كامل أفكار كتاب هندسة للصف التاسع المنهاج السوري

الدائرة

الدائرة: هي مجموعة نقط المستوي التي تبعد عن نقطة ثابتة(المركز)بعداً ثابتا(نصف القطر)رمزها (C)

نسمي النقطة الثابتة مركز الدائرة O
والبعد الثابت نصف القطر رمزه R
تتعين الدائرة (C)
بمركزها O و نصف قطرها R
نقول الدائرة $C_{(O,R)}$

وتر الدائرة هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين منها

قوس الدائرة هو جزء من الدائرة محدود بنقطتين

نصف قطر الدائرة هو قطعة مستقيمة تصل بين المركز ونقطة

قطر الدائرة هو وتر فيها يمر من مركزها $d = 2R$

قطرالدائرة يقسمها إلى قوسين طبوقين قياس كل منهما 180°
لتكن C دائرة مركزها O و نصف قطرها R
ولتكن M نقطة من المستوى

- إذا كان M نقطة من C فإن $OM = R$
- إذا كان $OM = R$ فإن M نقطة من C

- قطر الدائرة محور تناظر لها
- ومركزها مركز تناظر لها
- مساحتها: $S = \pi R^2$
- محيطها: $P = 2\pi R = d\pi$

خاصة

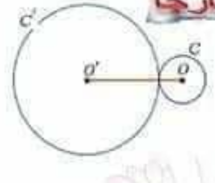
- المستقيم المار من مركز دائرة ويعامد وتر فيها يمر من منتصف تلك الوتر.
- المستقيم المار من مركز دائرة ويمر من منتصف وتر فيها يعامد تلك الوتر.

1) N منتصف الوتر CB فإن $ON \perp CB$
2) $ON \perp CB$ فإن N منتصف الوتر CB

الوضع النسبي لدائرتين

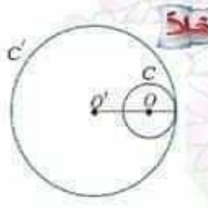
1 متماستين خارجاً

هما دائرتان تشتركان بنقطة وحيدة تسمى نقطة التماس
نلاحظ أن: $OO' = R' + R$
فالبعد بين مركزيهما يساوي مجموع نصفي قطريهما



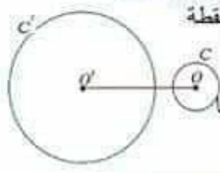
2 متماستين داخلاً

هما دائرتان تشتركان بنقطة وحيدة تسمى نقطة التماس
نلاحظ أن: $OO' = R' - R$
فالبعد بين مركزيهما يساوي فرق نصفي قطريهما



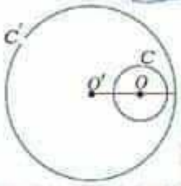
3 متباعدتين خارجاً

هما دائرتان لا تشتركان بأية بنقطة
نلاحظ أن: $OO' > R' + R$
فالبعد بين مركزيهما أكبر تماماً من مجموع نصفي قطريهما



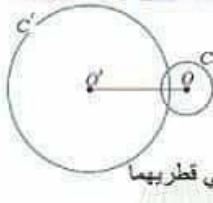
4 متباعدتين داخلاً

هما دائرتان لا تشتركان بأية بنقطة
نلاحظ أن: $OO' < R' - R$
فالبعد بين مركزيهما أصغر تماما من فرق نصفي قطريهما



5 متقاطعتين

هما دائرتان تشتركان بنقطتين
نلاحظ أن:
$R' + R > OO' > R' - R$
فالبعد بين مركزيهما أكبر تماما من فرق نصفي قطريهما وأصغر تماما من مجموع نصفي قطريهما



تمرين أول: ABC مثلث قائم في A ،

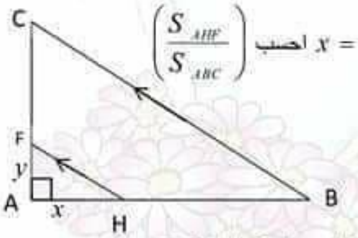
طولا ضلعه القائمين $AB = 8\ cm,\ AC = 6\ cm$

1) احسب طول الوتر BC واحسب $\tan(\widehat{B})$

2) HF يوازي BC ، $AH = x, AF = y$

اكتب النسب الثلاث المتساوية ثم استنتج أن $y = \frac{3}{4}x$.

3) في حالة $x = 4$ احسب $\left(\frac{S_{AHF}}{S_{ABC}}\right)$



الحل: 1) حسب فيثاغورث في المثلث ABC

نعوض $BC^2 = 36 + 64$ ومنه $BC = 10$

$$\operatorname{Tan}\widehat{B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

2) حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{HF}{BC}$$ نعوض $$\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{HF}{10}$$

ومنه $y = \frac{6 \times x}{8}$ ومنه $y = \frac{3}{4}x$

3): بما أن $\frac{AH}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{HF}{BC}$

فالمثلثين AHF, ABC متشابهين لتناسب أضلاعهما

ونسبة مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه

$$\frac{S_{AHF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

تمرين ثاني: ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A

فيه المستقيمان (DE) و (BC) متوازيان

والمستقيمان (BE) ، (CD) متقاطعان في F

$AD = 2\ cm$ ، $DB = 3\ cm$ ، $BF = 4\ cm$.

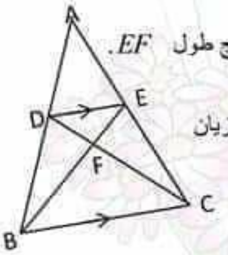
1) اذا كان المثلث ADE تصغير للمثلث ABC

اكتب النسب الثلاث ثم اكتب معامل التصغير.

2) اذا كان المثلث FDE تصغير للمثلث FBC

اكتب النسب الثلاث.

3) اثبت ان $\frac{FE}{FB} = \frac{2}{5}$ واستنتج طول EF.



الحل: 1) (DE) و (BC) متوازيان

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

معامل التصغير

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$$

2) (DE) و (BC) متوازيان

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{FD}{FC} = \frac{DE}{BC} = \frac{FE}{FB}$$

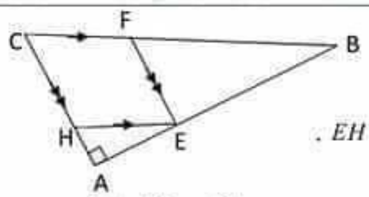
3): من (1) و(2) نجد

$\frac{AD}{AB} = \frac{FE}{FB}$ وبالتعويض نجد $\frac{2}{5} = \frac{FE}{FB}$

$\frac{2}{5} = \frac{FE}{4}$ ومنه $FE = \frac{2 \times 4}{5}$ ومنه $FE = \frac{8}{5}$

تمرين ثالث: ABC مثلث قائم في A ، $AC = 3\ cm$ ، $AB = 4\ cm$

$(EF) \parallel (AC), (EH) \parallel (BC), AE = 1$



1) احسب طول BC

2) المثلث HAE تصغير للمثلث ACB اكتب معامل التصغير واستنتج طول EH .

3) المثلث ABC تكبير للمثلث EBF اكتب معامل التكبير واستنتج طول BF

الحل: 1) حسب فيثاغورث في المثلث ABC

$BC^2 = 9 + 16$ ومنه $BC = \boxed{5}$

2) حسب مبرهنة النسب الثلاث

$\frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{HE}{BC}$ ومنه $\frac{AH}{AC} = \frac{1}{4} = \frac{HE}{5}$

ومنه معامل التصغير $\frac{1}{4}$

لدينا $\frac{HE}{5} = \frac{1}{4}$ ومنه $HE = \frac{1 \times 5}{4}$ ومنه $HE = \frac{5}{4}$

3) حسب مبرهنة النسب الثلاث $\frac{BA}{BE} = \frac{BC}{BF} = \frac{AC}{FE}$

فالمثلث ABC تكبير للمثلث EBF

نعوض $\frac{4}{3} = \frac{5}{BF} = \frac{3}{FE}$ ومنه معامل التكبير $\frac{4}{3}$

من التناسب السابق لدينا $\frac{4}{3} = \frac{5}{BF}$

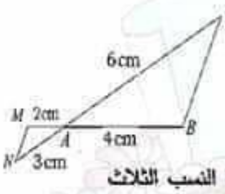
ومنه $BF = \frac{5 \times 3}{4}$ ومنه $BF = \frac{15}{4}$

3 التشابه

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في مثلثين قلنا إنّ المثلثين **متشابهان**

ويكون أحدهما مصغر أو مكبر عن الآخر أو مطابق له

تطبيق: في الشكل المجاور برهن أن المثلث AMN تصغير للمثلث ABC ثم عين معامل التصغير



الحل:

$(BC) \parallel (MN)$ حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{NM}{CB}=\frac{NA}{CA}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}$$

المثلثان ABC و AMN متشابهان لتساوي النسب الثلاث ويكون المثلث AMN مصغراً عن المثلث ABC نسبة التصغير $\frac{2}{3}$

في المثلثين المتشابهين : كل زاويتين متقابلتين متساويتين

خاصة 1 تشابه نسبته $k>0$

- يحافظ على قياسات الزوايا. • يُضرب الأطوال بالعدد k.
- إذا كانت نسبة التشابه $k>1$ يؤول التشابه إلى تكبير الشكل.
- إذا كانت نسبة التشابه $0<k<1$ يؤول التشابه إلى تصغير الشكل

خاصة 2

تشابه نسبته $k>0$.

