بحوث العمليات في الإدارة

Operations Research for Management

د. رحمه الحاج محمد الحاج

الشرائح المعتمدة من الدكتور

مفردات المقرر:

مقدمة في بحوث العمليات.

مفهوم بحوث العمليات:

التطور التاريخي لبحوث العمليات:

البرمجة الخطية مقدمة:

- البرمجة الخطية الطريقة البيانية (الرسم البياني).

- البرمجة الخطية طريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة).

البرمجة الخطية الحالات الخاصة.

نماذج النقل والتوزيع.

نظرية اتخاذ القرارات.

شجرة القرارات.

تطبيقات عامة.

مفهوم بحوث العمليات

بحوث العمليات هي إحدى المظاهر المهمة والمتقدمة من مظاهر المدرسة العلمية في الإدارة التي تنادي بتطبيق الأسلوب العلمي في اتخاذ القرارات الإدارية مما يجعلها أكثر دقة وموضوعية، فهي مدخل كمي أو رياضي لاتخاذ القرارات.

تعريف بحوث العمليات:

هناك عدة تعريفات لبحوث العمليات منها:

عرفت جمعية بحوث العمليات البريطانية بحوث العمليات بأنها: :استخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة من القوي العاملة ، المعدات والمواد الأولية والأموال في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة".

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقد عرفت بحوث العمليات على أنها "تهتم باتخاذ القرارات العلمية لتقييم ووضع أنظمة المعدات والقوي العاملة وفقاً لشروط معينة تتطلب تخصيص الموارد المحدودة بشكل أمثل".

تابع - تعريف بحوث العمليات:

ويمكن تعريف بحوث العمليات «بأنها مصطلح يطلق على عملية صنع القرار المبنية على المنهج العلمي مع الاعتماد بصفة رئيسية على أساليب التحليل الكمي في حل المشكلة الإدارية بهدف الوصول إلي البديل الأمثل في حدود الامكانيات المتاحة.

وبمعنى آخر هي وبلغة أخرى هو علم التمثيل الرياضي لمشاكل عملية اتخاذ القرار وإيجاد طرق حل لهذه النماذج الرياضية.

وقد ركزت هذه التعريفات على النقاط التالية:

١- أن بحوث العمليات تستخدم الطريقة العلمية كأساس ومنهج بحث في الدراسة.

٢- إن جوهر بحوث العمليات هو الاعتماد على بناء النماذج الرياضية.

٣- إن الهدف من بحوث العمليات هو مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية الصعبة والمعقدة.

ثانيا : التطور التاريخي لبحوث العمليات:

تعود البدايات الأولي لبحوث العمليات الي الحرب العالمية الثانية، عندما استدعت الإدارة العسكرية في بريطانيا فريقاً من العلماء في تخصصات مختلفة لدراسة المسائل الاستراتيجية المتعلقة بالدفاع الأرضي الجوي، بهدف الاستخدام الأمثل والفعال للموارد الحربية المحدودة. وأهتم الفريق أيضاً بدراسة الأسلوب الأمثل الرادارات الحربية وكفاءة الأنواع المتاحة من قاذفات القنابل.

بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، ونتيجة للنجاح الكبير الذي حققته الإدارات العسكرية البريطانية والأمريكية، جذب انتباه الإدارات الاقتصادية والإدارية والهندسية المختلفة الي هذا الحقل الجديد من المعرفة.

وبدأت هذه الإدارات في الدول المتقدمة بإنشاء مراكز بحوث متخصصة تضم اختصاصيين من جميع العلوم من أجل إيجاد الحلول المثلي للمشكلات التي كانت تواجههم.

إلا أن علم بحوث العمليات ظل ولفترة طويلة يعاني من مشاكل كثيرة، منها على سبيل المثال الآتي:

١- كبر حجم النماذج الرياضية المكونة من المواقف والمسائل الحقيقية.

٢- عدد المتغيرات اللازم إيجاد قيمها أصبحت تزداد مع ازدياد حجم المسائل والمواقف المدروسة.

٣- تضخم حجم البيانات الأولية اللازمة لحل النموذج الرياضي حسب الموقف المدروس.

٤- كثير من الأساليب وطرائق الحل تحتاج الي وقت وجهد كبيرين في التطبيق.

عملية صنع القرار وبحوث العمليات:

تتضمن عملية صنع القرار الخطوات الآتية:

١- تعريف المشكلة.

٢- تحديد البدائل.

٣- اختيار مقياس للمقارنة بين البدائل.

٤- تقييم البدائل.

٥- اختيار أحد البدائل

وبفحص الخطوة الرابعة (تقييم البدائل) نجد أن عملية التقييم قد تأخذ نموذجين أساسيين : هما

١- نموذج كمي:Quantitative

٢- نموذج غير كمي أو نوعي: Qualitative

- النماذج الكمية : وتشمل النماذج الرياضية والاحصائية والتطبيقات المختلفة (ويكون الاعتماد فيها على الأرقام أقرب إلي الحقيقة منها إلي الحكم الشخصي ، وبالتالي مقدار التدخل والتحيز من قبل القائمين على عملية التحليل يكون محدود بل معدوم.

- النماذج غير الكمية : هي كيفية مثل رأي الخبراء ورأي المدراء – يعني تعتمد بدرجة كبيرة على حكم الأشخاص الذين لهم باع في ذلك الموضوع (المتخصصون في مجال الإدارة) ، بمعنى أن مقدار التحيز يكون واضح .

ما يميز النماذج الكمية عن النماذج غير الكمية :

أن النماذج الكمية درجة مصداقيتها عالية وبالتالي مقدار ما يعتمد عليها يكون أكثر.

أسباب الحاجة إلي أساليب بحوث العمليات..

هناك حاجة لأساليب بحوث العمليات حينما نلاحظ أي من العلامات الآتية على المنظمة، مما يجعل من المفيد الاستعانة بأخصائي بحوث العمليات، ولعل أهمها:

١- وجود مشكلة معقدة جدًا، حيث تتداخل عوامل عدة وتعجز النظم المتوفرة عن إيجاد حل مناسب.

٢- حينما يتطلب القرار تبرير كميًا.

٣- الحاجة إلى تقييم أو تقليل المخاطرة كما هو الحال عند البدء في مشروع جديد حيث لا توجد خبرة مسبقة عن كيفية اتخاذ قرار منطقي.

٤- تكرار المشكلة، وعدم قدرة المنشأة على الاستفادة من البيانات لحل المشكلة.

٥- لتحسين مستوى الأداء وتقليل المخاطرة وتحقيق الميزة التنافسية للمنظمة.

مراحل دراسة بحوث العمليات..

١- تحديد المشكلة:

تعتبر خطوة تحديد المشكلة من أهم الخطوات، ويتوقف عليها نجاح أو فشل المنهج الكمي في اتخاذ القرار. حيث يتطلب الأمر الكثير من الخيال، والإبداع، والعمل الجماعي من أجل صياغة المشكلة ووضعها في إطار يمكن تناوله كمي ًا. وغالبًا ما تكون المشكلة :

١- وضع جديد لم يتخذ بشأنه قرار من قبل.

٢- مجال لم يحقق نجاحًا كما هو متوقع له.

٣- في حالة إعادة تقييم للسياسة الحالية لمعرفة إمكانية تحسينها.

٢- تكوين النموذج الرياضي:

صياغة المشكلة في نموذج رياضي هي أهم ما يميز علم بحوث العمليات عن غيره من العلوم القائمة على استخدام الأساليب الكمية ، ويتم تكوين النموذج الرياضي عن طريق ترجمة التعبيرات اللغوية إلى علاقة رياضية.

٣- جمع البيانات :

وهي مرحلة تجميع البيانات عن المتغيرات غير المتحكم فيها.

٤- حل النموذج :

ويعني ذلك محاولة معرفة قيم المتغيرات المتحكم فيها والتي تعطي أفضل حل ممكن بدون تجاوز القيود المفروضة على المشكلة.

٥- كتابة التقرير:

يجب أن يكتب بلغة بسيطة، موضحًا فيه الحل وطريقة تنفيذه.

البرمجة الخطية

مفهوم البرمجة الخطية.

كيفية صياغة نموذج البرمجة الخطية.

مكونات نموذج البرمجة الخطية.

طرق حل البرمجة الخطية.

أولا : مفهوم البرمجة الخطية:

هي أداة رياضية تساهم في مساعدة المديرين على اتخاذ قرارات إدارية تتعلق باستخدام الموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى عائد ممكن أو أقل تكلفة ممكنة.

وتعرف البرمجة الخطية بأنها "الأسلوب الرياضي الذي يبحث عن أفضل الطرق لاستخدام الموارد المتاحة عن طريق تحويل المشكلة المدروسة الي علاقات رياضية خطية".

ومن أهم المواقف التي تستخدم فيها البرمجة الخطية ما يلي:

١- تخطيط الإنتاج والاستغلال الأمثل للطاقة الإنتاجية.

٢- تحديد المزيج التسويقي للمواد الخام للحصول على مركب محدد.

٣- النقل واختيار أفضل أسلوب لنقل المنتجات وتوزيعها.

ثانياً: كيفية صياغة نموذج البرمجة الخطية:

سنتناول الكيفية التي تترجم بواسطتها المشكلة المدروسة الي علاقات رياضية، أي أسلوب صياغتها بشكل رياضي وذلك بتحديد دالة الهدف الخطية التي تخضع للعديد من القيود الخطية، وتعتبر هذه المرحلة من أعقد المراحل في تحليل المشاكل الإدارية أو الاقتصادية أو الهندسية، لأنه بمجرد الانتهاء من صياغة المشكلة بشكل كمي تصبح بقية المراحل سهله.

غالباً ما تتبع الخطوات التالية مع معظم المشاكل التي تصاغ بشكل خطي:

أولاً: التعبير عن المشكلة بصورة وصفية.

ثانياً: تحويل الشكل الوصفي للمشكلة الي شكل رياضي. سنتناولها بالتفصيل في مكونات نموذج البرمجة الخطية.

ثالثاً: مكونات نموذج البرمجة الخطية

يتكون نموذج البرمجة الخطية من ثلاثة عناصر وهي:

١- دالة الهدف: تبين هذه الدالة الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه ويكون الهدف عادة هو الوصول الي أقصي ربح ممكن أو أدني تكلفة ممكنة، وتكون دالة الهدف من المتغيرات التي تشير الي المنتجات المختلفة والممكن إنتاجها.

الهدف في جميع مشاكل البرمجة الخطية يكون إما تحقيق

"أقصى ربح " أو "أقل تكلفة".

٢- القيود: وتشير القيود عادة الي كميات المواد المتاحة أو العلاقات الفنية التي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة.

٣- شرط عدم السالبية : ويعني أن جميع المتغيرات في المشكلة قيد الدراسة لا يمكن أن تكون سالبه.

مثال توضيحي لمكونات البرمجة الخطية:

إذا كان لديك نوعين من المنتجات يحتاج المنتج الأول إلى ساعة عمل وساعتين تجميع، ويحتاج المنتج الثاني إلى ساعة عمل وساعة تجميع علمًا بأن المتاح من ساعات العمل هو ٦ ساعات والمتاح من ساعات التجميع هو ١٠ ساعات وأن ربح الوحدة الأولى ٣ ريال، وربح الوحدة الثانية ٤ ريال.

والمطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح؟

المنتجات / الأقسام	المنتج الأول س ١	المنتج الثاني س ٢	المتاح من الساعات (المتوفر)
عمل	١	١	٦
تجميع	٢	١	١٠
ربح الوحدة	٣	٤	

حل المثال :

أولا: نقوم بعمل جدول كالتالي:

ملاحظة:

- إذا كان القرار تعظيم ربح وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أقل من أو يساوي (≤).

- إذا كان القرار تقليل تكلفة وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أكبر من أو يساوي (≥).

يتم تكوين نموذج البرمجة الخطية كالآتي :

١- دالة الهدف = ٣س ١ + ٤س ٢

٢- القيود :

- قيد العمل = ١س١ + ١س ٢ ≤ ٦

- قيد التجميع = ٢س١ + ١س ٢ ≤ ١٠

٣- قيد عدم السالبية = س١ ، س٢ ≥ صفر

طرق البرمجة الخطية :

١- طرق عامة مثل :

- الطريقة البيانية سواء كانت تعظيم أرباح أو تخفيض تكاليف. - وطريقة السيمبلكس وتسمى بالطريقة المبسطة.

٢- طرق خاصة مثل :

- طريقة النقل.

- طريقة التخصيص.

البرمجة الخطية : الطريقة البيانية :

تستخدم هذه الطريقة في الحل في البرامج الخطية التي لا يزيد عدد المتغيرات فيها عن متغيرين فقط، وتعد هذه الطريقة من أسهل طرق حل البرامج الخطية، والنقد الموجه لها إنها غير كفؤه في معالجة مشاكل البرمجة الخطية في الحياة العملية.

وهناك عدة خطوات يلزم إتباعها للحل عند إستخدام هذه الطريقة، وهي:

١- تحويل المسألة من الإسلوب اللفظي الي الإسلوب الرياضي (تكوين المعادلات).

