3- $12x^3 - 27x$

الحل (Solution) :

1- $x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2 = (x - 4)(x + 4)$

2- $25x^2 - 81y^2 = (5x)^2 - (9y)^2 = (5x - 9y)(5x + 9y)$

3- $12x^3 - 27x = 3x(4x^2 - 9) = 3x(2x - 3)(2x + 3)$

تحليل فرق و مجموع مكعبين (Difference & Sum of two Cubes) :

تسمى العبارة $x^3 - y^3$ عبارة الفرق بين مكعبين و عبارة $x^3 + y^3$ عبارة مجموع مكعبين و تحلل هاتين العبارتين على النحو التالي:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \qquad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

مثال (Example 7) : حلل كل مما يلي

1- $x^3 - 27$ 2- $8x^3 + 125y^3$ 3- $x^6 - y^6$

الحل (Solution) :

1- $x^3 - 27 = (x)^3 - (3)^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

2- $8x^3 + 125y^3 = (2x)^3 + (5y)^3 = (2x + 5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$

3- $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$$= (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

اسئلة عامة و اجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الأسبوع الثامن

المحتوى

- المعادلات
- حل معادلة خطية في مجهول واحد
- حل المتباينات

المعادلة:

المعادلة التي تحوي مجهول x عبارة عن عبارتين رياضيتين بينهما علاقة المساواة تحوي أحداهما أو كلاهما المجهول x.

ومن أمثلة المعادلات:

$$2x - 3 = 5 \qquad \longrightarrow \quad (1)$$

$$3x^2 - 27 = 0 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$5x + 4 = x - 8 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

في المعادلة رقم (1) عندما نعوض عن المجهول x بالعدد 4 تصبح المعادلة صحيحة وبالتالي نقول أن العدد 4 هو حل للمعادلة (1)

وكذلك كلاً من العددين 3 و -3 يعتبران حل للمعادلة (2) وبالتالي فإن المجموعة $\{3,-3\}$ تسمى مجموعة الحل للمعادلة (2)

أما في المعادلة(3) فإن العدد -3 يعتبر حل للمعادلة (3).

حل معادلة خطية في مجهول واحد:

المعادلة الخطية هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصورة:

$$ax + b = 0$$

حيث أن $a\ ,b$ أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

والمقصود بحل المعادلة هو إيجاد قيمة المجهول (المتغير) في هذه المعادلة ويكون الحل عن طريق إجراء عمليات تبسيط للوصول إلى النتيجة النهائية على صورة $x = c$. حيث أن c عدد حقيقي.

مثال$(Example)$1:

حل المعادلات التالية:

1. $4x - 3 = 5$
2. $5x - 3 = 4x + 2$
3. $3(x - 2) + 6 = 10 - 4(3x + 2)$

الحل $(Solution)$:

1. $$4x-3=5$$

نجمع العدد 3 للطرفين

$$4x-3+3=5+3$$

$$4x=8$$

نقسم الطرفيين على العدد 4

$$\frac{4x}{4}=\frac{8}{4}$$

$$x=2$$

---

2. $$5x-3=4x+2$$

نطرح 4x من الطرفين

$$5x-3-4x=4x+2-4x$$

$$x-3=2$$

نجمع العدد 3 للطرفين

$$x-3+3=2+3$$

$$x=5$$

3. $3(x-2)+6=10-4(3x+2)$

$$3(x-2)+6=10-4(3x+2)$$

فك الأقواس

$$3x-6+6=10-12x-8$$

تجميع الحدود المتشابهة

$$3x=2-12x$$

$$3x+12x=2-12x+12x$$

نجمع 12x للطرفين

$$15x=2$$

$$\frac{15x}{15}=\frac{2}{15}$$

قسمة الطرفين على العدد 15

$$x=\frac{2}{15}$$

حل المتباينات

المتباينة : هي عبارة جبرية مكونة من طرفين بينهما إحدى العلاقات الرياضية التالية :

$<$ أقل من

$>$ أكبر من

$\leq$ أقل من أو تساوي

$\geq$ أكبر من أو تساوي

مثال$(Example)2$:

حل المتباينات التالية:

1. $x + 2 < 7$

2. $3x \geq 18$

3. $2x - 5 \leq 3$

4. $3(x - 4) + 2 > 5x - 4$

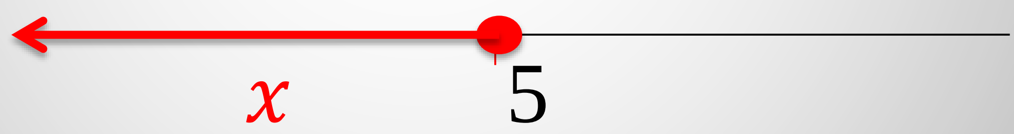
الحل (*Solution*):

1.

$$x + 2 < 7$$

$$x + 2 - 2 < 7 - 2$$

$$x < 5$$

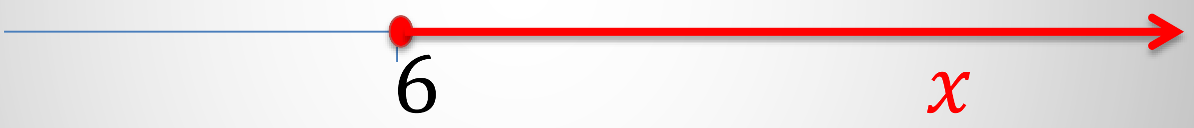


2.

$$3x \geq 18$$

$$\frac{3x}{3} \geq \frac{18}{3}$$

$$x \geq 6$$



3.

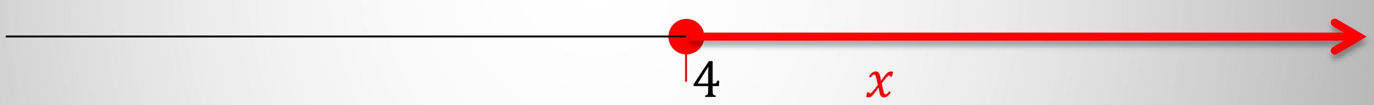
$$2x - 5 \leq 3$$

$$2x - 5 + 5 \leq 3 + 5$$

$$2x \leq 8$$

$$\frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2}$$

$$x \leq 4$$



4.

$$3(x-4)+2>5x-4$$

$$3x-12+2>5x+4$$

$$3x-10>5x+4$$

$$3x-10+10>5x+4+10$$

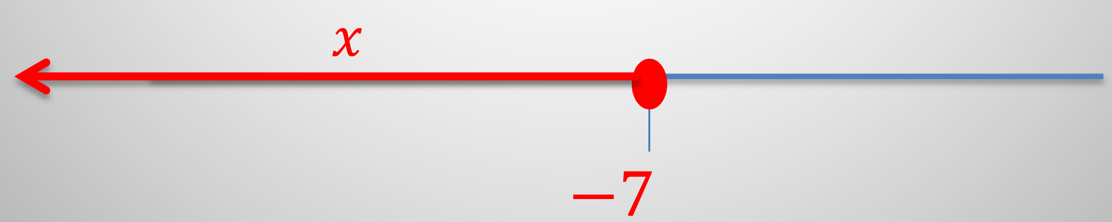
$$3x>5x+14$$

$$3x-5x>5x-5x+14$$

$$-2x>14$$

$$\frac{-2x}{-2}<\frac{14}{-2}$$

$$x<-7$$



اسئلة عامة و إجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الأسبوع التاسع

المحتوى

- حل معادلة القيمة المطلقة
- حل معادلتين خطيتين في مجهولين

حل معادلة القيمة المطلقة

تعريف :إذا كانت $a = |x|$, حيث أن a عدد حقيقي فإن مجموعة الحل لهذه المعادلة هي:

$$x = \{a, -a\}$$

مثال$(Example)$1:

حل كل المعادلات التالية:

1. $|x| = 7$

2. $|2x + 5| = 3$

3. $|2t - 3| - 6 = 7$

4. $|3x - 2| = 0$

5. $|4z - 7| + 9 = 6$

الحل$(Solution)$:

1. $$|x| = 7$$

$$x = -7 \quad \text{أو} \quad x = 7$$

$$x = \{7, -7\}$$

---

2. $$|2x + 5| = 3$$

$$2x + 5 = -3 \quad \text{أو} \quad 2x + 5 = 3$$

$$2x = -8 \quad \text{أو} \quad 2x = -2$$

$$x = -4 \quad \text{أو} \quad x = -1$$

$$x = \{-4, -1\}$$

3. $|2t-3|-6=7$

$$|2t-3|=13$$

$$2t-3=-13 \quad \text{أو} \quad 2t-3=13$$

$$2t=-10 \quad \text{أو} \quad 2t=16$$

$$t=-5 \quad \text{أو} \quad t=8$$

$$t=\{-5,8\}$$

----

4. $|3x-2|=0$

$$3x-2=0$$

$$3x=2$$

$$x=\frac{2}{3}$$

$$x=\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

5. $$|4z-7|+9=6$$

$$|4z-7|=-3$$

$$z=\{\ \}$$

أو

$$z=\phi$$

هنا في هذه المعادلة لا يوجد حل وذلك لأن القيمة الطلقة دائماً موجبة

ولا يمكن أن تساوي -3

حل معادلتين خطيتين في مجهولين

المعادلة الخطية في مجهولين x,y تكون على الصورة:

$$ax + by = c$$

حيث أن a,b,c أعداد حقيقية وكلاً من العددين a,b لا يساوي الصفر.

يسمى الشكل التالي بنظام المعادلات المكون من معادلتين خطيتين في مجهولين x,y:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

ولحل هذا النظام الخطي (أي إيجاد قيمة المجهولين x,y) هنالك طريقتين:

1. طريقة التعويض
2. طريقة الحذف

حل النظام الخطي بطريقة التعويض:

تتلخص هذه الطريقة في حل إحدى المعادلتين بدلالة أحد المتغيرين ومن ثم تعويضه في المعادلة الثانية وينتج لدينا قيمة أحد المتغيرات وفي النهاية نعوض هذه القيمة في أي من المعادلتين فنحصل على قيمة المتغير الثاني.

مثال$(Example)$1: حل النظام الخطي التالي:

$$3x + y = 5$$
$$x - 2y = 4$$

الحل$(Solution)$:

$3x + y = 5 \quad \Longrightarrow y = -3x + 5$

$x - 2y = 4 \quad \Longrightarrow \mathrm{x} - 2(-3\mathrm{x} + 5) = 4$

$\Longrightarrow x + 6x - 10 = 4$

$\Longrightarrow 7x - 10 = 4$

$\Longrightarrow 7x = 14$

$\Longrightarrow x = 2$

لإيجاد قيمة المتغير y

$x = 2$

$3x + y = 5$

$3(2) + y = 5$

$6 + y = 5$

$\Longrightarrow y = -1$

إذن فإن حل النظام الذي يحقق كل من المعادلتين هو $x = 2$ و $y = -1$

مثال$(Example)$2:

حل النظام الخطي التالي:

$$x = 8 - 4y$$
$$3x + 5y = 3$$

الحل$(Solution)$:

من المعادلة الأولى نلاحظ أن قيمة $x = 8 - 4y$ نقوم بتعويضها في المعادلة الثانية:

$$3(8 - 4y) + 5y = 3$$
$$24 - 12y + 5y = 3$$
$$-7y = 3 - 24$$
$$-7y = -21$$
$$y = 3$$

بعد ذلك نقوم بتعويض قيمة $y = 3$ في المعادلة الأولى فينتج:

$$x = 8 - 4(3)$$
$$x = -4$$

حل النظام الخطي بطريقة الحذف

تتلخص طريقة الحذف باستبعاد أحد المتغيرات بطرح المعادلتين بعد توحيد كلاً من الإشارة الجبرية وقيمة المعامل للمتغير المراد استبعاده.

مثال$(Example)$3:

حل النظام الخطي التالي بطريقة الحذف:

$$2x - 3y = 18$$
$$2x + 3y = -6$$

الحل$(Solution)$:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 18 \\ + \quad 2x + 3y = -6 \\ \hline 4x = 12 \\ x = 3 \end{array}$$

نقوم بتعويض قيمة $x = 3$ في أي معادلة من المعادلتين:

$$2x - 3y = 18$$
$$2(3) - 3y = 18$$
$$6 - 3y = 18$$
$$-3y = 12$$
$$y = -4$$

مثال$(Example)$4:

حل النظام الخطي التالي بطريقة الحذف:

$$5x - 3y = 19$$
$$2x - 6y = -2$$

الحل$(Solution)$:

$$(5x - 3y = 19) \times (-2) \implies -10x + 6y = -38$$
$$2x - 6y = -2$$

نقوم بجمع المعادلتين:

$$-10x + 6y = -38$$
$$2x - 6y = -2$$
$$-8x = -40$$
$$x = 5$$

نقوم بتعويض قيمة $x = 5$ في أي من المعادلتين فينتج أن $y = 2$

اسئلة عامة و إجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الاسبوع العاشر

المحتوى

- حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد.

حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد.
Solving Quadratic Equations of one variable

تعريف : المعادلة التربيعية بمجهول واحد هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a , b , c اعداد حقيقية بشرط $a \neq 0$

طرق حل المعادلة التربيعية :

1- حل المعادلة التربيعية بالتحليل (Solving Quadratic Equation By Factoring)

- ترتيب المعادلة على الصيغة العامة $ax^2 + bx + c = 0$.
- تحليل الطرف الايسر الى عوامله الاولية.
- استخدام الخاصية (اذا كان $A \times B = 0$ فاما $A = 0$ او $B = 0$).

ايجاد قيمة المجهول من المعادلات الخطية الناتجة

مثال (Example) 1 : حل المعادلات التالية:

1- $x^2 - 4 = 0$ 2- $x^2 + 6x + 5 = 0$ 3- $x^2 = x$ 4- $6x^2 + 13x = -5$

الحل (Solution) :

1- $x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

اما $x - 2 = 0$ $x = 2$ او $x + 2 = 0$ $x = -2$

2- $x^2 + 6x + 5 = 0$

$(x + 5)(x + 1) = 0$

$x = -1 \Leftarrow x + 1 = 0$ او $x = -5 \Leftarrow x + 5 = 0$ اما

3- $x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 1 \Leftarrow x - 1 = 0$ او $x = 0$ اما

4- $6x^2 + 13x = -5$

$$6x^2 + 13x + 5 = 0$$

$$(3x + 5)(2x + 1) = 0$$

اما $2x + 1 = 0$

جمع العدد 1- لطرفي المعادلة

$$2x = -1$$

قسمة طرفي المعادلة على العدد 2

$$x = -\frac{1}{2}$$

او $3x + 5 = 0$

جمع العدد 5- لطرفي المعادلة

$$3x = -5$$

قسمة طرفي المعادلة على العدد 3

$$x = -\frac{5}{3}$$

2- حل المعادلة التربيعية بطريقة اكمال المربع

:(Solving Quadratic Equation by completing the Square)

a) حل معادلة تربيعية من الشكل $x^2 = d$ حيث $d \geq 0$

تكون جذور (حلول) هذه المعادلة $x = \sqrt{d}$ و $x = -\sqrt{d}$

مثال (Example) 2 : حل المعادلات التالية :

1- $x^2 = 16$

2- $3x^2 = 6$

الحل (Solution) :

