منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

التبولوجيا (١)

الفضاءات المترية

الدكتور
نادر ضبيط
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

الدكتور
محمد خير أحمد
أستاذ في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣١هـ - ٢٠١٠م

منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

التبولوجيا (١)

(الفضاءات المترية)

الدكتور
نادر ضبيط
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

الدكتور
محمد خير أحمد
أستاذ في قسم الرياضيات

لطلاب السنة الثانية
(فرع الرياضيات)

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٢٧ هـ - ٢٠٠٦ م

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

تُعد التبولوجيا من الرياضات الحديثة التي تجمع بين التحليل والهندسة والجبر، وترتكز مواضيعها بشكل كبير على مواضيع نظرية المجموعات ، لدرجة أن بعضهم يسميها نظرية المجموعات المتقدمة .

فالتبولوجيا العامة كانت حصيلة التطور لكل من التحليل والهندسة والجبر الذي أعقب التطور الكبير لنظرية المجموعات على يد كانتور *(Cantor)* في العام ١٨٨٠ وما بعد ، وقد ظهر علم التبولوجيا في مطلع القرن العشرين على مرحلتين : الأولى كانت على يد العالم فريشيه *(Frechet)* في العام ١٩٠٦ حيث قدم مفهوم الفضاء المتري وبنيته ، والثانية كانت على يد هاوسدورف *(Hausdorff)* في العام ١٩١٤ الذي قدم مفهوم الفضاء التبولوجي كتعميم لمفهوم الفضاء المتري .

هذا الكتاب موجّه إلى طلاب السنة الجامعية الثانية من قسم الرياضيات ، الذين هم في بداية طريق التخصص في الرياضيات ، ولذلك - وانسجاماً مع الخطة الدراسية لقسم الرياضيات - كان الموضوع الذي يعالجه هذا الكتاب هو الفضاءات المترية والمفاهيم التبولوجية المتصلة بها ، وذلك من أجل الاستفادة منها في دراسة التحليل الحقيقي والفضاءات الإقليدية R^n والتحليل العقدي والتحليل التابعي ، التي ستمر مع الطلبة لاحقاً . وكذلك من أجل دراسة الفضاءات التبولوجية التي هي أعم ، حيث سينتقل الطالب في دراسته للتبولوجيا من الخاص (الفضاءات المترية) إلى العام (الفضاءات التبولوجية) وهذا منهج تدريسي أكثر سهولة للطلبة المبتدئين في التخصص.

وقد حرصنا على عرض المواضيع بصياغة تنسجم مع صياغة مثيلاتها في التبولوجيا العامة ، وذلك لكي نساعد الطالب في دراسته القادمة للفضاءات التبولوجية . ولقد وزعنا محتويات هذا الكتاب على ستة فصول بحيث يحتوي كل فصل على وحدة علمية منسجمة ومتكاملة في طبيعتها :

الفصل الأول : هو فصل تمهيدي ، ننصح مدرس المادة بالمرور على محتوياته بشكل تذكيري وسريع ، حيث تم فيه عرض أساسيات نظرية المجموعات .

الفصل الثاني : تضمّن تعريف الفضاء المتري ودراسة بنيته والمفاهيم المرتبطة بـه . ويُعد هذا الفصل هو الفصل الأساس في دراسة المادة ، لذلك ننصح الطالب بأن يوليه عناية خاصة يفهم من خلالها محتوياته ، وذلك لكي يستطيع استيعاب معطيات الفصول اللاحقة .

الفصل الثالث : عالج موضوع التقارب في الفضاءات المترية ، وهو موضوع يندرج في معظم مواد التحليل ، ولذلك فإن فهم محتويات هذا الفصل يساعد الطالب على فهم موضوع التقارب في مواد التحليل . فالمتتاليات وتقاربها ، ومتتاليات كوشي ، والفضاءات التامة هي مواضيع ترد في التحليل حيث نرى : متتاليات حقيقية ، متتاليات عقدية ، متتاليات في الفضاء R^n ، متتاليات توابع ...إلخ .

الفصل الرابع : تضمّن دراسة توابع الفضاءات المترية ، حيث عالج موضوع الاستمرار في نقطة ، والاستمرار على مجموعة ، والاستمرار على الفضاء ، وكذلك عالج موضوع الاستمرار المنتظم والتوابع المفتوحة والمغلقة وموضوع الهوميومورفيزم ، وهي مواضيع تفيد في دراسة مواد التحليل .

الفصل الخامس : تعرّض لموضوع التراص في الفضاءات المترية ، وهو موضوع تبولوجي هام يعطي توصيفاً لبعض المجموعات والفضاءات التي تسهل فيها دراسة التقارب والاستمرار .

الفصل السادس : تم فيه شرح موضوع المجموعات والفضاءات المترابطة وغير المترابطة وهو موضوع تبولوجي يخدم الهندسة .

وقد حاولنا – جهدنا – أن نعالج المواضيع بصورة مبسطة وواضحة ، مراعين في ذلك المستوى العلمي للطلاب الذين سيدرسون هذا الكتاب . حيث أتبعنا كل تعريف وكل مبرهنة بجملة من الملاحظات والأمثلة التي توضح ذلك التعريف وتزيد شرحاً لتلك المبرهنة ، وختمنا كل فصل بعدد وافر من التمارين ، حيث أن حلها يساعد الطالب على فهم محتويات الفصل .

وبهدف التسهيل على الطالب في دراسة هذه المادة فقد قدمنا له - **في الفصل الأول** من هذا الكتاب - معظم المفاهيم الأولية التي يحتاجها من نظرية المجموعات لكي نغنيه عن الرجوع لمصادر أخرى .

في الختام : نرجو الله أن نكون قد وفقنا في عرض مادة هذا الكتاب بشكل واضح ومفيد ، خدمةً لأبنائنا الطلاب ولوطننا العزيز . كما نرجو من قرّاء هذا الكتاب تزويدنا بأي ملاحظة يرونها ضرورية لجعل هذا العمل المتواضع أحسن حالاً وأكثر فائدة . والله حسبنا ونعم الوكيل .

المؤلفان

الفهرس

الفصل الأول

أساسيات في نظرية المجموعات Basics In sets Theory

إن مفهوم المجموعة والعمليات عليها، أصبح الأساس في كل فروع الرياضيات ، وفي كثير من العلوم الأخرى . لذا لابد من تقديم ذلك بالصورة التي تخدم بقية فصول الكتاب .

§ . 1 - المجموعات (Sets) :

المجموعة (Set) هي من أهم المفاهيم في جميع فروع الرياضيات ، ويمكن أن تقدم على أنها تجمع من الأشياء التي تشترك بصفة أو أكثر ، ونسمي الأشياء المكونة للمجموعة بعناصر المجموعة (elements of set) . ويرمز للمجموعات بأحرف كبيرة $A , B , C ,..., X , Y , Z$ ، ولعناصر هذه المجموعات بأحرف صغيرة مثل : $a , b , c , \ldots , x , y , z$.

إذا كانت A مجموعة الأحرف الثلاثة الأولى من أحرف الأبجدية الإنكليزية فإننا نكتب $A = \{ a , b , c \}$ ، والقوسان الكبيران { . . . } يرمزان للمجموعة ، حيث نكتب داخلهما إما عناصر تلك المجموعة ، أو بعض عناصر المجموعة الدالة على بقية العناصر ، مثل المجموعة B والتي تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 100 ، والتي نعبر عنها بالشكل $B = \{ 1 , 2 , \ldots , 99 \}$ ، أو نكتب صفات عناصر تلك المجموعة (بالرمز أو العبارة) داخل القوسين ، مثل $B = \{ x \mid 1 \leq x < 100$, x عدد صحيح $\}$ ، حيث الخط | يقرأ إما " حيث " أو " التي " . يمكن التعبير عن المجموعة B بطرق مختلفة مستخدمين رموز جبرية أخرى مثل $\in$, $\notin$ ، فإذا كانت A مجموعة و a عنصراً منها فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $a \in A$ ، ونقرأ ذلك : العنصر a ينتمي إلى المجموعة A ، أو العنصر a من المجموعة A ،وإذا كان b ليس عنصراً من A فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $b \notin A$ ، ونقرأ ذلك :

العنصر b لا ينتمي إلى المجموعة A ، أو العنصر b ليس من المجموعة A . مثال ذلك :

في المجموعتين A , B الواردتين سابقاً لدينا :

$$a \in A \ , \ 1 \notin A \ , \ 1 \in B \ , \ a \notin B \ .$$

تعاريف :

لتكن A , B مجموعتين عندها :

- إذا كان كل عنصر من المجموعة A ينتمي إلى المجموعة B ، فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $A \subseteq B$ ، ونقرأ ذلك :

المجموعة A جزئية من المجموعة B (أو اختصاراً A جزء من B) .

أو المجموعة A محتواة في المجموعة B .

أو المجموعة B تحوي المجموعة A .

- إذا وجد على الأقل عنصراً واحداً من المجموعة A لا ينتمي إلى المجموعة B ، فإننا نعبر عن هذه الحالة بالرمز $A \not\subset B$ ، ونقرأ ذلك :

المجموعة A ليست جزئية من المجموعة B (أو اختصاراً A ليست جزءاً من B) .

أو المجموعة A غير محتواة في المجموعة B .

أو المجموعة B لا تحوي المجموعة A .

- نقول عن المجموعتين A , B أنهما متساويتان ونكتب $A = B$ ، إذا وفقط إذا كانت كل منهما محتواة في الأخرى ، وبالتالي بالتعريف لدينا التكافؤ :

$$A = B \iff A \subseteq B \ , \ B \subseteq A \ .$$

وهذا التكافؤ كثير الاستخدام عند البرهان على تساوي مجموعتين .

2 . § - العمليات على المجموعات :

2.1 . العمليات : ($\cap$, $\cup$, -)

تعاريف :

- تقاطع مجموعتين A و B : هو مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين A , B ، أي العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A والمجموعة B معاً .

يرمز له بالرمز $A\cap B$ ، ويقرأ تقاطع المجموعتين A و B (أو اختصاراً A تقاطع B) ونكتب :

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$$ (حيث الرمز ($\wedge$) يقرأ (و))

- اجتماع مجموعتين A و B : هو مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو إلى المجموعة B . ويرمز له بالرمز $A\cup B$ ، ويقرأ اجتماع (اتحاد) المجموعتين A و B (أو اختصاراً A اجتماع B) ونكتب :

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$$ (حيث الرمز ($\vee$) يقرأ (أو))

- فرق مجموعتين A و B : هو مجموعة العناصر المنتمية إلى المجموعة A والتي لا تنتمي إلى المجموعة B . ويرمز له بالرمز $A-B$ أو $A\setminus B$ ، ويقرأ A فرق B ، ونكتب :

$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\} .$$

- متمم مجموعة : إذا كان X , A مجوعتين ، وكانت $A\subseteq X$ ، فإننا نسمي الفرق $X-A$ متمم A في X (Complement of A in X) ، ويرمز لهذا المتمم بعدة رموز مثل : C_XA أو A' . وسوف نعتمد غالباً الرمز $X-A$.

- المجموعة الخالية (The empty set) : هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويرمز لها $\varnothing$ ، ويقرأ (فاي) .

تعتبر جميع المجموعات الخالية متساوية ، كما تعتبر المجموعة الخالية جزئية من أي مجموعة أخرى .

- **ملاحظة** : يجب التفريق بين مفهوم العنصر المنتمي إلى مجموعة ، ومفهوم المجموعة الجزئية من مجموعة ، فمثلاً : العنصر x ينتمي إلى المجموعة A إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{x\}$ جزئية من المجموعة A ، أي أن :

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$$

2.2 . المجموعات العددية :

تعتبر المجوعات العددية من أهم المجموعات التي سنستخدمها في هذا الكتاب ، ويعطى لكل مجموعة رمز خاص :

- $\mathbb{N}$ ترمز لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (set of positive integers) أي أن :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} .$$

تسمى هذه المجموعة أيضاً مجموعة الأعداد الطبيعية .

- $\mathbb{Z}$ ترمز لمجموعة الأعداد الصحيحة (set of integers) أي أن :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} .$$

- $\mathbb{Q}$ ترمز لمجموعة الأعداد النسبية (set of rational numbers) ، أي أن :

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} ; b \neq 0 \} .$$

- $\mathbb{P}$ ترمز لمجموعة الأعداد غير النسبية (set of irrational numbers) ، مثل $\pm\sqrt{2}$.

- $\mathbb{R}$ ترمز لمجموعة الأعداد الحقيقية (set of real numbers) ، وهي تمثل : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{P}$.

- $\mathbb{C}$ ترمز لمجموعة الأعداد المركبة (set of complex numbers) ، أي أن :

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \} .$$

سوف نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالرمز $\mathbb{R}^+$ ، وبالرمز $\mathbb{R}^-$ لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة . وبالمثل نعرف كل من : $\mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+$ ، و نلاحظ أن $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$.

2.3. الاجتماع (الاتحاد) والتقاطع لأكثر من مجموعتين :

إذا كان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ عدداً منتهياً من المجموعات الكيفية ، فإن مجموعة العناصر x التي تنتمي إلى واحد من المجموعات السابقة – على الأقل – يرمز لها بالرمز $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (والذي هو اختصار للرمز $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$) ، وتسمى مجموعة الاجتماع للمجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. أي أن :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$$

كذلك مجموعة العناصر x التي تنتمي إلى كل مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ، تسمى مجموعة التقاطع لهذه المجموعات ويرمز لها بالرمز $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (وهو اختصار للرمز $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$) ، أي أن :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid x \in A_i \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n \} \ .$$

– يمكن تعميم مفهومي الاجتماع والتقاطع على عدد غير منته من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ،(التي نرمز لها اختصاراً $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ أو $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ونسميها أسرة غير منتهية من المجموعات) ، كما يلي :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \vee \ldots \}$$

ويرمز للاجتماع غير المنتهي أيضاً بالرمز :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{ x \mid \exists \alpha \in \mathbb{N} ; x \in A_\alpha \} \ .$$

– أما التقاطع غير المنتهي فهو :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \wedge \ldots \}$$
$$= \{ x \mid x \in A_i \ \ \forall i = 1, 2, \ldots \} \ .$$

ويرمز له أيضاً بالرمز

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A = \{ x \mid x \in A_i \quad \forall \quad i \in \mathbb{N} \} \quad .$$

فمثلاً إذا كانت $A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ، حيث n عدد طبيعي فإنه من الواضح أن :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =]-1, 1[\quad .$$

وأنه إذا كانت $B_n = \{1, 2, ..., n\}$ فإن :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{1\} \quad .$$

- يمكن أن نجمّع كل الرموز السابقة للاجتماع أو التقاطع برمز واحد ، وذلك بأن نعرف مجموعة الأدلة I لأسرة المجموعات المفروضة وذلك بأن نكتب $\{A_i\}_{i\in I}$ ، حيث I قد تكون منتهية أو غير منتهية ، وقد ترقم بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو غيرها من المجموعات ، (وهذا المفهوم سوف نعبر عنه لاحقاً بقابلية العد أو عدمها)، وفي هذه الحالة نكتب :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{ x \mid \exists \ \alpha \in I \ , \ x \in A_\alpha \}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{ x \mid x \in A_i \ \ \forall \ i \in I \} \ .$$

- **تعريف** : نقول عن المجموعة A أنها تتقاطع مع المجموعة B إذا كان $A \cap B \neq \varnothing$ ، أما في حالة $A \cap B = \varnothing$ ، فإننا نقول عن المجموعتين A , B أنهما منفصلتان (disjoint) .