٢- تحديد النقاط التي سوف تقع على الرسم البياني عن طريق إيجاد قيم المتغيرات في كل معادلة من معادلات القيود.

٣- التمثيل البياني للنقاط على الرسم.

٤- تحديد منطقة الحل الامثل على الرسم، وهي حالتين هما:

أ/ في حالة تعظيم الربح (عندما يكون الهدف زيادة الأرباح): تكون منطقة الحل محصورة الي الداخل.

ب/ أما في حالة تقليل الخسارة (عندما يكون الهدف تقليل التكاليف): تكون منطقة الحل محصورة الي الخارج.

٥- تحديد نقطة الحل الأمثل وذلك عن طريق تعويض القيم التي تمثل نقاط الحل في دالة الهدف، ونقطة الحل الأمثل لها أيضاً حالتين هما:

- إذا كان الهدف زيادة الأرباح فإن نقطة الحل الأمثل هي عبارة عن أكبر قيمة موجبة.

- أما إذا كان الهدف تقليل التكاليف فإن نقطة الحل الأمثل هي عبارة عن أقل قيمة موجبة.

٦- بعد تحديد نقطة الحل الأمثل يمكن تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل منتوج.

ويعيب هذه الطريقة أنه لا يمكن استخدامها لحل مشاكل تتضمن أكثر من

مجهولين أو متغيرين .

مثال : لمشكلة تعظيم الأرباح على الرسم البياني :

تقوم شركة سيارات بإنتاج نوعين من السيارات هما: سيارات ذات حجم صغير نرمز لها بـ(س١) وسيارات ذات حجم كبير نرمز لها بـ(س٢)، ويتطلب إنتاج النوعين مرورهما على قسمين هما: قسم التصميم وقسم التصنيع، والطاقة الإنتاجية المتاحة للقسمين بالساعات هي (٦٠) ساعة لقسم التصميم و(٤٨) ساعة لقسم التصنيع، وكل سيارة صغيرة تحتاج إلي (٤) ساعات بقسم التصميم وساعتين بقسم التصنيع بينما تحتاج كل سيارة من الحجم الكبير الي ساعتين بقسم التصميم و(٤) ساعات بقسم التصنيع.

المطلوب تحديد المزيج الأمثل إذا علمت أن ربح السيارة الصغيرة هو (٨) دولار وربح السيارة الكبيرة (٦) دولار.

الحل :

الخطوة الأولى هي :

تحويل المسألة من الأسلوب اللفظي الي الأسلوب الرياضي (تكوين المعادلات).

لتسهيل عملية الحل يجب وضع المعطيات في شكل جدول كالآتي :

المنتجات / الأقسام	سيارات صغيرة س١	سيارات كبيرة س٢	الطاقة الانتاجية المتاحة أو الساعات المتاحة
قسم التصميم	٤	٢	٦٠
قسم التصنيع	٢	٤	٤٨
ربح الوحدة الواحدة	٨ دولار	٦ دولار	

تحويل المسألة من الأسلوب اللفظي الي الأسلوب الرياضي (تكوين المعادلات).

ثم نقوم بتكوين القيود (المعادلات) ودالة الهدف .

دالة الهدف : عظم ر = ٨س ١ + ٦س ٢

القيود :

- قيد قسم التصميم = ٤س١ + ٢س٢ ≤ ٦٠

- قيد قسم التصنيع = ٢س١ + ٤س٢ ≤ ٤٨

قيد عدم السالبية = س١ ، س٢ ≥ صفر

الخطوة الثانية :

تحويل علامة المتباينات إلي يساوي ثم إيجاد قيم المتغيرات في كل معادلة من معادلات القيود.

القيد الأول = ٤س١ + ٢س٢ = ٦٠

نفرض أن س٢ = صفر فإن :

٤س١ = ٦٠ نقسم الطرفين على ٤ يصير

٤/٦٠=١س ٤/٤ إذن س١ = ١٥

نفرض أن س١ = صفر فإن

٢س٢ = ٦٠ ٢/٦٠=٢س ٢/٢ إذن س٢ = ٣٠

إذن قيمة س١ وس٢ على الاحداثيات في الرسم البياني =(١٥ ، ٣٠)

القيد الثاني : = ٢س١ + ٤س٢ ≤ ٤٨

نفرض أن س٢ = صفر فإن :

٢س١ = ٤٨ نقسم الطرفين على ٢

٢/٤٨=١س ٢/٢ إذن س١ = ٢٤

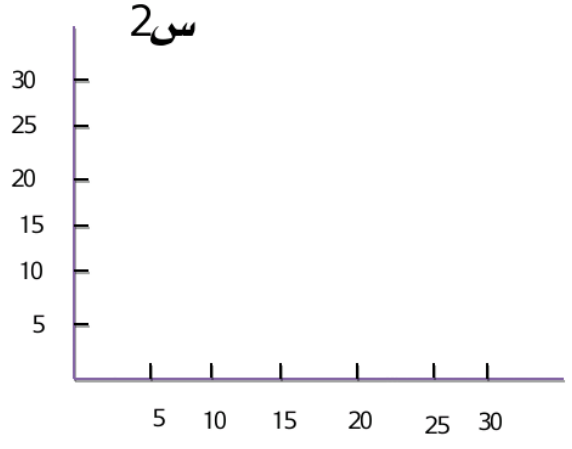
نفرض أن س١ = صفر فإن ٤س٢ = ٤٨نقسم الطرفين على ٤

٤/٤٨=٢س ٤/٤ إذن س٢ = ١٢

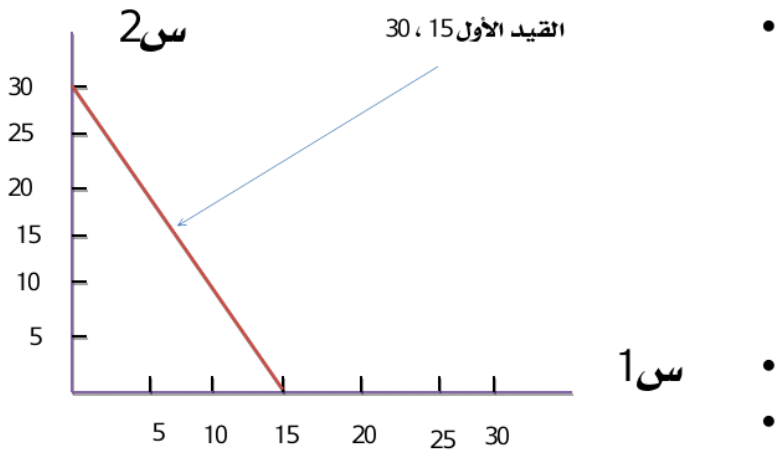
إذن قيمة س١ وس٢ على الاحداثيات في الرسم البياني =(٢٤ ، ١٢)

الخطوة الثالثة :

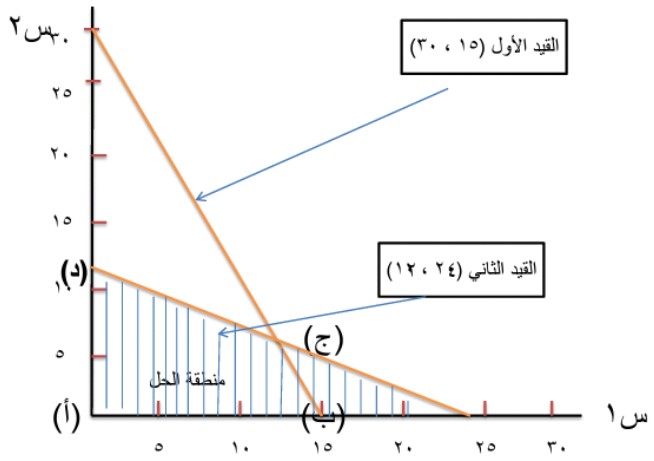
التمثيل البياني للنقاط على الرسم



تابع - الخطوة الثالثة : التمثيل البياني للنقاط على الرسم



تابع - الخطوة الثالثة : التمثيل البياني للنقاط على الرسم



الخطوة الرابعة : تحديد منطقة الحل الأمثل

في حالة تعظيم الربح (عندما يكون الهدف زيادة الأرباح): تكون منطقة الحل محصورة الي الداخل.

وتعرف أيضا بأنها «المنطقة الأقرب إلي نقطة الأصل أو الخط نفسه الممثل لهذا القيد وما أدناه».

كيف نحسب النقاط على الإحداثيات

ومن خلال الرسم فإن:

إحداثيات النقطة (أ) هي : س١ = صفر ، س٢ = صفر

إحداثيات النقطة (ب) هي : س١ = ١٥، س٢ = صفر

إحداثيات النقطة (د) هي : س١ = صفر، س٢ = ١٢.

إحداثيات النقطة (ج) مجهولة : كيف نستخرج إحداثياتها

لوكان الرسم دقيق تنزل عامودي من النقطة (ج) على س١ وتختار الرقم الذي يوازيها من س١ ومحور موازي الي أن يتقاطع مع (ج) عموديا مع س٢ .

كيف نستخرج إحداثيات النقطة (ج)جبريا ؟

النقطة (ج) هي تقاطع قيدين هما الأول والثاني

معادلة القيد الأول : ٤س١ + ٢س٢ = ٦٠

معادلة القيد الثاني = ٢س١ + ٤س٢ = ٤٨

لو لاحظنا إلي معامل المتغيرات غير متساوية لا بد من توحيد أحد المتغيرين (س١ أو س٢) فلذلك نقوم بعملية :

بضرب المعادلة الأولي في (٢) وترك المعادة الثانية على حالتها كالآتي:

٨س١ + ٤س٢ = ١٢٠

٢س١ + ٤س٢ = ٤٨ وبطرح الأولى من الثانية يصبح

٦س١ = ٧٢

إذن قيمة س١ = ١٢

لازم نعوض قيمة س١ في المعادلة (٢) لايجاد قيمة س٢

بالتعويض يصير : = ٢ × ١٢+ ٤س٢ = ٤٨

= ٢٤ + ٤س٢ = ٤٨ نحول ٢٤ شمال المعادلة

٤س٢ = ٤٨ ــ ٢٤

٤س٢ = ٢٤ بتقسيم الطرفين على ٤ يصير :

س٢ = ٦

أذن النقطة (ج) على الاحداثيات هي (١٢ ، ٦)

الخطوة الخامسة : تعويض القيم التي تمثل نقاط الحل في دالة الهدف:

النقاط	الإحداثيات س١ ، س٢	دالة الهدف عظم ر ٨س ١ + ٦س ٢	ألنتائج
أ	(٠ ، ٠)	(٠ × ٨) +(٠ ×٦)	صفر
ب	(٠ ،١٥)	=(١٥×٨)+(٠×٦)	١٢٠
ج	(٦ ، ١٢)	=(١٢×٨)+(٦×٦)	١٣٢
د	(١٢ ، ٠)	=(٠×٨)+(١٢×٦)	٧٢

نقطة الحل الأمثل لها أيضاً حالتين هما:

- إذا كان الهدف زيادة الأرباح فإن نقطة الحل الأمثل هي عبارة عن أكبر قيمة موجبة.
- أما إذا كان الهدف تقليل التكاليف فإن نقطة الحل الأمثل هي عبارة عن أقل قيمة موجبة.

إذا النقطة الأمثل هي النقطة (ج) لأنها تحقق لنا هامش ربح مقدارهـ ١٣٢ دولار.

القرار : نوصي الشركة بإنتاج ١٢سيارة صغيرة و ٦ سيارات كبيرة لأن ذلك يحقق لنا ربح مقداره ١٣٢ دولار.

مثال ٢ عن طريقة تعظيم الأرباح

يقوم احد المصانع بإنتاج الطاولات والكراسي ويحتاج في ذلك إلى المرور على ثلاثة أقسام إنتاجيه هي النجارة

والدهانات ،التجميع والتجهيز، ويتوافر في الأقسام الثلاثة ساعات تشغيل هي ٤٠ ، ٤٤، ٥٤ ، ساعة على الترتيب.

ويتطلب إنتاج الطاولة الواحدة ساعتين بقسم النجارة ، وساعة واحده بقسم الدهان ، وثلاث ساعات بقسم التجميع والتجهيز.

بينما يتطلب إنتاج الكرسي الواحد ساعة واحده بقسم النجارة وساعتين بقسم الدهان ،وساعتين بقسم التجميع والتجهيز.

المطلوب : تحديد المزيج الأمثل إذا علمت أن ربح الطاولة الواحدة ٢٠ ريال ،وربح الكرسي الواحد ١٠ ريال.

نحول المعطى في جدول :

المنتجات الأقسام الإنتاجية	س١ طاولات	س٢ كراسي	الزمن بالساعة المتاح(القيود)
النجارة	٢	١	٤٠
الدهان	١	٢	٤٤
التجميع و التجهيز	٣	٢	٥٤
الربح للوحدة الواحدة	٢٠ ريال	١٠ ريالات	

تحويل المسألة من الأسلوب اللفظي الي الأسلوب الرياضي (تكوين المعادلات).