1- $x^2 = 16$

$x = -\sqrt{16}$ أو $x = \sqrt{16}$

$x = -4$ $\quad$ $x = 4$

2- $3x^2 = 6 \xrightarrow{\text{قسمة طرفي المعادلة على العدد 3}} x^2 = 2 \longrightarrow x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

b) حل معادلة تربيعية من الشكل $(x+c)^2 = d$ حيث d و c اعداد حقيقية و $d \geq 0$

مثال (Example) 3 : حل المعادلات التالية :

-1 $(x-5)^2 = 3$ -2 $x^2 + 6x + 9 = 2$

الحل (Solution) :

1- $(x-5)^2 = 3$ باخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$x - 5 = \sqrt{3}$ او $x - 5 = -\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} + 5$ او $x = -\sqrt{3} + 5$

2- $x^2+6x+9=2$ $\qquad$ $x^2+6x+9=(x+3)(x+3)=(x+3)^2$

مربع
كامل

$(x+3)^2=2$

$x+3=\sqrt{2}$ $\qquad$ أو $\qquad$ $x+3=-\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}-3$ $\qquad$ أو $\qquad$ $x=-\sqrt{2}-3$

c) اكمال المربع completing the square

تهدف هذه الطريقة الى تحويل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ الى الشكل $(x+c)^2=d$ باتباع الخطوات التالية

1- قسمة جميع معاملات الاطراف على a.

2- ننقل $\frac{c}{a}$ الى الطرف الايمن من المعادلة.

3- نضيف $(\frac{b}{2a})^2$ الى طرفي المعادلة الناتجة و بذلك يصبح الطرف الايسر مربع كامل .

4- نكتب الطرف الايسر على شكل مربع كامل و نبسط الطرف الايمن ان امكن و نستخدم الطريقه b السابقة لحل المعادلة الناتجة.

مثال (Example) 4 : حل المعادلة $3x^2+2x-4=0$ بطريقة اكمال المربع

الحل (Solution) :

- قسمة كل حدود المعادلة على العدد 3 $\frac{3}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{0}{3}$

- نقل العدد $-\frac{4}{3}$ للطرف الايمن من المعادلة $x^2+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}$

- جمع العدد $(\frac{2}{2\times 3})^2=\frac{4}{36}$ لطرفي المعادلة $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{36}=\frac{4}{3}+\frac{4}{36}$

- كتابة الطرف الايسر على شكل مربع كامل و تبسيط الطرف الايمن

$$(x+\frac{2}{6})^2=\frac{52}{36} \Rightarrow x+\frac{2}{6}=\sqrt{\frac{52}{36}}$$ أو $$x+\frac{2}{6}=-\sqrt{\frac{52}{36}}$$

$$\sqrt{\frac{52}{36}} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{4 \times 13}}{6} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{13}}{6} = \frac{2\sqrt{13}}{6} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$x + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{13}}{3} \qquad x + \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{13}}{3} - \frac{1}{3} \qquad x = -\frac{\sqrt{13}}{3} - \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{13} - 1}{3} \qquad x = \frac{-\sqrt{13} - 1}{3}$$

3- حل المعادلة التربيعية بالقانون العام (Quadratic Formula):

باستطاعتنا حل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ الذي يسمى القانون العام لحل المعادلة التربيعية

نسمي المقدار $b^2 - 4ac$ بمميز المعادلة التربيعية و الذي بدورة يحدد فيما اذا كان للمعادلة التربيعية جذور و عدد هذه الجذور وفق القاعدة التالية

1- اذا كان $b^2 - 4ac > 0$ للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين

2- اذا كان $b^2 - 4ac = 0$ للمعادلة جذر حقيقي واحد

3- اذا كان $b^2 - 4ac < 0$ لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية

مثال (Example) 5 : حل كل من المعادلات التالية

1- $x^2 - 10x + 25 = 0$　　2- $3x^2 = 2x + 1$　　3- $x^2 - x + 3 = 0$

الحل (Solution) :

1- $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25) = 100 - 100 = 0$ للمعادلة جذر واحد

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2} = 5$$

2- نرتب المعادلة على الصيغة العامة　$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-1) = 4 + 12 = 16$ للمعادلة جذرين مختلفين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{2+4}{6} = 1$$

$$x = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$$

$x^2 - x + 3 = 0$ -3

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11$$

بما ان مميز المعادلة عدد سالب , اذا المعادلة ليس لها جذور حقيقية ـ ليس لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية ـ

اسئلة عامة و اجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

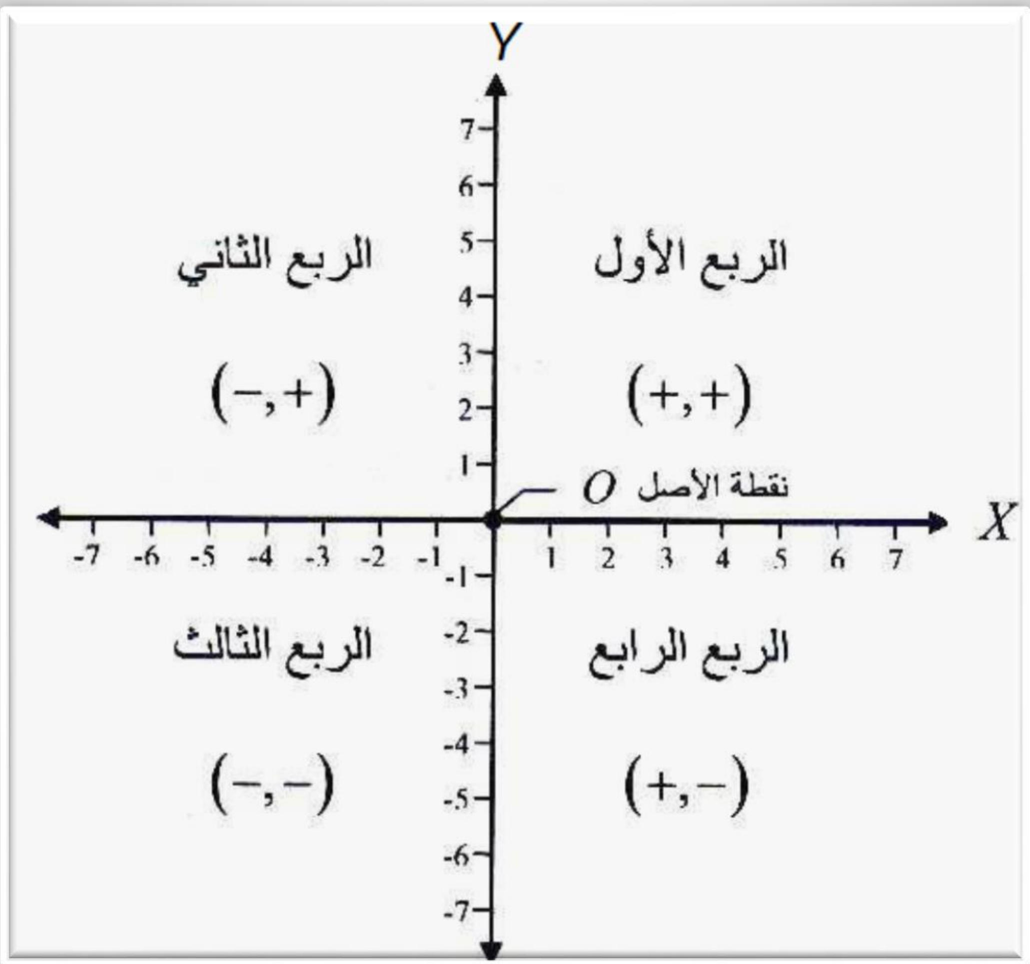
الأسبوع الحادي عشر

الهندسة التحليلية

- المستوى الديكارتي

- معادلة المستقيم في المستوى الديكارتي

الهندسة التحليلية
المستوى الديكارتي $(Cartesian\ Plane)$



الزوج المرتب $(Ordered\ Pair)$:

يمكن التعبير عن النقطة P الي تقع على المستوى الديكارتي بزوج مرتب (a,b)

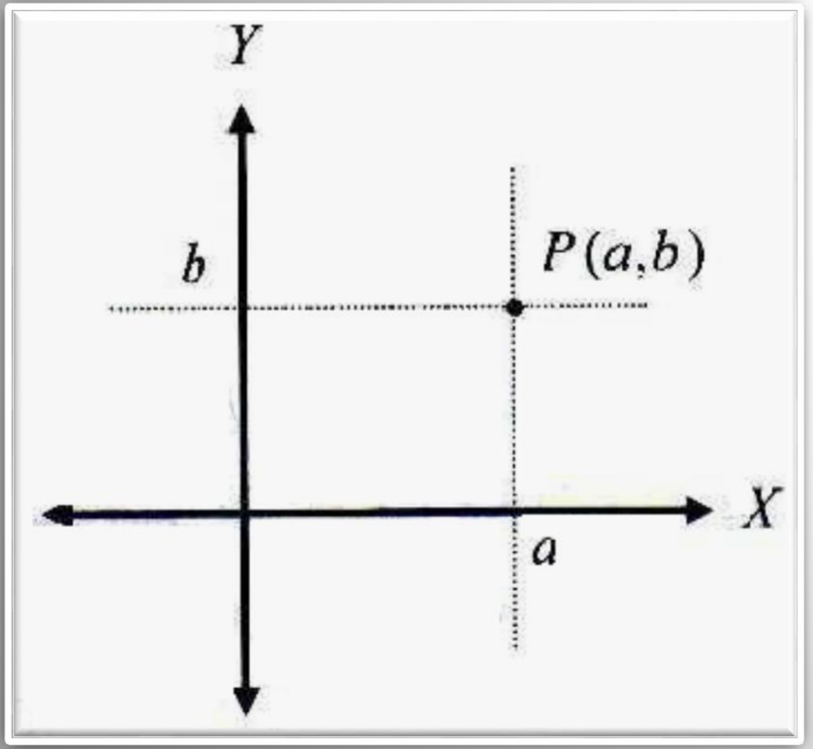
حيث أن :

a : المسقط العامودي من النقطة P على محور X

ويسمى a الإحداثي السيني.

b : المسقط الأفقي من النقطة P على محور Y

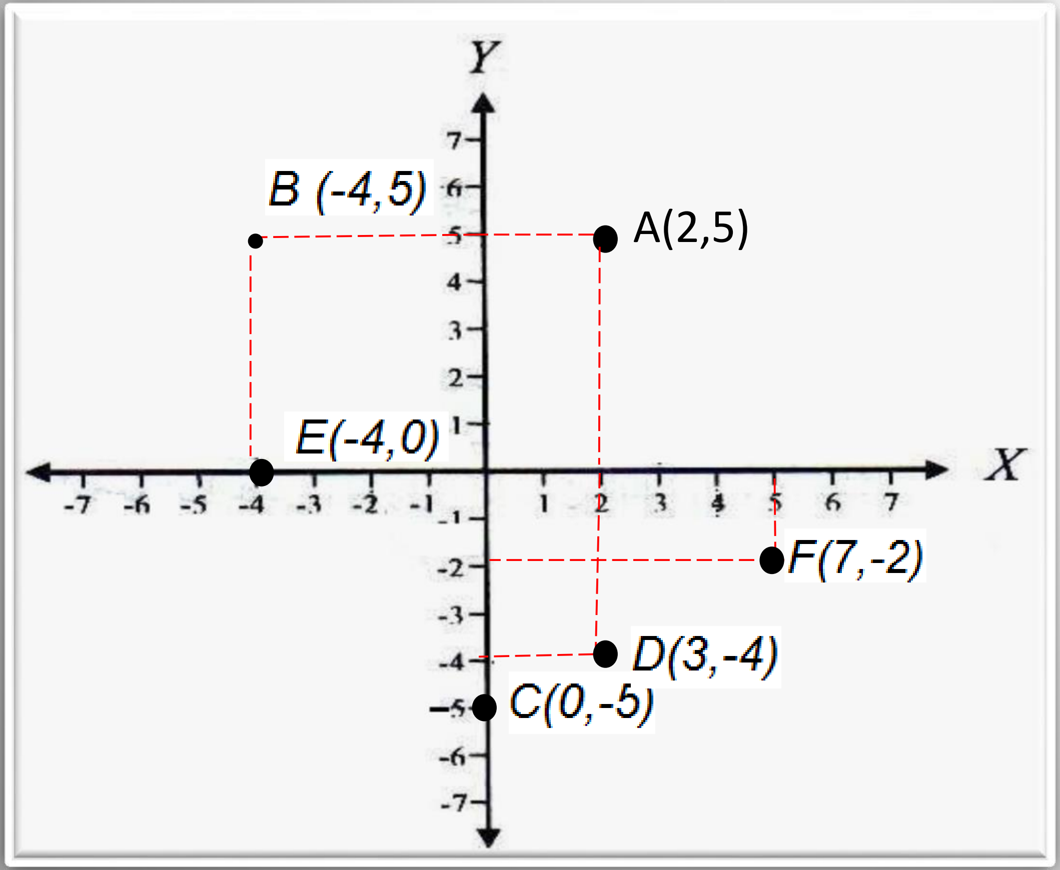
ويسمى b الإحداثي الصادي.



مثال$(Example)$ 1:

الشكل أدناه يمثل النقاط التالية في المستوى الديكارتي:

$A\ (2,5)\quad B\ (-4,5)\qquad C(0,-5)\qquad D(3,-4)\qquad E(-4,0)\quad F(7,-2)$



مثال$(Example)$2:

حدد في أي ربع أو على أي محور تقع كل من النقاط التالية:

$1.\ (3,1)$	$2.\ (-4,3)$	$3.\ (5,-4)$	$4.\ (0,-6)$
$5.\ (9,0)$	$6.\ (0,5)$	$7.\ (-3,-3)$	$8.\ (0,0)$

الحل$(Solution)$:

$1.\ (3,1)$ تقع في الربع الأول

$2.\ (-4,3)$ تقع في الربع الثاني

$3.\ (5,-4)$ تقع في الربع الرابع

$4.\ (0,-6)$ تقع على محور Y السالب

$5.\ (9,0)$ تقع على محور X الموجب

$6.\ (0,5)$ تقع على محور Y الموجب

$7.\ (-3,-3)$ تقع في الربع الثالث

$8.\ (0,0)$ نقطة الأصل وهي تمثل نقطة تقاطع كلاً من المحورين Y, X

معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي
$Line\ Equation\ in\ the\ Cartesian\ Plane$

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي:

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a,b,c أعداد حقيقية بحيث أن $a \neq 0$ أو $b \neq 0$
ويسمى الثابت a بمعامل x , والثابت b بمعامل y.

إن المقصود بمعادلة المستقيم أن أي نقطة $P(x_0,y_0)$ واقعة على المستقيم تحقق معادلته

أي أن: $ax_0 + by_0 = 0$

وكذلك أي نقطة $Q(x_1,y_1)$ تحقق المعادلة تكون واقعة على المستقيم.