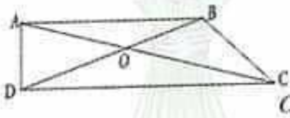
- تُضرب مساحة السطح بالعدد k^2.
- يُضرب حجم المجسم بالعدد k^3.

قطرا الرباعي $ABCD$ متقاطعان في O

$OA=6.5$ cm و $OB=5$ cm

$OC=9.1$ cm ، $OD=7$ cm

أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف



الحل:

$$\frac{OB}{OD}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{OA}{OC}=\frac{6.5}{9.1}=\frac{65}{91}=\frac{5}{7}$$

فحسب عكس النسب الثلاث يكون DC , AB متوازيين فالرباعي $ABCD$ فيه ضلعان متوازيان فهو شبه منحرف

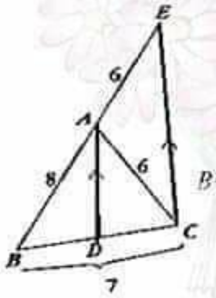
<u>تمرين</u>: في الشكل المجاور ABC مثلث أطوال أضلاعه: $AB=8$, $AC=6$, $BC=7$ ، D نقطة من BC نرسم من C مستقيماً يوازي AD يقطع ممدد BA في النقطة E ، فإذا كان $AE=6$

المطلوب :

1) المثلث BDA تصغير للمثلث BCE : اكتب النسب الثلاث واحسب طول $[BD]$ ثم استنتج طول $[DC]$.

2) احسب كلاً من النسب: $\frac{BA}{CA}$ و $\frac{BD}{CD}$ وقارن بينهما .

3) أثبت أن $D\hat{A}C=A\hat{C}E$ ، $D\hat{A}B=C\hat{E}A$ ثم استنتج أن: AD منصف للزاوية $B\hat{A}C$



1) لدينا فرضاً $AD \parallel EC$

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BA}{BE}=\frac{AD}{EC}$$

فالمثلث BDA تصغير للمثلث BCE

$$\frac{BD}{7}=\frac{8}{14}=\frac{AD}{EC}$$

ومنه: $BD=\frac{8\times 7}{14}$

$BD=4$

ومنه $DC=7-4$

$DC=\boxed{3}$

2) نحسب $\frac{BA}{CA}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

ولدينا من الطلب الأول $\frac{BD}{CD}=\frac{4}{3}$

وبالموازنة نجدأن النسبتين متساويتين

أي أن $\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{CA}=\frac{4}{3}$

3) لدينا $D\hat{A}C=A\hat{C}E$ بالتبادل الداخلي بالنسبة للمستقيمين المتوازيين AD,EC والقاطع AC

ولدينا $D\hat{A}B=C\hat{E}A$ بالتناظر بالنسبة للمستقيمين المتوازيين AD,EC والقاطع BE

وبما أن المثلث ACE متساوي الساقين

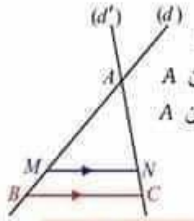
أي أن $A\hat{C}E=A\hat{E}C$

فإن: $D\hat{A}C=D\hat{A}B$

ومنه **نستنتج** أن: AD منصف للزاوية $B\hat{A}C$

1 مبرهنة النسب الثلاث

نص مبرهنة النسب الثلاث



(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A

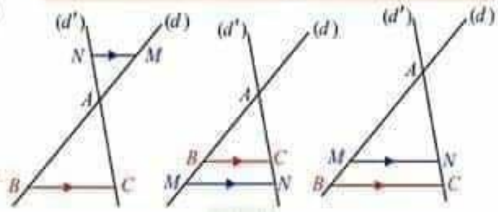
النقطتان B و M من (d) مختلفتان عن A

النقطتان C و N من (d') مختلفتان عن A

إذا كان (BC) و (MN) متوازيين

كان $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

الحالات الثلاث لمبرهنة النسب الثلاث



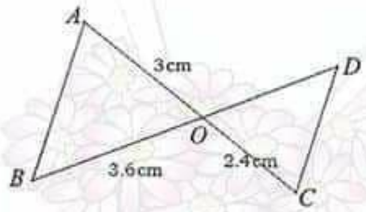
عند استعمال المبرهنة نرتب الحروف وفق الجدول

A	M	N
A	B	C

مع مراعاة أن النقط التي تنتمي لمستقيم واحد تقع على عمود واحد

مثال في الشكل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

احسب الطول OD



الحل:

AB//CD

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

بالتعويض نجد

$$\frac{3}{2.4}=\frac{3.6}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

$$OD=\frac{3.6\times2.4}{3}$$

$$OD=2.88$$

2 عكس مبرهنة النسب الثلاث

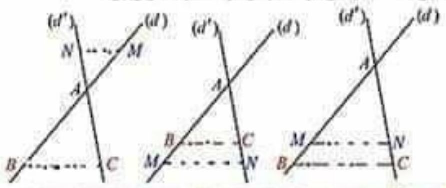
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A

إذا كان ترتيب النقاط A و B و M على (d)

مماثلا لترتيب النقاط A و C و N على (d')

وكان $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$،

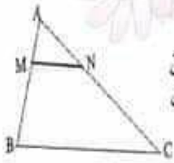
كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين.



مثال:

في الشكل $AB=35$ و $AC=52$

$AM=11.9$ و $AN=18.2$ أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (MN) غير متوازيين



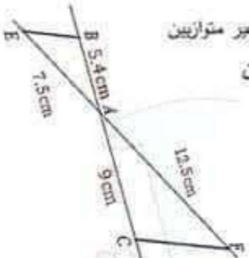
الحل: لدينا $\frac{AM}{AB}=\frac{11.9}{35}=0.34$

$\frac{AN}{AC}=\frac{18.2}{52}=0.35$

ومنه $\frac{AM}{AB}\neq\frac{AN}{AC}$

فالمستقيمين (BC) و (MN) غير متوازيين

مثال في الشكل أثبت أنّ المستقيمين (BE) و (FC) متوازيان.



الحل $\frac{AB}{AC}=\frac{5.4}{9}=0.6$

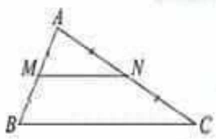
$\frac{AE}{AF}=\frac{7.5}{12.5}=0.6$

نستنتج أنّ $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}$

(BE) و (FC) متوازيين.

حالة خاصة: القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين

القطعة المستقيمة المحدودة بمنتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها



M منتصف $[AB]$

N منتصف $[AC]$

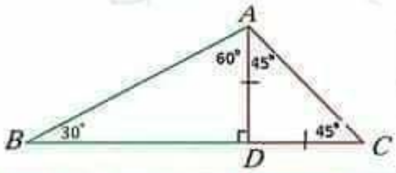
فإن $MN \parallel BC$

$MN=\frac{1}{2}BC$

الجلسات الامتحانية أيام الخميس والجمعة والسبت قبل الامتحان

نسب زوايا شهيرة

تفيد النسب المثلثية الأساسية للزوايا الشهيرة وهي $(30°, 45°, 60°)$ في حساب طول ضلع من أضلاع المثلث القائم وأجزاء الأضلاع في حالة عُلِمَ طول ضلع و قياس زاوية شهيرة كما يلي



الزاوية / النسبة المثلثية	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين الحادتين في المثلث القائم