وبشكل عام نقول عن أسرة من المجموعات F أنها منفصلة مثنى مثنى إذا وفقط إذا حققت:

$$\forall A, B \in F \Rightarrow A \cap B = \varnothing \quad .$$

2.4 . خواص العمليات على المجموعات :

من أهم خواص العمليات على المجموعات ما يلي :

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

(b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

(c) $A \cup B = A \cup (B - A)$.

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow C \subseteq A$.

لنبرهن العلاقة (d) :

لبرهان العلاقة (d) علينا برهان الاقتضاء ($\Leftarrow$) وعكسه ($\Rightarrow$) :

1- برهان ($\Leftarrow$) :

نفرض أن $C \subseteq A$ ونبرهن المساواة $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

وذلك بإثبات الاحتواء للطرف الأيسر في الأيمن ثم الاحتواء المعاكس :

$$\forall \ x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$
$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$
$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$
$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$$

حيث اعتمدنا في الخطوة الأخيرة على الخاصية (b) وذلك لأن

$$. \ A \cap C = C \Leftarrow C \subseteq A$$

بخطوات معاكسة وباستخدام نفس الخاصة (b) نحصل على الاحتواء المعاكس ومنه نحصل على المساواة المطلوبة .

2- برهان ($\Rightarrow$) : نفرض أن: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ، ولنبرهن على أن $C \subseteq A$:

$$\forall \ x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$$
$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in A$$
$$\Rightarrow C \subseteq A \ .$$

2.5. **مبرهنة** (1) : (**قانوني ديمورغان** De Morgan's laws)

لتكن X مجموعة و $\{A\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من المجموعة X

(أي أن $A_i \subseteq X \ \forall i \in I$) عند ذلك يتحقق :

(a) $X-(\bigcup_{i\in I}A_i) = \bigcap_{i\in I}(X-A_i)$.

ونقرأ ذلك من اليسار إلى اليمين : متمم الاجتماع يساوي تقاطع المتممات .

(b) $X-(\bigcap_{i\in I}A_i) = \bigcup_{i\in I}(X-A_i)$.

ونقرأ ذلك من اليسار إلى اليمين : متمم التقاطع يساوي اجتماع المتممات .

البرهان :

(a)

$$\forall\ x\in X-(\bigcup_{i\in I}A_i) \Rightarrow x\in X \wedge x\notin \bigcup_{i\in I}A_i$$

$$\Rightarrow x\in X \wedge x\notin A_i \quad \forall\ i\in I \Rightarrow x\in (X-A_i)\ \forall i\in I$$

$$\Rightarrow x\in \bigcap_{i\in I}(X-A_i) \Rightarrow X-(\bigcup_{i\in I}A_i)\subseteq \bigcap_{i\in I}(X-A_i)$$

أما برهان الاحتواء المعاكس يتم بالتحقق من أن جميع الخطوات المعاكسة في البرهان السابق صحيحة ، ونحصل على الاحتواء $\bigcap_{i\in I}(X-A_i)\subseteq X-(\bigcup_{i\in I}A_i)$.

ومن الاحتواءين نحصل على المساواة المطلوبة .

(b) يتم برهان هذه الفقرة بنفس طريقة برهان (a) ، ويترك كتمرين للدارس .

2.6 . **مبرهنة (2) : (قانوني التوزيع)**

إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من المجموعة X وكانت A مجموعة جزئية من X فإنه يتحقق :

(a) $A\cap(\bigcup_{i\in I}A_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$.

(b) $A\cup(\bigcap_{i\in I}A_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$.

البرهان :

لنبرهن (b) ونترك (a) كتمرين لأنه يتم بنفس الطريقة .

$$\forall\ x\in A\cup(\bigcap_{i\in I}A_i) \Rightarrow x\in A \vee x\in\bigcap_{i\in I}A_i$$

$$\Rightarrow x \in A \vee x \in A_i \quad \forall i \in I \Rightarrow (x \in A \vee x \in A_i) \quad \forall i \in I$$
$$\Rightarrow x \in A \bigcup A_i \qquad \forall i \in I \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (A \bigcup A_i) .$$

وبذلك نكون قد برهنا صحة الاحتــواء $\bigcap_{i \in I} (A \bigcup A_i) \subseteq A \bigcup (\bigcap_{i \in I} A_i)$ ،

ويتم برهان الاحتواء المعاكس بالتحقق من جميع الخطــوات العكســية في البرهــان السابق ، وبعدها نحصل على المساواة .

2.7 . مبرهنة (3) :

إذا كانت A و Y مجموعتين جزئيتين من المجموعة X فإنه يتحقق :

$$Y - A = (X - A) \cap Y .$$

البرهان :

لنبرهن الاحتواء $(\subseteq)$:

$$\forall \; x \in Y - A \Rightarrow x \in Y \wedge x \notin A \Rightarrow x \in Y \subseteq X \wedge x \notin A$$
$$\Rightarrow x \in Y \wedge x \in X - A \Rightarrow x \in (X - A) \bigcap Y \Rightarrow Y - A \subseteq (X - A) \bigcap Y$$

لنبرهن الاحتواء المعاكس $(\supseteq)$:

$$\forall x \in (X - A) \bigcap Y \Rightarrow x \in X - A \wedge x \in Y \Rightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \wedge x \in Y$$
$$\Rightarrow x \in Y \wedge x \notin A \Rightarrow x \in Y - A \Rightarrow (X - A) \bigcap Y \subseteq Y - A .$$

ومن الاحتواءين نحصل على المساواة المطلوبة .

2.8 ملاحظة :

في الحالة الخاصــة عنــدما $A \subseteq Y$ ، في المبرهنــة الســابقة ، أي عنــدما $A \subseteq Y \subseteq X$ فإننا نستطيع قراءة المساواة $Y - A = (X - A) \bigcap Y$ بلغة المــتمم كما يلي : متمم A في Y يساوي تقاطع Y مع متمم A في X . وهذه القراءة مفيدة جداً في الفضاءات الجزئية كما سنرى لاحقاً .

3 . § – الضرب الديكارتي – العلاقات

1 . 3 . تعريف (أزواج مرتبة)

(a) لتكن A , B مجموعتين ، إذا كان a عنصراً من A و b عنصراً من B فإننا نسمي (a , b) زوجاً مرتباً ، مركبته الأولى a من A ومركبته الثانية b من B .

(b) إذا كان (c , d) و (a , b) زوجين مرتبين بحيث $a , c \in A \wedge b , d \in B$ فإننا نعرف المساواة بين الزوجين المرتبين السابقين ونكتب :

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

2 . 3 تعريف (الضرب الديكارتي)

لتكن A , B مجموعتين نعرف المجموعة $A \times B$ ، والتي نسميها مجموعة الضرب الديكارتي للمجموعة A بالمجموعة B ، بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى من المجموعة A ومركبتها الثانية من المجموعة B .

أي أن :

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

مثال :

إذا كانت :

$B = \{ 1 , 2 , 3 \}$ و $A = \{ a , b \}$ فإن

$$A \times B = \{ (a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3) \}$$

$$B \times A = \{ (1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b) \}$$

من الواضح أن $A \times B \neq B \times A$.

– يمكن تعميم كل ما تقدم على أكثر من مجموعتين ، فعندما يكون لدينا ثلاث مجموعات فإننا نتكلم عن ثلاثيات مرتبة وعندما يكون لدينا أربع مجموعات فإننا

نتكلم عن رباعيات مرتبة وهكذا عندما يكون لدينا m مجموعة فإننا نتكلم عن ميميات مرتبة ثم عن مجموعة الضرب الديكارتي لهذه المجموعات .

فإذا كانت $A_1 , A_2 , \ldots , A_m$ مجموعات عددها m . فإن كل عنصر من الشكل $(a_1 , a_2 , \ldots , a_m)$ وحيث مركبته الأولى a_1 من A_1 ومركبته الثانية a_2 من A_2 وهكذا مركبته الميمية a_m من A_m ، يسمى ميمية مرتبة . (m – tuples) أو بشكل مختصر ميمية .

فإذا كانت $(b_1 , b_2 , \ldots , b_m)$ و $(a_1 , a_2 , \ldots , a_m)$ ميميتين بحيث a_1 , b_1 من نفس المجموعة A_1 و a_2 , b_2 من نفس المجموعة A_2 . . . a_m , b_m من نفس المجموعة A_m فإننا نعرف المساواة بين هاتين الميميتين كما يلي :

$$(a_1 , a_2 , \ldots , a_m) = (b_1 , b_2 , \ldots , b_m)$$
$$\Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_m = b_m$$

ثم نعرف الضرب الديكارتي للمجموعات $A_1 , A_2 , \ldots , A_m$ (ونقرأ من اليسار إلى اليمين) بأنه مجموعة كل الميميات المرتبة ، التي مركباتها الأولى من A_1 ومركباتها الثانية من A_2 . . . ومركباتها الأخيرة من A_m . والتي نرمز لها بالرمز $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. أي أن :

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m =$$
$$\{ (a_1 , a_2 , \ldots , a_m) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_m \in A_m \}$$

والتي يمكن أن تكتب بالشكل التالي أيضاً :

$$= \{ (a_1 , a_2 , \ldots , a_m) \mid a_i \in A_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots , m \}$$

ونرمز أحياناً للضرب الديكارتي بالرمز $\prod_{i=1}^{m} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$.

في الحالة الخاصة عندما تكون جميع المجموعات $A_1 , A_2 , \ldots , A_m$ متساوية وتساوي المجموعة A فإننا نرمز للضرب الديكارتي للمجموعة A في نفسها m مرة بالرمز A^m . أي أن :

$$A^m = A \times A \times \ldots \times A \quad (\text{مرة } m)$$

فمثلاً إذا كانت $A = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، التي يمكن تمثيلها على محور الأعداد الحقيقية ، فإننا نجد أن $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ، تمثل المستوي ، كما أن : $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (m مرة) تمثل الفضاء الإقليدي . وإذا كانت $I = [0, 1]$ ، المجال المغلق من محور الأعداد الحقيقية ، فإن I^2 تمثل مربعاً طول ضلعه الواحد في المستوي $\mathbb{R}^2$ ، وإذا كانت $J = [0, 2]$ فإن $I \times J$ تمثل مستطيلاً عرضه 1 وطوله 2 وأن $J \times I$ تمثل مستطيلاً أيضاً من المستوي $\mathbb{R}^2$ طوله 2 و عرضه 1 ؛ ولكن $I \times J \neq J \times I$. وإذا رمزنا بـ S^1 للدائرة الأحادية من المستوي $\mathbb{R}^2$ (أي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها الواحد) فإن مجموعة الضرب الديكارتي $S \times I$ تمثل اسطوانة في $\mathbb{R}^3$.

3 . 3 تعريف : (العلاقات Relations)

لتكن $A \times B$ مجموعة الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B ، نسمي كل مجموعة جزئية R من المجموعة $A \times B$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B . أي أن :

$$R \text{ علاقة من المجموعة } A \text{ إلى المجموعة } B \Leftrightarrow R \subseteq A \times B$$

وفي الحالة الخاصة عندما $B = A$ فإن كل مجموعة جزئية R من المجموعة $A \times A = A^2$ تسمى علاقة معرفة على المجموعة A ، بدلاً من عبارة " علاقة من A إلى A " ، أو علاقة معرفة في A . أي أن :

$$R \text{ علاقة معرفة على (أو في) المجموعة } A \Leftrightarrow R \subseteq A \times A$$

وهذا النوع من العلاقات الخاصة سوف يكون الأساس في تعريف علاقتين هامتين على المجموعات ، وهما علاقتي التكافؤ (equeivalence relation) والترتيب (order relation) في حين أن العلاقة من مجموعة إلى أخرى ستكون الأساس في تعريف التطبيقات (أو التوابع) mappings (or functions) .

فإذا كان (a , b) عنصراً من العلاقة R فإننا نكتب a R b ونقرأ ذلك a يرتبط

بالعلاقة R مع b أو أن a يرتبط مع b بالعلاقة R . أي أنـه لـدينا التكـافؤ الرمزي :

$$(a,b) \in R \subseteq A \times B \Leftrightarrow a\,R\,b$$

و إذا كان $(a,b) \notin R$ فإننا نكتب $a \not R\, b$. وعادة نعرف العلاقة R من A إلى B بتعريف $a\,R\,b$ ، وعند ذلك نكتب العلاقة R بالشكل :

$$R = \{(a,b) \mid a \in A\ ,\ b \in B\ ,\ a\,R\,b\} = \{(a,b) \in A \times B \mid a\,R\,b\}$$

ونسمي الكتابة السابقة بيان العلاقة R . فمثلاً

نعرف على المجموعتين $A = \{1,2\}\ ,\ B = \{2,4,6\}$ علاقة R من A إلى B كما يلي :

$$b = 2a \Leftrightarrow a\,R\,b$$

وفي هذه الحالة نستطيع أن نكتب بيان العلاقة R بالشكل :

$$R = \{(a,b) \in A \times B \mid a\,R\,b\} = \{(a,b) \in A \times B \mid b = 2a\}$$

وبحساب $A \times B$ وأخذ العناصر التي فيها المركبة الثانية تساوي ضعفي المركبة الأولى نجد أن :

$$R = \{(1,2)\ ,\ (2,4)\}$$

بنفس الطريقة نجد أنه إذا عرفنا علاقة R على مجموعة الأعداد الصـحيحة $\mathbb{Z}$ بالشكل :

$b = 2a \Leftrightarrow a\,R\,b$ وذلك من أجل كل a, b من $\mathbb{Z}$.

فإننا نجد أن بيان هذه العلاقة R هي :

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a\,R\,b\} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b = 2a\}$$
$$= \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

3 . 4 علاقات التكافؤ (Equivalence relations)

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة A (أي أن $R \subseteq A^2$) . نقول عن العلاقة R أنها انعكاسية(reflexive) إذا وفقط إذا كان : $\forall a \in A\ \ a\,R\,a$.

ونقول عن العلاقة R أنها تناظرية (symmetric) إذا وفقط إذا كان : من أجل أي عنصرين a , b من A بحيث $a \, R \, b$ فإن $b \, R \, a$.