مثال $(Example)$ 3:

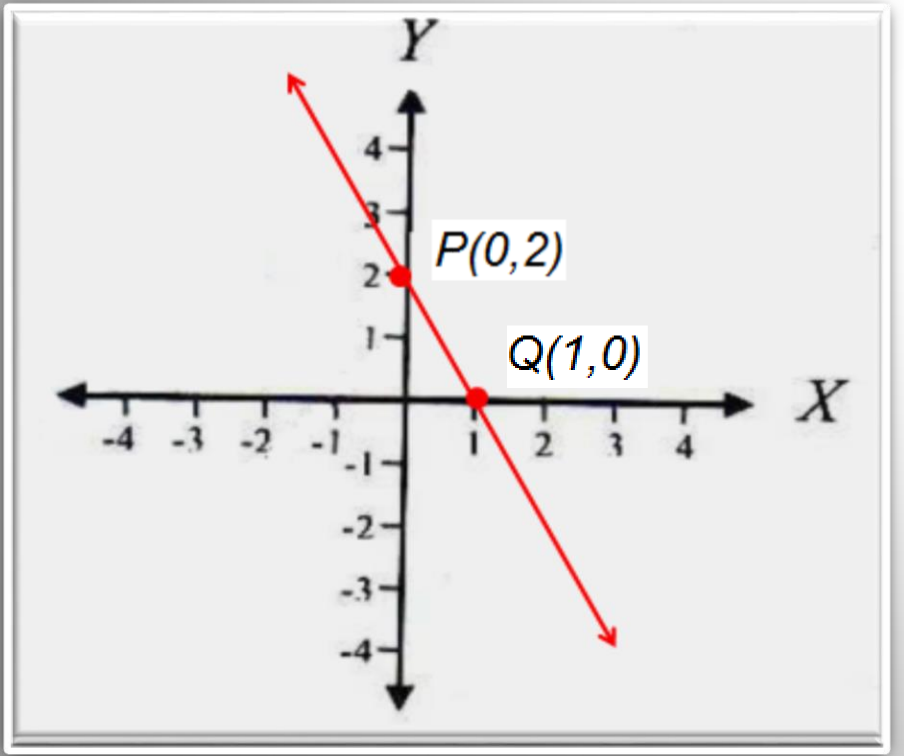
المعادلة $2x + y - 2 = 0$ تمثل معادلة المستقيم الموضح بالشكل:

نلاحظ أن النقطة $P(0,2)$ واقعة على المستقيم وتحقق المعادلة

$$2(0) + 2 - 2 = 0$$

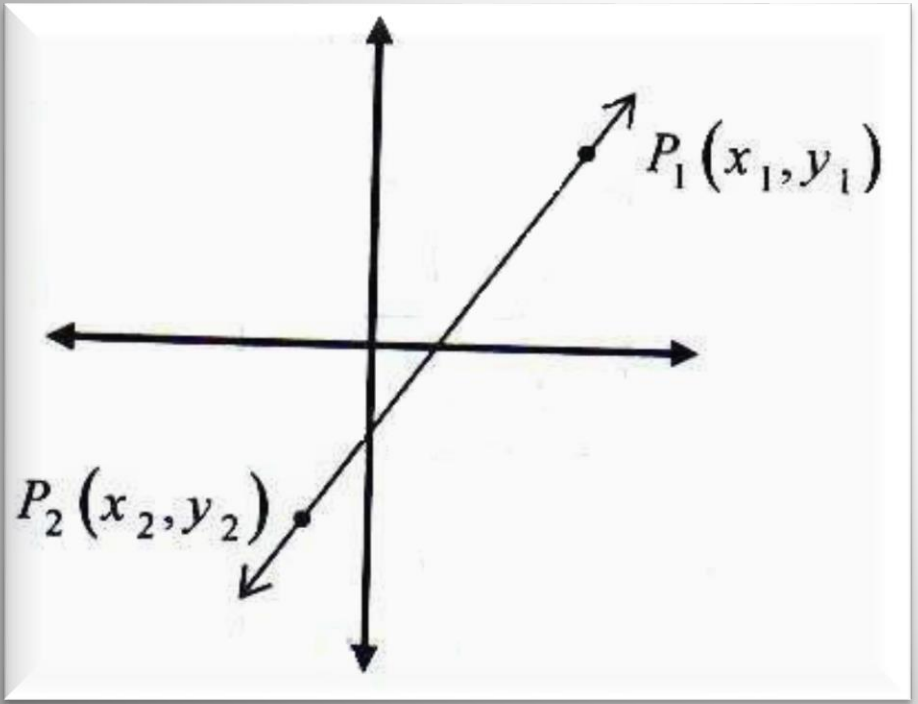
وكذلك النقطة $Q(1,0)$ تقع على المستقيم وتحقق المعادلة

$$2(1) + 0 - 2 = 0$$



تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي

يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم عن طريق معرفة نقطتين تقعان عليه ومن ثم رسم خط مستقيم يصل بينهما كما في الشكل المجاور:



مثال$(Example)$ 4:

أرسم الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة الخطية التالية:

$$2x + 3y = 6$$

الحل$(Solution)$:

لابد من إيجاد نقطتين يمر فيهما الخط المستقيم لذلك نقوم باختيار قيمتين للمتغير x

مثلاً نختار $x = 0$ ونعوضها في المعادلة لإيجاد قيمة y فينتج:

$$2(0) + 3y = 6$$

$$y = 2$$

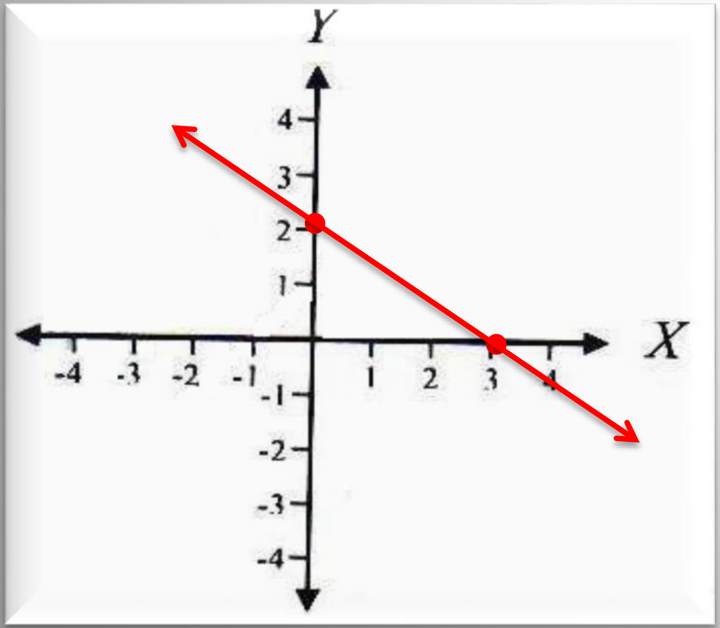
$$(0,2)$$

نوجد قيمة y عندما $x = 3$

$$2(3) + 3y = 6$$

$$y = 0$$

$$(3,0)$$



مثال$(Example)$:5

مثل المعادلات الخطية التالية بيانياً:

$1.\ y = 2$ $\qquad\qquad$ $2.\ x = -1$

الحل$(Solution)$:

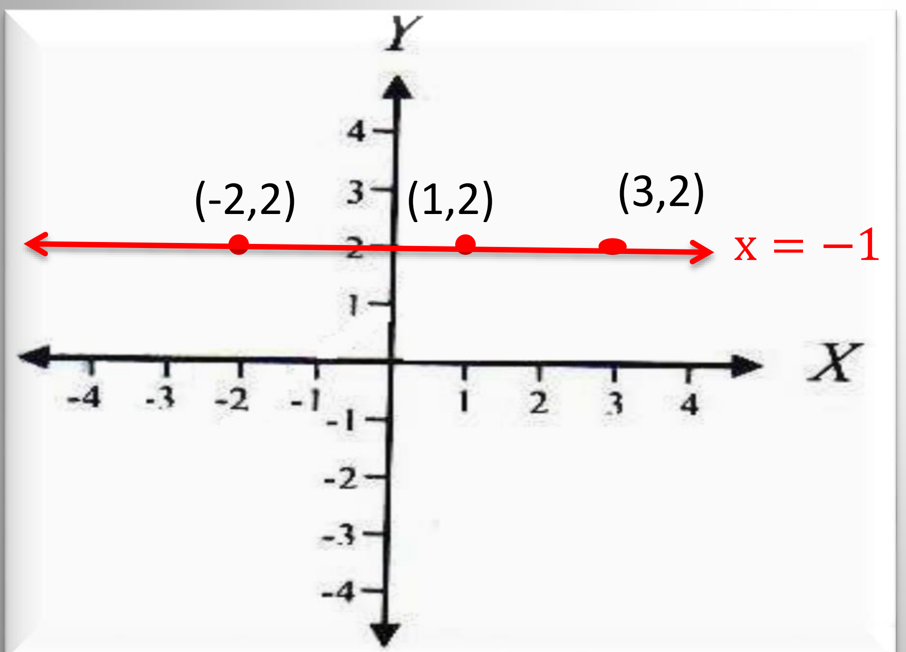
1. عند تمثيل المعادلة الأولى $y = 2$ أن قيمة المتغير y ثابتة لجميع قيم المتغير x