**وجدنا سابقا أن الزاويتين الحادتين في المثلث القائم متتامتين ((مجموعهما 90^0))

إذا كانت x قياس زاوية حادة

فإنّ الزاوية المتتمة لها هي $(90° - x)$ ويكون

$$Sin\theta = Cos\left(90° - \theta\right)$$ هام

مثال : $sin(35°) = cos(90° - 35°) = cos(55°)$

مثال : $cos(30°) = sin(90° - 30°) = \sin(60°)$

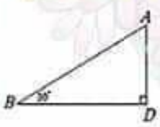
نتائج هامة في المثلث القائم

خاصة الضلع المقابلة لزاوية

في المثلث القائم طول الضلع المقابلة لزاوية قياسها 30^0 يساوي نصف طول الوتر

في الشكل المجاور ABD مثلث قائم

فيه $\widehat{B} = 30°$ فإن $AD = \frac{1}{2}AB$



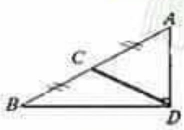
خاصة المتوسط المتعلق بالوتر

في المثلث القائم طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر

في الشكل المجاور ABDمثلث قائم

فيه CD متوسط متعلق بالوتر

فإن $CD = \frac{1}{2}AB$



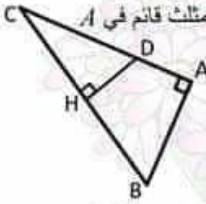
ملاحظات هامة: لحساب طول ضلع في مثلث قائم

1) إذا علم في المثلث القائم طولا ضلعين نحسب الضلع الثالث بناءا على فيثاغورث
2) إذا علم في المثلث طول ضلع ونسبة مثلثية نستخدم النسبة المثلثية المعطاة
3) إذا علم في المثلث طول ضلع وقياس زاوية شهيرة نستفيد من النسب المثلثية للزاوية الشهيرة
4) إذا كانت الزاويتان متساويتان بالتقابل بالرأس او متممتا نفس الزاوية أو لسبب ما فإن لهما الجيب ذاته والتجيب ذاته والظل ذاته

****

تمرين: في الشكل المجاور ABC مثلث قائم في A

$DC = 5, AD = 3, AB = 6$



1) احسب BC
2) أوجد $\sin\widehat{C}$ واستنتج طول DH
3) احسب طول CH

الحل:

1) حسب فيثاغورث $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 36 + 64$ ومنه $BC^2 = 100$ ومنه $BC = \boxed{8}$

2) حساب $\sin\widehat{C}$ و DH

$\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\sin\widehat{C} = \frac{DH}{DC} = \frac{DH}{5}$

ومنه $\frac{DH}{5} = \frac{3}{5}$ ومنه $DH = 3$

3) حساب CH

$\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\cos\widehat{C} = \frac{HC}{DC} = \frac{HC}{5}$

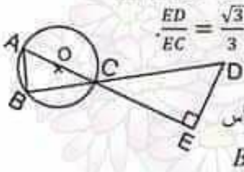
ومنه $\frac{HC}{5} = \frac{4}{5} \Leftarrow HC = \boxed{4}$

تمرين: B نقطة من الدائرة التي مركزها O وقطرها AC

$AC = 10cm$ و $AB = 5cm$ والمطلوب:

1) اشرح لماذا $A\hat{C}B = D\hat{C}E$.
2) احسب طول الضلع BC ثم احسب $tanA\hat{C}B$.

اوجد $tan\, D\hat{C}E$ واستنتج أن $\frac{ED}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



الحل:

1) $A\hat{C}B = D\hat{C}E$ بالتقابل بالرأس.

المثلث ABC قائم الزاوية في B

لأن ضلعه AC قطر للدائرة المارة برؤوسه

حسب فيثاغورث في المثلث ABC نجد $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$100 = 25 + BC^2$ ومنه $BC^2 = 75$ و منه $BC = \boxed{5\sqrt{3}}$

$\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan D\hat{C}E = \frac{DE}{EC}$ ومنه $\frac{DE}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

لأن $A\hat{C}B = D\hat{C}E$

الجلسات الامتحانية أيام الخميس والجمعة والسبت قبل الامتحان

حالات إثبات أن المثلث قائم الزاوية

1- عكس فيثاغورث

إذا كان في مثلث مربع طول ضلع يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم ووتره تلك الضلع

2- عكس المتوسط

إذا كان في مثلث طول المتوسط المتعلق بضلع يساوي نصف طول تلك الضلع فالمثلث قائم ووتره تلك الضلع

3- ضلع المثلث وقطر الدائرة

إذا كان إحدى أضلاع المثلث قطر للدائرة المارة برؤوسه كان المثلث قائم الزاوية ووتره قطر الدائرة

4- المماس وقطر الدائرة

المماس لدائرة عمود على نصف القطر في نقطة التماس

3 علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية

إذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم :

أولا : $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ثانيا: $Tan(\theta) = \dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$

تمرين1: إذا كانت θ زاوية حادة وكان: $Sin\theta = \dfrac{3}{5}$

احسب $cos(\theta)$,$tan(\theta)$

الحل: نعلم أن $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$(\frac{3}{5})^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$Tan(\theta) = \frac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)} = \frac{\frac{3}{\cancel{5}}}{\frac{4}{\cancel{5}}}$$ ومنه $Tan(\theta) = \dfrac{3}{4}$

تمرين2: إذا كانت θ زاوية حادة وكان: $cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

احسب $sin(\theta)$,$tan(\theta)$

الحل: نعلم أن $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$Sin^2\theta + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$$

$$Sin^2\theta + \frac{3}{4} = 1$$

$$Sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4}$$

$$Sin^2\theta = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$$

$$Sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$Sin\theta = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$Tan(\theta) = \frac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}$$ ومنه $Tan(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

تمرين3: إذا كانت θ زاوية حادة وكان: $tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

احسب $sin(\theta)$,$\cos(\theta)$

الحل: نعلم أن $Tan(\theta) = \dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$ ومنه $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$

بتربيع الطرفين $\dfrac{(1)^2}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{Sin^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}$ ومنه $\dfrac{1}{3} = \dfrac{Sin^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}$

وحسب خواص التناسب $\dfrac{1}{3+1} = \dfrac{Sin^2(\theta)}{Cos^2(\theta) + Sin^2(\theta)}$

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{Sin^2(\theta)}{1}$ لأن $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

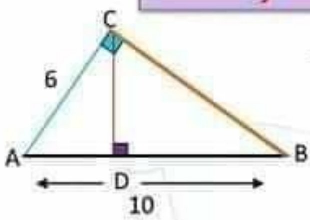
إذا: $Sin^2(\theta) = \dfrac{1}{4}$ ومنه $Sin(\theta) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

نعوض في العلاقة $Tan(\theta) = \dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{Cos(\theta)}$$

ومنه $Cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{1} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

انتبه و استفد و استعد



في الشكل المجاور

1) أحسب BC

2) أحسب CD

3) أحسب DB

الحل: 1-حساب BC : حسب مبرهنة فيثاغورث

نجد $BA^2 = AC^2 + BC^2$

ومنه $10^2 = 6^2 + BC^2$

$100 = 36 + BC^2$

$BC^2 = 100 - 36 = 64$

$BC = \sqrt{64} = 8$

2-حساب CD((الارتفاع في المثلث القائم الزاوية))

في المثلث القائم ABC لدينا

$$\sin \widehat{\mathbf{A}} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \;..............(1)$$

وفي المثلث القائم ADCلدينا

$$Sin\, \widehat{\mathbf{A}} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{6} \;..............(2)$$

من (1) و(2) نجد: $\frac{CD}{6} = \frac{4}{5}$

ومنه نجد $CD = \frac{4 \times 6}{5} = \frac{24}{5}$

3- حساب DB((أحد جزأي الوتر المعينين بالارتفاع))

***يمكن حساب BD بحسب فيثاغورث

في المثلث القائم CDB

أو بالشكل التالي

في المثلث القائم ABC لدينا

$$Cos\, \widehat{B} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \;..............(1)$$

وفي المثلث القائم BDC لدينا

$$Cos\, \widehat{B} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{8} \;..............(2)$$

من (1) و(2) نجد: $\frac{BD}{8} = \frac{4}{5}$

$$BD = \frac{4 \times 8}{5}$$

$$BD = \frac{32}{5}$$

استخدام النسب المثلثية في حساب اطوال الاضلاع

1- إذا كانت النسبة المعلومة هي جيب الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية أو لحساب طول الوتر

2- إذا كانت النسبة المعلومة هي تجيب الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المجاورة لتلك الزاوية أو لحساب طول الوتر.

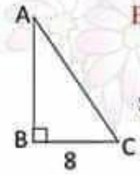
3- إذا كانت النسبة المعلومة هي ظل الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية أو لحساب طول الضلع المجاورة لها

تطبيق على ما سبق:

1- في الشكل المجاور ABC مثلث قائم في B

فيه $Sin\, B\widehat{A}C = \frac{4}{5}$ ، BC=8

والمطلوب أحسب طول الوترAC



الحل: نعلم أن $Sin\, B\widehat{A}C = \frac{......}{......}$

بالتعويض نجد $\frac{......}{......} = \frac{......}{......}$

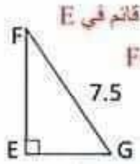
ومنه AC=........