وبالتالي :

العلاقة R المعرفة على A تناظرية $\Leftrightarrow$ $(\forall a , b \in A \; ; \; a R b \Rightarrow b R a)$

ونقول عن العلاقة R أنها لا تناظرية (antisymmetric) إذا وفقط إذا كان : من أجل أي عنصرين a , b من A بحيث $a R b \wedge b R a$ فإنه يتحقق $a = b$ ،

أي أن :

العلاقة R المعرفة على A ،لاتناظرية $\Leftrightarrow$ $(\forall a , b \in A \; ; \; a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b)$

وأخيراً نقول عن العلاقة R المعرفة على المجموعة A أنها متعدية أو انتقالية (transitive) إذا وفقط إذا من أجل أي ثلاثة عناصر $a , b , c \in A$ ، وإذا كان $a R b \wedge b R c$ فإنه يتحقق $a R c$. أي أن :

العلاقة R المعرفة على A متعدية $\Leftrightarrow$ $(\forall a , b , c \in A \; ; \; a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c)$

مثال :

- علاقة أصغر تماماً ($<$) المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي علاقة متعدية لكنها ليست انعكاسية وليست تناظرية .
- إن علاقة أصغر أو يساوي ($\leq$) المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي علاقة انعكاسية و لا تناظرية و متعدية .
- إن علاقة لا يساوي ($\neq$) المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي علاقة تناظرية فقط .

3 . 5 تعريف (علاقة التكافؤ)

نقول عن العلاقة R المعرفة على المجموعة A أنها علاقة تكافؤ ، إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية . وفي هذه الحالة إذا كان $a \, R \, b$ فإننا نقرأ ذلك : العنصر a يكافئ العنصر b . بدلاً من a يرتبط مع b بالعلاقة R .

مثال :

لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كما يلي :
من أجل كل عنصرين a , b من $\mathbb{Z}$ فإن a R b إذا وفقط إذا كان الفرق بينهما (a − b) عدد زوجي ، أي أن :

$$aRb \Leftrightarrow a - b = 2m \quad ; \quad m \in \mathbb{Z}$$

نلاحظ أولاً أنه مهما كان العدد الصحيح a فإن

$a - a = 0 = 2(0) \quad ; \quad 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow aRb \Rightarrow$ R انعكاسية

ونلاحظ ثانياً أنه :

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \; ; \; aRb \Rightarrow a - b = 2m \; ; m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow b - a = 2(-m); m \in \mathbb{Z} \Rightarrow bRa \Rightarrow$ R تناظرية

ونلاحظ ثالثاً أن :

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \; ; aRb \wedge bRc \Rightarrow a - b = 2m \wedge b - c = 2n$
$; n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) = 2(m + n) \;\; ;$
$(m + n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow aRc \Rightarrow$ R متعدية

مما تقدم نجد أن R هي علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathbb{Z}$.

3 . 6 . تعريف (صف تكافؤ : equivalence class)

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة A ، فإننا نعرف صف تكافؤ العنصر a من A بأنه مجموعة كل العناصر x من A المكافئة للعنصر a ونرمز لهذا الصف بالرمز [a] ، أي أن :

$$[a] = \{ x \in A \mid x R a \} \quad \ldots . (1)$$

من تعريف صف التكافؤ ينتج أن :

(1) $a \in [a] \;\; \forall \; a \in A$ ، وذلك لأن aRa دوماً .

(2) $xRa \Leftrightarrow x \in [a]$

في المثال السابق حيث علاقة التكافؤ R المعرفة على المجموعة $\mathbb{Z}$ كما يلي :

$$a R b \Leftrightarrow a - b = 2m \; ; \; m \in \mathbb{Z}$$

نلاحظ أن صف تكافؤ العنصر a من $\mathbb{Z}$ هو :

$$[a] = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x R a \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x - a = 2m \; ; \; m \in \mathbb{Z} \}$$

ومنه :

$$[a] = \{ x = a + 2m \mid m \in \mathbb{Z} \} \quad \ldots . (2)$$

فإذا كان $a = 0$ فإن صف التكافؤ $[0]$ ، نحصل عليه بوضع $a = 0$ في العلاقة السابقة (2) فنجد :

$$[0] = \{ x = 2m \mid m \in \mathbb{Z} \} = 2\mathbb{Z}$$

وهي مجموعة كل الأعداد الصحيحة الزوجية . كما أن صف تكافؤ العدد الصحيح $a = 1$ هو :

$$[1] = \{ x = 1 + 2m \mid m \in \mathbb{Z} \} = 1 + 2\mathbb{Z}$$

وهي مجموعة كل الأعداد الصحيحة الفردية .

على الدارس التأكد (بحسابات بسيطة) صحة ما يلي :

$$\ldots . = [-4] = [-2] = [0] = [2] = [4] = \ldots .$$

$$\ldots . = [-3] = [-1] = [1] = [3] = [5] = \ldots .$$

$$[0] \cap [1] = \varnothing$$

$$[0] \cup [1] = \mathbb{Z}$$

3.7 . تعريف (مجموعة القسمة)

إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن المجموعة A / R ترمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ لعناصر A والتي نسميها مجموعة القسمة للمجموعة A على علاقة التكافؤ R . أي أن :

$$A / R = \{ [a] \mid a \in A \} \ldots (3)$$

فمثلاً : بالعودة إلى المثال السابق نجد أن مجموعة القسمة $\mathbb{Z}/R$ تتكون فقط من عنصرين مختلفين هما : $\mathbb{Z}/R = \{[0], [1]\}$

3.8 . تمارين :

تمرين (1) :

لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ اكتب عناصر المجموعة $A^2 = A \times A$

واستنتج أن كل من :

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\} ;$$

$$R_2 = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (3,3)\}$$

هي علاقة معرفة على A . ثم بين أي من هاتين العلاقتين تكون علاقة تكافؤ . ثم أوجد مجموعة القسمة لـ A عليها .

تمرين (2) :

لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كما يلي :

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z} ; aRb \Leftrightarrow a - b = 5m ; m \in \mathbb{Z})$$

برهن على أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$ ثم أوجد مجموعة القسمة $\mathbb{Z}/R$.

3.9 . (خواص صفوف التكافؤ)

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة A فإنه من أجل أي عنصرين a, b من A يتحقق :

$$(1) \quad aRb \Leftrightarrow [a] = [b]$$

$$(2) \quad a \not R b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$$

البرهان :

(1) لنفرض أولاً أن $[a] = [b]$ ولنبرهن على أن aRb .

بما أن R علاقة تكافؤ على A فإن aRa من أجل كل a من A ، ومنه فإن $a \in [a]$ ، وبما أن $[a] = [b]$ فإن aRb .

لنبرهن ثانياً العكس أي نفرض أن $a R b$ ونبرهن على أن $[a] = [b]$ وذلك بإثبات الاحتواء وعكسه :

فإذا كان x عنصر ما من $[a]$ فإن $x R a$ ، وبما أن $a R b$ فرضاً ، فإنه حسب خاصة التعدي . نجد أن $x R b$ وبالتالي $x \in [b]$. وبذلك نحصل على الاحتواء $[a] \subseteq [b]$.

وبنفس الطريقة نجد أنه إذا كان x عنصراً من $[b]$ فإن $x R b$ ، وبما أن $a R b$ فرضاً فإن $b R a$. لأن العلاقة R تناظرية ، وبما أنها متعدية أيضاً فإننا نحصل على أن $x R a$ ، أي أن $x \in [a]$. ومنه نحصل على الاحتواء $[b] \subseteq [a]$ ، وبالتالي على المساواة المطلوبة $[a] = [b]$.

(2) لنبرهن أولاً أنه إذا كانت $[a] \cap [b] = \varnothing$ فإن $a \not R b$. لذلك نفرض جدلاً أن $a R b$ وبالتالي حسب (1) نحصل على المساواة $[a] = [b]$ ، وبما أن a عنصراً من $[a]$ دوماً فإن a يكون عنصراً من $[b]$ أيضاً وبالتالي a عنصراً من التقاطع $[a] \cap [b]$ ، وهذا يتناقض مع الفرض . وبالتالي الفرض الجدلي بأن $a R b$ غير صحيح إذاً $a \not R b$.

لنبرهن ثانياً العكس : نفرض أن $a \not R b$ ونبرهن على أن $[a] \cap [b] = \varnothing$. لذلك نفرض جدلاً أن $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ وبالتالي يوجد عنصر على الأقل x من هذا التقاطع أي أن :

$$x \in [a] \wedge x \in [b] \Rightarrow x R a \wedge x R b \Rightarrow a R x \wedge x R b \Rightarrow a R b$$

وهذا يتناقض مع الفرض بأن $a \not R b$. إذاً الفرض الجدلي ليس صحيحاً ، وبالتالي فإن $[a] \cap [b] = \varnothing$.

3 . 10 . نتيجة (علاقة التكافؤ تمهّد لمفهوم تجزئة مجموعة)

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة غير الخالية A فإن أي عنصرين a , b من A إما أن يرتبطا بالعلاقة R (أي $a R b$) أو لا يرتبطان ، وبالتالي حسب المبرهنة السابقة ، من أجل أي عنصرين a , b من A إما أن يكون $[a] = [b]$ أو أن $[a] \cap [b] = \varnothing$ وبالتالي فإن صفوف التكافؤ المختلفة ، لعلاقة التكافؤ R المعرفة على A ، تشكل مجموعات جزئية غير خالية من A ، وغير متقاطعة مثنى مثنى واجتماعها يساوي A . وهذا سيكون بمثابة مثال لمفهوم تجزئة مجموعة إلى مجموعات جزئية غير خالية وغير متقاطعة مثنى مثنى ، الذي نقدمه بالتعريف التالي :

3 . 11 . تعريف (تجزئة مجموعة partiton)

لتكن A مجموعة غير خالية . كل أسرة $\{ A_i \}$ من المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة A تسمى تجزئة للمجموعة A إذا حققت :

(1) تقاطع أي عنصرين من الأسرة هو $\varnothing$ ، (وقد عبرنا عن ذلك بقولنا أن عناصر الأسرة منفصلة مثنى مثنى) .

(2)الإجتماع لعناصر الأسرة يساوي A .

نسمي عناصر الأسرة $\{ A_i \}$ عناصر التجزئة للمجموعة A ، أو أجزاء A .

يمكن تقديم مفهوم التجزئة لمجموعة غير خالية A بشكل مكافئ بقولنا إن : التجزئة لمجموعة غير خالية A هي ما ينتج عن تقسيم أو تقطيع هذه المجموعة إلى مجموعات جزئية غير خالية بحيث كل عنصر من A ينتمي إلى مجموعة جزئية واحدة فقط من هذه المجموعات الجزئية .

3 . 12 . مبرهنة : (التكافؤ بين تجزئة مجموعة وعلاقة التكافؤ على نفس المجموعة)

لتكن A مجموعة غير خالية . إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على A فإن A/R تكون تجزئة للمجموعة A ، وبالعكس إذا كانت $\{ A_i \}$ تجزئة للمجموعة A

فإنه توجد علاقة تكافؤ R على A بحيث $A/R = \{A_i\}$.

البرهان :

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة غير الخالية A فإنه حسب النتيجة (3 . 10) عناصر A/R ، وهي صفوف التكافؤ المختلفة الجزئية من A وفق علاقة التكافؤ R ، تكون غير متقاطعة مثنى مثنى ، واجتماعها يساوي A ، وبالتالي فإن الأسرة A/R تشكل تجزئة للمجموعة A .

وبالعكس إذا كانت $\{A_i\}$ تجزئة للمجموعة A فإننا نستطيع تعريف علاقة R على المجموعة A كما يلي :

من أجل أي عنصرين b ، a من A يكون

$a\,R\,b \Leftrightarrow a, b$ ينتميان لنفس عنصر التجزئة A_i .

إن R تكون علاقة تكافؤ على A لأنه أولاً مهما كان العنصر a من A فإن a, a ينتميان إلى نفس عنصر التجزئة وبالتالي $a\,R\,a$ ، أي أن R انعكاسية . وثانياً إذا كان $a\,R\,b$ فإن العنصرين a, b ينتميان لنفس عنصر التجزئة وبالتالي فإن $b\,R\,a$، أي أن R تناظرية ، وثالثاً إذا كان $a\,R\,b$ و $b\,R\,c$ فإنه حسب تعريف R ، العناصر الثلاثة a, b, c يجب أن تنتمي إلى نفس عنصر التجزئة أي أن العنصرين a , c ينتميان إلى نفس عنصر التجزئة وبالتالي $a\,R\,c$ ، أي أن R متعدية .

ومن تعريف R ينتج مباشرة أن صفوف تكافئها هي نفس عناصر التجزئة أي أن $A/R = \{A_i\}$.

3 . 13 . أمثلة :

(1) . إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ فإن كل من الأسر التالية :

$$F_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \ , \ F_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\} \ ,$$
$$F_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\} \ , \quad F_4 = \{A\}$$

تكون تجزئة للمجموعة A . لأن كل منها عناصره مجموعات جزئية من A ، وغير

متقاطعة مثنى مثنى ، واجتماعها A .

(2) . نستطيع تجزئة مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين هما مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ ومجموعة الأعداد غير النسبية P . أي أن الأسرة { Q , P } هي تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

(3) . نستطيع تجزئة مجموعة الأعداد الحقيقية بعدد كبير من الطرق ، فبالإضافة إلى المثال السابق نلاحظ أن مجموعة المجالات المغلقة من الشكل $[\,n , n+1\,[$ حيث n أي عدد صحيح ، والتي كل منها جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، تشكل تجزئة للمجموعة $\mathbb{R}$ ، لأنه من جهة أولى هذه المجالات منفصلة مثنى مثنى ، ومن جهة ثانية اجتماعها يساوي $\mathbb{R}$ ، أي أن $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [\,n , n+1\,[$ ، لأنه من الواضح أن الاجتماع محتوى في $\mathbb{R}$ ، والاحتواء المعاكس يتم بأخذ أي عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ونميز حالتين (1) إذا كان x عدداً صحيحاً فإن $x \in [\,x , x+1\,[$ وبالتالي يكون عنصراً من الاجتماع $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [\,n , n+1\,[$ ، (2) أما إذا كان العدد الحقيقي x ليس صحيحاً فإنه يوجد حتماً عدد صحيح n واقع بين العددين الحقيقين x و $x-1$ أي يحقق : $x-1 < n < x$ وبالتالي فإن $x \in [\,n , n+1\,[$ وعليه فإن x يكون من الاجتماع .

(4) . إذا كانت A أية مجموعة غير خالية فإنه بأخذ مجموعة جزئية غير خالية A_1 من A ومختلفة عنها نحصل على التجزئة $\{ A_1 , A - A_1 \}$ ، وبأخذ مجموعتين جزئيتين A_1 , A_2 من A غير خاليتين ومنفصلتين واجتماعها لا يساوي A فإننا نحصل على التجزئة $\{ A_1 , A_2 , A - \{ A_1 \cup A_2 \}$

إن المبرهنة التالية تعتمد في برهانها مفهوم التجزئة والتطبيقات . وسوف نقدمها هنا بدون برهان وهي أساسية جداً عملياً ونظرياً في تقديم الأعداد القابلة للعد والأعداد الأصلية (Cardinals) .

3.14 . مبرهنة (شرودر – بيرنستين the Schroeder - Bernstein وبعضهم يسميها كانتور – بيرنسيين)

إذا كانت X , Y مجموعتين ، كل منهما تقابلية مع مجموعة جزئية من الأخرى ، عن ذلك تكون المجموعتان X , Y تقابليتان (وحيث عبارة تقابليتان تعني وجود تقابل بينهما ، أي تطبيق متباين وغامر وسوف نعبر عن ذلك بقولنا إن المجموعتين X , Y متكافئتان عددياً)

البرهان : للبرهان انظر [1]

3.15 . علاقات الترتيب (order relations)

3.16 . تعريف (علاقة ترتيب جزئي ، مجموعة مرتبة جزئياً) .