١/ دالة الهدف (تعظيم الأرباح) = ٢٠س١ + ١٠س٢

٢/ القيود :

أ- قيد النجارة = ٢س١+١س٢ ≤ ٤٠

ب- قيد الدهان = ١س١+٢س٢ ≤ ٤٤

ج- قيد التجميع والتجهيز = ٣س١+٢س٢ ≤ ٥٤

٣/ قيد اللا سالبيه = س١ ، س٢ ≥ صفر

حل القيود :

نحول المتباينات إلي معادلات كلآتي:

القيد الأول = ٢س١+١س٢ =٤٠

عندما س٢=صفر

٢س١ = ٤٠

س١ = ٤٠ ÷ ٢

س١ = ٢٠

عندما س١ = صفر

س٢ = ٤٠

قيمة س١، س٢ في القيد الأول على الإحداثيات هي(٢٠ ،٤٠).

القيد الثاني = ١س١+٢س٢ = ٤٤

عندما س٢ =صفر

س١ = ٤٤

عندما س١ =صفر

٢س٢ = ٤٤

س٢ = ٤٤ ÷ ٢

س٢ = ٢٢

إذا قيمة س١ ،س٢ في القيد الثاني هي (٤٤ ، ٢٢)

القيد الثالث = ٣س١+٢س٢ = ٥٤

عندما س٢ = صفر

٣س١ = ٥٤

س١ = ٥٤ ÷ ٣

س١ = ١٨

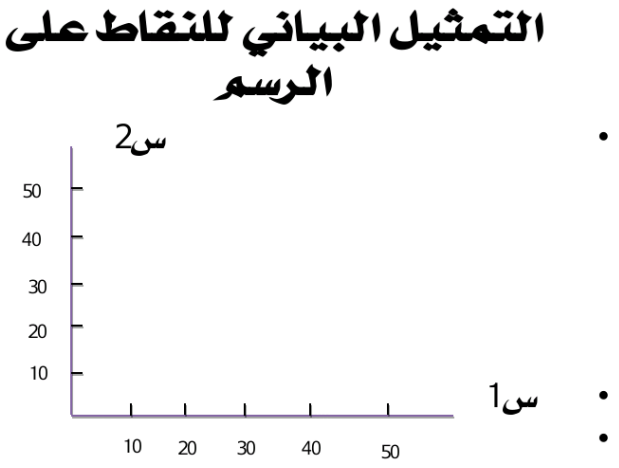
عندما س١ = صفر

٢س٢ = ٥٤

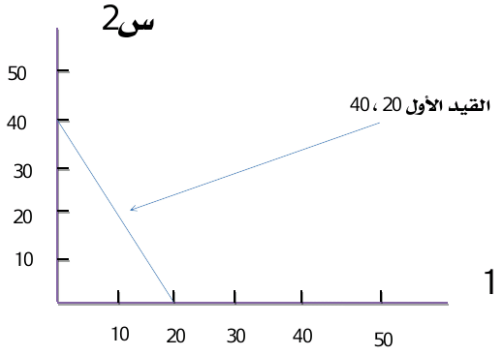
س٢ = ٥٤ ÷ ٢

س٢ = ٢٧

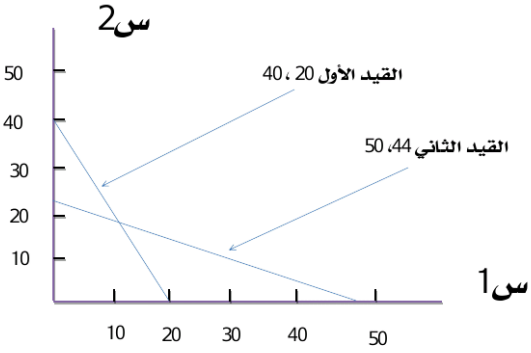
إذاً قيمة س١ ، س٢ في القيد الثالث على الإحداثيات هي (١٨، ٢٧)



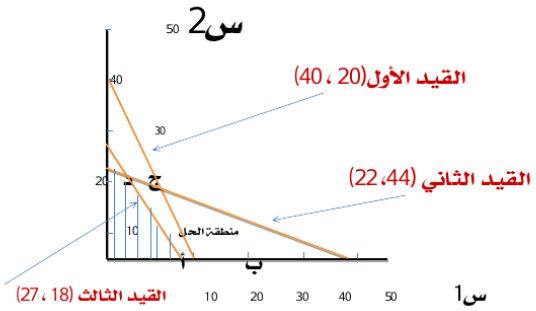
التمثيل البياني للنقاط على الرسم



التمثيل البياني للنقاط على الرسم



الرسم البياني :



كيف نحسب النقاط على الإحداثيات

ومن خلال الرسم فإن:

إحداثيات النقطة (أ) هي : س١ = صفر ، س٢ = صفر

إحداثيات النقطة (ب) هي : س١ = ١٨، س٢ = صفر

إحداثيات النقطة (د) هي : س١ = صفر،س٢ = ٢٢ .

إحداثيات النقطة (ج) مجهولة : كيف نستخرج إحداثياتها

لوكان الرسم دقيق تنزل عامودي من النقطة (ج) على س١ وتختار الرقم الذي يوازيها من س١ ومحور موازي الي أن يتقاطع مع (ج) عموديا مع س٢ .

كيف نستخرج إحداثيات النقطة (ج)جبريا ؟

النقطة (ج) هي تقاطع قيدين هما الثاني والثالث

القيد الثاني: ١س١ + ٢س٢ = ٤٤

القيد الثالث: ٣س١+ ٢س٢ = ٥٤ نطرح القيد الثاني من الثالث أو نضرب الثاني في سالب واحد يصير الناتج

٢س١ = ١٠ إذاً س١=١٠÷٢ (س١ = ٥)

لابد أن نعوض قيمة س١ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س٢

* نختار المعادلة الثانية هي : س١+ ٢س٢ = ٤٤

بالتعويض: أصبح ٥+ ٢س٢ = ٤٤

= ٢س٢ = ٤٤ ــ ٥ إذاً ٢س٢= ٣٩ وبقسمة الطرفين على ٢ يصبح س٢ = ١٩,٥

ونكون قد استخرجنا إحداثيات (ج) وتساوي (٥ ، ١٩,٥) .

كيفية حساب الحل الأمثل بالتعويض في دالة الهدف
٢٠س١ + ١٠س٢

النقاط	الإحداثيات	دالة الهدف عظم ر ٢٠س١+ ١٠س٢	النتائج
أ	(٠ ، ٠)	(٢٠×٠) +(١٠×٠)	صفر
ب	(٠ ، ١٨)	=(٢٠×١٨)+(١٠×٠)	٣٦٠
ج	(١٩.٥ ، ٥)	=(٢٠×٥)+(١٠×١٩.٥)	٢٩٥
د	(٢٢ ، ٠)	=(٢٠×٠)+(١٠×٢٢)	٢٢٠

إذا كان الهدف زيادة الأرباح فإن نقطة الحل الأمثل هي عبارة عن أكبر قيمة موجبة.
إذا النقطة الأمثل هي النقطة (ب) لأنها تحقق لنا هامش ربح مقداره ٣٦٠ ريال.

القرار : نوصي الشركة بإنتاج ١٨ طاولة ولا شئ من الكراسي لأن ذلك يحقق لنا ربح مقداره ٣٦٠ريال.

مثال١ لمشكلة تخفيض التكاليف على الرسم البياني:

دالة الهدف تخفيض ت = ١٨س١ + ١٠س٢

القيود :

٤س١ + ٦س٢ ≤ ٤٨

١٢س١ + ١٠س٢ ≤ ١٢٠

قيد عدم السالبية = س١ ، س٢ ≤ صفر

المطلوب : تحديد المزيج الأمثل من المثال أعلاه.

خطوات الحل :

نحول المتباينات إلي معادلات ثم نوجد قيمة س١ ، س٢ في كل قيد.

القيد الأول = ٤س١ + ٦س٢ = ٤٨

عندما س٢ = صفر إذن ٤س١ = ٤٨

س١ = ١٢

عندما س١ = صفر ، إذن ٦س٢ = ٤٨

س٢ = ٨

إذن قيمة س١ ، س٢ على الاحداثيات في الرسم البياني الرسم البياني هي(١٢ ، ٨)

القيد الثاني : = ١٢س١ + ١٠س٢ = ١٢٠

عندما س٢ = صفر

إذن ١٢س١ = ١٢٠

إذن س١ = ١٠

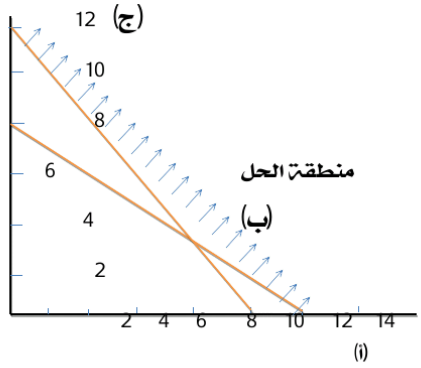
عندما س١ = صفر

إذن ١٠س٢ = ١٢٠

إذن س٢ = ١٢

إذن قيمة س١ ، س٢ على الاحداثيات في الرسم البياني =(١٠، ١٢)

الرسم ابياني



كيفية حساب النقاط على الاحداثيات:

ومن خلال الرسم فإن:

إحداثيات النقطة (أ) هي : س١ = ١٢ ، س٢ = صفر

إحداثيات النقطة (ب) هي : مجهولة

إحداثيات النقطة (ج) هي : س١ = صفر،س٢ = ١٢

إحداثيات النقطة (ب) مجهولة : كيف نستخرج إحداثياتها

لوكان الرسم دقيق ننزل عامودي من النقطة (ب) على س١ وتختار الرقم الذي يوازيها من س١، ونوصل الخط إلي س٢ ونحدد القيمة في س٢ لكن الرسم غير دقيق .

كيف نستخرج إحداثيات النقطة (ب) جبريا ؟

النقطة (ب) هي تقاطع قيدين هما الأول والثاني

القيد الأول = ٤س١ + ٦س٢ = ٤٨

القيد الثاني = ١٢س١ + ١٠س٢ = ١٢٠

نضرب القيد الأول في ٣ والثاني في ١ يصبح كالتالي:

١٢س١ + ١٨س٢ = ١٤٤

١٢س١ + ١٠س٢ = ١٢٠ بطرح الأول من الثاني يصبح :

٨س٢ = ٢٤

إذن س٢ = ٣

نعوض قيمة س٢ في معادلة (١)وهي ٤س١ + ٦س٢ = ٤٨

٤س١ + ١٨ = ٤٨

٤س١ = ٤٨ ــ ١٨

٤س١ = ٣٠

س١ = ٧،٥

إذن قيمة س١ ، س٢ في النقطة المجهولة هي (٧،٥ ، ٣)

كيفية حساب الحل الأمثل بالتعويض في دالة الهدف
١٨س١ + ١٠س٢

النقاط	ألإحداثيات	دالة الهدف عظم ر ١٨س١+ ١٠س٢	ألنتائج
أ	(١٢ ، صفر)	(١٨×١٢) + (صفر×١٠)	٢١٦
ب	(٣ ، ٧,٥)	(١٨×٧,٥) + (١٠ ×٣)	١٦٥
ج	(صفر ، ١٢)	(صفر×١٨) + (١٠×١٢)	١٢٠

طالما أن المسألة تخفيض تكاليف فسنختار النقطة التي تحقق لنا أقل تكلفة .

فالنقطة ج هي حقق أقل تكلفة مقدارها ١٢٠ دولار

فالقرار يكون .

نوصي الشركة بانتاج ١٢ وحدة من س٢ ولا شيء من س١

مثال٢ : لمشكلة تخفيض التكاليف على الرسم البياني:

شركة تنتج نوعين من المواد حددت الشركة إنتاجها من النوعين يجب أن لا يقل عن ٣٥٠ لتر، كما أن طلب العميل الرئيسي لـ ١٢٥ لترًا من المادة الأولى يجب أن يتم إشباعه ، ويحتاج إنتاج اللتر الواحد من المادة الأولى إلى ساعتين ، كما يحتاج أنتاج اللتر الواحد من المادة الثانية إلى ساعة واحدة . وأن ساعات الإنتاج المتاحة للشهر القادم هي ٦٠٠ ساعة فقط. أن هدف هذه الشركة هو تحقيق المتطلبات السابقة بأقل تكلفة إنتاج، علمًا بأن تكلفة إنتاج اللتر الواحد من المادة الأولى دينارين ، بينما تكلفة إنتاج اللتر الواحد من المادة الثانية ثلاثة دنانير.

دالة الهدف = ٢س١ + ٣س٢

القيود :

س١ ≤ ١٢٥

س١ + س٢ ≤ ٣٥٠

٢س١ +س٢ ≥ ٦٠٠

- قيد اللاسالبية = س١ + س٢ ≤ صفر

خطوات الحل:

نحول المتباينات إلي معادلات ثم نوجد قيمة س١ ، س٢ في كل قيد.