ومنه AC=........

2- في الشكل المجاور EFG مثلث قائم في E

فيه $Cos\, E\widehat{F}G = \frac{2}{3}$ ، FG=7.5

والمطلوب أحسب EF



الحل: نعلم أن $Cos\, E\widehat{F}G = \frac{......}{......}$

بالتعويض نجد $\frac{......}{......} = \frac{......}{......}$

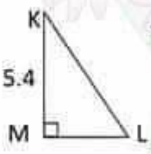
ومنه EF = ...

ومنه EF = ...

3- في الشكل المجاور KLM مثلث قائم في M

فيه $Tan\, M\widehat{K}L = \frac{1}{3}$ ، KM=5.4

والمطلوب أحسب ML

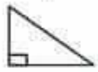
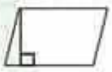
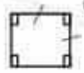
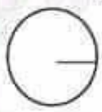


الحل: نعلم أن $Tan\, M\widehat{K}L = \frac{......}{......}$

بالتعويض نجد $\frac{......}{......} = \frac{......}{......}$

ومنه $ML = ...$

ومنه $ML = ...$

الشكل الهندسي	المحيط: رمزه P	المساحة: رمزها S	المساحة بالرموز
المثلث 	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع المتعلق بها}}{2}$	$S=\frac{B\times h}{2}$ (Bالقاعدة، h الارتفاع)
المثلث القائم 	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$	$S=\frac{L_1.L_2}{2}$ (L_1,L_2 الضلعين القائمتين)
المثلث المتساوي الاضلاع 	طول الضلع ×3	(مربع طول ضلعه × $\frac{\sqrt{3}}{4}$) ملاحظة: طول الارتفاع ↓ $h=\frac{a\times\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$
متوازي الأضلاع 	مجموع أطوال أضلاعه أو (مجموع ضلعين متجاورين×2)	القاعدة ×الارتفاع المتعلق بها	$S=B\times h$ (Bالقاعدة، h الارتفاع)
المستطيل 	$S=(L+W)\times 2$ (Lالطول، Wالعرض)	الطول ×العرض	$S=L\times W$
المربع 	$p=4\times a$ (حيث a طول الضلع)	مربع طول الضلع	$S=(a)^2$
المعين 	$p=4\times a$ (حيث a طول الضلع)	نصف جداء القطرين أو مساحة القاعدة× الارتفاع المتعلق بها	$S=\frac{L_1\times L_2}{2}$ (L_1,L_2 الضلعين القائمتين) أو $S=B\times h$
الدائرة 	$P=2\pi R$ (حيث R نصف طول القطر)	جداء مربع طول نصف القطر بالعدد π	$S=\pi R^2$
شبه المنحرف 	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{\text{(مجموع القاعدتين)} \times \text{الارتفاع}}{2}$	$S=\frac{(a+b)\times h}{2}$ (a,b طولا القاعدتين) و h الارتفاع

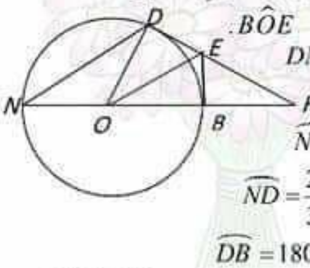
المسألة الثانية: في الشكل المجاور نصف دائرة مركزها O وقطرها AB
النقاط E, D, C تحقق
$\widehat{AE} = \widehat{ED} = \widehat{DC} = \widehat{CB}$
وليكن AK مماس للدائرة في النقطة A المطلوب

1. أوجد قياس الزاويتين $D\hat{A}B, C\hat{O}B$
واستنتج $OC \parallel AD$
2. إذا كان المثلث OHB تصغير للمثلث ADB اكتب النسب الثلاث
واستنتج معامل التصغير
3. أثبت أن $DO \perp AB$
واستنتج أن المثلث DOB تصغير للمثلث KAB
4. أثبت صحة العلاقة $(DB)^2 = BH \times BK$

الحل: 1) لدينا $\widehat{AB} = 180^\circ$ لأنه نصف دائرة ومنه
$$\widehat{AE} = \widehat{ED} = \widehat{DC} = \widehat{CB} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$
$\widehat{DB}$ محيطية تحصر $D\hat{A}B = \frac{1}{2}\widehat{DB} = \frac{1}{2} \times 90 = 45^\circ$
$\widehat{CB}$ مركزية تحصر القوس $C\hat{O}B = \widehat{CB} = 45^\circ$
ومنه نجد $C\hat{O}B = D\hat{A}B$
وهما في وضع التناظر فيكون $OC \parallel AD$
2): بما أن $OC \parallel AD$ فحسب مبرهنة النسب الثلاث
$\frac{BH}{BD} = \frac{BO}{BA} = \frac{OH}{AD}$ فالمثلثين ADB ، OHB متشابهين
المثلث OHB تصغير لـ ADB والمعامل $\frac{BO}{BA} = \frac{1}{2}$

3) a: المثلث ADB قائم الزاوية في D لأن $A\hat{D}B = 90^\circ$
زاوية محيطية تحصر قوس نصف دائرة
وفيه $D\hat{A}B = 45^\circ$ فإن $D\hat{B}A = 45^\circ$ هو متساوي الساقين
وفيه DO متوسط متعلق بالقاعدة فهو ارتفاع
ومنه $AB \perp DO$
b: لدينا KA مماس للدائرة فإن $AB \perp AK$
ولدينا $AB \perp DO$
فإن $OD \parallel AK$ فحسب مبرهنة النسب الثلاث
نجد $\frac{BD}{BK} = \frac{BO}{BA} = \frac{DO}{AK}$ فالمثلثين DOB ، AKB
ويكون المثلث DOB تصغير للمثلث AKB
4): من الطلبين (2) و(3) نجد $\frac{BD}{BK} = \frac{BH}{BD}$
فحسب خاصة الضرب التقاطعي نجد
$(DB)^2 = BH \times BK$

المسألة الثالثة: C دائرة مركزها O
و $[NB]$ قطر فيها و D نقطة من الدائرة بحيث
$\widehat{ND} = \frac{2}{3}\widehat{NB}$ و (BE) ، (DH) مماسان
للدائرة في النقطة B و D على التوالي **والمطلوب**
1) أثبت أن قياس القوس $\widehat{DB} = 60^\circ$.
2) احسب قياسات زوايا المثلث HOD
واستنتج أن $OB = \frac{1}{2}OH$.
3) أثبت أن الرباعي $ODEB$ رباعي دائري، واستنتج قياس الزاوية $B\hat{E}D$.
4) أثبت أن المثلث OEH متساوي الساقين،
واحسب قياس الزاوية $B\hat{O}E$.
5) أثبت أن $DN \parallel OE$



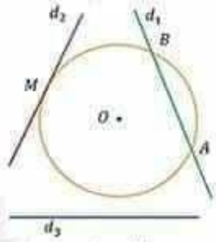
الحل: 1)
لدينا $\widehat{NB} = 180^\circ$
$$\widehat{ND} = \frac{2}{3} \times 180^\circ = \boxed{120^\circ}$$
ومنه: $\widehat{DB} = 180^\circ - 120^\circ = \boxed{60^\circ}$
2): DH مماس للدائرة في النقطة D فإن $DH \perp DO$
لأن المماس عمود على نصف القطر في نقطة التماس فالمثلث
HDO قائم في D وفيه $H\hat{O}D = \widehat{DB} = 60^\circ$ زاوية
مركزية تحصر $\widehat{DB}$ فإن $D\hat{H}O = 30^\circ$ ومنه $OD = \frac{1}{2}OH$
لأنه يقابل زاوية 30° في مثلث قائم
لكن $OD = OB = R$ فإن $OB = \frac{1}{2}OH$
3): EB مماس للدائرة في النقطة B
فإن $EB \perp BO$ فالمثلث EBO قائم في B
إذاً: $E\hat{B}O = 90^\circ$, $H\hat{D}O = 90^\circ$
هما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان فالرباعي $ODEB$ دائري
إذاً $B\hat{E}D$ تكمل $B\hat{O}D$ متقابلتان في الرباعي الدائري
وبما أن $B\hat{O}D = 60^\circ$
فإن: $B\hat{E}D = 120^\circ$ متقابلتان في رباعي دائري
4): لدينا $OB = \frac{1}{2}OH$ فإن B منتصف OH
EB متوسط وارتفاع معا فالمثلث OEH متساوي الساقين
وفيه $D\hat{H}O = 30^\circ$ فإن : $E\hat{O}B = 30^\circ$
5): لدينا $D\hat{N}B = \frac{1}{2}\widehat{DB} = 30^\circ$ زاوية محيطية تحصر $\widehat{DB}$
إذاً: $D\hat{N}B = E\hat{O}B = 30^\circ$
وهما في وضع التناظر بالنسبة فإن $DN \parallel OE$

الأوضاع المختلفة لمستقيم ودائرة

d_1 قاطع للدائرة يشترك معها بنقطتين

d_2 مماس للدائرة يشترك معها بنقطة

d_3 خارج الدائرة لا يشترك معها بأي نقطة

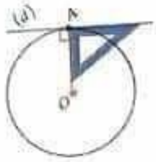


تعريف المماس

المماس (d) للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A من الدائرة $\mathscr{C}$ هو المستقيم المرسوم من A والعمودي على المستقيم (OA).