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة غير الخالية A (أي أن $R \subseteq A \times A$) نقول عن العلاقة R أنها علاقة ترتيب جزئي على A (a partial order) إذا كانت العلاقة R انعكاسية و لا تناظرية ومتعدية .

ونقول عن المجموعة A المعرف عليها علاقة ترتيب جزئي بأنها مجموعة مرتبة جزئياً (a partially ordered set) ومن الواضح أن كل مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة مرتبة جزئياً تكون مرتبة جزئياً بنفس علاقة الترتيب .

3.17 . أمثلة :

مثال (1) . إن علاقة أصغر أو يساوي ($\leq$) المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. هي علاقة ترتيب جزئي ، وتعتبر النموذج لعلاقات الترتيب الجزئية ، لذلك نرمز عادة لأية علاقة ترتيب جزئي على أية مجموعة غير خالية بالرمز $\leq$.

مثال (2) . نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ علاقة $\leq$ ؛ من أجل كل عددين طبيعيين a , b يكون :

$$a \leq b \Leftrightarrow a \text{ يقسم } b$$

لاحظ أولاً أنه يوجد عددان طبيعيان مثل $3 , 4$ لا يقسم أي منهما الآخر . إن هذه

العلاقة انعكاسية لأن a يقسم a لكل عدد طبيعي a . وهي لا تناظرية لأنه إذا كان a يقسم b و b يقسم a فإن $a = b$. وهي متعدية لأنه إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c . وبالتالي فإن علاقة " يقسم " هي علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{N}$.

مثال (3) . لتكن $P(X)$ أسرة كل المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية X . ونعرف عليها العلاقة $\leq$ كما يلي :

$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. من أجل كل مجموعتين جزئيتين A, B من X .

بما أن $A \subseteq A$ مهما تكن المجموعة الجزئية A من X فإن علاقة الاحتواء انعكاسية، وهي لا تناظرية لأنه إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ فإن $A = B$ ، وأخيراً هي متعدية لأنه إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$. وبالتالي فإن علاقة الاحتواء المعرفة على $P(X)$ هي علاقة ترتب جزئي مع ملاحظة أنه قد توجد مجموعتين جزئيتين من X . لا تحتوي أي منهما الأخرى .

مثال (4) . لتكن F مجموعة كل التوابع الحقيقية المعرفة على مجموعة غير خالية X ولنعرف العلاقة $\leq$ كما يلي :

$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$ ، وذلك من أجل أي عنصرين f, g من F .

إن بيان أن العلاقة $\leq$ انعكاسية و لا تناظرية ومتعدية على عناصر F ، ينتج مباشرة من تعريف هذه العلاقة بواسطة العلاقة $\leq$ المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي تملك تلك الصفات (تحقق من ذلك) .

3.18. تعريف (علاقة ترتيب كلي ، مجموعة مرتبة كلياً ، أو خطياً ، أو سلسلة)

a total (or linear) order relation .

علاقة الترتيب الجزئي $\leq$ المعرفة على المجموعة غير الخالية A ، تسمى علاقة ترتيب كلي على A ، إذا كان من أجل أي عنصرين a, b من A يتحقق الشرط :

$a \le b$ أو $b \le a$ ، وفي هذه الحالة نقول عن a , b إنهما متقـارنين إن علاقـة الترتيب الكلي تسمى أحياناً ترتيب خطي (linear) أو سلسة (a chain) .

ونقول عن المجموعة A أنها مرتبة كلياً (أو خطياً أو أنها سلسلة) إذا زودت بعلاقة ترتيب كلي .

– إن علاقة الترتيب في المثال الأول هي علاقة ترتيب كلي علـى $\mathbb{R}$ ، وبالتـالي $\mathbb{R}$ سلسلة

– إن المجموعة الجزئية $A = \{ 2 , 4 , 8 , ... , 2^n , ... \}$ مـن مجموعـة الأعداد الطبيعية تكون مرتبة كلياً وفق علاقة الترتيب يقسم على الرغم من أن $\mathbb{N}$ ليست مرتبة كلياً وفق نفس العلاقة .

ملاحظة :

إذا كانت $\le$ علاقة ترتيب معرفة على المجموعة A ، فإننا نستطيع أن نعرف علاقة $<$ كما يلي : $a < b \Leftrightarrow a \le b \;\wedge\; a \ne b$.

على الرغم من أن العلاقة $<$ ليست علاقة ترتيب ، إلا أنها تساعدنا في إعطاء صيغة مكافئة لعلاقة الترتيب $\le$ كما يلي :

$$a \le b \Leftrightarrow a < b \;\vee\; a = b$$

فإذا كانت $\le$ علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A ، فإنها تكون علاقة ترتيب كلي على A إذا وفقط إذا من أجل أي عنصرين a , b من A يتحقق واحد فقط مـن العلاقات :

$$a < b \;\vee\; b < a \;\vee\; a = b$$

3 . 19 . مثال (تمهيدي للتعاريف التالية)

لـتكن المجموعـة $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ والمجموعـة $B = \{ 2 , 4 , 8 , ... , 2^n \}$. حيث أن n عدد صحيح موجب ، إن علاقـة " يقسم " على المجموعة A هي علاقة ترتيب جزئي ، ونرمز لها $\le$. وكذلك نفس

العلاقة على المجموعة B هي علاقة ترتيب كلي . ونرمز لها بنفس الرمز $\leq$. أي أنه إذا كان a يقسم b فإننا نكتب $a \leq b$ وبالعكس . وإذا كان a يقسم b وكان $a \neq b$ فإننا نكتب $a < b$ ، كما في الملاحظة السابقة .

في المجموعة A مثلاً لدينا : العدد 2 يقسم نفسه لذلك نكتب $2 \leq 2$ ، كذلك العدد 2 يقسم العدد 4 من A وبالتالي نكتب $2 \leq 4$ ، وبما أن $2 \neq 4$. نستطيع أن نكتب $2 < 4$ (ونقرأ ذلك 2 أصغر من 4 أو يقسم 4) .

كذلك في المجموعة A نلاحظ أن العدد 1 " يقسم جميع عناصر A " ، لذلك نكتب $1 \leq a \;\; \forall \; a \in A$ ونقرأ ذلك العدد 1 من A أصغر أو يساوي جميع عناصر A ، و لا يوجد عنصر آخر يحقق ذلك ، لذلك سوف نسمي مثل هذا العنصر ، إن وجد ، بالعنصر الأصغر في A (the smallest element of A) أي أن العنصر a_0 من A يكون العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً $A \Leftrightarrow a_0 \leq a \;\; \forall \; a \in A$.

لاحظ أنه لو أخذنا المجموعة $C = A - \{ 1 \}$ المرتبة جزئياً بنفس العلاقة " يقسم " فإننا نلاحظ أن العدد 2 لن يكون قاسماً لجميع عناصر C ، لأنه لا يقسم 3 ، وفي الحقيقة لا يوجد في C أي عنصر يقسم جميع عناصر C . وبالتالي C لا تملك عنصراً أصغر .

في المجموعة B لدينا العدد 2 يقسم جميع عناصر B ، أي أنه أصغر أو يساوي جميع عناصر B وبالتالي فإنه العنصر الأصغر في B .
كذلك في المجموعة B لدينا :

- العنصر 2^n هو مضاعف لكل عنصر b من B ، أي أن كل عنصر b من B يقسم 2^n ، وبالتالي نكتب : $b \leq 2^n \;\; \forall \;\; b \in B$.

ونستطيع قراءة ذلك : "2^n أكبر أو يساوي جميع عناصر B . لذلك نسمي مثل هذا العنصر ، إن وجد ، بالعنصر الأكبر في B (the largest element of B) أي

أن : العنصر b_0 من A يكون العنصر الأكبر في المجموعة المرتبة جزئياً $A \Leftrightarrow a \le b_0 \ \forall a \in A$.

لاحظ أنه لا يوجد في A عنصراً أكبر أو يساوي جميع عناصر A ، وبالتالي لا يوجد عنصر أكبر في A .

– الآن في المجموعة C : لا يوجد أي عنصر منها يقسم 3 سوى العدد 3 نفسه . أي أنه لا يوجد أي عنصر من C(ومختلف عن 3) أصغر من 3 . مثل هذا العنصر سوف نسميه عنصراً أصغرياً في C (a minimal element of C) . أي أن :

a عنصر اصغري في $A \Leftrightarrow$ لا يوجد عنصر أصغر من a في A

$\Leftrightarrow [\forall x \in A : x \le a \Rightarrow x = a]$.

– وأخيراً في المجموعة المرتبة A العنصر 5 لا يقسم أي عنصر من A سوى نفسه ، أي أنه لا يوجد أي عنصر من A (ومختلف عن 5) أكبر من 5 . مثل هذا العنصر سوف نسميه عنصراً أعظمياً في A (a maximal element of A) أي أن :

a عنصر أعظمي في $A \Leftrightarrow$ لا يوجد عنصر أكبر من a في A

$\Leftrightarrow [\forall x \in A : a \le x \Rightarrow a = x]$.

20 . 3 . تعاريف (العنصر الأصغر ، العنصر الأكبر . عنصر أصغري ، عنصر أعظمي)

لتكن A مجموعة مرتبة بعلاقة الترتيب الجزئية $\le$.

– إذا وجد عنصر a_0 من A يحقق : $(a_0 \le x \ \forall x \in A)$ فإننا نسميه العنصر الأصغر في المجموعة A (the smallest element of A) . والعنصر الأصغر إن وجد فهو وحيد ، لأنه إذا كان كل من a_1 ، a_0 عنصراً أصغر في A فإنه يتحقق : $a_1 \le a_0 \wedge a_0 \le a_1$ ومن الخاصة اللاتناظرية لعلاقة الترتيب نجد أن $a_0 = a_1$.

– إذا وجد عنصر a_1 من A يحقق $(x \le a_1 \ \forall x \in A)$ فإننا نسميه العنصر

الأكبر في المجموعة A (the largest element of A) . والعنصر الأكبر إن وجد فهو وحيد (تحقق من ذلك بنفس طريقة العنصر الأصغر)

- إذا كان b_0 عنصراً من المجموعة A بحيث لا يوجد أي عنصر أصغر منه فإننا نسمي b_0 عنصراً أصغرياً في A (a minimal element of A) .

وبالتالي العنصر b_0 من A يكون أصغرياً في A إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$(x \le b_0 \Rightarrow x = b_0 \ \forall x \in A)..$$

- إذا كان b_1 عنصراً من المجموعة A ، بحيث لا يوجد أي عنصر أكبر منه ، فإننا نسمي b_1 عنصراً أعظمياً في A(a maximal element of A) ؛

-وبالتالي العنصر b_1 من A يكون أعظمياً في A إذا وفقط (إذا تحقق الشرط) :

$$(b_1 \le x \Rightarrow b_1 = x \ \forall x \in A)$$

نتيجة :

العنصر الأصغر (الأكبر) في مجموعة مرتبة جزئياً ، إن وجد ، فإنه العنصر الأصغري (الأعظمي) الوحيد فيها . لأنه إذا كان a_0 العنصر الأصغر في A فإنه يحقق $a_0 \le a \ \forall a \in A$ ، وإذا كان b_0 عنصراً أصغرياً في A فإنه يحقق $x \le b_0 \Rightarrow x = b_0 \ \forall x \in A$. ومن المتباينتين نجد أن $a_0 \le b_0$ وبالتالي فإن $a_0 = b_0$. بنفس الطريقة يبرهن بالنسبة للعنصر الأكبر .

3 . 21 . تعاريف (الحد الأدنى الأعظمي ،الحد الأعلى الأصغري . مجموعة محدودة)

لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بعلاقة الترتيب ≤ ، ولتكن B مجموعة جزئية من المجموعة A .

- نقول عن العنصر m من A أنه حد أدنى للمجموعة الجزئية B (a lower bound of B) ، إذا وفقط إذا كان أصغر أو يساوي كل عنصر من

عناصر B . أي أن : $m \in A$ حد أدنى للمجموعة B (الجزئية من A المرتبة)

$\Leftrightarrow [\, m \leq x \;\forall\; x \in B \,]$.

ونقول عن المجموعة B ، الجزئية من المجموعة المرتبة جزئياً A ، أنها محدودة من الأدنى ، إذا وجد لها حد أدنى في A .

- إذا كان m حداً أدنى للمجموعة الجزئية B وكان m أكبر أو يساوي كل حد أدنى آخر لـ B فإن m يسمى الحد الأدنى الأعظمي (The greatest lower bound of B) ونرمز له بـ B (glb) وأحياناً $\inf B$

ومن الواضح أن الحد الأدنى الأعظمي للمجموعة B ، الجزئية من المجموعة المرتبة جزئياً A ، هو العنصر الأكبر للمجموعة :

$$\{\, m \in A \mid m \leq b \;\forall\; b \in B \,\}$$

- نقول عن العنصر M من المجموعة A أنه حداً أعلى للمجموعة الجزئية B (an upper bound of B)، إذا وفقط إذا كان أكبر أو يساوي كل عنصر من عناصر B . أي أن :

$M \in A$ حد أعلى للمجموعة B (الجزئية من A المرتبة) $\Leftrightarrow [\, x \leq M \;\forall\; x \in B \,]$.

- ونقول عن المجموعة B ، الجزئية من المجموعة المرتبة جزئياً A ، أنها محدودة من الأعلى ، إذا وجد لها حد أعلى في A .

إذا كان M حداً أعلى للمجموعة الجزئية B وكان M أصغر أو يساوي كل حد أعلى آخر للمجموعة B فإن M يسمى الحد الأعلى الأصغري للمجموعة B (the least upper bound of B) ونمز له B (l u b) وأحياناً $\sup B$

وبالتالي فإن الحد الأعلى الأصغري للمجموعة B ، الجزئية من المجموعة المرتبة جزئياً A ، هوالعنصر الأصغر للمجموعة: $\{\, M \in A \mid b \leq M \;\forall\; b \in B \,\}$.

- ونقول عن المجموعة B ، الجزئية من المجموعة المرتبة جزئياً A ، أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى .

22 . 3 . ملاحظة و رموز خاصة :

المفاهيم السابقة تأخذ تسميات ورموز خاصة في مجموعة الأعداد الحقيقيـــة $\mathbb{R}$ المرتبة (جزئياً)

- فإذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية ، وكانت A تملك حداً أدنى فإن الحد الأدنى الأعظمي لها يرمز له $\inf A$ والمأخوذ مـــن الكلمـــة infumum .

وإذا كانت A تملك حداً أعلى ، فإن الحد الأعلى الأصغري يرمز له $\sup A$ والمأخوذ من الكلمة supremum .

- إذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية ، فإن كـــل مـــن $\inf A$, $\sup A$ موجـــودان وينتميـــان إلى A ، ويرمـــز لهـــا علـــى الترتيـــب $\min A$, $\max A$ والمأخوذان من الكلمتين : maximum و minimum .