القيد الأول ؛

س١ = ١٢٥

إذن قيمة س١ = ١٢٥

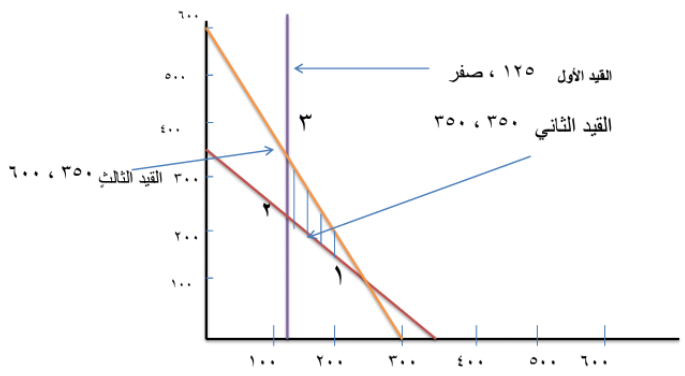
القيد الثاني : = ١س١ + ١س٢ =٣٥٠

إذن قيمة س١ = ٣٥٠ ، قيمة س٢ = ٣٥٠

القيد الثالث : = ٢س١ +١س٢ = ٦٠٠

إذن قيمة س١ = ٣٠٠ ، قيمة س٢ = ٦٠٠

الرسم البياني لمسألة التخفيض



النقطة (١) هي عبارة عن تقاطع خط القيد ٢س١+س٢=٦٠٠ مع خط القيد س١+س٢=٣٥٠ إذاً:

٢س١+س٢=٦٠٠

س١+ س٢= ٣٥٠

بالطرح نحصل على س١= ٢٥٠

عوض قيمة س١ في المعادلة الثانية : ٢٥٠+س٢= ٣٥٠ فتصبح قيمة س٢=١٠٠

إذا إحداثيات النقطة (١) هي (س١= ٢٥٠ ، س٢=١٠٠)

النقطة (٢) هي عبارة عن تقاطع خط القيد س١+س٢= ٣٥٠ مع خط القيد س١= ١٢٥ إذاً:

س١= ١٢٥ نعوض عن قيمة س١ في المعادلة س١+س٢= ٣٥٠ . فتصبح قيمة س٢= ٢٢٥

إذاً إحداثيات النقطة (٢) هي (س١= ١٢٥ ، س٢ = ٢٢٥)

النقطة (٣) هي عبارة عن تقاطع خط القيد ٢س١+س٢=٦٠٠ مع خط القيد س١=١٢٥ إذا :

س١=١٢٥

نعوض عن قيمة س١ في المعادلة ٢س١+س٢=٦٠٠ :

٢٥٠ + س٢ = ٦٠٠ إذاً س٢ = ٦٠٠ ــ ٢٥٠ = ٣٥٠ فتصبح قيمة س٢=٣٥٠

إذا إحداثيات النقطة (٣) هي (س١ = ١٢٥ ، س٢=٢٢٥)

وحسب القاعدة في التخفيض نأخذ النقطة الأبعد عن نقطة الأصل وفي حالة التعظيم نأخذ النقطة الأقرب إلي نقطة الأصل.

نعوض في دالة الهدف

النقطة	الإحداثيات	دالة الهدف ٢س١+٣س٢	قيمة دالة الهدف
١	(١٠٠.٢٥٠)	٢(٢٥٠)+٣(١٠٠)	٨٠٠
٢	(٢٢٥,١٢٥)	٢(١٢٥)+٣(٢٢٥)	٩٢٥
٣	(٣٥٠.١٢٥)	٢(١٢٥)+٣(٣٥٠)	١٣٠٠

إذا كان الهدف تقليل التكاليف فإن نقطة الحل الأمثل هي عبارة عن أقل قيمة موجبة.

وبما أن المسألة تخفيض نختار النقطة ١ لأنها تحقق أقل قيمة = ٨٠٠

حالات خاصة في البرمجة الخطية الرسم البياني

هناك عدة حلات خاصة في الطريقة البيانية هي:

١-وجود أكثر من حل واحد: في بعض الحلات يكون هناك أكثر من حل أمثل، بمعني وجود حلول متعددة تعطي قيماً متساوية لدالة الهدف. ويستفاد من هذه الحالة في أنها تعطي المدير درجة عالية من المرونه.

مثال : في حالة وجود أكثر من حل:

لديك نموذج البرمجة الخطية الآتي :

دالة الهدف تعظيم ر : ٢س١ + ٤س٢

القيود :

٢س١ + ٤س٢ ≥ ١٢

١س١ + ١س٢ ≥ ٥

قيد عدم السالبية :

س١ ، س٢ ≥ صفر

خطوات الحل:

نحول المتباينات إلي معادلات ثم نوجد قيمة س١ ، س٢ في كل قيد.

٢س١ + ٤س٢ = ١٢

١س١ + ١س٢ = ٥

ايجاد نقاط القيد الأول ٢س١ + ٤س٢ = ١٢

عندما س٢ = صفر

٢س١ = ١٢

س١ = ٦

عندما س١ = صفر ٤س١ = ١٢

س٢= ٣

إذن قيمة س١ ، س٢ في القيد الأول هي (٦ ، ٣)

ايجاد نقاط القيد الثاني س١ + ١س٢ = ٥

عندما س٢ = صفر

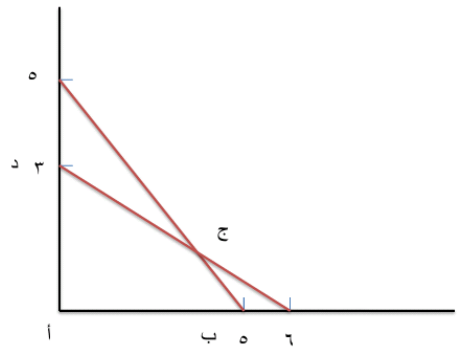
س١ =٥

عندما س١ = صفر

س٢ =٥

إذن نقاط القيد الثاني هي (٥ ، ٥)

الرسم البياني :



ايجاد قيمة النقاط على الرسم

النقطة (أ) هي (٠ ، ٠)

النقطة (ب) هي (٥ ، ٠)

النقطة (ج) مجهولة

النقطة (د) هي (٠ ، ٣)

النقطة (ج) مجهولة كيف نوجدها

إذا كان الرسم دقيق ننزل على س١ ونوجد قيمتها وننزل على س٢ ونوجد قيمتها لكن الرسم غير دقيق

كيفية ايجاد النقطة (ج) :

النقطة (ج) تقع في تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني لا بد من حل هذه القيود جبريا

القيد الأول = ٢س١ + ٤س٢ = ١٢

القيد الثاني = ١س١ + ١س٢ = ٥

نلاحظ أن المتغيرات غير متساوية لا بد من مساواة أحد المتغيرين في المعادلات لكي نوجد قيمة كل واحد منهما

وذلك نقوم بضرب المعادلة الأولى في الرقم (١) وضرب المعادلة الثانية في الرقم (٢) تصير كالآتي:

٢س١ + ٤س٢ = ١٢

٢س١ + ٢س٢ = ١٠ بطرح المعادلة الثانية من الثالثة يصير:

٢س٢ = ٢

إذن قيمة س٢ = ١

بتعويض قيمة س٢ في المعادلة (٢) تصبح

٢س١ + ٤×١ = ١٢

٢س١+٤ = ١٢

٢س١ = ١٢ – ٤

٢س١= ٨

س١ = ٤

إذن قيمة س١ و س٢ للنقطة جيم هي (٤ ، ١)

بالتعويض ي دالة الهدف (٢س١ + ٤س٢)

النقطة	الإحداثيات س١ ، س٢	دالة الهدف ٢س١+٤س٢	قيمة دالة الهدف
أ	(٠ ، ٠)	(٠ × ٢)+(٠ × ٤)	صفر
ب	(٠ ، ٥)	(٥ × ٢)+(٠ × ٤)	١٠
ج	(٤ ، ١)	(٤ ×٢)+(١ × ٤)	١٢
د	(٠ ، ٣)	(٠ × ٢)+(٣ × ٤)	١٢

يتضح من الناتج أعلاه ، بوجود أكثر من حل أمثل للمشكلة يتمثل بالنقطتين (ج ، د) وقيمتهما ١٢ هذا يعطي متخذ القرار الحرية في أن يختار أيهما .

٢/ حالة وجود قيد فائض

في هذه الحالة فإن أحد القيود الذي هو جزء من المشكلة لا يؤثر على أي حل من الحلول الممكنة ويتضح ذلك من خلال الشكل أدناه:

دالة الهدف: ت ر: ٦س١ + ٤س٢

القيد الأول : ٣س١ + ٢س٢ ≥ ١٢

القيد الثاني : ١س١ + ٢س٢ ≥ ٨

القيد الثالث : ١س٢ ≥ ٨

قيد اللاسالبية : س١ ، س٢ ≤ صفر

ايجاد نقاط القيد الأول : ٣س١ + ٢س٢ = ١٢

عندما س٢ = صفر

٣س١ =١٢

س١ = ٤

عندما س١ = صفر

٢س٢ = ١٢

، س٢ = ٦

إذن نقاط القيد الأول هي (٤ ، ٦)

ايجاد نقاط القيد الثاني : ١س١ + ٢س٢ = ٨

عندما س٢ = صفر

١س١ = ٨

س١ = ٨

عندما س١ = صفر

٢س٢ = ٨

س٢ = ٤

إذن قيمة س١ ، س٢ في القيد الأول هي (٨ ، ٤)

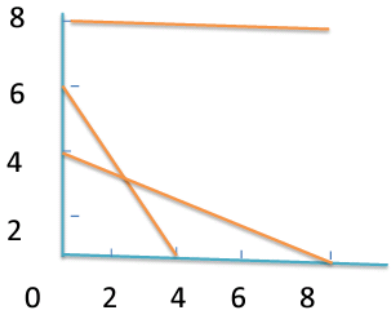
أما القيد الثالث : ١س٢ = ٨

إذن س٢ = ٨

إذن قيمة س١ ، س٢ في القيد الثالث هي (٠ ، ٨)

وبعد إيجاد النقاط من المعادلات أعلاه والتمثل على الرسم البياني نحصل على الشكل أدناه:

- **نلاحظ من الشكل أن القيد الثالث يقع بعيداً عن منطقة الحل لذلك فهو لا يؤثر فيها وبالتالي يجب إبعاده.**



٣/ حالة عدم وجود حل على الإطلاق:

في هذه الحالة فإن منطقة الحل الممكن لا توجد أصلاً وذلك كما في الشكل أدناه:

دالة الهدف : عظم ر : ١س١ + ٤س٢

القيد الأول : ١س١ + ٢س٢ ≥ ٦

القيد الثاني : ٢س١ + ٤س٢ ≥ ٨

قيد عدم السالبية : س١ ، س٢ ≤ صفر

ايجاد نقاط القيود

القيد الأول : ١س١ + ٢س٢ = ٦

عندما س٢ = صفر

١س١ = ٦

س١ = ٦

عندما س١ = صفر

٢س٢ = ٦

س٢ = ٣

إذن نقاط القيد الأول هي (٦ ، ٣)

القيد الثاني : ٢س١ + ٤س٢ = ٨

عندما س٢ = صفر

٢س١ = ٨

س١ = ٤

عندما س١ = صفر

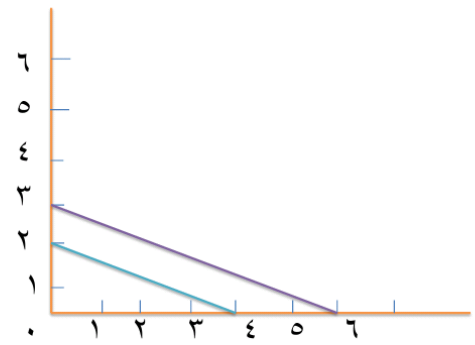
٤س٢ = ٨

س٢ = ٢

إذن نقاط القيد الثاني هي (٤ ، ٢)

نوضح ذلك على الرسم البياني :

وبعد إيجاد النقاط من المعادلات أعلاه والتمثل على الرسم البياني نحصل على الشكل أدناه:



من خلال الرسم البياني يتضح من الشكل عدم وجود منطقة حل وفي هذه الحالة يجب إعادة النظر في النموذج للتأكد من الصياغة الصحيحة له.

طريقة السمبلكس..

طريقة السمبلكس: هي وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في إيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية، بغض النظر عن عدد المتغيرات.

إن حل مشكلة البرمجة الخطية باستخدام هذه الطريقة يقتضي إتباع عدة خطوات حتي نصل من خلالها إلي الحل الأمثل، وسنتناول كيفية حل مسائل الربح وتقليل التكاليف بواسطة طريقة السمبلكس.

خطوات طريقة السمبلكس في حالة تعظيم الأرباح: ولتوضيح ذلك نقوم بحل المثال التالي:

دالة الهدف: عظم ر= ٢س١ + ٣س٢

القيود :

القيد الأول = ١س١ + ٢س٢ ≥ ٢٠

القيد الثاني = ١س١ + ١س٢ ≥ ١٢

قيد عدم السالبية = س١ ، س٢ ≤ صفر

قاعدة أساسية في طريقة السمبلكس(تعظيم الأرباح)

إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي فإننا نضيف إلى القيد متغير وهمي يطلق عليه متغير حر ويكون معامله في القيد المعني واحد ، ثم نحول علامة المتباينة إلي يساوي .... ونضيفه إلي دالة الهدف ومعامله يكون صفر ..