نتائج هامة

1. **المستقيم العمود على نصف قطر دائرة في نقطة منها يكون مماسا لها**



إذا كانت $N \in C(o,R)$

فإن المستقيم العمودي على ON في النقطة N يكون مماسا لها

تفيد في إثبات وجود مماس

2. **المستقيم المماس عمود على نصف قطر دائرة في نقطة التماس**

إذا كان d مماسا للدائرة $C(O,R)$ في النقطة A

فإن $d \perp (OA)$ في النقطة A

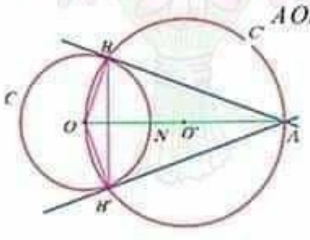
تفيد في إثبات وجود زاوية قائمة(مثلث قائم)

3. **من نقطة خارج دائرة يمكن رسم مماسين لها**

جزءا المماسين المحصورين بالنقطة A ونقطتي التماس B, B' طبوقين

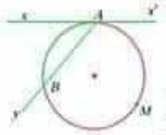
أي أن : $AB = AB'$

نستنتج ذلك من تطابق المثلثين AOB, AOB'



الزاوية المماسية في الدائرة

تعريف : هي زاوية رأسها نقطة من الدائرة وإحدى ضلعيها وتر والأخر مماس



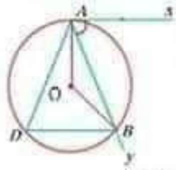
$x\hat{A}B$ زاوية مماسيه تقابل القوس $\widehat{AB}$

$x'\hat{A}B$ زاوية مماسيه تقابل القوس $\widehat{AMB}$

هام جداً: قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره (المقابل لها) أي $B\hat{A}x = \frac{1}{2}\widehat{BA}$

نتائج

1. قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في ذات القوس.
2. قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في ذات القوس



في الشكل المجاور

$x\hat{A}B$ زاوية مماسيه تحصر $\widehat{AB}$

$A\hat{D}B$ زاوية محيطية تحصر $\widehat{AB}$

$A\hat{O}B$ زاوية مركزية تحصر $\widehat{AB}$

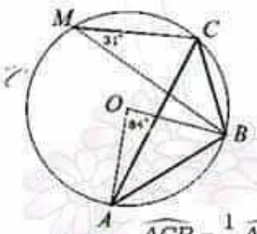
فإن $x\hat{A}B = A\hat{D}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{1}{2}\widehat{AB}$

تمرين:

A و B و C و M تنتمي إلى دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O

$\widehat{BMC} = 31^\circ$ و $\widehat{AOB} = 84^\circ$

احسب قياسات زوايا المثلث ABC



الحل:

1) $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\times 84^\circ = 42^\circ$

محيطية و مركزية تشتركتان بالقوس $\widehat{AB}$

2) $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 31^\circ$

زاويتان محيطيتان مشتركتان بالقوس $\widehat{BC}$

3) إن مجموع قياسات زوايا مثلث 180°

$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$

$\widehat{ABC} + 42^\circ + 31^\circ = 180^\circ$

إذن $\widehat{ABC} + 73^\circ = 180^\circ$

$\widehat{ABC} + 73^\circ = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$

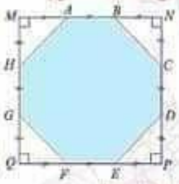
8) $MNPQ$ مربع، و $ABCDEFGH$ مثمن

1. هل هذا المثمن منتظم؟ اشرح.
2. $\mathcal{A}$ هي مساحة المربع $MNPQ$
و $\mathcal{A}'$ مساحة المثمن اشرح لماذا $\mathcal{A}' = \frac{7}{9}\mathcal{A}$ ؟

الحل: 1. المثلثات لأربعة قائمة وطبوقة

فيكون $BC = DE = FG = HA$ بحسب(ضلع،زاوية،ضلع)

لكن $BC \neq CD$ فهو ليس مثمن منتظم



2. نفرض $AB = x$

مساحة المربع $\mathcal{A} = 3x \times 3x = 9x^2$

مساحة أي مثلث $\frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2}$

فإن مساحة المثلثات الأربعة $= 2x^2$

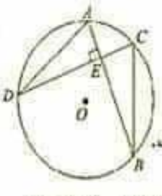
مساحة المثمن= مساحة المربع – مساحة المثلثات الأربعة

$\mathcal{A}' = 9x^2 - 2x^2 = 7x^2$

$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{7x^2}{9x^2}$ ومنه $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{7}{9}$ ومنه $\mathcal{A}' = \frac{7}{9}\mathcal{A}$

9) A و B و C و D أربع نقاط من دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O.
الوتران $[AB]$ و $[CD]$ متعامدان في E $\widehat{BCD} = 69°$.

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{ADC}$.
2. ① ارسم المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث EBC ولتكن F نقطة تلاقيه مع $[BC]$
② ما طبيعة المثلث EFC ؟ تحقق من إجابتك.
③ استنتج قياس الزاوية $\widehat{CEF}$.
3. يقطع المستقيمُ (EF) القطعة المستقيمة $[AD]$ في النقطة H
① ما قياس الزاوية $\widehat{DEH}$ ؟ لماذا؟
② استنتج قياس الزاوية $\widehat{DHE}$ في المثلث DEH.
③ استنتج أيضاً دور المستقيم (EH) في المثلث ADE.

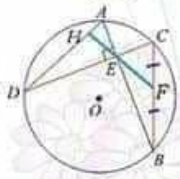


الحل: 1. المثلث EBC قائم في E

فيه $B\hat{C}D = 69°$ فإن $C\hat{B}A = 21°$

$A\hat{D}C = C\hat{B}A = 21°$

محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{AC}$



2.(1): الرسم

(2) EF متوسط متعلق بالوتر BC فإن $EF = \frac{1}{2}BC$

فهو متساوي الساقين في F لأن $EF = FC$

(3) $C\hat{E}F = F\hat{C}E = 69°$

3.(1) $D\hat{E}H = C\hat{E}F = 69°$

(2) في المثلث DEH نجد

$D\hat{H}E = 180 - \left(H\hat{D}E + H\hat{E}D\right)$

ومنه $D\hat{H}E = 90°$

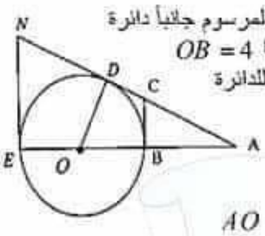
(3) بما أن $D\hat{H}E = 90°$ فإن $EH \perp DA$

فهو ارتفاع

المسألة الاولى: في الشكل المرسوم جانباً دائرة مركزها O ونصف قطرها $OB = 4$

BC، NA، EN مماسات للدائرة في النقاط B، D، E

وقياس الزاوية $\hat{A} = 30°$



1) أثبت أن $D\hat{O}B = 60°$، واستنتج أن B منتصف AO
2) أثبت أن النقاط B، C، D، O تقع على دائرة واحدة
3) أثبت أن $AD = 4\sqrt{3}$.
4) احسب $\cos\hat{A}$ واستنتج $2EA = \sqrt{3}AN$.