وبالتالي لو أخذنا قيم $x = \{-2,3,1\}$

فإن قيمة y ثابتة وتساوي 2

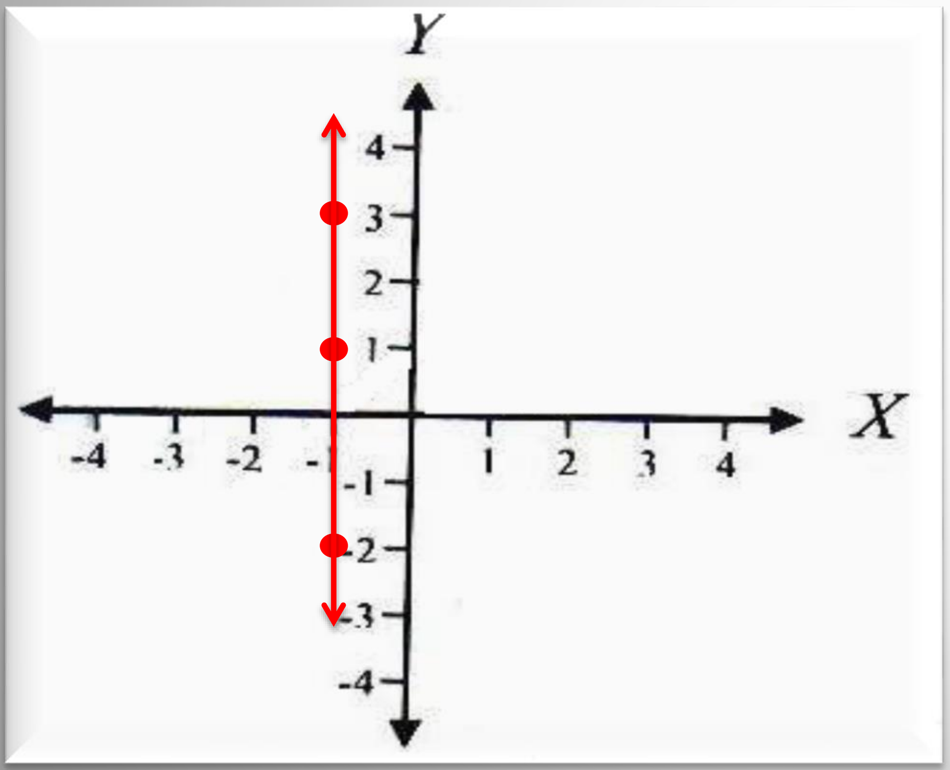
والأزواج المرتبة الناتجة هي:

$(-2,2), (3,2), (1,2)$



2. عند تمثيل المعادلة الأولى $x=-1$ أن قيمة المتغير x ثابتة لجميع قيم المتغير y وبالتالي لو أخذنا قيم $y=\{-2,3,1\}$ فإن قيمة x ثابتة وتساوي -1 والأزواج المرتبة الناتجة هي:

$(-1,-2),(-1,3),(-1,1)$



اسئلة عامة وإجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الاسبوع الثاني عشر

المحتوى

- ميل المستقيم.
- معادلة المستقيم بدلالة ميله و نقطه عليه.
- معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين.

ميل المستقيم

ميل المستقيم المعلوم معادلته:

اذا كان لدينا مستقيم معادلته العامه هي $ax + by + c = 0$ فان :

1- ميل المستقيم معرف في حالة $b \neq 0$ و يساوي $-\frac{a}{b}$ و يرمز له بالرمز m

$$m = -\frac{a}{b}$$

2- في حالة $b \neq 0$ فان $-\frac{c}{b}$ هو الاحداث الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات و نرمز له بالرمز d $\quad d = -\frac{c}{b}$ و تكون نقطة التقاطع هي $(0,d)$

3- في حالة $a \neq 0$ فان نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي $(-\frac{c}{a},0)$

يمكن كتابة معادلة المستقيم بدلالة ميله m و نقطة التقاطع d مع محور الصادات على الصورة

$$y = mx + d$$

مثال (Example) 1 : اذا كانت معادلة المستقيم هي : $3x + 6y = 12$ اوجد :

1- ميل المستقيم.
2- نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات Y.
3- نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات X.
4- اكتب معادلة المستقيم بدلالة الميل و نقطة التقاطع مع محور Y.

الحل (Solution) :

1- الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي $3x + 6y - 12 = 0$ و بالتالي

$a = 3$ و $\mathrm{b} = 6$ و $c = -12$

ميل المستقيم هو $m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

2- الاحداث الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات Y هو $d = -\frac{c}{b} = -\frac{-12}{6} = 2$

اذا النقطة هي $(0,2)$

3- الاحداث السيني لنقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات X هو $-\frac{c}{a} = -\frac{-12}{3} = 4$

اذا النقطة هي $(4,0)$

4- $y = mx + d$ $\Leftarrow$ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

مثال (Example) 2 : اكتب معادلة المستقيم لكل من الحالات التالية

1- ميله يساوي 4 و يقطع محور الصادات في 6

2- ميله -3 و يقطع محور السينات في 5

الحل (Solution) :

1- بما ان $m = 4$ و $d = 6$ فان معادلة المستقيم هي

$$y = mx + d \Rightarrow y = 4x + 6$$

2- بما ان $m = -3$ و الخط يقطع محور السينات في النقطة $(5,0)$

$$y = mx + d \Rightarrow y = -3x + d$$

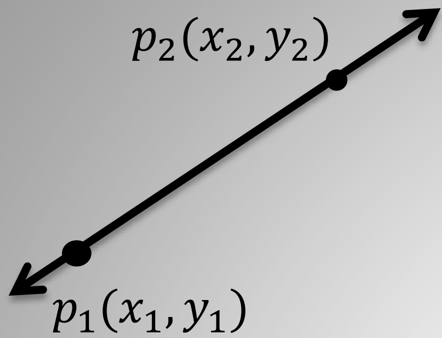
نوجد قيمة d عن طريق تعويض قيمة $x = 5$ و $y = 0$ في المعادلة

$$0 = -3(5) + d \Rightarrow d = 15$$

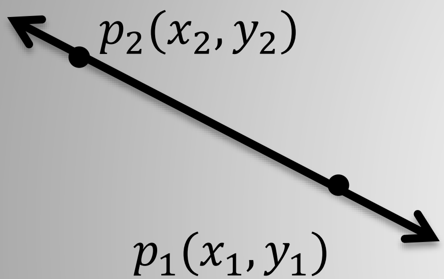
$$y = -3x + 15$$

ملاحظات :

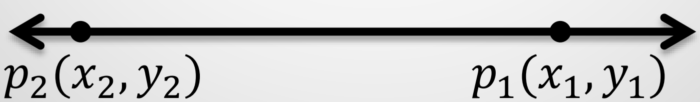
1- اذا كان المستقيم صاعدا من اليسار الى اليمين فان ميله يكون موجبا