أما إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي فإننا نطرح من القيد متغير وهمي يطلق عليه متغير راكد ويكون معامله في القيد المعني واحد ، ثم نحول علامة المتباينة إلي يساوي .... ونطرحه من دالة الهدف ويكون معامله صفر ..

الخطوات:

تحويل المتباينات الي يساوي: وإضافة متغيرات وهمية موجبه الي يسار كل متباينة من متباينات القيود وذلك من أجل توازنها وتحويل إشارتها الي إشارة مساواة، على حسب عدد المعادلات وأي متغير تم إضافته في معادلات القيود يضاف الي دالة الهدف ويكون معامله صفر مع جعل معادلة دالة الهدف صفريه، وذلك كالآتي:

الحل المثالي لطريقة السمبلكس : تحويل المشكلة من الشكل العادي إلى الشكل المثالي ..

دالة الهدف: عظم ر= ٢س١ + ٣س٢ + ٠ح١ + ٠ح٢

القيود :

القيد الأول = ١س١ + ٢س٢ + ١ح١ = ٢٠

القيد الثاني = ١س١ + ١س٢ + ١ح٢ = ١٢

قيد عدم السالبية = س١ ، س٢ و ح١ ، ح٢ ≥ صفر

تكوين جدول الحل المبدئي: تصميم جدول كما في أدناه وذلك بالاعتماد على معاملات المتغيرات جميعها، وفي جميع المعادلات ومن ضمنها معادلة داله الهدف ويسمي هذا الجدول بجدول الحل المبدئي، وذلك كما يلي:

المتغيرات الأساسية		س١	س٢	ح١	ح٢	الكمية
	ر ح ← ↓	٢	٣	٠	٠	
ح١	٠	١	٢	١	٠	٢٠
ح٢	٠	١	١	٠	١	١٢
ز ح		٠	٠	٠	٠	الربح ٠
ر ح – ز ح		٢	٣	٠	٠	

الخطوة الثانية : البحث عن أفضل حل ممكن :

١- تحديد المتغير الداخل : وهو المتغير الذي له أكبر معامل في صف المتغيرات غير الأساسية هو (س٢) . ويسمى العمود بعمود الارتكاز.

٢- تحديد المتغير الخارج وهو العنصر أحد المتغيرات الموجودة في صف المتغيرات الأساسية وهو الذي يناظر لأقل حاصل قسمة في عمود الحل (ح١).ويسمى الصف بصف الارتكاز.

٣- تحديد الرقم المحوري وهو ملتقى عمود الارتكاز بصف الارتكاز وهو الرقم (٢) .

٤- تحديد الأرقام الجديدة لصف الارتكاز : وذلك من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على الرقم المحوري وهو الرقم (٢).

كيفية حساب صف س٢ الداخل = القيم في الصف الخارج ÷ الرقم المحوري =

١÷٢= ٠،٥

٢÷٢ = ١

١÷٢ = ٠,٥

صفر÷ ٢ = صفر

٢٠÷ ٢ = ١٠

كيفية حساب صف ح٢ في الجدول الجديد :

= عناصر الصف القديم – (نقطة تقاطع الصف القديم مع عمود الارتكاز × عناصر الصف الجديد (س٢) =

عناصر الصف القديم هي(١ ، ١ ، صفر ، ١ ، ١٢)

١- (١×٠،٥)= ٠،٥

١- (١×١)= صفر

صفر- (١×٠,٥)= - ٠,٥

١- (١× صفر)= ١

١٠- (١×٥،)= ٢

كيفية حساب قيم (زح):

نضرب المعاملات الموجودة في عمود (رح) وهي ٣، صفر

× الأرقام المحصورة في كل عمود تحت المتغيرات (س١، س٢ ح١، ح٢) كالتالي :

(٣×٠،٥)+(صفر×٠،٥) = ١،٥

(٣×١)+(صفر× صفر) =٣

(٣×٠,٥)+(صفر× ٠,٥) = ١،٥

(٣×صفر)+(صفر×١) = صفر

(٣×١٠) + (صفر×٢٤) = ٣٠٠

كيفية حساب صف (رح – زح) :

يساوي القيم في صف (رح) – القيم في صف (زح) كالآتي:

٢ ــ ١،٥ = ٠،٥

٣ ــ ٣ = صفر

صفر ــ ١،٥ = - ١،٥

صفر – صفر = صفر

جدول السمبلكس الثاني :

المتغيرات الأساسية		س١	س٢	ح١	ح٢	الكمية
	رح ← ↓	٢	٣	٠	٠	
س٢	٣	٠,٥	١	٠,٥	٠	١٠
ح٢	٠	٠,٥	٠	٠,٥	١	٢
زح		١,٥	٣	١,٥	٠	الربح ٣٠٠
رح–زح		٠,٥	٠	١,٥-	٠	

ملحوظة: إن الحل الأمثل لمشكلة التعظيم يتحقق عندما تكون جميع المعاملات في دالة الهدف في جدول الحل إما مساوية للصفر أو قيماً سالبة ، أما إذا كان أحد المعاملات في دالة الهدف موجبا فهذا يعني عدم التوصل الي الحل الأمثل، وعندئذٍ يتوجب ثانية تكوين جدول ثالث وتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج وإجراء العمليات الحسابية السابقة.

١- تحديد المتغير الداخل : وهو المتغير الذي له أكبر معامل في صف المتغيرات غير الأساسية هو (س١) . ويسمى العمود بعمود الارتكاز.

٢- تحديد المتغير الخارج: وهو العنصر أحد المتغيرات الموجودة صف المتغيرات الأساسية وهو الذي يناظر لأقل حاصل قسمة في عمود الحل (ح٢).ويسمى الصف بصف الارتكاز.

٣- تحديد الرقم المحوري :وهو ملتقى عمود الارتكاز بصف الارتكاز وهو الرقم (٠،٥) .

٤- تحديد الأرقام الجديدة لصف الارتكاز : وذلك من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على الرقم المحوري وهو الرقم (٠,٥)

كيفية حساب صف س١ الداخل = القيم في الصف الخارج ÷ الرقم المحوري =

٠،٥÷٠،٥= ١

صفر÷٠،٥ = صفر

٠،٥÷٠،٥ = ١

١÷ ٠،٥ = ٢

٢÷ ٠،٥ = ٤

كيفية حساب صف س٢ في الجدول الجديد :

= عناصر الصف القديم – (نقطة تقاطع الصف القديم مع عمود الارتكاز × عناصر الصف الجديد (س٢) =

عناصر الصف القديم هي(٠،٥ ، ١ ، ٠،٥ ، صفر ، ١٠)

١- (١×٠،٥)= ٠،٥

١- (١×١)= صفر

صفر- (١×٠,٥)= - ٠,٥

١- (١× صفر)= ١

١٠- (١×٥,)= ٢

كيفية حساب قيم (زح):

نضرب المعاملات الموجودة في عمود (رح) وهي ٣، ٢

× الأرقام المحصورة في كل عمود تحت المتغيرات (س١، س٢ ح١، ح٢) كالتالي :

(٣×صفر)+(١×٢) = ٢

(١×٣)+(٢×صفر) = ٣

(٣×-٠,٥)+(٢ ×٢) = ٢،٥

(٣× - ١)+(٢×٢) = ١

(٨×٣) + (٤×٢) = ٣٢

كيفية حساب صف (رح – زح) :

يساوي القيم في صف (رح) – القيم في صف (زح) كالآتي:

٢ – ٢ = صفر

٣ – ٣ = صفر

صفر – ٢،٥ = - ٢،٥

صفر – ١ = - ١

جدول السمبلكس الثالث:

المتغيرات الأساسية		س١	س٢	ح١	ح٢	الكمية
	رح ← ↓	٢	٣	٠	٠	
س٢	٣	٠	١	٠,٥ -	١ -	٨
س١	٢	١	٠	٢	٢	٤
زح		٢	٣	٢,٥	١	الربح ٣٢
رح–زح		٠	٠	٢,٥ -	١ -	

الحل الأمثل لمشكلة التعظيم يتحقق عندما تكون جميع المعاملات لدالة الهدف إما صفرية أو سالبة .

وفي هذه الحالة نكون قد توصلنا إلي الحل الأمثل لأن جميع معاملات دالة الهدف صفرية وسالبة.

مثال٢: لطريقة السمبلكس يختلف عن الأول

دالة الهدف :عظم ر ٢٠س١ + ١٠س٢

(القيود):

٢س١ + ١س٢ ≥ ٤٠

١س١ + ٢س ٢ ≥ ٤٤

قيد عدم السالبية

س١ ، س٢ ≥ صفر

الحل المثالي لطريقة السمبلكس : تحويل المشكلة من الشكل العادي إلى الشكل المثالي ..

الخطوة الأولى : هي تحويل المشكلة من الشكل العادي إلى الشكل المثالي ..

دالة الهدف عظم ر = ٢٠س١+١٠س٢ + ٠ح١ + ٠ح٢

(القيود):

٢س١ + ١س٢ + ١ح١ = ٤٠

١س١ + ٢س٢ + ١ح٢ = ٤٤

قيد اللاسلبية : س١ ، س٢ ، ح١ ، ح٢ ≥ ٠

جدول الحل الأولي :

مزيج الحل		س١	س٢	ح١	ح٢	الكمية
	ر ح ← ↓	٢٠	١٠	٠	٠	
ح١	٠	٢	١	١	٠	٤٠
ح٢	٠	١	٢	٠	١	٤٤
ز ح		٠	٠	٠	٠	الربح ٠
ر ح–ز ح		٢٠	١٠	٠	٠	

الخطوة الثانية : البحث عن أفضل حل ممكن :

١- تحديد العنصر الداخل : وهو المتغير الذي له أكبر معامل في المتغيرات غير الأساسية (س١) . ويسمى بعمود الارتكاز.

٢- تحديد المتغير الخارج وهو العنصر الذي يناظر لأقل حاصل قسمة في عمود الحل (ح١).ويسمى بصف الارتكاز.

٣- تحديد الرقم المحوري وهو ملتقى عمود الارتكاز بصف الارتكاز وهو الرقم (٢) .

تحديد الأرقام الجديدة للصف المحوري : وذلك من خلال قسمة القيم في صف المتغيرات الخارج على الرقم المحوري وهو الرقم (٢).

كيفية حساب صف س١ الداخل = القيم في الصف الخارج ÷ الرقم المحوري =

٢÷٢= ١

١÷٢ = ٠,٥

١÷٢ =٠,٥

صفر÷٢ =صفر

٤٠÷٢ =٢٠

كيفية حساب صف ح٢ في الجدول الجديد :

= عناصر الصف القديم – (نقطة تقاطع الصف القديم مع عمود الارتكاز × عناصر الصف الجديد (س٢) =

عناصر الصف القديم هي(١ ، ٢ ، صفر ، ١ ، ٤٤)

١- (١×١)= صفر

٢- (١×٠,٥)= ١,٥

صفر- (١×٠,٥)= - ٠,٥

١- (١×صفر)= ١

٤٤- (١×٢٠)= ٢٤

كيفية حساب قيم (زح):

نضرب المعاملات الموجودة في عمود (رح) وهي ٢٠،صفر

× الأرقام المحصورة في كل عمود تحت المتغيرات (س١ س٢ ح١ ح٢ كالتالي :

(٢٠×١)+(صفر×صفر) = ٢٠

(٢٠×٠,٥)+(صفر×١,٥) =١٠

(٢٠×٠,٥)+(صفر×-٠,٥) = ١٠

(٢٠×صفر)+(صفر×١) = صفر

(٢٠×٢٠) + (صفر×٢٤) = ٤٠٠

جدول السمبلكس الثاني:

مزيج الحل		س١	س٢	ح١	ح٢	الكمية
	ر ح	٢٠	١٠	٠	٠	
س١	٢٠	١	٠.٥	٠.٥	٠	٢٠
ح٢	صفر	صفر	١.٥	-٠.٥	١	٢٤
ز ح		٢٠	١٠	١٠	صفر	٤٠٠
ر ح – ز ح		صفر	صفر	-١٠	صفر	

الحل الأمثل لمشكلة التعظيم يتحقق عندما تكون جميع المعاملات لدالة الهدف إما صفرية أو سالبة .

وفي هذه الحالة نكون قد توصلنا إلي الحل الأمثل لأن جميع معاملات دالة الهدف صفرية وسالبة.

طريقة النقل والتخصيص

تعتبر طريقة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل المواد الخام والسلع، وهي تهدف الي تحديد عدد الوحدات المنقولة من أي سلعة من مناطق الإنتاج الي مناطق الاستهلاك، بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن.

إن المشكلة عادة تعطي في شكل موارد متاحة (العرض) ومقدار المطلوب من هذه الموارد (الطلب) إضافة لوجود معلومات أخري عن تكلفة النقل.

عناصر مشكلة النقل

من المتطلبات الأساسية لتطبيق أسلوب مشكلة النقل في حل المشاكل الإدارية تتوفر العناصر التالية:

١- مواقع توزيع (مصانع، مستودعا ت) لكل منها طاقة محددة (كمية عرض).