الحل: 1) AD مماس للدائرة في النقطة D

فإن $AD \perp DO$ فالمثلث ADO قائم في D

و $\hat{A} = 30°$ فإن $D\hat{O}B = 60°$

فإن $OD = \frac{1}{2}OA$ لأنه يقابل زاوية $30°$

لكن $R = OB = OD$ فإن $OB = \frac{1}{2}OA$

ومنه B منتصف AO

2): CB مماس للدائرة في النقطة B

فإن $CB \perp BO$ فالمثلث CBO قائم في B

$C\hat{B}O = 90°$، $C\hat{D}O = 90°$ وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $ODCB$ فهو دائري

مركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف OC

الوتر المشترك للمثلثين القائمين CBO، ADO

3): حسب فيثاغورث في المثلث ADO

$AO^2 = AD^2 + DO^2$

نعوض $8^2 = AD^2 + 4^2$

ومنه $AD = \boxed{4\sqrt{3}}$

4): EN مماس للدائرة في النقطة E

فإن $EN \perp EO$

فالمثلث NEA قائم في E

$\cos\hat{A} = \frac{EA}{NA}$ (1)

ولدينا (2) $\cos\hat{A} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

من (1) و(2) نجد: $\frac{EA}{NA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

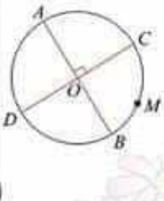
ومنه : $2EA = \sqrt{3}NA$

الجلسات الامتحانية أيام الخميس والجمعة والسبت قبل الامتحان

تمارين على وحدة الدائرة

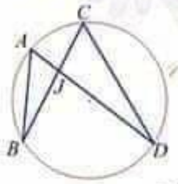
1) $[AB]$ و $[CD]$ قطران متعامدان في دائرة مركزها O
M نقطة من القوس الصغرى $\overset{\frown}{BC}$ احسب قياس كلٍ من:

① $\widehat{AMB}$ ② $\widehat{AMC}$ ③ $\widehat{BMC}$



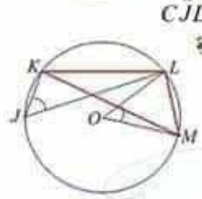
الحل: $A\widehat{M}B = 90^\circ$
محيطية تحصر قوس نصف الدائرة
$$A\widehat{M}C = \frac{1}{2}A\widehat{O}C = 45^\circ$$
محيطية ومركزية تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{AC}$
$$B\widehat{M}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CADB} = \frac{1}{2}\times 270^\circ = 135^\circ$$
محيطية تحص القوس $\overset{\frown}{CADB}$

2) A و B و C و D نقاط من دائرة $\mathscr{C}$. نعلم أنّ $\widehat{ABC} = 22^\circ$ و $\widehat{BAD} = 58^\circ$. الوتران $[AD]$ و $[BC]$ متقاطعان في J
احسب قياس كلٍّ من: ① $\widehat{BCD}$ ② $\widehat{CDA}$ ③ $\widehat{CJD}$



الحل: $B\widehat{C}D = B\widehat{A}D = 58^\circ$
محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{DB}$
$$C\widehat{D}A = C\widehat{B}A = 22^\circ$$
محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{DB}$
$$C\widehat{J}D = 180^\circ - \left(C\widehat{D}A + B\widehat{C}D\right)$$
$$C\widehat{J}D = 180^\circ - \left(58^\circ + 22^\circ\right) = 100^\circ$$

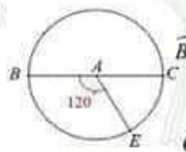
3) J و K و L و M نقاط من دائرة
$\widehat{KJL} = \widehat{LOM} = 52^\circ$
حسب قياسات زوايا المثلث LMK



الحل: $L\widehat{M}K = L\widehat{J}K = 52^\circ$
محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{LK}$
$$L\widehat{K}M = \frac{1}{2}L\widehat{O}M = 26^\circ$$
محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{LM}$
$$K\widehat{L}M = 180^\circ - \left(L\widehat{M}K + L\widehat{K}M\right)$$
$$K\widehat{L}M = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$$

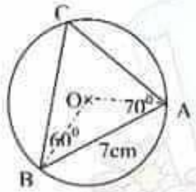
4) $[BC]$ قطر في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A. E نقطة من هذه لدائرة تُحقّق $\widehat{BAE} = 120^\circ$. احسب قياسات الزوايا الآتية:
① $\widehat{CAE}$ ② $\widehat{ECB}$ ③ $\widehat{CBE}$

الحل(1) $C\widehat{A}E = 180 - 120 = 60^\circ$
$$E\widehat{C}B = \frac{1}{2}E\widehat{A}B = 60^\circ$$



محيطية ومركزية تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{BE}$
$$C\widehat{B}E = \frac{1}{2}C\widehat{A}E = 30^\circ$$
محيطية ومركزية تحصران القوس $\overset{\frown}{CE}$

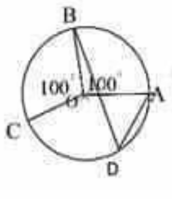
5) $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $7\ \text{cm}$.
ارسم $[AB]$ وارسم نقطة C بحيث تحصل على $\widehat{BAC} = 70^\circ$ و $\widehat{ABC} = 60^\circ$. ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC. ارمز إلى مركزها بالرمز O
احسب قياس الزاوية $\widehat{AOB}$.



الحل:
$$A\widehat{C}B = 180^\circ - \left(C\widehat{B}A + C\widehat{A}B\right)$$
$$A\widehat{C}B = 180^\circ - \left(70^\circ + 60^\circ\right) = 50^\circ$$
$$A\widehat{O}B = 2A\widehat{C}B = 100^\circ$$
مركزية و محيطية تحصران $\overset{\frown}{AB}$

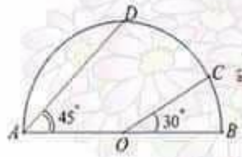
6) 1. وضّع النقاط A و B و C، بهذا الترتيب، على $\mathscr{C}$ بحيث يكون $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 100^\circ$
ثم وضّع نقطة D على القوس $\overset{\frown}{AC}$ التي لا تضم B.
2. احسب قياس الزاوية $\widehat{ADB}$.
3. أثبت أنّ نصف المستقيم $[DB)$ منصف للزاوية $\widehat{ADC}$

الحل: 1. الشكل



2. $A\widehat{D}B = \frac{1}{2}A\widehat{O}B = 50^\circ$
محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{AB}$
3. $C\widehat{D}B = \frac{1}{2}C\widehat{O}B = 50^\circ$
محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{CB}$
إذا: $A\widehat{D}B = C\widehat{D}B = 50^\circ$
فإن DB منصف للزاوية $A\widehat{D}C$

7) C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها O
وقطرها $[AB]$ تحققان $\widehat{BOC} = 30^\circ$ و $\widehat{BAD} = 45^\circ$
1. ما طبيعة المثلث ADB؟ اشرح إجابتك.
2. ما طبيعة المثلث COD؟ اشرح إجابتك.



الحل: 1. المثلث ADB قائم في D
لأن ضلعه AB قطر الدائرة المارة برؤوسه وفيه $D\widehat{A}B = 45^\circ$
فهو متساوي الساقين
2. المثلث AOD متساوي الساقين في O
وفيه $\widehat{OAD} = 45^\circ$
فإن $\widehat{DOA} = 90^\circ$
ومنه فإن $\widehat{DOC} = 180^\circ - \left(\widehat{DOA} + \widehat{COB}\right)$
فيكون $\widehat{DOC} = 60^\circ$
فالمثلث COD متساوي الأضلاع
لأنه متساوي الساقين في O وإحدى زواياه 60°

الجلسات الامتحانية أيام الخميس والجمعة والسبت قبل الامتحان

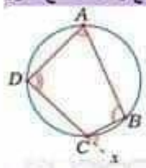
الرباعي الدائري

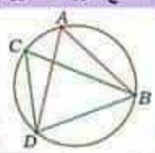
هو شكل رباعي تقع رؤوسه على محيط دائرة واحدة

مجموع قياسات زوايا أي مضلع رباعي 360°.

الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسيهما 180°

الزاوية الخارجية لمضلع تكون محصورة بين ضلع وامتداد ضلع أخرى





خواص

الزاويتان المتقابلتان في رباعي دائري متكاملتان

$ABCD$ رباعي دائري فإن $\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$

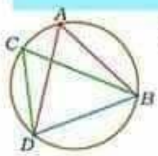
الزاوية الخارجية في رباعي دائري تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها

$ABCD$ رباعي دائري فإن $B\widehat{C}x=\widehat{A}$

إذا كانت النقاط A و B و C و D واقعة على دائرة واحدة وكانت النقطتان A و C في جهة واحدة بالنسبة إلى (BD)، كانت الزاويتان $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ متساويتين.

$ABCD$ رباعي دائري فإن $\widehat{C}=\widehat{A}$

نقبل بصحة العكس:



إذا تساوت الزاويتان $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$، وكانت النقطتان A و C في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم (BD)، كان الرباعي $ABDC$ دائريا.