2- اذا كان المستقيم صاعدا من اليمين الى اليسار فان ميله يكون سالبا



3- اذا كان المستقيم افقيا فان ميله يساوي صفرا : في هذه الحالة يكون $y_1 = y_2$



4- اذا كان المستقيم راسيا فان الميل غير معرف لأنه في هذه الحالة $x_1 = x_2$

مثال (Example)3 : اكتب معادلة المستقيم $5x + 4y - 8 = 0$ بدلالة الميل و نقطة تقاطعه مع محور الصادات Y :

الحل (Solution) : نقوم بحل المعادلة بالنسبة للمتغير y

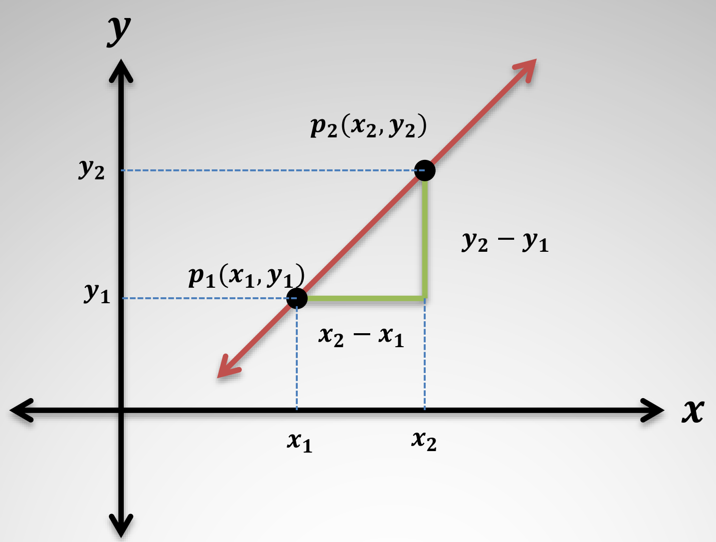
$$5x + 4y - 8 = 0 \Rightarrow 4y = 8 - 5x$$

$$y = 2 - \frac{5}{4}x$$

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه:

اذا كانت $p_1(x_1,y_1)$ و $p_2(x_2,y_2)$ نقطتان تقعان على مستقيم فان ميله هو

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x}$$



مثال (Example) 4 : اوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2,-4)$ و $(-5,1)$

الحل (Solution) : لنعتبر $p_1 = (2,-4)$ و $p_2 = (-5,1)$

$$(x_1, y_1) = (2, -4) \qquad (x_2, y_2) = (-5,1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-4)}{-5-2} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$$

معادلة المستقيم بدلالة ميله و نقطة عليه

معادلة المستقيم بمعلومية ميله و نقطه عليه

اذا كان لدينا الميل m لخط مستقيم و نقطه عليه $\mathrm{p}(x_1, y_1)$ فان معادلة هذا الخط هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال (Example 5) : اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله 5 و يمر بالنقطة (3,2)

الحل (Solution) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 5(x - 3) \Rightarrow y - 2 = 5x - 15$

$$y = 5x - 13$$

مثال (Example) 6 : اوجد معادلة المستقيم في كل مما يلي :

1- ميله يساوي -3 و يقطع محور Y في 8

2- يوازي محور X و يقطع محور Y في 4

3- يوازي محور Y و يقطع محور X في -5

الحل (Solution) :

1- $m=-3$ و يقطع محور Y في 8 اي يمر بالنقطة (0,8)

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-8=-3(x-0) \Rightarrow y-8=-3x$$

$$y=-3x+8$$

2- بما ان المستقيم موازي لمحور X فان $m=0$ و بما انه يقطع محور Y في 4 لذا فانه يمر بالنقطة $(0,4)$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-4=0(x-0) \Rightarrow y-4=0$$

$$y=4$$

3- بما انه المستقيم موازي لمحور Y لذا فانه ميله غير معرف و بما ان الخط يقطع محور X في -5 فانه يمر بالنقطة $(-5,0)$ و معادلته هي :

$$x=-5$$

معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين

معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين :

معادلة المستقيم المار بالنقطتين $p_1(x_1,y_1)$ و $p_2(x_2,y_2)$ بحيث $x_1 \neq x_2$ هي :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ملاحظة: اذا كان $x_1 = x_2$ فان المستقيم موازي لمحور Y.

ملخص : لإيجاد معادلة خط مستقيم يمر بنقطتين نوجد الميل اولا ثم نستخدم العلاقة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال (Example) 7 : اوجد معادلة المستقيم في الحالات التالية :

1- يمر بالنقطتين $p_1(2,9)$ و $p_2(-1,4)$

2- يمر بالنقطة $p(1,3)$ و يقطع محور X في -7

الحل (Solution) :

1- ميل المستقيم بدلالة النقطتين الواقعتين عليه $p_1(2,9)$ و $p_2(-1,4)$ هو

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-9}{-1-2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Longrightarrow y - 9 = \frac{5}{3}\,(x-2) \Longrightarrow y - 9 = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3}$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} + 9 \Longrightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{17}{3}$$

2- النقطة الاولى هي $(1,3)$ و بما ان المستقيم يقطع محور X في -7 فانه يمر بالنقطة $(-7,0)$

ميل المستقيم :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{-7-1} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

معادلة المستقيم :

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad y - (0) = \tfrac{3}{8}\,(x - (-7)) \qquad y = \tfrac{3}{8}(x+7)$$

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{21}{8}$$

* لنا الحرية في اختيار النقطة التي نستخدمها في العلاقة $y - y_1 = m(x - x_1)$ من بين النقطتين الواقعتين على المستقيم.

اسئلة عامة و اجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات

مبادئ الرياضيات

الاسبوع الحادي عشر

المحتوى

- المتتالية
- المتتالية الحسابية
- الوسط الحسابي
- المتتالية الهندسية
- الوسط الهندسي

المتتالية الحسابية (Arithmetic Sequence)

المتتالية : مجموع من العناصر (غالبا اعداد) ذات ترتيب معين

$$\mathbf{1, 3, 5, 7, \ldots \ldots \ldots \ldots}$$

متتالية الأعداد الطبيعية الفردية وتعطى بالعلاقة $(2n-1)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، إذا رمزنا للعلاقة $2n-1$ بالرمز a_n ويسمى بالحد العام (General Term) وتدل صيغته الجبرية على بقية الحدود.

الحد الأول $a_1 = 1$

الحد الثاني $a_2 = 3$

الحد الثالث $a_3 = 5$

الحد العام (الحد النوني) $a_n = 2n - 1$

المتتالية المنتهيه (Finite) : هي المتتالية التي تحوي عدد منتهي من العناصر.

المتتالية غير المنتهيه (Infinite) : هي المتتالية التي تحوي عدد غير منتهي من العناصر.

$\{a_k\}_{k=1}^{n}$ متتالية منتهيه $a_1,a_2,\dots\dots..,a_n$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهيه $a_1,a_2,\dots\dots..$

مثال$(Example)(1)$: اكتب الحدود الخمس الاولى للمتتالية $a_n = 4n + 1$

الحل $(Solution)$: لايجاد الحد الاول نقوم بتعويض العدد 1 بدلا من العدد n و لإيجاد الحد الثاني نقوم بتعويض العدد ٢ و هكذا

$$a_1 = 4(1) + 1 = 5$$
$$a_2 = 4(2) + 1 = 9$$
$$a_3 = 4(3) + 1 = 13$$
$$a_4 = 4(4) + 1 = 17$$
$$a_5 = 4(5) + 1 = 21$$

مجموع المتتالية (Sum of sequence) :

اذا كانت $a_1, a_2, \dots \dots \dots, a_n$ تمثل متتالية فان مجموعها S هو $S = a_1 + a_2 + \cdots \dots . + a_n$

و يرمز له بالرمز $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$

مثال$(Example)$(2) : اوجد المجموع $S = \sum_{k=1}^{3}(k^2+1)$

الحل $(Solution)$:

$$S = \sum_{k=1}^{3}(k^2+1) = (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1)$$

$$= 2 + 5 + 10 = 17$$

المتتالية الحسابية (Arithmetic sequence)

تعتبر المتتالية $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية حسابية اذا كان الفرق بين كل حد و الذي يسبقه عددا ثابتا

اي ان $a_{k+1} - a_k = d$ لكل $k \epsilon \mathbb{N}$ و يسمى العدد d باساس المتتالية الحسابية

مثال$(Example)(3)$: حدد فيما اذا كانت المتتالية $-2,1,4,7,10, \dots \dots \dots$ متتالية حسابية ام لا.