فإذا كانت A تتألف من عددين حقيقيين (مختلفين طبعاً) فإن $\min A$ هـــو العنصر الأصغر فيهما و $\max A$ هو العنصر الأكبر . (وفق علاقة الترتيب العادية في $\mathbb{R}$) .

مثال : لتكن المجموعة $A = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \}$ الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية المرتبة بعلاقة الترتيب العادية $\leq$. من الواضح أن الواحد من A أكبر من جميع عناصر A فهو العنصر الأكبر فيها ، وهـــو العنصـــر الأعظمـــي الوحيد . في حين أنه لا يوجد فيها عنصراً أصغرياً (لأن كل عنصر $\frac{1}{n}$ يوجد أصغر منه $\frac{1}{n+1}$) وبالتالي العنصر الأصغر غير موجود (لأنه لا يوجد عنصـــر مـــن A أصغر من جميع عناصرها) .

ونلاحظ أن A الجزئية من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبكل عـــدد حقيقـــي أكبر من الواحد وبالتالي الحد الأعلى الأصغري هو 1 أي أن $\sup A = 1$. وهـــي

محدود من الأدنى بالصفر وبكل عدد سالب وبالتالي فإن الحد الأدنى الأعظمي هـو 0 أي أن $\inf A = 0$.

3.23 . القيمة المطلقة وخواصها

إذا كان x عدداً حقيقياً فإن القيمة المطلقة له ، والتي نرمز لها $|x|$ ، تعرف بالمساواة

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

مثال : $|-2| = -(-2) = 2$ و $|3| = 3$ و $|0| = 0$

.فيما يلي نذكر أهم خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية :

١. $|x| \geq 0$ مهما كان العدد الحقيقي x ، وتتحقق المساواة $|x| = 0$ إذا وفقط إذا $x = 0$

٢. $|x| \geq x$ و $|x| \geq -x$ وبالتالي فإن $-|x| \leq x \leq |x|$

٣. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ وحيث a عدد حقيقي موجب .

٤. $a \leq |x| \Leftrightarrow x \geq a$ أو $x \leq -a$. وحيث a عدد حقيقي موجب .

٥. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ من أجل أي عددين حقيقيين x , y .

وفي الحالة الخاصة عندما $y = -1$ نجد أن $|-x| = |x|$

وعندما $y = x$ نجد أن $|x^2| = |x|^2$

٦. يمكن تعميم الخاصة الخامسة على عدد منته من الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, \ldots, x_n$ كما يلي :

$$|x_1 . x_2 \ldots x_n| = |x_1| . |x_2| \ldots |x_n|$$

وفي الحالة الخاصة عندما $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ فإنه ينتج أن :

$|x^n| = |x|^n$ من أجل كل عدد صحيح موجب n

٧. إذا كان x , y عددين حقيقيين وكان $y \neq 0$ فإنه يتحقق :

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

من أجل أي عددين حقيقيين y , x يتحقق :

٨. $|x + y| \le |x| + |y|$

وتسمى المتباينة المثلثية .

٩. $|x - y| \ge |x| - |y|$

١٠. $|x - y| \ge \big|\, |x| - |y| \,\big|$

١١. $|x| \le |y| \Leftrightarrow x^2 \le y^2$

برهان بعض الخواص السابقة :

برهان ٨ . من الخاصة الثانية نجد أن $-|x| \le x \le |x|$

$$-|y| \le y \le |y|$$

بجمع الأطراف المتقابلة للمتباينتين نجد :

$$-\left(|x| + |y|\right) \le x + y \le \left(|x| + |y|\right)$$

ومن الخاصة الثالثة ينتج أن :

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

برهان ٩ . من الخاصة الثامنة نجد أن :

$$|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y|$$

ومنه يتحقق :

$$|x| - |y| \le |x - y|$$

برهان ١٠ .

$$|y| = |y - x + x| \le |y - x| + |x| \Rightarrow$$
$$|y| - |x| \le |y - x| = |-(x - y)| = |x - y| \Rightarrow |x| - |y| \ge -|x - y|$$

وبالاستفادة من الخاصة التاسعة نجد أن :

$$-|x - y| \le |x| - |y| \le |x - y|$$

ومنه :

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

24 . 3 . الأعداد المركبة (العقدية) وخواص العمليات عليها :

إن مجموعة الأعداد المركبة (أو العقدية) التي رمزنا لها C ، تتألف من الأعداد التي تكتب بالشكل $z = a + bi$ وحيث a , b أعداد حقيقية ، و $i = \sqrt{-1}$. نسمي العدد الحقيقي a بالجزء الحقيقي للعدد المركب z ونرمز له $R(z)$ ، كما نسمي العدد الحقيقي b بالجزء التخيلي للعدد المركب z ونرمز له بالرمز $Im(z)$. ونعرف علاقة المساواة بين عددين مركبين $z' = a' + b'i$ و $z = a + bi$ ونكتب $z = z'$ إذا وفقط إذا تساوى الجزء الحقيقي لأحدهما مع الجزء الحقيقي للآخر وكذلك إذا تساوى الجزء التخيلي لأحدهما مع الجزء التخيلي للآخر . أي أن :

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

أو بالشكل الرمزي :

$$z = z' \Leftrightarrow R(z) = R(z') \wedge Im(z) = Im(z')$$

فيما يلي سنقدم المفاهيم المرتبطة بعدد مركب وبعض خواصها :

١. إذا كان $z = a + bi$ عدداً مركباً .

فإن العدد المركب $\bar{z} = a - bi$ يسمى مرافق العدد المركب z ويتحقق :

$$z + \bar{z} = 2a = 2R(z) \qquad , \qquad z\bar{z} = a^2 + b^2$$

٢. كما نسمي العدد الحقيقي $\sqrt{a^2 + b^2}$ بطويلة (أو مقياس) العدد المركب $z = a + bi$. ونرمز لهذه الطويلة بالرمز $|z|$

أي أن :

$$|z| = \sqrt{[R(z)]^2 + [Im(z)]^2}$$

٣. مما تقدم نحصل على العلاقات الهامة .

$$|z|^2 = z.\bar{z} \qquad , \qquad R(z) \le |z| \qquad , \qquad Im(z) \le |z|$$

وليس من الصعب التحقق من الخواص التالية المتعلقة بالمرافق والطويلة :

٤. مرافق مجموع عددين يساوي مجموع مرافقيهما . أي أن

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

٥. مرافق ضرب عددين يساوي ضرب مرافقيهما . أي أن :

$$\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

٦. المرافق لمرافق عدد مركب يساوي العدد المركب نفسه أي أن :

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

٧. طويلة عدد مركب تساوي طويلة مرافق ذلك العدد . أي :

$$|\bar{z}| = |z|$$

٨. وأخيراً $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow R(z) = 0 \wedge Im(z) = 0$

٩. طويلة ضرب عددين مركبين يساوي ، الطويلتين أي أن :

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$$

١٠. وأخيراً من أجل أي عددين مركبين تتحقق المتباينة :

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

لنبرهن الخاصتين الأخيرتين 9 , 10 ، لأنهما الأصعب فيما تقدم ، ويترك للطالب برهان بقية الخواص كتمارين .

– لبرهان (9) : نستفيد من الخاصتين (3) و (5) فنجد :

$$|z_1 . z_2|^2 = (z_1 . z_2)\,\overline{z_1 . z_2} = z_1 . z_2 . \bar{z}_1 . \bar{z}_2 = z_1 . \bar{z}_1 . z_2 . \bar{z}_2$$
$$= |z_1|^2 . |z_2|^2 = \left(|z_1| . |z_2|\right)^2$$

وبما أن المقدارين $|z_1 . z_2|$ و $\left(|z_1| . |z_2|\right)$ غير سالبين فإنه بجذر طرفي المساواة الأخيرة ينتج :

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$$

ولبرهان (10) نكتب :

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)\ (\overline{z_1}+\overline{z_2})$$
$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2 + 2R(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2\,|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 =$$
$$|z_1|^2 + 2\,|z_1|.|\overline{z_2}| + |z_2|^2 =$$
$$|z_1|^2 + 2\,|z_1|.|z_2| + |z_2|^2 =$$
$$(|z_1| + |z_2|)^2$$

وبما أن كل من $|z_1+z_2|$ و $(|z_1|+|z_2|)$ أعداد حقيقية غير سالبة فإنه يتحقق :

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

4 § . التطبيقات (التوابع)

إن التطبيقات هي نوع خاص من العلاقات بين مجموعتين غير خاليتين التي تحقق شرطاً إضافياً سوف نقدمه بالتعريف التالي :

4 . 1 . تعريف (تطبيق)

العلاقة R من المجموعة غير الخالية X إلى المجموعة غير الخالية Y تسمى تطبيقاً (mapping) إذا تحقق الشرط التالي :

" كل عنصر x من X يرتبط بعنصر واحد فقط y من Y بالعلاقة R . "

فإذا رمزنا للتطبيق من X إلى Y بأحد الحروف . . . , f , g , h بدلاً من R ، فإننا نعبر عن التطبيق بالرمز $X \xrightarrow{f} Y$ أو الرمز $f : X \to Y$. ونقول عن المجموعة X أنها منطلق التطبيق f وعن Y بأنها المستقر ، وإذا كان x يمثل أي عنصر من المنطلق X فإننا نرمز للعنصر الوحيد y من Y المرتبط بالعلاقة f مع x بالرمز $f(x)$ ونكتب $y = f(x)$ ونقرأ ذلك y هي صورة x وفق التطبيق f ، ونسمي المجموعة $\{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$ ، الجزئية من مجموعة الضرب الديكارتي $X \times Y$ ، بيان التطبيق f ، التي بواسطتها نستطيع تمثيل التطبيق بشكل سهمي حيث نعتبر عناصر X واقعة داخل الخط المغلق الأيسر الممثل لهذه المجموعة ،

وبالمثل نعتبر عناصر Y واقعة داخل الخط المغلق الأيمن الممثل لهذه المجموعة ، ونوصل كل عنصر x بصورته الوحيدة $y = f(x)$ من Y بخط موجه من x إلى y . إن التمثيل السهمي للتطبيقات مفيد جداً في توضيح مفهوم التطبيق ، والأكثر من ذلك في تقديم أنواع التطبيقات . واستنتاج الشروط الرياضية المكافئة لهذه المفاهيم . فمثلاً إذا كانت f علاقة من X إلى Y فإن التمثيل السهمي لهذه العلاقة (أي الشكل الناتج عن الوصل بين كل عنصر x من X بالعنصر المرتبط فيه y من Y بسهم ينطلق من x ويستقر في y) يوضح لنا متى تكون هذه العلاقة تطبيقاً ، وذلك بترجمة الشرط الوارد في تعريف التطبيق كما يلي :

- إن عبارة (كل عنصر x من X يرتبط . . .) تعني انطلاق سهم من كل عنصر من عناصر x ، وعبارة (. . . بعنصر واحد فقط y من Y) تعني أن هذا السهم المنطلق من العنصر x وحيد . وبالتالي : لغة التمثيل السهمي تقول : أن العلاقة f من X إلى Y تكون تطبيقاً إذا وفقط إذا انطلق من كل عنصر من عناصر X سهم واحد فقط واستقر في y . وهذه اللغة تفيدنا في استخلاص شروط رياضية لمفهوم التطبيق بقولنا :

العلاقة f من X إلى Y تكون تطبيقاً إذا تحقق الشرطان :

١. من أجل كل x من X فإن $f(x)$ يكون عنصراً من Y .

٢. من أجل كل عنصرين x_1 , x_2 من X ، إذا كان $x_1 = x_2$ فإن $f(x_1) = f(x_2)$

من الواضح أن الشرط الأول يكافئ قولنا (كل عنصر من X ينطلق منه سهم ويستقر في Y) أما الشرط الثاني فهو يكافئ تتمة الجملة السابقة بالعبارة (واحد فقط) مكان النقاط الثلاثة .

إن التعريف الأخير للتطبيق مفيد جداً عملياً ونظرياً لأن المجموعات التي نتعامل معها غالباً ما تكون غير منتهية أو أن عدد عناصرها كبير . فمثلاً للبرهان على أن العلاقة

f من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ المعرفة بالمساواة $f(x) = 2x$ تطبيقاً . نلاحظ أولاً أنه مهما كان العدد الصحيح x فإن $2x$ يكون أيضاً عدداً صحيحاً وبالتالي يتحقق :

$$f(x) \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

وثانياً إذا كان x_1 , x_2 عددين صحيحين متساويين أي أن $x_2 = x_1$ فإن $2x_1 = 2x_2$. وبالتالي يتحقق : $f(x_1) = f(x_2)$.

وبالتالي فإن العلاقة f تطبيقاً .

مثال :

العلاقة g من المجموعة $\mathbb{Z}$ في المجموعة $2\mathbb{Z}$ المعرفة بالمساواة $g(x) = 3x$ لن تكون تطبيقاً لعدم تحقق الشرط الأول وذلك لأنه مثلاً :

$$g(1) = 3 \notin 2\mathbb{Z}$$

مثال :

العلاقة h من المجموعة $\mathbb{Z}$ في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعرفة بالمساواة

$h(x) =$ (قاسم لـ x)

تحقق الشرط الأول من تعريف التطبيق (لأن الواحد قاسم لأي عدد صحيح x) ومن الواضح أن هذه العلاقة لا تحقق الشرط الثاني لأنه ، مثلاً ، العدد الصحيح $x = 2$ من المنطلق له أكثر من قاسم مثل ± 2 ، ± 1

4 . 2 . أنواع التطبيقات :

إن التمثيل السهمي للتطبيقات ، يفيدنا في التعرف على أربعة أنواع من التطبيقات وذلك حسب شكل مجموعة المستقر (انظر الشكل (1)) .

(1) إذا كان كل عنصر من عناصر المستقر يصل إليه سهم على الأقل فإننا نقول عن هذا التطبيق أنه غامر (الشكل (1,a)) . وبعبارة مكافئة ، نقول عن التطبيق $f : X \to Y$ أنه غامر إذا وفقط إذا ((كل عنصر y من المستقر Y يكون صورة لعنصر على الأقل x من المنطلق X)) . وبلغة المعادلات :

التطبيق f يكون غامراً . إذا وفقط إذا كان للمعادلة $y = f(x)$ حلاً على الأقل x من المنطلق X ، من أجل كل y من المستقر Y .(ويجب الانتباه هنا أن المجهول في هذه المعادلة هو x من X ، والمعلوم هو y من Y) . والشرط الأخير لمفهوم التطبيق الغامر هو الأكثر استخداماً كما سنرى في الأمثلة القادمة .

(2) إذا كان كل عنصر من عناصر المستقر يصل إليه سهم واحد فقط أو لا يصل إليه أي سهم ، ونعبر عن ذلك بقولنا ((إذا كان كل عنصر من المستقر يصل إليه سهم على الأكثر)) (الشكل (1 , b)) ، في هذه الحالة :

نقول عن التطبيق f أنه متباين . وبشكل مكافئ : نقول عن التطبيق $X \xrightarrow{f} Y$ أنه متباين إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من المستقر Y صورة لعنصر على الأكثر x من المنطلق X .