$ABCD$ رباعي فيه $\widehat{C}=\widehat{A}$

وتقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى BD فهو رباعي دائري

إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي، كان الرباعي دائرياً.

$ABCD$ رباعي فيه $\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$ فهو رباعي دائري

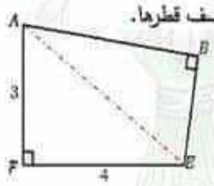
مثال

في الشكل المرسوم جانبا لدينا رُباعي $ABEF$ فيه

$AF=3$ و $FE=4$ و $\widehat{B}=\widehat{F}=90^\circ$

① أثبت أنّ النقاط A, B, E, F تقعُ على دائرةٍ واحدةٍ

② عيّن مركز هذه الدائرة وطول نصف قطرها.



الحل: $ABEF$ رباعي فيه

$\widehat{B}+\widehat{F}=90+90=180^\circ$

فهو رباعي دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه

مركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف AE

الوتر المشترك للمثلثين القائمين AFE ، ABE

حسب فيثاغورث نجد $AE=5$ ومنه $R=\frac{5}{2}$

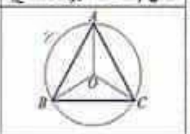
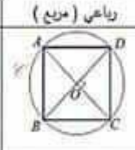
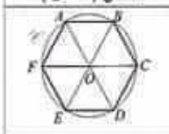
المضلعات المنتظمة

تعريف المضلع المنتظم هو مضلع قياسات زواياه متساوية وأطوال أضلاعه متساوية

خواص 1. كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (بمعنى وجود دائرة مارة برؤوسه) يسمى مركزها مركز المضلع المنتظم

2. إذا كان $[AB]$ ضلعاً في مضلع منتظم مركزه O وعدد أضلاعه n، كان $\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{n}$

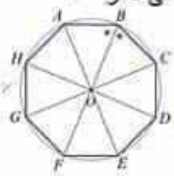
3. طول ضلع المسدس المنتظم يساوي نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

ثلاثي (مثلث متساوي الأضلاع)	رباعي (مربع)	سداسي (مسدس)
		
ABC مثلث متساوي الأضلاع	$ABCD$ مربع	$ABCDEF$ مسدس
$\widehat{ABC}=60^\circ$ $\widehat{AOB}=120^\circ$	$\widehat{ABC}=90^\circ$ $\widehat{AOB}=90^\circ$	$\widehat{ABC}=120^\circ$ $\widehat{AOB}=60^\circ$

كيف نحسب زاوية مضلع منتظم؟

$ABCDEFGH$ مثمن منتظم مرسوم فى دائرة مركزها O. ما قياس الزاوية $\widehat{ABC}$

احسب قياس $\widehat{ABC}$



الحل:

نعلم أن $\widehat{AOB}=\frac{360}{n}$

$n=8$ ، إذن $\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$

في المثلث المتساوي الساقين OAB نجد $\widehat{ABO}=\frac{180^\circ-45^\circ}{2}=67.5^\circ$

بنفس الطريقة نجد في المثلث OBC أنّ $\widehat{CBO}=67.5^\circ$

إذاً: $\widehat{ABC}=67.5^\circ+67.5^\circ=135^\circ$

كيف نحسب طول ضلع مضلع منتظم

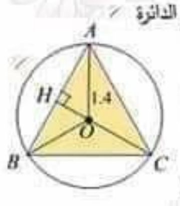
مثال ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة مركزها O ونصف قطرها $OA=OB=OC=1.4\text{ cm}$. احسب الطول AB

الحل: $[OA]$ و $[OB]$ هما نصفا قطرين في الدائرة

نرسم ارتفاع هذا المثلث من O

لدينا (OA) محور في المثلث ABC

فهو منصف للزاوية $\widehat{CAB}$ إذن $\widehat{OAH}=30^\circ$



في المثلث OAH

$\cos\widehat{OAH}=\frac{AH}{AO}$ أي $\cos 30^\circ=\frac{AH}{1.4}$

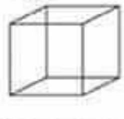
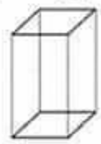
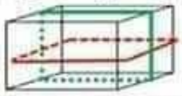
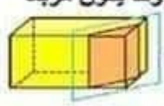
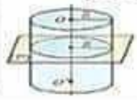
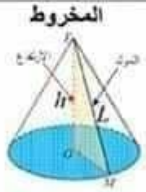
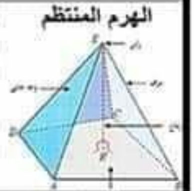
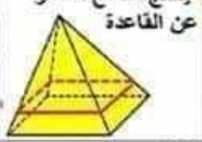
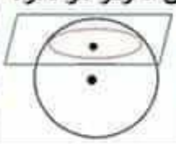
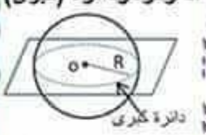
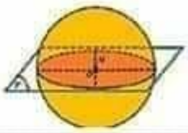
ومنها $AH=1.4\times\cos 30^\circ$

ويكون (OH) محور القطعة $[AB]$

إذن $AB=2AH$. نستنتج أنّ

$AB=2\times 1.4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1.4\sqrt{3}$

الجلسات الامتحانية أيام الخميس والجمعة والسبت قبل الامتحان

اسم المجسم	خواصه	طبيعة المقطع		مساحات وحجوم
المكعب 	له ستة أوجه كلها مربعات طبوقة طول حرفه a مساحة جانبية S_L مساحة كلية S_T الحجم V	مقطع يوازي وجها له يتنتج مربعا طبوق على ذلك الوجه 	مقطع يوازي حرفا فيه يتنتج مستطيلا وقد يكون مربعا 	$S_L = 4a^2$ $S_T = 6a^2$ $V = a^3$
متوازي المستطيلات 	وجوهه مستطيلات كل وجهين متقابلين طبوقين أبعاده x, y, z مساحة جانبية S_L مساحة كلية S_T الحجم V	مقطع يوازي وجها له يتنتج مستطيلا طبوقا على ذلك الوجه 	مقطع يوازي حرفا فيه يتنتج مستطيلا وقد يكون مربعا 	$S_L = P \times h$ $S_T = 2xy + 2xz + 2yz$ $V = x \times y \times z$ محيط القاعدة P الارتفاع h
الاسطوانة الدورانية 	تنتج بدوران مستطيل حول احد اضلاعه دورة كاملة مساحة جانبية S_L الحجم V	مقطع يوازي قاعدتها يتنتج دائرة طبوقة على القاعدة 	مقطع يوازي محورها او عمود على القاعدة هو مستطيلا أحد بعديه يساوي ارتفاعها وقد يكون مربعا 	$S_L = P \times h$ $S_L = 2\pi R \times h$ $V = S \times h$ $V = \pi R^2 \times h$ محيط القاعدة P الارتفاع h
المخروط 	ينتج بدوران مثلث قائم حول أحد الضلعين القائمين دورة كاملة قاعدته دائرة مساحة جانبية S_L الحجم V	مقطع يوازي قاعدته يتنتج دائرة مصغّرة عن القاعدة 	مقطع يوازي محوره أو عمود على القاعدة ويمر من الرأس هو مثلثا متساوي الساقين (ليس موضوع دراستنا)	$S_L = \pi R \times L$ $V = \frac{1}{3} S_B \times h$ $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \times h$ العامد(المولد) L الارتفاع h
الهرم المنتظم 	قاعدته مضلع منتظم وارتفاعه هو العمود النازل من الرأس على مركز القاعدة ويسمى بحسب عدد اضلاع قاعدته	مقطع يوازي قاعدته يتنتج مضلع مصغّر عن القاعدة 	مقطع يوازي محوره أو عمود على القاعدة ويمر من الرأس هو مثلثا متساوي الساقين (ليس موضوع دراستنا)	$V = \frac{1}{3} S \times h$ مساحة القاعدة S الارتفاع h
الكرة 	تنتج بدوران دائرة حول احد اقطارها نصف دورة تعريفها: هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM = R$	مقطع بمستو لا يمر من المركز هو دائرة 	مقطع بمستو يمر من المركز هودائرة (كبرى) 	$S = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ مساحة سطحها S حجمها V نصف قطرها R
المجسم الكروي 	تنتج بدوران قرص دائري حول احد اقطاره نصف دورة تعريفها: هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM \le R$ وله ذات قوانين الكرة	مقطع بمستو لا يمر من المركز هو قرص دائري 	مقطع بمستو يمر من المركز هو قرص دائري أعظمي 	

1 التناسب

التناسب هو مساواة بين نسبتين $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

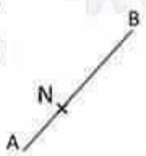
نسمي a، d طرفي التناسب و b، c وسطي التناسب