الحل $(Solution)$:

$$a_2 - a_1 = 1 - (-2) = 3$$
$$a_3 - a_2 = 4 - 1 = 3$$
$$a_4 - a_3 = 7 - 4 = 3$$
$$a_5 - a_4 = 10 - 7 = 3$$

الفرق دائما مقدار ثابت و يساوي 3 اذا المتتالية حسابية باساس يساوي 3

مثال$(Example)$(4) : حدد فيما اذا كانت المتتالية $-3,3,-3,3,-3,\ldots$ متتالية حسابية ام لا.

الحل $(Solution)$:

$$a_2 - a_1 = 3 - (-3) = 6$$

$$a_3 - a_2 = -3 - 3 = -6$$

$$a_4 - a_3 = 3 - (-3) = 6$$

$$a_5 - a_4 = -3 - 3 = -6$$

الفرق غير ثابت اذا المتتالية غير حسابية

الحد العام للمتتالية الحسابية:

الحد العام a_n للمتتالية الحسابية المعلوم فيها الحد الاول a_1 و الاساس d يعطى بالعلاقة

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

مثال$(Example)$(5): متتالية حسابية حدها الاول 5 و اساسها 2 اوجد ما يلي :

1 – الحد العام للمتتالية

2 – الحدود الخمس الاولى للمتتالية

3 – الحد التاسع من المتتالية

الحل $(Solution)$:

1 - $a_n = a_1 + d(n-1) = 5 + 2(n-1)$

$$= 5 + 2n - 2 = 2n + 3$$

2 - $a_2 = 2(2) + 3 = 7$ $\quad a_3 = 2(3) + 3 = 9$ $\quad a_4 = 11$ $\quad a_5 = 13$

3 - $a_9 = 2(9) + 3 = 21$

مجموع اول n حد من متتاليه الحسابية:

اذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية حسابية حدها الاول a_1 و اساسها d فان مجموع اول n حد من المتتالية و يرمز له بالرمز S_n يعطى بالعلاقة .

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$$

مثال$(Example)(6)$: اوجد مجموع اول 15 حد من متتالية حسابية حدها الاول -2 و حدها الخامس عشر 14

الحل $(Solution)$:

$$S_{15} = \sum_{k=1}^{15} a_k = \frac{15}{2}(-2 + 14) = 90$$

مثال$(Example)(7)$: اوجد مجموع اول سبع حدود من متتالية حسابية حدها الاول 9 و اساسها 8

الحل $(Solution)$:

$$S_7 = \sum_{k=1}^{7} a_k = \frac{7}{2}\big(2(9) + 8(7-1)\big) = 231$$

الوسط الحسابي (Arithmetic Mean)

اذا كان a و b عددان حقيقيان فان الوسط الحسابي لهما هو $c = \frac{a+b}{2}$

نلاحظ ان a,c,b متتالية حسابية حدها الاول a و اساسها $d = \frac{b-a}{2}$

نسمي الاعداد $c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n \epsilon \mathbb{R}$ اوساطا حسابية بين العددين a و b اذا كانت المتتالية $a, c_1, c_2, \dots \dots \dots, c_n, b$ متتالية حسابية .

مثال$(Example)(8)$: ادخل اربعة اوساطا حسابية بين العددين 18 , 3

الحل $(Solution)$: $a_1 = 3, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 = 18$

$$a_6 = a_1 + d(6-1)$$

$$18 = 3 + 5d \Longrightarrow d = 3$$

$$a_2 = 6 \qquad a_3 = 9 \qquad a_4 = 12 \qquad a_5 = 15$$

المتتالية الهندسية (Geometric Sequence)

تعتبر المتتالية $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية هندسية اذا كان حاصل قسمة اي حد على الحد الذي يسبقه عددا ثابتا

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r \quad \text{لكل} \quad k \epsilon \mathbb{N}$$

يسمى العدد r باساس المتتالية الهندسية .

$2,8,32,128, \dots \dots \dots ..$ متتالية هندسيه

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{32}{8} = 4 \qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{128}{32} = 4$$

ملاحظة : المتتالية الهندسية لا تحوي العدد صفر و اساسها لا يساوي صفرا

الحد العام للمتتالية الهندسية:

الحد العام a_n لمتتالية هندسية حدها الاول a_1 و اساسها r يعطى بالعلاقة $a_n = a_1 r^{n-1}$

مثال$(Example)$(9): متتالية هندسية حدها الاول $2-$ و اساسها 4 اوجد ما يلي :

1 – الحد العام للمتتالية

2 – الحدود الخمسة الاولى

3 – الحد التاسع

الحل $(Solution)$:

1 – $a_n = a_1 r^{n-1} = -2(4^{n-1})$

$$a_2 = -2(4^{2-1}) = -2 \times 4^1 = -8$$ – 2
$$a_3 = -2(4^{3-1}) = -2 \times 4^2 = -32$$
$$a_4 = -2(4^{4-1}) = -2 \times 4^3 = -128$$
$$a_5 = -2(4^{5-1}) = -2 \times 4^4 = -512$$

$$a_9 = -2(4^{9-1}) = -2 \times 4^8 = -2 \times 65536 = -131072$$ – 3

مجموع اول n حد من متتاليه هندسية:

اذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية هندسية حدها الاول a_1 و اساسها $r \neq 1$ فان مجموع اول n حد من المتتالية و يرمز له بالرمز S_n يعطى بالعلاقة .

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

مثال$(Example)$(10): اوجد مجموع الحدود الست الاولى من المتتالية الهندسية .... ,5,15,45

الحل $(Solution)$: $a_1 = 5$ $\qquad r = \frac{15}{5} = 3$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{6} a_k = a_1 \frac{r^6 - 1}{r - 1} = 5\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 5\frac{729 - 1}{2} = 1820$$

الوسط الهندسي (Geometric Mean)

اذا كان a و b عددان حقيقيان موجبان فان الوسط الهندسي لهما هو $c = \sqrt{ab}$

نلاحظ ان a,c,b متتالية هندسية حدها الاول a و اساسها $r = \sqrt{\frac{b}{a}}$ كما ان $c^2 = ab$

نسمي الاعداد $c_1,c_2,\dots\dots\dots,c_n \epsilon \mathbb{R}$ اوساطا هندسية بين العددين الموجبين a و b اذا شكلت المتتالية $a,c_1,c_2,\dots\dots\dots,c_n,b$ متتالية هندسية .

مثال$(Example)$(11): ادخل اربعة اوساطا هندسية بين العددين 64 , 2

الحل $(Solution)$: $a_1 = 2,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 = 64$ تمثل متتالية هندسية حدها الاول $a_1 = 2$ و حدها السادس $a_6 = 64$.

$$a_6 = a_1 r^{6-1} \Rightarrow 64 = 2r^5 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$a_2 = 4 \quad a_3 = 8 \quad a_4 = 16 \quad a_5 = 32$$

اسئلة عامة و إجابات

- اسئلة
- تعليقات
- اهتمامات