وبلغة المعادلات : التطبيق $X \xrightarrow{f} Y$ يكون متبايناً إذا كان للمعادلة $y = f(x)$ حلاً على الأكثر x من المنطلق X من أجل كل y من المستقر Y (وعبارة حلاً على الأكثر تشمل حالة عدم وجود حل) والشرط المكافئ لمفهوم التطبيق المتباين والأكثر استخداماً هو :

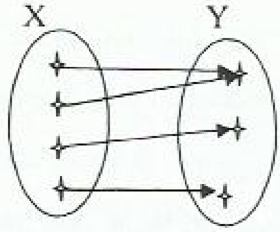
يكون التطبيق $X \xrightarrow{f} Y$ متبايناً إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall a , b \in X \quad ; \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

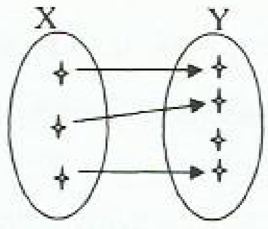
(أي : تساوي الصور لأي عنصرين من المنطلق يؤدي إلى تساوي العنصرين) .

وفي التحليل يستخدم الشرط المكافئ للشرط السابق ، وهو الشرط التالي :

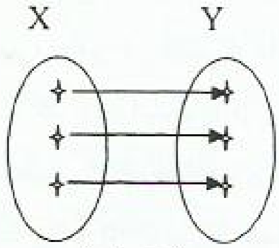
$$\forall a , b \in X \quad ; \quad a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$



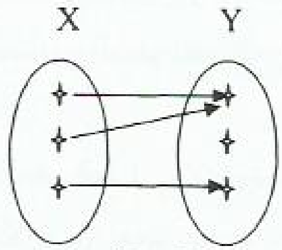
(1 , a)



(1 , b)



(1 , c)



(1 , d)

الشكل (١)

(3) إذا كان كل عنصر من عناصر المستقر يصل إليه سهم واحد فقط . فإننا نقول عن هذا التطبيق أنه تقابل (الشكل (1, c)). وبلغة المعادلات : نقول عن التطبيق $X \xrightarrow{f} Y$ أنه تقابل إذا كان للمعادلة $y = f(x)$ حلاً وحيداً x من المنطلق X من أجل كل y من المستقر Y .

ومن الواضح في هذه الحالة أن التطبيق f يكون متبايناً وغامراً معاً . والعكس صحيح أيضاً .وبالتالي يتحقق : [التطبيق f تقابلاً $\Leftrightarrow$ f متبايناً وغامراً] .

(4) توجد تطبيقات ليست من أية حالة من الحالات السابقة . نسميها تطبيقات كيفية أي ليست غامرة ولا متباينة وبالطبع ليست تقابلاً (انظر الشكل (1 , d))

مثال :

ليكن $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ تطبيقاً معرفاً بالمساواة : $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

– نعلم أن f يكون غامراً إذا كان للمعادلة $y = f(x)$ حلاً على الأقل x من المنطلق $\mathbb{Z}$ من أجل كل y من المستقر $\mathbb{Z}$. ونلاحظ أن

$$y = f(x) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

من الواضح أن $\frac{y}{2}$ ليس بالضرورة عدد صحيح من أجل كل عدد صـــحيح y ، فمثلاً من أجل $y = 1$ فإن $x = \frac{1}{2}$ ليس من المنطلق $\mathbb{Z}$ ، وبالتالي f ليس غامراً .

(لاحظ لو كانت مجموعة المستقر $2\mathbb{Z}$ بدلاً من $\mathbb{Z}$ ، لكان التطبيق $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} 2\mathbb{Z}$ المعرف بالمساواة $f(x) = 2x$ غامراً ، وهــو متبـــاين ، وبالتالي يكون تقابلاً ، تحقق من ذلك)

- ونعلم أن f يكون متبايناً إذا تحقق الشرط :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad ; \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

واضح أنه إذا كان $f(a) = f(b)$ فإنه حسب تعريف f يكون $2a = 2b$ ومنه $a = b$ ويتحقق شرط التباين إذاً التطبيق f متباين .

- وبما أن f ليس غامراً فهو بالطبع ليس تقابلاً .

4 . 3 التقابل العكسي :

إذا كان التطبيق $X \xrightarrow{f} Y$ تقابلاً . فإن كل عنصر y من المستقر Y يكون صورة لعنصر واحد فقط x من X ، أي أن ((كل عنصر y من المجموعة Y يرتبط بعنصر واحد فقط x من المجموعة X)) وهذه العبارة تبين وجود تطبيق من المجموعة Y إلى المجموعة X يتعلق بالتقابل f . نسمي هذا التطبيق بـــالتطبيق العكسي للتطبيق f ، ونرمز له بالرمز f^{-1} والذي منطلقـــه Y ومســـتقره X . ويعرف كما يلي : من أجل كل y من Y يوجد عنصر واحد فقـــط x مـــن X بحيث $y = f(x)$. ويكون تعريف f^{-1} بالمساواتين :

$$f^{-1}(y) = x \quad ; \quad f(x) = y$$

أي أن التطبيق العكسي للتطبيق التقابلي $X \xrightarrow{f} Y$ هو التطبيق التقابلي

أيضاً $X \xrightarrow{f^{-1}} Y$ المعرف بالمساواتين :

$$\forall y \in Y \;;\; f^{-1}(y) = x \;;\; y = f(x)$$

مثال :

إن التطبيق $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} 2\mathbb{Z}$ المعرف بالمساواة $f(x) = 2x$ يكـون تقابلاً (تحقق من ذلك) ويكون تقابله العكسي $\mathbb{Z} \xrightarrow{f^{-1}} 2\mathbb{Z}$ معرفاً بالمساواتين :

$$f^{-1}(y) = x \;;\; y = f(x) \quad \forall y \in 2\mathbb{Z}$$

بملاحظة أن كل عدد y من $2\mathbb{Z}$ يكتب بالشكل $y = 2m$ وحيث m عـدد صحيح فإن

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(2m) = x \;;\; f(x) = 2x = 2m \Rightarrow x = m$$

ومنه نعرف f^{-1} بالشكل :

$$f^{-1}(2m) = m$$

وهذا منطقي لأن التطبيق f يعبر عن عملية الضرب بالعدد 2 ، وعكـس عمليـة الضرب بالعدد 2 هي عملية القسمة على العدد 2 ، وهذا ما يعبر عنه التطبيق العكسي f^{-1} .

4 . 4 . تعريف (المساواة بين تطبيقين)

نقول عن التطبيقين f, g أنهما متساويان ونكتب $f = g$ إذا تحقق الشرطان :

١) لكل من $f \,,\, g$ نفس المنطلق X ونفس المستقر Y .

٢) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

4 . 5 . تعريف (تركيب التطبيقات)

إذا كان $Y \xrightarrow{g} Z$ و $X \xrightarrow{f} Y$ تطبيقين بحيث مجموعـة المستقر للتطبيق الأيسر f هي نفس مجموعة المنطلق للتطبيق الأيمن g فإنه يتحقـق : كـل عنصر x من X يقابله عنصر وحيد $f(x)$ من Y ، وهذا الأخير $f(x)$ من

Y يقابله عنصر وحيد $g(f(x))$ من Z ، وبالتالي ينتج أن كل عنصر x من المجموعة X يرتبط بعنصر واحد فقط $g(f(x))$ من المجموعة Z ، وهذا يعرف تطبيقاً منطلقه X ومستقره Z ، نرمز له بالرمز $X \xrightarrow{g0f} Z$ ويعطى بالمساواة :

$$(g0f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in X$$

نسمي التطبيق $g0f$ بتركيب التطبيقين f, g .

- إذا كان $Z \xrightarrow{h} H$ تطبيقاً ثالثاً بحيث منطلقه Z هو مستقر g ، فإننا نلاحظ إمكانية تركيب التطبيقات الثلاثة

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} H$ بطريقتين :

الأولى : نركب أولاً f, g فينتج $g0f$ ، ومن ثم نحصل على التطبيق :

$$X \xrightarrow{g0f} Z \xrightarrow{h} H$$

بتركيبهما ينتج التطبيق $h_0(g0f)$ ، أي التطبيق :

$$X \xrightarrow{h0(g0f)} H$$

وفي الطريقة الثانية نركب أولاً h, g فينتج $h0g$ ، ومن ثم نحصل على التطبيقين :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h0g} H$$

بتركيبهما ينتج التطبيق : $(h0g)0f$ ، أي التطبيق $X \xrightarrow{(h0g)0f} H$

واضح أن التطبيقين الناتجين لهما نفس المنطلق X ونفس المستقر H ويتساويان إذا تحقق :

$$[h0(g0f)](x) = [(h0g)0f](x) \quad \forall x \in X \qquad \ldots (1)$$

وهذه المساواة محققة لأن الطرف الأيسر هو :

$$[h0(g0f)](x) = h[(g0f)(x)] = h[g(f(x))]$$

وأن الطرف الأيمن هو :

$$[(h0g)0f](x) = [(h0g)](f(x)) = h[g(f(x))]$$

وبالتالي المساواة (1) محققة . والتطبيقان متساويان أي أن

$$h0(g0f) = (h0g)0f$$

ونعبر عن هذه المساواة بقولنا أن عملية تركيب التطبيقات تجميعية .

مثال :

لنعبر عن التابع المركب $h(x) = \text{Sin}\, x^2$ بواسطة تركيب التطبيقات .

ليكن التطبيقان $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ المعرفين بالمساواتين :

$$f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \quad g(x) = \text{Sin}\, x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

عند ذلك نجد أن $\mathbb{R} \xrightarrow{g0f} \mathbb{R}$ يعطى بالمساواة :

$$(g0f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \text{Sin}\, x^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

من الواضح أن التطبيقين $(g0f)$ و $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متساويان

تمرين :

بنفس طريقة المثال السابق حلل التابع $h(x) = \text{Sin}^2 x$ إلى تركيب تطبيقين

4 . 6 . بعض التطبيقات الخاصة :

١) تطبيق الاحتواء .

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة X ، فإنه يوجد دومــاً تطبيق $X \xrightarrow{i} A$ معرف بالمساواة : $i(a) = a \ \ \forall a \in A$ والذي نسميه تطبيق الاحتواء وهو تطبيق متباين دوماً .

٢) التطبيق المطابق .

في الحالة الخاصة عندما $X = A$ في تعريف تطبيق الاحتواء فإن التطبيق الناتج يسمى التطبيق المطابق ويرمز له $X \xrightarrow{id} X$ (بدلاً من i) وهو تطبيق تقابلي دوماً ويعطى بالمساواة :

$$id(x) = x \quad \forall x \in X$$

٣) مقصور تطبيق .

إذا كان $f : X \to Y$ تطبيقاً وكانت A مجموعة جزئية من المنطلـــق X . فإن أي عنصر a من A يرتبط بعنصر واحد فقط $f(a)$ من Y ، وبالتالي فإن f يكون أيضاً تطبيقاً من A إلى Y ، نسميه مقصور f على المجموعـــة A الجزئية من المنطلق X ونرمز له بالرمز f_A ، وأحياناً بنفس الرمز f ، ويعرف بالمساواة :

$$f_A(a) = f(a) \quad \forall a \in A$$

- من المفيد جداً ملاحظة أن مقصور التطبيق $X \xrightarrow{f} Y$ علـــى المجموعـــة A الجزئية من المنطلق X هو نفسه تركيب تطبيق الاحتواء $i : A \to Y$ مع التطبيق f ، أي أن التطبيق $f0i : A \to Y$ هو نفسه $f_A : A \to Y$ ، لأنه بالإضـــافة إلى أن لها نفس المنطلق ونفس المستقر فإنه من أجل كل a من A يتحقق :

$$(f0i)(a) = f(i(a)) = f(a) = f_A(a)$$

٤) التطبيق الثابت :

إذا كان $f : X \to Y$ تطبيقاً بحيث جميع عناصر X لها نفس الصورة b من Y . أي أن $f(x) = b \ \forall x \in X$. فإننا نقول عن التطبيق f أنـــه تطبيـــق ثابت .

٥) الغامر القانوني :

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة غير الخالية X ، فإن مجموعة صفوف التكافؤ هي :

$$X/R = \{[x] \mid x \in X\} \quad ; \quad [x] = \{y \in X \mid y R x\}$$

ويكون لدينا دوماً تطبيق $X \xrightarrow{\Pi} X/R$ ، معرف بالمساواة :

$$\Pi(x) = [x] \quad \forall x \in X$$

وهو غامر دوماً ، ولذلك نسميه الغامر القانوني .

٦) تطبيق (قانون التشكيل الداخلي ، أو العملية الثنائية على مجموعة X)

لتكن X مجموعة غير خالية، و $X \times X$ مجموعة الضرب الديكارتي للمجموعة X بنفسها .

كل تطبيق $X \times X \xrightarrow{f} X$ يسمى عملية ثنائية على المجموعة X ، أو قانون تشكيل داخلي في X .

مثال :

إن عملية الجمع العادية على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي تطبيق $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z}$ معرف بالمساواة :

$+(m, n) = m + n \ \forall \ m, n \in \mathbb{Z}$. وبالتالي فهي عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$.

من هذه المساواة ، نقتبس رمزاً للعملية الثنائية المعرفة على مجموعة X ، فنكتب $*$ بدلاً من f ونرمز لصورة العنصر (a, b) من $X \times X$ بالرمز $a * b$ بدلاً من $*(a, b)$.

4 . 7 . الصورة المباشرة والصورة العكسية :

ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً و A مجموعة جزئية من مجموعة المنطلق X و B مجموعة جزئية من مجموعة المستقر Y .

- نسمي مجموعة صور عناصر A بصورة المجموعة A ، أو الصورة المباشرة للمجموعة A ، ونرمز لها بالرمز $f(A)$. أي أن :

$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$$

ومن الواضح أن $f(A)$ مجموعة جزئية من مجموعة المستقر Y .

- كما نسمي مجموعة العناصر من المنطلق التي صورها تنتمي إلى المجموعة B الجزئية من Y بالصورة العكسية للمجموعة B وفق التطبيق f ، ونرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$. أي أن :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$

إن للتكافؤ التالي أهمية عملية كبيرة ، والذي ينتج من تعريف الصورة العكسية :

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

في الحالة الخاصة عندما $B = \{ b \}$ ، أي عندما تتألف المجموعة B الجزئية من المستقر Y ، من عنصر واحد فقط ، فإن صورته العكسية تكتب بالشكل :

$$f^{-1}(\{ b \}) = \{ x \in X \mid f(x) = b \}$$

ويجب عدم الخلط بين الصورة العكسية $f^{-1}(\{ b \})$ لمجموعة جزئية ، من المستقر ، مؤلفة من عنصر واحد $\{ b \}$ وبين الصورة $f^{-1}(b)$ لعنصر b وفق التقابل العكسي : $f^{-1} : Y \to X$ لتقابل مفروض $f : X \to Y$.