٢- مواقع طلب (أسواق تجارية، وزبائن محددة مواقعهم) لكل مهم طلب محدد.

٣- هناك تكلفة نقل محددة مسبقًا لنقل البضاعة من الفئة (١) إلى الفئة (٢).

٤- لكي نستطيع حل المشكلة يجب أن تكون كمية العرض تساوي تمامًا كمية

الطلب (وهذا شبه مستحيل في الحياة العملية، لذلك فإننا نتغلب عليها بحيلة

رياضية).

طرق ايجاد تكاليف النقل

إن الهدف الأساسي هنا هو إيجاد أقل تكلفة كلية لنقل البضائع من أماكن إنتاجها (والتي تمثل الصفوف) إلى الأسواق أو المحلات أو المستهلك (والتي تمثل الأعمدة). ومن شروط النقل أنه لابد أن يكون مجموع العرض مساويًا لمجموع الطلب. ولإيجاد تكاليف النقل نستخدم طرق عديدة منها :

طرق النقل

١- طريقة الزاوية الشمالية الشرقية.

٢- طريقة أقل التكاليف.

٣- طريقة فوجل التقريبية.

٤- طريقة حجر التنقل (المسار المغلق).

٥- طريقة التوزيع المعدلة.

** علماً بأن الطرق الثلاثة الأولى تعطي فقط حلاً أساسياً (اولياً)، وسنبحث لاحقاً عن طريقة الوصول الي الحل الأمثل باستخدام طريقة حجر التنقل، أو التوزيع المعدلة وفيما يلي شرح لهذه الطرق:

طريقة الزاوية الشمالية الشرقية :

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة، ولتوضيح كيفية إستخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال على طريقة الزاوية الشمالية الشرقية

يوجد لدينا ثلاثة مصانع هي (جده والدمام والرياض) حجم انتاجهم ٥٠٠ ، ٧٠٠ ، ٨٠٠ مجموعهم ٢٠٠٠ وحدة.

ويوجد لدينا أربعة أسواق هي (المدينة ، حائل ، القصيم ، أبها) والطلب عليها ٤٠٠ و ٩٠٠ و ٣٠٠ و ٤٠٠ ومجموعهم ٢٠٠٠

إذاً إجمالي العرض يساوي إجمالي الطلب وهو ٢٠٠٠

المطلوب : مستخدماً طريقة الزاوية الشمالية الشرقية أحسب مجموع التكاليف .

ملحوظة : تكلفة نقل الوحدة بالريال.

هذا الجدول معطى..

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢	١٣	٤	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩	١٢	٤	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

طريقة الزاوية الشمالية الشرقية

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠	١٣ ١٠٠	٤	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ ١٠٠	١٢ ٣٠٠	٤ ٤٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

مجموع التكاليف:

= { (٤٠٠ × ١٢) + (١٠٠ × ١٣) + (٧٠٠ × ٤) + (١٠٠ × ٩) + (٣٠٠× ١٢) + (٤٠٠× ٤) }= ١٥،٠٠٠ريال.

نطبق نفس المثال السابق على طريقة أقل التكاليف:

يوجد لدينا ثلاثة مصانع هي (جده والدمام والرياض) حجم انتاجهم ٥٠٠ ، ٧٠٠ ، ٨٠٠ مجموعهم ٢٠٠٠ وحدة.

ويوجد لدينا أربعة أسواق هي (المدينة، حائل، القصيم، أبها) والطلب عليها ٤٠٠ و ٩٠٠ و ٣٠٠ و ٤٠٠ ومجموعهم ٢٠٠٠

إذاً إجمالي العرض يساوي إجمالي الطلب وهو ٢٠٠٠

المطلوب : مستخدماً طريقة أقل التكاليف أحسب مجموع التكاليف .

ملحوظة : تكلفة نقل الوحدة بالريال.

طريقة أقل التكاليف

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢	١٣	٤	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩	١٢	٤	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

طريقة أقل التكاليف

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢	١٣	٤ ٣٠٠	٦ ٢٠٠	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢ ٤٠٠	٩ ٢٠٠	١٢	٤ ٢٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

مجموع التكاليف:

= { (٣٠٠× ٤) + (٢٠٠× ٦) + (٧٠٠ × ٤) + (٤٠٠× ١٢) + (٢٠٠× ٩) + (٢٠٠× ٤)
} = ١٢,٦٠٠ ريال.

طريقة فوجل التقريبية:

تعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به من مقدرة كبيرة للوصول الي الحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، ونادراً ما تكون الطريقتين السابقتين أفضل من طريقة فوجل.

ولكن طريقة فوجل تحتاج الي عمليات حسابية أطول مما تحتاجه طريقتا الزاوية الشمالية الشرقية وأقل التكاليف.

خطوات طريقة فوجل التقريبية

١- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وكل عمود، وكاتبة هذه الفروق على جانبي جدول الحل.

٢- تحديد العمود أو الصف الذي يمتلك أكبر فرق في التكلفة..

٣- تحديد الخلية ذات أقل تكلفه داخل العمود أو الصف الذي تم تحديده في الخطوة السابقة.

٤- في الخلية التي تم تحديدها في الخطوة السابقة نقارن الطلب مع ما هو متوفر مع العرض لنأخذ القيمة الأقل.

٥- نعيد حساب الفرق مرة أخري لكل من الأعمدة والصفوف، ونكرر نفس العمليات السابقة الي أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من العرض المتاح.

ملحوظات:

عند حساب الفروق بين أقل تكلفتين داخل كل صف وكل عمود وكتابة ذلك على جانبي جدول الحل، إذا ما تساوت هذه الفروق نأخذ الفرق الثاني وذلك بشطب أقل قيمة من الصف أو العمود ونأخذ الفرق الذي بعده.

أما إذا كانت من البداية كل الفروق في الصفوف والأعمدة متساوية في كل المراحل تفشل طريقة فوجل، ونأخذ في هذه الحالة طريقة أقل التكاليف.

سيتم توضيح طريقة فوجل وذلك كما في المثال التالي :

مثال : على طريقة فوجل :

إلى السوق / من المصنع	١	٢	٣	العرض
أ	٥	١	٨	١٢
ب	٢	٤	٠	١٤
ج	٣	٦	٧	٤
الطلب	٩	١٠	١١	٣٠

- **المطلوب:** ما هو مجموع تكاليف النقل للسلعه من المصانع الي الأسواق بإستخدام فوجل.

نختار العمود أو الصف الذي يقابل أعلى فرق في التكلفة ، وأكبر فرق هو الرقم (٧) يقابل عمود سوق (٣)وأقل تكلفة هي صفر (مصنع ب ، سوق ٣).

الاسواق / المصانع	١	٢	٣	العرض
أ	٥	١	٨	١٢
ب	٢	٤	٠ ١١	١٤ / ٣
ج	٣	٦	٧	٤
الطلب	٩	١٠	١١ / ٠	٣٠

وأكبر فرق ثاني بعد الرقم (٧)، هو الرقم (٤) يقابل صف سوق (أ) وأقل تكلفة في الصف الرقم (١) يقابل مصنع أ ، سوق ٢.

الاسواق / المصانع	١	٢	٣	العرض
أ	٥	١ ١٠	٨	١٢ / ٢
ب	٢	٤	٠ ١١	١٤ / ٣
ج	٣	٦	٧	٤
الطلب	٩	١٠ / ٠	١١ / ٠	٣٠

أكبر فرق ثالث هو الرقم (٣) يقابل صف مصنع (ج)وأقل تكلفة هي الرقم ٣ يقابل مصنع ج ، سوق ١.

الاسواق / المصانع	١	٢	٣	العرض	
أ	٥	١ ١٠	٨	~~١٢~~ ٢	٤
ب	٢ ٣	٤	٠ ١١	~~١٤~~ ٣	٢
ج	٣ ٤	٦	٧	~~٤~~ ٠	٣
الطلب	~~٩~~ ~~٥~~ ٢	~~١٠~~ ٠	~~١١~~ ٠	٣٠	
	١	٣	٧		

في هذه الخطوة لا يمكن أن أختار الأقل ، لأن فقط تبقى لي عمود واحد وهو العمود الأول الذي يحمل سوق (١) سأختاره هو وأبحث عن أقل تكلفة والتي تليها..

الاسواق / المصانع	١	٢	٣	العرض	
أ	٥	١ ١٠	٨	~~١٢~~ ٢	٤
ب	٢ ٣	٤	٠ ١١	١٤ ~~٣~~ ٠	٢
ج	٣ ٤	٦	٧	~~٤~~ ٠	٣
الطلب	~~٩~~ ~~٥~~ ٢	~~١٠~~ ٠	~~١١~~ ٠	٣٠	
	١	٣	٧		

الاسواق / المصانع	١	٢	٣	العرض	
أ	٥ ٢	١ ١٠	٨	~~١٢~~ ~~٢~~ ٠	٤
ب	٢ ٣	٤	٠ ١١	~~١٤~~ ~~٣~~ ٠	٢
ج	٣ ٤	٦	٧	~~٤~~ ٠	٣
الطلب	~~٩~~ ~~٥~~ ~~٢~~ ٠	~~١٠~~ ٠	~~١١~~ ٠	٣٠	
	١	٣	٧		

مجموع التكاليف وفقا لطريقة فوجل =

(١٠ × ١) + (٣ × ٢) + (١١ × صفر) + (٤ × ٣) = ٣٨ دولار .

إختبار مثالية الحل..

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن نستخدم أساليب أخري لاختبار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول إليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل؟ أي الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلول أمثل منه؟

وهناك طريقتان لاختبار مثالية الحل – وسيتم التركيز على الطريقة الأولي في هذا الكورس - هما:

١- طريقة المسار المتعرج "الحجر المتنقل".

٢- طريقة التوزيع المعدلة.

طريقة المسار المتعرج "الحجر المتنقل".

تقتضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول الحل الأولي لمعرفة أثر إستخدام كل خلية فارغة علي جميع التكاليف، ويتم ذلك من خلال مسار مغلق لكل خلية.

وإذا وجدنا ملء خلية فارغة سيؤدي الي تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للإستفادة من ذلك، وتستمر عملية تقييم كل جدول نقل الي أن يتضح أن شغل أي خليه فارغة لن يؤدي الي تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي الي زيادتها، والقواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق هي :

القواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق:

١- نحدد أولاً الخلية غير المستخدمة.

٢- تكوين مسار مغلق لكل خلية مشغولة.

٣- تحديد حركة المسار لكل خليه فارغة يجب أن يكون رأسياً وأفقياً.

٤- يجب أن يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها. ويكون اتجاه حركة وضع العلامات إما في اتجاه عقرب الساعة أو العكس علي أن تكون علامة (+) هي أولي العلامات التي تبدأ بها وتضع في الخلية الفارغة المراد تقييمها.

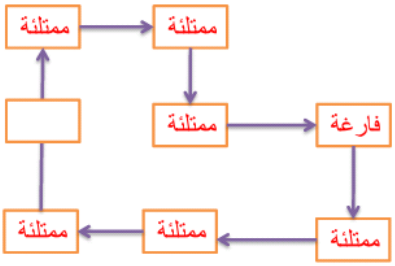
٥- نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية)، وذلك بجمع كلف جميع الخلايا الواقعة على المسار بعد وضع الإشارات عليها.

٦- إذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما بالسالب – بعد التقييم – فإن ذلك يعني أن شغل تلك الخلية سيؤدي الي خفض تكاليف النقل.

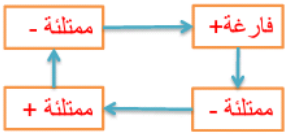
٧- في حالة وجود – بعد التقييم – أكثر من خلية فارغة لها تكلفة غير مباشرة بالسالب في هذه الحالة تعطي الأولوية للخلية صاحبة أكبر رقم سالب – وليست صاحبة أكبر قيمة سالبة - حيث أن شغل تلك الخلية سيكون أكثر فاعلية في خفض التكاليف.

٨- يتم إشغال الخلية الفارغة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار، حيث نختار أقل القيم من الخلايا السالبة في المسار.

- بذلك يظهر لنا الشكل المربع أو المستطيل أو شكل الدرج، كما في الشكل التالي:



أو



وبالرجوع إلى الحل بطريقة الزاوية الشمالية الشرقية ، نقوم باختبار الخلية المراد تحسينها: الاختبار الأول :

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠	١٣ - ١٠٠	٤ +	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ + ١٠٠	١٢ - ٣٠٠	٤ ٤٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

جده / القصيم = +٤ -١٣ +٩ -١٢ = -١٢

أن هذه الخلية تحتاج إلي تحسين.

ملاحظة: إذا كانت نواتج المؤشرات موجبة أو صفر تكون مرفوضة (أي أنها لا تحتاج إلى تحسين)، وإذا كان هناك مؤشر سالب فمعنى ذلك أنه يمكن إجراء عملية تحسين لهذه الخلية.