خواص التناسب

1. إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد أي $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
2. إذا بادلنا بين طرفي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$
3. إذا بادلنا بين وسطي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
4. إذا ثبتنا المقامين وأضفنا كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
5. إذا ثبتنا المقامين وطرحنا كل مقام من البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
6. إذا ثبتنا البسطين وأضفنا كلّ بسط إلى المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$
7. إذا ثبتنا البسطين وطرحنا من كل مقام البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$
8. في كل تناسب جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين
   إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن $a\times d=b\times c$
9. **أي نسبة من التناسب تساوي نسبة مجموع البسوط الى مجموع المقامات**
   في التناسب $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ فإن: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2+4}{3+6}=\frac{6}{9}$
10. **إذا قمنا بتربيع التناسب نحصل على تناسب جديد**
    إذا ربعنا التناسب $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ فإن: $\frac{4}{9}=\frac{16}{36}$

مثال في الشكل المجاور $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$

احسب كلاً من AN و NB



الحل: لدينا $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$

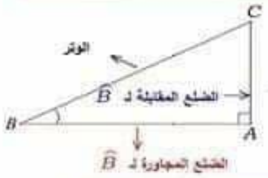
ومنه $\frac{AN+NB}{NB}=\frac{2+3}{3}$

ومنه $\frac{100}{NB}=\frac{5}{3}$

ومنه $NB=60$

ومنه $AN=100-60=40$

2 النسب المثلثية لزاوية حادة



مصطلحات

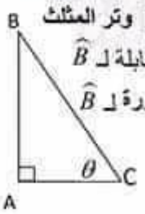
- النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $\hat{B}$، نرمز إليها بالرمز $\sin\hat{B}$.
- النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى تجيب الزاوية $\hat{B}$، نرمز إليها بالرمز $\cos\hat{B}$.
- النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظل الزاوية $\hat{B}$. نرمز إليها بالرمز $\tan\hat{B}$.

في المثلث القائم الزاوية في A فيه BC وتر المثلث

الضلع AC مجاورة للزاوية $\hat{C}$ ومقابلة لـ $\hat{B}$

الضلع AB مقابلة للزاوية $\hat{C}$ ومجاورة لـ $\hat{B}$

الرمز (θ) يقرأ (ثيتا)



جيب $\hat{\theta}$ $\quad \sin\hat{\theta}=\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

تجيب $\hat{\theta}$ $\quad \cos\hat{\theta}=\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

ظل $\hat{\theta}$ $\quad \tan\hat{\theta}=\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

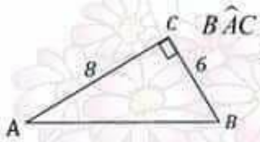
ملاحظة: -1 a زاوية حادة فإن: $0<\sin\alpha<1$ ، $0<\cos\alpha<1$

3- النسب المثلثية ليس لها واحدة قياس

4- النسب المثلثية لزاوية حادة هي أعداد موجبة

تطبيق : في الشكل المجاور

أحسب النسب المثلثية للزاوية $B\hat{A}C$



حسب مبرهنة فيثاغورث نجد

$BA^2=AC^2+BC^2$

ومنه $BA^2=8^2+6^2$

$BA^2=64+36$

$BA^2=100$

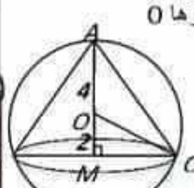
ومنه $BA=\sqrt{100}=10$

$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\cos\hat{A}=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

تمرين1: في الشكل المجاور كرة مركزها O ونصف قطرها $OA = 4$ بداخلها مخروط دوراني رأسه A وقاعدته دائرة مركزها M تبعد عن مركز الكرة مسافة $OM = 2$



والمطلوب :

1) احسب كلاً من : MC و AC .

2) احسب $\sin O\hat{C}M$ واستنتج قياس الزاوية $O\hat{C}M$.

3) احسب حجم المخروط.

الحل: 1) لاحظ أن $OC = R = 4$

حسب فيثاغورث في OMC نجد $MC = 2\sqrt{3}$

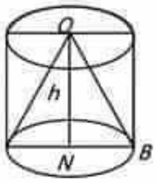
حسب فيثاغورث في AMC نجد $AC = 4\sqrt{3}$

2) $\sin\left(O\hat{C}M\right) = \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ ومنه $O\hat{C}M = 30^\circ$

3) $V = \dfrac{\pi}{3}R^2h$ ومنه $V = \dfrac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 6$

ومنه $V = \dfrac{\pi}{\cancel{3}}\,\overset{4}{\cancel{12}} \times 6$ ومنه $V = 24\pi cm^3$

تمرين2: في الشكل: اسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$ ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$ ومخروط دوراني رأسه O يشترك معها في القاعدة وحجمه $V = 40\pi$ **المطلوب**



1) أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$

2) واحسب حجمها V'.

2) احسب حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط

الحل: 1) حجم المخروط $V = \dfrac{\pi}{3}r^2h$

نعوض: $40\pi = \dfrac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 h$

$40\cancel{\pi} = \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \times \overset{4}{\cancel{12}} \times h$

ومنه $40 = 4h$

ومنه $h = \boxed{10}$

حجم الاسطوانة: $V' = \pi r^2 h$

نعوض: $V' = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 10$

ومنه $V' = \boxed{120\pi}$

2): حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط

$V_1 = V' - V$

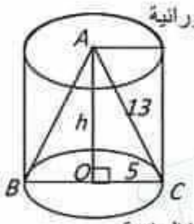
ومنه $V_1 = 120\pi - 40\pi$

ومنه $V_1 = \boxed{80\pi}$

يمنع طباعتها لأغراض تجارية هي في سبيل الله

صدقة جارية عن روح والدتي ووالدي

تمرين3: في الشكل جانباً أسطوانة دورانية وضع بداخلها مخروط طول مولده $AC = 13\ cm$ ونصف قطر قاعدتيهما المشتركة $OC = R = 5\ cm$.



1) احسب الارتفاع AO .

2) احسب مساحة القاعدة.

3) احسب حجم الأسطوانة ومساحتها الجانبية

الحل: 1) حسب فيثاغورث في المثلث AOC

$AC^2 = AO^2 + OC^2$ ومنه $169 = AO^2 + 25$

ومنه $AO^2 = 144$ وبالجذر نجد : $AO = \boxed{12}$

2): $S = \pi R^2 = 25\pi\ cm^2$

3): $V = \pi R^2 h$ نعوض: $V = \pi(5)^2 \times 12 =$

ومنه $V = \boxed{300\pi}cm^3$

المساحة الجانبية للأسطوانة: $S = 2\pi Rh$

نعوض $S = 2\pi(5) \times 12$

ومنه $S = \boxed{120\pi}cm^2$

تمرين4: في الشكل المجاور مخروط دوراني رأسه B، وطول نصف قطر قاعدته $OC = 3$، وليكن قياس زاوية رأسه $A\hat{B}C = 60^\circ$. **المطلوب:**

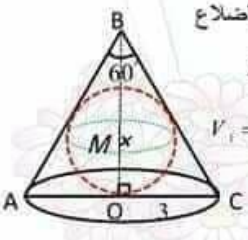
1) ما طبيعة المثلث ABC، واحسب ارتفاع المخروط

2) وضعت كرة داخل المخروط مركزها مركز المثلث ABC وتمس الضلع AC. **المطلوب:**

a) احسب V_1 حجم المخروط، و V_2 حجم الكرة.

b) أثبت أن V حجم الجزء المحصور بين المخروط والكرة يساوي $V = 5\sqrt{3}\pi\ cm^3$

الحل: 1) المثلث ABC متساوي الساقين فيه $\hat{A} = 60^\circ$ فهو متساوي الاضلاع



فيكون $BO = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

2) حجم المخروط $V_1 = \dfrac{\pi}{3}R^2h$

$V_1 = \dfrac{\pi}{\cancel{3}}(3)^2 \times \left(\cancel{3}\sqrt{3}\right)$

$V_1 = 9\sqrt{3}\pi\ cm^3$

حسب خاصة مركز الثقل نجد $OM = \dfrac{1}{3}OB = \sqrt{3}$

حجم الكرة $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ نعوض $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3$

ومنه $V_2 = 4\sqrt{3}\pi\ cm^3$

حجم الفراغ= حجم المخروط – حجم الكرة

حجم الفراغ $V = 9\sqrt{3}\pi - 4\sqrt{3}\pi = \boxed{5\sqrt{3}\pi}cm^3$

نهاية مكثفة الهندسة للعام 2020