حيث أن $f^{-1}(b)$ هو العنصر الوحيد من X ، والذي يمثل صورة b وفق التقابل العكسي f^{-1} . في حين أن $f^{-1}(\{ b \})$ هي مجموعة جزئية من منطلق التطبيق f (الذي قد لا يكون تقابلاً وبالتالي f^{-1} غير موجود) وهذه المجموعة الجزئية قد تكون خالية أو مؤلفة من عنصر واحد ، أو من أكثر من عنصر .

ملاحظة ونتيجة :

- ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً ، بما أن $X \subseteq X$ فإن صورتها ، التي نرمز لها $\mathrm{Im}f$ ، هي :

$$\mathrm{Im}f = f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

والتي تسمى صورة التطبيق f ، وهي مجموعة جزئية من المستقر Y . من السهل التحقق أن :

التطبيق $f : X \to Y$ يكون غامراً $\Leftrightarrow \mathrm{Im}f = Y$.

4.8 خواص الصورة والصورة العكسية :

ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً و A , A_1 , A_2 مجموعات جزئية من مجموعة المنطلق X و B , B_1 , B_2 مجموعات جزئية من مجموعة المستقر Y . إن الخواص التالية محققة :

$$f(\varnothing) = \varnothing \quad , \quad f(X) \subseteq Y \qquad (1)$$

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2) \qquad (2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \qquad (3)$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \qquad (4)$$

وبشكل عام إذا كانت $\{A_i\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من المجموعة X فإنه يتحقق :

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \qquad (5)$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i) \qquad (6)$$

أما بالنسبة للصورة العكسية فإنه تتحقق الخواص التالية :

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \quad , \quad f^{-1}(Y) = X \qquad (7)$$

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \qquad (8)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \qquad (9)$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \qquad (10)$$

وبشكل عام إذا كانت $\{B_i\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من مجموعة المستقر Y فإنه يتحقق :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \qquad (11)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \qquad (12)$$

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B) \qquad (13)$$

(ونقرأذلك الصورة العكسية لمتمم مجموعة جزئية من المستقر تساوي متمم الصورة العكسية لتلك المجموعة الجزئية في المنطلق X .)

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \qquad (14)$$

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A \quad (15)$$

لنبرهن على بعض الخواص السابقة ، ونترك البقية كتمارين للدارس .

برهان (6) :

ليكن $f(x)$ عنصراً من $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ وحيث x عنصراً من $\bigcap_{i\in I} A_i$ ،

ولنبرهن على أن $f(x)$ عنصراً من $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

بما أن x عنصراً من $\bigcap_{i\in I} A_i$ فإن x ينتمي إلى A_i من أجل كل i من I

وبالتالي فإن $f(x)$ ينتمي إلى $f(A_i)$ من أجل كل i من I ، أي أن $f(x)$

ينتمي إلى $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ومنه نحصل على الاحتواء المطلوب .

برهان (11) :

لبرهان المساواة في (11) نبرهن أولاً الاحتواء

$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$. فإذا كان x عنصراً من $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$

فإن $f(x)$ يكون عنصراً من $\bigcup_{i\in I} B_i$ ، وبالتالي فإن $f(x)$ ينتمي إلى إحدى

المجموعات $\{B_i\}_{i\in I}$ ولتكن B_α ومنه ينتج أن x يكون عنصراً من المجموعة

$f^{-1}(B_\alpha)$ الجزئية من الإجتماع $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ ، وهكذا نجد أن x ينتمي إلى

الطرف الأيمن .

بخطوات معاكسة تماماً لما تقدم نحصل على الاحتواء المعاكس وبالتالي على المساواة

المطلوبة .

برهان (13) :

إذا كان x عنصراً من المجموعة $f^{-1}(Y-B)$ فإنه حسب تعريف

الصورة العكسية تكون صورته $f(x)$ عنصراً من المجموعة $Y-B$ ، وحسب تعريف

الفرق بين مجموعتين ، فإن العنصر $f(x)$ ينتمي إلى Y ولا ينتمي إلى B ، ومن

تعريف الصورة العكسية فإن x يكون عنصراً من $X = f^{-1}(Y)$ من جهة ، ومن جهة أخرى فإن x لن يكون عنصراً من $f^{-1}(B)$ (لأنه لو كان كذلك لكان $f(x)$ عنصراً من B وهذا غير صحيح) ، وحسب تعريف الفرق مرة أخرى ، نجد أن x عنصراً من الفرق $X - f^{-1}(B)$ وبالتالي نحصل على الاحتواء $f^{-1}(Y - B) \subseteq X - f^{-1}(B)$.

وبخطوات معاكسة تماماً نحصل على الاحتواء المعاكس وبالتالي نحصل على المساواة المطلوبة .

برهان (15) :

لنبرهن على أن $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

إذا كان a عنصراً من المجموعة A فإن صورته $f(a)$ تكون عنصراً من المجموعة $f(A)$ ، وحسب تعريف الصورة العكسية لمجموعة ، فإن a يكون عنصراً من $f^{-1}(f(A))$ ، وينتج بذلك الاحتواء المطلوب .

5 . § . المجموعات المتكافئة عددياً ، المجموعات المنتهية ، الأعداد الأصلية (the cardinal numbers) ، المجموعات غير المنتهية عددّياً (countably infinite) والمجموعات القابلة للعد أو العدودة (countable)

5 . 1 تعريف (تكافؤ مجموعتين عددياً)

نقول عن المجموعتين غير الخاليتين X , Y ، أنهما متكافئتان عددياً (numerically equivalence) إذا وجد بينهما تقابلاً (أي تطبيق متباين وغامر) .

ونستخدم أحياناً عبارة مجموعتان متقابلتان للدلالة على وجود تقابل بينهما .

5 . 2 تعريف (مجموعة منتهية ، عدد أصلي) :

إذا كانت X مجموعة غير خالية ومكافئة عددياً للمجموعة $\{1, 2, ... , n\}$ قلنا أنها مجموعة منتهية وعدد عناصرها n ، وحيث n عدد صحيح موجب . وبالتالي :

مجموعتان غير خاليتين ومنتهيتين تكونان متكافئتين عددياً إذا وفقط إذا كان لكل منهما نفس العدد n من العناصر ، وفي هذه الحالة نقول أن n هو عدد العناصر في كل من المجموعتين ، أو نقول أن n هو العدد الأصلي (the cardinal number) لكل من المجموعتين ، من ذلك نجد أن كل مجموعة غير خالية ومنتهية A يوافقها عدداً أصلياً هو عدد عناصرها وليكن n وأن كل مجموعة منتهية وعدد عناصرها n تكون مكافئة عددياً للمجموعة A ، والعكس صحيح ، أي أن كل مجموعة مكافئة عددياً للمجموعة A يوافقها العدد الأصلي نفسه n .

الآن نعمم مفهوم العدد الأصلي كما يلي :

إذا كانت A , B ، مجموعتين متكافئتين عددياً فإننا نقول أن لهما نفس العدد الأصلي ، ونكتب $|B| = |A|$ (ونقرأ ذلك : العدد الأصلي للمجموعة A يساوي العدد الأصلي للمجموعة B) . مما تقدم نكتب :

المجموعتان A , B متكافئتان عددياً $\Leftrightarrow |B| = |A| \Leftrightarrow$ يوجد تقابل بين المجموعتين A , B .

وبالتالي للتعرف على المجموعات التي لها نفس العدد الأصلي ، يجب التعرف على المجموعات التي يوجد تقابلات فيما بينها . وهذه المسألة محلولة بالنسبة للمجموعات المنتهية ، أما بالنسبة للمجموعات غير المنتهية فإننا سوف نصادف العجائب ، فمثلاً المجموعة غير المنتهية $\mathbb{N} = \{1 , 2 , 3 , . . . \}$ ، مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة (أو الطبيعية) ، هي بالطبع تحوي تماماً مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة $A = \{2 , 4 , 6 , . . . \}$. ومن الطبيعي التصور بأن المجموعة $\mathbb{N}$ تحوي ضعفي ما تحويه المجموعة A من العناصر ، متأثرين بالمجموعات المنتهية . على الرغم من هذا التصور المتسرّع ، إلا أن مسألتنا هنا دراسة وجود أو عدم وجود تقابل بين هاتين المجموعتين ، والذي بدوره يجيب على صحة أو عدم صحة المساواة $|A| = |\mathbb{N}|$.

إن البحث عن التقابل المنشود يتم إما بصيغ رياضية ، وهذا غير ممكن أحياناً ، أو بوضع جميع عناصر A بشكل تقابلي مع جميع عناصر $\mathbb{N}$ على النحو :

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$
$$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots$$

وبالتالي نحصل على التقابل الذي يمكن صياغته رياضياً بالعلاقة $f(n) = 2n$ لكل n من $\mathbb{N}$. وهذا يبين صحة المساواة $|A| = |\mathbb{N}|$ ، أي تساوي العددين الأصليين لكل من $A, \mathbb{N}$.

بنفس الطريقة السابقة ، نستطيع بيان أن مجموعة كل الأعداد الصحيحة الزوجية $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$ تقابلية مع $\mathbb{N}$ ، وذلك وفق المقابلة التالية :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots\ldots$$
$$0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\ldots$$

والتي أيضاً يمكن استنتاج صيغة رياضية لها كما يلي :

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{زوجي } n \\ 1-n & \text{فردي } n \end{cases}$$

بشكل مشابه ، مجموعة كل الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تقابلية مع N ، وذلك وفق جدول المقابلة :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots$$
$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\ldots$$

ويمكن استنتاج صيغة رياضية لهذا التقابل كما يلي :

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{زوجي } n \\ \dfrac{1-n}{2} & \text{فردي } n \end{cases}$$

وبالتالي نجد أن $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

من المفيد أن نذكر أن العالم المعروف غاليليو (Galileo) لاحظ في مطلع القرن السابع عشر " أنه يوجد بالضبط نفس العدد من الأعداد المربعة { . . . , 25 , 16 , 9 , 4 , 1 } والأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}$" ، أي بلغتنا الرياضية الحديثة لهما نفس العدد الأصلي ، وهذا يتضح من التقابل التالي :

$$1 , 2 , 3 , 4 , \ldots , n , \ldots$$
$$1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , \ldots , n^2 , \ldots$$

الذي يصاغ رياضياً ، بكل بساطة ، بالمساواة : $f(n) = n^2$.

3 . 5 . تعريف (مجموعة غير منتهية عدياً ؛ Countably infinitie ، مجموعة قابلة للعد أو عدودة Countable)

كل مجموعة غير منتهية ومكافئة عددياً للمجموعة $\mathbb{N}$ تسمى مجموعة غيرمنتهية عدياً (Countably infinite) ونقول عن مجموعة أنها قابلة للعد أو عدودة (Countable) إذا كانت غير خالية و كانت إما منتهية أو كانت غير منتهية عدياً .

إذا رمزنا بـ α_0 للعدد الأصلي $|\mathbb{N}|$ فإننا نحصل على لوحة الأعداد الأصلية :

$$1 , 2 , 3 , \ldots , \alpha_0$$

والتي يمكن توسيعها بإثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ليست تقابلية مع $\mathbb{N}$ أي أنها غير قابلة للعد (Uncountable set) وبالتالي إذا رمزنا للعدد الأصلي $|\mathbb{R}|$ بالرمز c والمختلف طبعاً عن α_0 فإننا نضيف عدداً لمجموعة الأعداد الأصلية والتي تصبح :

$$1 , 2 , 3 , \ldots , \alpha_0 , c$$

هذه الأعداد يمكن ترتيبها بعلاقة ترتيب كما يلي :

5.4 تعريف (علاقة ترتيب على الأعداد الأصلية)

لتكن المجموعتان غير الخاليتان A , B ، عند ذلك نعرف العلاقة $\leq$ ، (على الأعداد الأصلية) كما يلي :

$|B| \leq |A| \Leftrightarrow$ يوجد تطبيق متباين من A إلى B .

5.5 . مبرهنة :

إن العلاقة $\leq$ المعرفة على الأعداد الأصلية هي علاقة ترتيب جزئية .

البرهان :

(a) العلاقة ($\leq$) انعكاسية لأنه من أجل أي عدد أصلي $|A|$ ، للمجموعة غير الخالية A ، فإن التطبيق المطابق من A في نفسها ، يبين أن $|A| \leq |A|$.

(b) العلاقة ($\leq$) متعدية لأنه إذا كان $|C| \leq |B|$ و $|B| \leq |A|$ فإن ذلك يعني وجود تطبيقين متباينين $g : B \to C$ و $f : A \to B$ وبالتالي فإن تركيبهما $g_0 f : A \to C$ يكون متبايناً (تحقق من ذلك) . وبالتالي ينتج أن : $|C| \leq |A|$.

(c) العلاقة ($\leq$) لاتناظرية :

لأنه إذا كان $|B| \leq |A|$ و $|A| \leq |B|$ فإن ذلك يعني وجود تطبيقين متباينين : $B \to A \wedge g : A \to B$ $f :$ وبالتالي حسب نظرية شرودر — بيرنستين التي نصها ((إذا كانت X , Y مجموعتين ، كل منهما تكافئ عددياً مجموعة جزئية من الأخرى ، فإن المجموعتين Y , X تكونان متكافئتين عددياً))

فإنه يوجد تقابل بين المجموعتين A , B أي أن $|B| = |A|$ ، وبالتالي فإن العلاقة $\leq$ لاتناظرية .

ملاحظة :

يمكن تعريف العلاقة $\leq$ بشكل مكافئ كما يلي :

$|B| \leq |A| \Leftrightarrow A$ تكافئ عددياً مجموعة جزئية من B

5 . 6 . مبرهنة (خواص أساسية للأعداد الأصلية) .

a) $n < \alpha_0 < c$

b) الإجتماع لأسرة قابلة للعد من المجموعات القابلة للعد ، يكون قابلاً للعد .

c) الجداء الديكارتي لمجموعتين قابلتين للعد يكون مجموعة قابلة للعد .

d) مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد .

البرهان :

a) من الواضح أن $n < \alpha_0$. ولبرهان أن $\alpha_0 < c$ نبرهن وجود تطبيق متباين من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{R}$ ، ثم نبرهن عدم وجود أي تقابل من المجموعة $\mathbb{N}$ على المجموعة $\mathbb{R}$. من الواضح أن $g(n) = \frac{1}{n}$ تطبيق متباين من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن $\alpha_0 \leq c$ ، ولبرهان أن $\alpha_0 \neq c$ يكفي برهان عدم امكانية وجود تطبيق تقابلي من $\mathbb{N}$ على $I = [0, 1]$. نفرض جدلاً وجود تطبيق تقابلي $f : \mathbb{N} \to I$. ولنرمز بـ $a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3} \ldots$ للجزء العشري للعدد $f(m)$ من I . والفرض بأن f

تقابلي يسمح لنا التصور بأن عناصر I جميعها تكتب بشكل متتالية كما يلي :

$$f(1) : a_{11}\; a_{12}\, a_{13} \ldots$$

$$f(2) : a_{21}\; a_{22}\, a_{23} \ldots$$

$$f(3) : a_{31}\; a_{32}\, a_{33} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(k) : a_{k1}\; a_{k2}\, a_{k3} \ldots a_{kk}$$

سوف نبين وجود عنصر b من I يختلف من $f(m)$ من أجل كل m من $\mathbb{N}$ (وبذلك نحصل على تناقض مع كون f غامر بالفرض الجدلي) ، وهذا العنصر يعرّف كما يلي :

$$b : b_1 b_2 \ldots b_K \ldots \qquad ; \qquad b_K = \begin{cases} 5 & \text{if } a_{kk} \neq 5 \\ 7 & \text{if } a_{kk} = 5 \end{cases}$$

إن العنصر b الذي جزؤه العشري . . . $b_1 b_2$ يكون من I ويختلف عن كل $f(m)$ في الرقم العشري الميمي من أجل كل . . . $m = 1 , 2 ,$.