ولاختبار الخلية التي تليها أو الاختبار الثاني:

جده / أبها = +٦ -١٣ +٩ -٤ = -٢ (هذه الخلية تحتاج إلي تحسين)

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠	١٣ ١٠٠ -	٤	٦ +	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ ١٠٠ +	١٢ ٣٠٠	٤ ٤٠٠ –	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

ولاختبار الخلية التي تليها أو الاختبار الثالث:

الدمام/ المدينة = +٦ -٤ +١٣ -١٢ = ٣ (هذه الخلية لا تحتاج إلي تحسين)

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠ –	١٣ ١٠٠ +	٤	٦	٥٠٠
الدمام	٦ +	٤ ٧٠٠ –	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ ١٠٠	١٢ ٣٠٠	٤ ٤٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

ولاختبار الخلية التي تليها أو الاختبار الرابع:

الدمام/ القصيم = +١٢ -٤ +٩ -١٢ = ٥ (هذه الخلية لا تحتاج إلي تحسين)

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠	١٣ ١٠٠	٤	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ ١٠٠	١٢ ٣٠٠	٤ ٤٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

ولاختبار الخلية التي تليها أو الاختبار الخامس:

الدمام/ أبها = +١٢ -٤ +٩ -٤ = ١٣ (هذه الخلية لا تحتاج إلي تحسين)

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠	١٣ ١٠٠	٤	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ ١٠٠	١٢ ٣٠٠	٤ ٤٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

ولاختبار الخلية التي تليها أو الاختبار السادس :

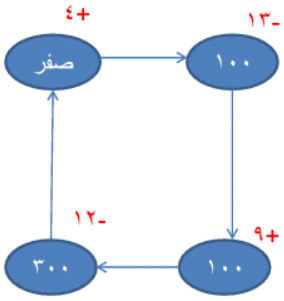
الرياض/ المدينة = +١٢ -٩ +١٣ -١٢ = ٤ (هذه الخلية لا تحتاج إلي تحسين)

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠	١٣ ١٠٠	٤	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ ١٠٠	١٢ ٣٠٠	٤ ٤٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

نختار الخلية ذات أكبر رقم سالب:

جده / القصيم = +٤ -١٣ +٩ -١٢ = -١٢

الشكل التالي يوضح مسار الخلية :



ملحوظة: الأرقام داخل الدوائر تمثل محتويات كل خلية مشغولة، والتي خارج الدوائر تمثل تكلفة كل خلية من الجدول.

نحتار أقل القيم من الخلايا السالبة في مسار الخلية المراد تخصيصها ، حيث نجمعها الي القيم في الخلايا الموجبة ونطرحها من القيم في الخلايا السالبة ، ويترتب على ذلك تغيير في قيم الخلايا المذكورة في المسار المغلق حيث تصبح كالآتي::

صفر + ١٢ = ١٢

١٠٠ – ١٢ = ٨٨

١٠٠ +١٢ = ١١٢

٣٠٠ – ١٢ = ٢٨٨

ويمكن تصور جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق الذكر كالآتي:

إلى السوق / من المصنع	المدينة	حائل	القصيم	أبها	العرض
جده	١٢ ٤٠٠	١٣ ٨٨	٤ ١٢	٦	٥٠٠
الدمام	٦	٤ ٧٠٠	١٢	١٢	٧٠٠
الرياض	١٢	٩ ١١٢	١٢ ٢٨٨	٤ ٤٠٠	٨٠٠
الطلب	٤٠٠	٩٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠

حساب تكلفة النقل ..

وعليه تكون تكلفة النقل كما يلي:

(٤×٤٠٠) + (٩×٢٨٨) + (٩×١١٢) +(٤×٧٠٠)+(٤×١٢)+(١٣×٨٨)+(١٢×٤٠٠) = ١٣،٩٩٢ريال

بالرجوع الي الحل المبدئي (جدول رقم ١) نجد أن التكلفة الكلية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الشرقية هي: (١٥،٠٠٠ ريال)، في حين بلغت التكلفة الإجمالية بعد التعديل بموجب طريقة المسار المتعرج (١٣،٩٩٢ ريال)أي أن هناك اقتصاد في التكلفة بلغ (١،٠٠٨ ريال) نتيجة شغل الخلية (جده القصيم).

اتخاذ القرار..

تعتبر عملية اتخاذ القرارات الإدارية العنصر الأساسي ومن الأساسيات الرئيسة لأي إدارة، فأي إدارة لابد أن تواجه بشكل شبه يومي عدة مشاكل.

ومن هنا برزت نظرية القرار، حيث تأتي أهمية دراستها من أجل اتخاذ القرار السليم والمناسب وفي الوقت المناسب، ولنجاح أي إدارة فإنها لا بد من أن تلتزم بخطوات اتخاذ القرار وبشكل علمي ودقيق.

عملية اتخاذ القرار هي تلك العملية المبنية على الدراسة والتفكير الموضوعي الواعي للوصول الي قرار.

والقرار هو الخيار ما بين بديلين أو أكثر.

الخطوات الأساسية للوصول إلي القرار :

١- تحديد وتعريف المشكلة التي تستلزم اتخاذ القرار.

٢- تحديد الهدف ، هل هو(زيادة أرباح ، تقليل تكاليف ، تقليل الزمن اللازم للإنتاج)

٣- جمع البيانات وتطوير البدائل.

٤- تحليل ومقارنة البدائل .

٥- اختيار البديل الأفضل .

٦- تنفيذ القرار.

٧- متابعة التنفيذ وتعديله إن لزم.

الفرق بين البيانات والمعلومات:

- البيانات ماده خام لا يمكن الاستفادة منها إلا بعد معالجتها.

مثال ذلك درجة الحرارة ٣٠ درجة (معلومة ناقصة ، وغير مستفاد منها)

- المعلومات هي شيء مكتمل يمكن الاستفادة منها .

أسباب اتخاذ القرارات الخاطئة

١- الغموض في الظروف المحيطة بالقرار.

٢- قلة المعلومات والبيانات عن المشكلة.

٣- إهمال أو تجاوز إحدى خطوات القرار.

٤- عدم إعتراف المدراء بأخطائهم.

بيئة اتخاذ القرار

تنقسم بيئة اتخاذ القرار إلي :

١- البيئة في حالة التأكد التام :

في هذه الحالة تكون المعطيات والبيانات والمعلومات اللازمة لاتخاذ القرار متوفرة ومعروفة بنسبة ١٠٠% والعنصر الاحتمالي يكون غير مهم في هذه الحالة. وتكون المصفوفة في حالة طبيعة واحدة وبالتالي سوف نختار البديل الذي يحقق أعلى ربح . أو الهدف المرغوب فيه

٢- البيئة في حالة المخاطرة :

-في هذه الحالة تكون المعطيات والبيانات والمعلومات اللازمة لاتخاذ القرار متوفرة ولكنها تخضع للتقييم الاحتمالي. لأن احتمالات الطبيعة متعددة.

٣- البيئة في حالة عدم التأكد :

في هذه المرحلة المعلومات الاحتمالية عن حدوث حالات الطبيعة غير متوفرة ، ويسود الغموض التام عن المستقبل وعن توقع حدوث حالات الطبيعة في المستقبل وهنا نلجأ إلي تقييم البدائل بعدة طرق . مثل

١- طريقة (لابلاس).

٢- وطريقة (Maxi Max).

٣- وطريقة (Max Min).

٤-وطريقة (هورويز الواقعية أو المعاملات).

٥- وطريقة (أكبر ندم لكل بديل).

مثال : عن البيئة في حالة المخاطرة

يرغب مدير شركة في تقييم ثلاثة بدائل للتوسع في نشاطاته الإنتاجية وهذه البدائل هي فتح محل جوالات أو فتح مكتبة أو فتح مطعم ويواجه هذا القرار توقع ارتفاع الطلب أو ثباته أو انخفاضه علما بان احتمال ارتفاع الطلب هو ٤٠% وثباته ٣٥% وانخفاضه ٢٥% وقد قدر المدير نتائج البدائل مقرونة مع حالات الطبيعة كما في الجدول التالي:

المطلوب : ما هو القرار الأمثل مستخدماً حساب القيمة النقدية المتوقعة؟

القيمة النقدية المتوقعة (EMV)
حالة المخاطرة

حالات الطبيعة / البدائل	حالة الطبيعة الأولى ط١	حالة الطبيعة الثانية ط٢	حالة الطبيعة الثالثة ط٣
فتح محل جوالات	١٠٠	١٩٠	٧٠
فتح مكتبة	٢٠٠	١٠٠	٩٠
فتح مطعم	٣٠٠	٨٠	١٠٠
الاحتمالات لحالة الطبيعة	٤٠%	٣٥%	٢٥%

حساب القيمة النقدية المتوقعة(EMV)

يتم بايجاد مجموع ضرب النتائج لكل بديل في احتمالات حالات الطبيعة كالآتي :

فتح محل جوالات =(١٠٠×٠،٤)+(١٩٠ × ٠،٣٥)+(٧٠ × ٠،٢٥)=١٢٤

فتح مكتبة =(٢٠٠×٠،٤) + (١٠٠×٠،٣٥) + (٩٠ ×٠،٢٥) = ١٣٧,٥

فتح مطعم(٣٠٠ ×٠،٤)+ (٨٠ × ٠،٣٥) + (١٠٠ × ٠،٢٥) = ١٧٣

القرار الأمثل هو اختيار المطعم لأنه يحقق أعلى قيمة وهي (١٧٣) دولار . لأن المصفوفة أرباح . أما إذا كانت المصفوفة تخفيض تكاليف فلذلك نختار أقل قيمة.

حساب طريقة الفرصة الضائعة المتوقعة :EOL
Expected Opportunity Lost

تعرف الفرصة الضائعة المتوقعة EOL: بأنها مقدار الندم الناتج عن عدم اختيار البديل الافضل لكل عمود في المصفوفة .

إذا كانت المصفوفة أرباح نختار البديل الأفضل لكل عمود (أعلى رقم من النتائج) نطرحه من نفسه ومن بقية الأرقام في العمود.

أما إذا كانت المصفوفة تكاليف نختار البديل الأقل لكل عمود (أقل رقم من النتائج) نطرحه من نفسه ومن بقية الأرقام في العمود.

نقوم بوضع الناتج للحالتين بجدول جديد.

نفس المثال السابق :

حـــالات الطبيعـــة البدائل	حالة الطبيعة الأولى ط١	حالة الطبيعة الثانية ط٢	حالة الطبيعة الثالثة ط٣
فتح محل جوالات	١٠٠	١٩٠	٧٠
فتح مكتبة	٢٠٠	١٠٠	٩٠
فتح مطعم	٣٠٠	٨٠	١٠٠
الاحتمـــالات لحالـــة الطبيعة	%٤٠	%٣٥	%٢٥

جدول الحل :

حـــالات الطبيعـــة البدائل	حالة الطبيعة الأولى ط١	حالة الطبيعة الثانية ط٢	حالة الطبيعة الثالثة ط٣
فتح محل جوالات	٢٠٠	صفر	٣٠
فتح مكتبة	١٠٠	٩٠	١٠
فتح مطعم	صفر	١١٠	صفر
الاحتمـــالات لحالـــة الطبيعة	%٤٠	%٣٥	%٢٥

نقوم بالحل بنفس الطريقة التي حلينا فيها مصفوفه القيمة النقدية المتوقعة (ضرب النتائج في احتمالات حالات الطبيعة:

محل جوالات=(٢٠٠ ×٠،٤٠) + (صفر × ٠،٣٥) + (٣٠ × ٠،٢٥) = ٨٧،٥

فتح مكتبة=(١٠٠×٠،٤٠) +(٩٠ × ٠،٣٥) + (١٠× ٠،٢٥)= ٧٤

فتح مطعم=(صفر × ٠،٤٠) +(١١٠ ×٠،٣٥)+ (صفر ×٠,٢٥) = ٣٨،٥

نختار أقل قيمه موجوده وهي مصنع كبير = ٣٨،٥

اذاً اقل قيمة واقل ندم يكون عندنا هو فتح المطعم = ٣٨،٥

ملاحظة :

اذا جاء سؤال احسب القيمة النقدية المتوقعة و قيمة الفرصة الضائعة . الجواب سوف يكون نفس المصنع للحالتين مع اختلاف الناتج ..فاذا كان الجواب بطريقة القيمة النقدية المتوقعة ((فتح مطعم)) يجب ان يكون الجواب في قيمة الفرصة الضائعة أيضاً ((فتح مطعم)).

حالة عدم التأكد

في هذه المرحلة المعلومات الاحتمالية عن حدوث حالات الطبيعة غير متوفرة .

ما يميز المخاطرة عن عدم التأكد أنه في حالة المخاطرة الاحتمالات تكون لدينا معروفة أي معطاة بالسؤال .

في هذه الحالة نلجأ إلي الحل بعدة طرق وهي :

١- طريقة (لابلاس أو الاحتمالات المتساوية) .

٢- طريقة (Maxi Max) .

٣- طريقة (Max Min) .

٤- طريقة (هورويز الواقعية أو المعاملات) .

٥- طريقة (أكبر ندم لكل بديل) .

نقوم بحل المثال السابق : بطريقة عدم التأكد :

حـــالات الطبيعـــة البدائل	حالة الطبيعة الأولى ط١	حالة الطبيعة الثانية ط٢	حالة الطبيعة الثالثة ط٣
فتح محل جوالات	١٠٠	١٩٠	٧٠
فتح مكتبة	٢٠٠	١٠٠	٩٠
فتح مطعم	٣٠٠	٨٠	١٠٠
الاحتمـــالات لحالـــة الطبيعة	%٤٠	%٣٥	%٢٥

أولاً: طريقة لابلاس أي طريقة الاحتمالات المتساوية : في هذه الطريقة نقوم بجمع الأرقام الموجودة لكل بديل ونقسمها على عددها (نستخرج الوسط الحسابي) مثلاً : فتح محل جوالات= ١٠٠+١٩٠+٧٠=٣٦٠، ٣٦٠÷٣ =١٢٠ونطبق ذلك على بقية البدائل. ونختار البديل الذي يقابله أكبر رقم وهو (فتح مطعم).

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣	لابلاس احتمالات متساوية
فـــتح محـــل جوالات	١٠٠	١٩٠	٧٠	١٢٠
فتح مكتبة	٢٠٠	١٠٠	٩٠	١٣٠
فتح مطعم	٣٠٠	٨٠	١٠٠	١٦٠

ثانياً : طريقة ماكس ماكس : MAXIMUM OF MAXIMUM في هذه الطريقة نختار أعلى عدد من كل بديل من البدائل الثلاثة . مثلاً فتح محل جوالات نختار ١٩٠ وفتح مكتبة نختار ٢٠٠ وفتح مطعم نختار ٣٠٠ ونضعه في عمود ماكسي ماكس ونختار منهم البديل الذي يقابل أعلى رقم وهو (فتح مطعم).

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣	Maxi max متفائل
فـــتح محـــل جوالات	١٠٠	١٩٠	٧٠	١٩٠
فتح مكتبة	٢٠٠	١٠٠	٩٠	٢٠٠
فتح مطعم	٣٠٠	٨٠	١٠٠	٣٠٠

ثالثاً : طريقة maxi main المتشائم : في هذه الطريقة نختار أعلى الأسوأ (من كل بديل نختار أقل قيمة)مثلاً في فتح محل جوالات نختار ٧٠ وفتح المكتبة نختار ٩٠ وفتح مطعم نختار ٨٠ ونضع هذه الأرقام في عمود المتشائم. ونختار البديل الذي يقابله أعلى قيمة وهو (فتح مكتبة).

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣	Maxi Main متشائم
فـــتح محـــل جوالات	١٠٠	١٩٠	٧٠	٧٠
فتح مكتبة	٢٠٠	١٠٠	٩٠	٩٠
فتح مطعم	٣٠٠	٨٠	١٠٠	٨٠

رابعاً : طريقة هوروبز الواقعية أو المعاملات يتم حسابها عن طريق حاصل جمع عمود المتفائل والمتشائم لكل بديل ونقسم الناتج على ٢ مثلاً في فتح محل جوالات=١٩٠+ ٧٠ = ٢٦٠ ÷٢ = ١٣٠ . ونطبق ذلك على الثلاثة بدائل ،ثم أختار االبديل الذي يقابله أعلى رقم وهو فتح مطعم : ١٩٠

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣	هورويز الواقعية (المعاملات)
فتح محل جوالات	١٠٠	١٩٠	٧٠	١٣٠
فتح مكتبة	٢٠٠	١٠٠	٩٠	١٤٥
فتح مطعم	٣٠٠	٨٠	١٠٠	١٩٠

خامساً : طريقة أكبر ندم لكل بديل : في هذه الطريقة نرجع إلي طريقة الفرصة الضائعة ونقوم باختيار أكبر ندم من كل بديل ونضعه في عمود أكبر ندم مثلاً فتح محل جوالات الأرقام هي (٢٠٠ ، صفر ، ٣٠) نختار الأعلى وهو ٢٠٠ ونطبق ذلك على بقية البدائل ثم نختار البديل الذي يقابله أقل ندم وهو فتح مكتبة = ١٠٠.

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣	أكبر ندم لكل بديل
فتح محل جوالات	١٠٠ ٢٠٠	١٩٠ صفر	٧٠ ٣٠	٢٠٠
فتح مكتبة	٢٠٠ ١٠٠	١٠٠ ٩٠	٩٠ ١٠	١٠٠
فتح مطعم	٣٠٠ صفر	٨٠ ١١٠	١٠٠ صفر	١١٠

شجرة القرارات..

تعد شجرة القرار من الأساليب الكمية التي تستخدم في الحالات التي تتطلب سلسلة من القرارات المترابطة مع بعضها البعض.

وتعرف شجرة القرار بأنها: عبارة عن تمثيل أو رسم لعملية إتخاذ القرارات بشكل يسهل معه تحديد مراحل إتخاذ تلك القرارات.

- **وهناك رموز تستخدم في رسم شجرة القرارات وهي :**
- **□ يرمز به الي نقطة إتخاذ القرار، وهي النقطة التي يتم عندها إختيار البديل الأفضل من بين مجموعة البدايل المرتبطة بها.**
- **◯ تعبر عن نقطة إتصال أو حلقة وصل بين مجموعات من حالات الطبيعة أو البدائل أو بينهما معاً.**
- **—— يعبر عن حالات الطبيعة والبدائل.**

مكونات شجرة القرارات

١- بدائل القرار، وهي البدائل التي توجد عند أي نقطة قرار.

٢- حالات الطبيعة.

٣- إحتمالات الأحداث.

٤- النتائج.

خطوات رسم وتحليل شجرة القرار

عند رسم شجرة القرار نبدأ من الشمال الي اليمين، ولا بد من إتباع الخطوات الآتية:

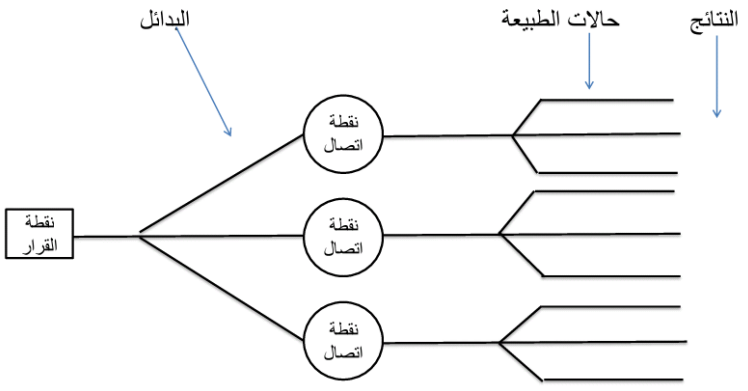
١- تحديد المشكلة ووضع نقطة القرار.

٢- تحديد البدائل وربطها بنقطة القرار.

٣- وصل كل من البدائل بحالات الطبيعه المتعلقة بها.

٤- تحديد إحتمالات حدوث حالات الطبيعة.

٥- تحديد نتائج البدائل تحت حالات الطبيعة.



أما إذا أردنا تحليل شجرة القرارات فإننا نبدأ من اليمين الي اليسار، مع مراعاة الخطوات الآتية:

١- إيجاد القيمة المتوقعة لعائد أو تكاليف كل البدائل، وذلك عن طريق ضرب نتائج البدائل في احتمالات حالات الطبيعة المرتبطة بها ومن ثم نجمع نتائج هذه العملية لكل بديل بمفردة، وتسمى هذه النتائج بالقيم المتوقعة لعوائد أو تكاليف البدائل. وعادة ما توضع هذه القيم بجانب أو داخل نقاط الاتصال المرتبطة بها.

٢- ثم نقارن بين النتائج التي تم التوصل إليها، ومن ثم نختار أفضلها ونضعه بجانب نقطة القرار النهائية، وبناءً على القيمة يتم اختيار البديل الأفضل.

أنواع شجرة القرار

وهناك نوعان لشجرة القرارات :وسنكتفي بالنوع الأول فقط - وهما:

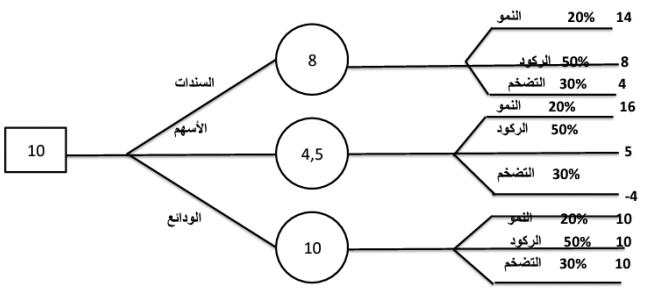
١- شجرة القرارات ذات المرحلة الواحدة.

٢- شجرة القرارات ذات المراحل المتعددة.

مثال (١): شركة سعودية لديها ثلاث بدائل متاحة لاستثمار أموالها، وكل بديل من البدائل يرتبط بثلاث حالات والجدول التالي يوضح ذلك:

حالات الطبيعة / البدائل	النمو	الركود	التضخم
السندات	14	8	4
الأسهم	16	5	-4
الودائع	10	10	10
احتمالات حالات الطبيعة	20%	50%	30%

والشكل أدناه يمثل نموذج لشجرة القرارات التي يمكن استخدامها في حل المشكلات المتعلقة بالقرارات.



ثانياً: تحليل شجرة القرار.

المقصود بتحليل شجرة القرار هو حساب القيم المتوقعة لكل بديل من البدائل من اجل إختيار البديل الافضل والتقييم يتم كالآتي:

إيجاد القيم المتوقعة للبديل الأول (السندات):

8 = (0,3 x 4) +(0,5 x 8)+(0,2 x 14)

إيجاد القيم المتوقعة للبديل الثاني (الأسهم):

4,5 = (0,3 x -4) +(0,5 x 5)+(0,2 x 16)

إيجاد القيم المتوقعة للبديل الثالث (الودائع):

10 = (0,3 x 10) +(0,5 x 10)+(0,2 x 10)

بعد إيجاد القيم المتوقعة لكل بديل نضع القيم داخل نقاط الإتصال في شجرة القرار، ومن ثم نفاضل بين هذه البدايل (القيم) ونختار البديل الأمثل والذي يحقق أكبر ربح.

وفي مثالنا هذا نجد أن البديل الأفضل للإستثمار هو البديل الثالث (الإستثمار في الودائع) لأنها تحقق أعلي عائد.

بعد ذلك نضع القيمة المتوقعة مـن البـــديل الأفضـــل داخل نقطة القرار، وفي مثالنا هي (١٠).

تمرين : ما هو القرار أو البديل الأفضل من مصفوفة الأرباح التالية :
مستخدما طريقة القيمة النقدية المتوقعة.

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣
البديل الأول	٢٠٠	٣٨٠	١٤٠
البديل الثاني	٤٠٠	٢٠٠	١٨٠
البديل الثالث	٦٠٠	١٦٠	٢٠٠
احتمـالات حـالات الطبيعة	%٤٠	%٣٥	%٢٥

الحل

تقييم البديل الأول = (٢٠٠×٠،٤٠)+(٣٨٠×٠،٣٥)+(١٤٠×٠،٢٥)= ٢٤٨

تقييم البديل الثاني = (٤٠٠×٠،٤٠)+(٢٠٠×٠،٣٥)+(١٨٠×٠،٢٥)= ٢٧٥

تقييم البديل الثالث = (٦٠٠×٠،٤٠)+(١٦٠×٠،٣٥)+(٢٠٠×٠،٢٥)= ٣٤٦

القرار

القرار الأمثل هو اختيار البديل الثالث لأنه يحقق أعلى قيمة وهي (٣٤٦) ريال. لأن المصفوفة أرباح .

تمرين : ما هو القرار أو البديل الأفضل من مصفوفة الأرباح التالية :
مستخدما طريقة الفرصة الضائعة المتوقع

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣
البديل الأول	٢٠٠	٣٨٠	١٤٠
البديل الثاني	٤٠٠	٢٠٠	١٨٠
البديل الثالث	٦٠٠	١٦٠	٢٠٠
احتمالات حالات الطبيعة	%٤٠	%٣٥	%٢٥

تمرين : ما هو القرار أو البديل الأفضل من مصفوفة الأرباح التالية :
مستخدما طريقة الفرصة الضائعة المتوقع

ح ط / البدائل	ط١	ط٢	ط٣
البديل الأول	٤٠٠	صفر	٦٠
البديل الثاني	٢٠٠	١٨٠	٢٠
البديل الثالث	صفر	٢٢٠	صفر
احتمالات حالات الطبيعة	%٤٠	%٣٥	%٢٥

الحل

تقييم البديل الأول = (٤٠٠×٠،٤٠)+(صفر×٠،٣٥)+(٦٠×٠،٢٥)= ١٧٥

تقييم البديل الثاني = (٢٠٠×٠،٤٠)+(١٨٠×٠،٣٥)+(٢٠×٠،٢٥)= ١٤٨

تقييم البديل الثالث = (صفر×٠،٤٠)+(٢٢٠×٠،٣٥)+(صفر×٠،٢٥)= ٧٧

القرار

القرار الأمثل هو اختيار البديل الثالث لأنه يحقق أقل تكلفة وهي (٧٧) ريال.

تم المقرر بحمد الله

بالتوفيق للجميع / الإكلـــــــيل