إذاً f ليس غامراً ، ولا يوجد تقابل من $\mathbb{N}$ على I . وبالتالي لا يوجد تقابل من $\mathbb{N}$ على $\mathbb{R}$ ، وبذلك يتم المطلوب .

b) لتكن $\{ A_1 , A_2 , A_3 , \ldots \}$ أسرة قابلة للعد من المجموعات A_i ، التي كل منها قابلة للعد .

لنقوم ببناء أسرة جديدة $\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}$ بحيث تكون عناصرها منفصلة مثنى مثنى ، كما يلي ، نضع

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$$B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$$

$$B_n = A_n - \left(\bigcup_{k<n} A_k \right)$$

من الواضح أن كل مجموعة B_n قابلة للعد ويتحقق :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad , \qquad B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$$

وبالتالي نستطيع ترقيم عناصر كل مجموعة B_n كما يلي :

$$\begin{aligned} B_1 &= \{ b_{11} , b_{12} , b_{13} , b_{14} , \ldots \} \\ B_2 &= \{ b_{21} , b_{22} , b_{23} , b_{24} , \ldots \} \\ B_3 &= \{ b_{31} , b_{32} , b_{33} , b_{34} , \ldots \} \\ B_4 &= \{ b_{41} , b_{42} , b_{43} , b_{44} , \ldots \} \end{aligned}$$

. . . .

ثم نصل بين عناصر الإجتماع $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ بخط سهمي يمر بكل عنصر مرة واحدة فقط ، وبذلك نعرف تطبيقاً : $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{=1}^{\infty} B_n$ كما يلي :

$$f(1) = b_{11}, f(2) = b_{21}\ , f(3) = b_{12}\ , f(4) = b_{13}\ , f(5) = b_{22}\ , f(6) = b_{31}, \ldots$$

وهكذا نحصل على تطبيق تقابلي من $\mathbb{N}$ على $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. وبذلك يتم البرهان .

c) إذا كانت كل من A و B مجموعة قابلة للعد . فإننا نستطيع ترقيم عناصر B كما يلي :

$$B = \{ b_1 , b_2 , b_3 , \ldots \}$$

عند ذلك المجموعة $\{ A_n = A \times \{ b_n \} = \{ (a , b_n) \mid a \in A$ تكون قابلة للعد من أجل كل $n = 1 , 2 , \ldots$ وبملاحظة أن $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ فإن $A \times B$ تكون اجتماعاً لأسرة قابلة للعد من المجموعات التي كل منها قابلة للعد ، وبالتالي تكون قابلة للعد حسب (b) .

(d) إن كل عنصر من $\mathbb{Q}$ يكتب بالشكل الوحيد m / n وحيث m , n عددان صحيحان أوليان نسبياً و أن n عدد صحيح موجب (علماً أن كل عدد صحيح m يكتب بالشكل $m / 1$) عند ذلك التطبيق $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعرف بالمساواة $f (m / n) = (m , n)$ يكون تطبيقاً متبايناً من $\mathbb{Q}$ على مجموعة جزئية من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، وبما أن $\mathbb{Z}$ قابلة للعد فإن $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ قابلة للعد حسب (c) وبالتالي $\mathbb{Q}$ تكون قابلة للعد .

7 . 5 . مبرهنة (مسلمة الإختيار ، مبرهنة زورن ، نظرية زيرميلو أو مبدأ الترتيب الحسن)

إن النصوص التالية جميعها متكافئة :

(1) مسلمة الإختيار (Axiom of choice)

إذا كانت $\{A_i\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات غير الخالية والمنفصلة مثنى مثنى ، فإنه توجد مجموعة B جزئية من الاجتماع $\bigcup_{i \in I} A_i$ بحيث التقاطع $B \cap A_i$ يملك عنصراً واحداً فقط من أجل كل i من I .

(2) المبرهنة المساعدة لزورن (Zorn's lemma)

لتكن A مجموعة غير خالية مرتبة جزئياً ، إذا كانت كل مجموعة جزئية من A ومرتبة كلياً تملك حداً أعلى (upper bound) ، فإن A تملك عنصراً أعظمياً (a maximal element) .

(3) نظرية زيرميلو (Zermelo's theorm)

كل مجموعة يمكن أن تكون مرتبة جيداً . ونقول عن مجموعة A أنها مرتبة جيداً ، إذا كانت تملك علاقة ترتيب كلي $\leq$ بحيث كل مجموعة جزئية من A تملك عنصراً أصغر (a smallest elemnt) ونسمي هذه النظرية أيضاً بمبدأ الترتيب الحسن (أو الجيد) (well – ordering principle) .

مثال :

إن مجوعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ (أو $\mathbb{N}$) هي مجموعة مرتبة جيداً . لأنها مرتبة كلياً بالعلاقة العادية $\leq$ ، وكل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ تملك عنصراً أصغر .

6 . § . الاستقراء الرياضي (Mathmatical induction)

لتكن p (n) قضية متعلقة بالعدد الصحيح الموجب n مثل العبارة : " n عدد زوجي " أو بالعبارة : " العدد n مربع العدد الصحيح " أو المساواة :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

فتكون المسألة عادة إثبات صحة تلك القضية من أجل كل عــدد صــحيح موجــب $n_0 \le n$ (وحيث n_0 عدد صحيح موجب) ويتم ذلك بالاعتماد على ما يسـمى بمبدأ الاستقراء الرياضي ، والذي بدوره يعتمد أساساً على مبدأ الترتيب الحسن الذي تحققه مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}$ ؛ كما وجدنا في نهاية الفقــرة الســابقة (نظرية زيرميلو) ، وسوف نقدم صيغتين لمبدأ الاستقراء .

6 . 1 . الصيغة الأولى (لمبدأ الاستقراء الرياضي)

إذا كانت $p\,(n)$ قضية مرتبطة بالعدد الصحيح الموجب n ، تحقق الشرطين

(1) $p(1)$ صحيحة .

(2) من أجل كل عدد صحيح موجب m ،إذا كانت $p\,(m)$ صــحيحة فــإن $p\,(m+1)$ تكـــون صـــحيحة .

فإن القضية $p\,(n)$ تكون صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب n .

البرهان :

لنفرض جدلاً أن القضية $p\,(n)$ خاطئة من أجل بعض قيم n ، التي تشـكل مجموعة غير خالية S جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، وبالتالي حسب مبدأ الترتيب الحسن فإن المجموعة S تملك عنصراً أصغر ولـيكن n_0 ، إن $n_0 \neq 1$ وذلك لأن $p\,(1)$ صحيحة بالفرض إذاً العدد $(n_0\ -1)$ هــو عــدد صــحيح موجب ومن أجله $p\,(n_0\ -1)$ صحيحة (لأن $n_0 > n_0\ -1$) . وبالتالي حسـب (2) فإن $p\,(n_0\ -1+1)=p\,(n_0)$ صحيحة وهذا يتناقض مع كون القضــية $p\,(n_0)$ خاطئة ، إذاً فرضنا الجدلي غير صحيح و لا توجد قيم لــ n تكون فيهـا القضية $p\,(n)$ خاطئة . إذاً $p\,(n)$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجــب n .

6 . 2 فائدة :

لبرهان أن قضية $p(n)$ صحيحة من اجل كل عدد صحيح موجب n ، نبرهن ما يلي :

(a) نبرهن على أن $p(1)$ صحيحة (وهذا يكون عادة سهلاً)

(b) نفرض أن $p(m)$ صحيحة من أجل العدد الصحيح $m \geq 1$ ، ونبرهن صحة $p(m+1)$.

مثال :

لبرهان صحة المساواة $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ من أجل كل عدد صحيح موجب . نرمز للمساواة المطلوب اثباتها بالرمز $p(n)$ ، ولنبرهن أولاً صحة $p(1)$. وهذا واضح لأن $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ، ثانياً ، نفرض صحة القضية من أجل العدد الصحيح $m \geq 1$ ، أي نفرض صحة $p(m)$ ، أي نفرض صحة المساواة :

$1+2+3+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}$ (وتسمى فرضية الاستقراء) ثم نبرهن صحة $p(m+1)$ أي نبرهن صحة المساواة :

$$1+2+3+\ldots+m+(m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

باستخدام فرضية الاستقراء نجد :

$$1+2+3+\ldots+m+(m+1) =$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

ويتحقق المطلوب .

تمرين :

بنفس الطريقة أثبت صحة المساواة

$$1^2 + 2^2 + . . . + n^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

6 . 3 . ملاحظة و مثال :

إن بعض القضايا الرياضية $p\,(n)$ قد لا تتحقق إلا اعتباراً من العدد الصحيح الموجب r ، وفي هذه الحالة يطلب إثبات $p\,(n)$ من أجل كل $r \le n$.

إن الصيغة الأولى لمبدأ الاستقراء تبقى صحيحة وتقدم بالشكل التالي (التي يتم برهانها بنفس الطريقة) .

- القضية $p\,(n)$ تكون صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب $r \le n$ (حيث r عدد صحيح موجب مفروض) . إذا تحقق مايلي :

a) $P\,(r)$ صحيحة (أي أن القضية $p\,(n)$ صحيحة من أجل $n = r$)

b) من أجل كل عدد صحيح موجب $r < m$ ، إذا كانت $p\,(m)$ صحيحة فإن $p\,(m+1)$ تكون صحيحة .

مثال (2) :

لاحظ أن المتباينة $n^2 < n!$ غير صحيحة من أجل $n = 1 , 2 , 3$

ولكنها اعتباراً من $n = 4$ فإن $4^2 = 16$ و $4! = 24$ والمتباينة $4^2 < 4!$ تكون صحيحة ، فهل تكون $n^2 < n!$ صحيحة من أجل كل $4 \le n$ ؟ والإجابة تكون باستخدام الصيغة الأولى لمبدأ الاستقراء ، مع الأخذ بعين الإعتبار الملاحظة الأخيرة ، فإذا رمزنا للمتباينة $n^2 < n!$ بالرمز $p\,(n)$ ، فيكون :المطلوب برهان صحتها من أجل كل $4 \le n$ (وهنا $r = 4$) .

a) لقد وجدنا صحة $p\,(4)$.

b) نفرض صحة $p\,(m)$ من أجل كل عدد صحيح $4 \le m$ ، أي نفرض

صحة $m^2 < m!$ لكل $m \geq 4$ ونبرهن صحة $p(m+1)$ أي نبرهن صحة $(m+1)^2 < (m+1)!$.

بضرب طرفي فرضية الاستقراء بـ $(m+1)$ نجد

$$(1) \ldots (m+1)m^2 < (m+1)m! = (m+1)! \quad \text{لكل } m \geq 4$$

لدينا المتباينة $(m+1) < m^2$ الصحيحة من أجل كل $m \geq 2$ ، التي بضرب طرفيها بـ $(m+1)$ نجد :

$(m+1)^2 < (m+1)m^2$ وباستخدام العلاقة (1) نجد أن :

$$(m+1)^2 < (m+1)! \qquad \forall m \geq 4$$

وبالتالي $p(m+1)$ صحيحة .

6.4 . الصيغة الثانية (لمبدأ الاستقراء الرياضي)

إذا كانت $p(n)$ قضية مرتبطة بالعدد الصحيح الموجب n ، تحقق الشرطين :

١) $p(r)$ صحيحة من أجل العدد الصحيح $1 \leq r$.

٢) من أجل كل عدد صحيح $r \leq m$ ، إذا كانت كل من $p(r), p(r+1), \ldots, p(m)$ صحيحة فإن $p(m+1)$ صحيحة

[أو بالشكل المكافئ : من أجل كل عدد صحيح $r \leq m$ إذا كانت $p(k)$ صحيحة من أجل كل $r \leq k \leq m$ فإن $p(m+1)$ صحيحة]

فإن القضية $p(n)$ تكون صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب $1 \leq r \leq n$.

البرهان :

يتم بطريقة مشابهة للصيغة الأولى ويترك تمرين للدارس .

سوف نكتشف الفائدة الكبيرة للصيغة الثانية لمبدأ الاستقراء في عدة مسائل رياضية ، ونقدم كتطبيق على ذلك . برهان شطر الوجود في النظرية الأساسية في الحساب التي نصها :

6.5 . تطبيق (النظرية الأساسية في الحساب) :

من أجل كل عدد صحيح $n > 1$ ، يوجد أعداد أولية $p_1 . p_2 . . . . . p_r$ (ليست متباينة بالضرورة) بحيث $n = p_1 , p_2 , ... , p_r$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان $n = q_1 . q_2 ., ... q_s$ تحليلاً آخر للعـــدد n إلى جداء أعداد أولية فإن $r = s$ ، ومن أجل كل p_i في التحليل الأول يوجد q_j في التحليل الثاني بحيث $p_i = q_j$. (أي أن العوامل متساوية ولكن قد تكون مختلفة في الترتيب) .

البرهان :

لنبرهن فقط وجود التحليل لكل عدد صحيح $n > 1$ ، أما الوحدانية فهـــو بحاجة إلى معلومات إضافية .

لنرمز للعبارة ((n يمكن أن يكتب جداء أعداد أولية)) بالرمز $p(n)$.

ولنبدأ الاستقراء على العدد $n = 2$ (لأنه بالفرض $n > 1$)

١) من الواضح أن $p(2)$ صحيحة ، لأن 2 نفسه عدد أولي .

٢) من أجل كل عدد صحيح $m \geq 2$ ، لنفـــرض صـــحة $p(k)$ لكـــل $2 \leq k \leq m$ (أي لنفرض صحة $p(2) , p(3) , ... , p(m)$) ولنبرهن صحة $p(m+1)$.

إذا كان العدد $m + 1$ أولياً فإنه من الواضح أن $p(m+1)$ صحيحة

أما إذا كان $(m + 1)$ ليس أولياً فإننا نستطيع كتابته بالشـــكل $m + 1 = a . b$ وحيث $2 \leq a , b < m+1$ ، وبالتالي حسب فرضية الاستقراء ، فإن كل من $p(b)$ و $p(a)$ صحيحة . أي أن

$$a = p_1 p_2 . . . p_t \qquad b = q_1 q_2 . . . q_u$$

وحيث p_i , q_j أعداد أولية . ومنه نجد أن

$$m+1 = a . b = p_1 . p_2 . . . p_t . q_1 . q_2 . . . q_u$$

أي أن $p(m+1)$ صحيحة .

تمرين :

استخدام الصيغة الثانية للاستقراء في برهان أن $a_n = 2^n$ لكل

$0 \le n$ وحيث $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ متتالية معرفة كما يلي .

$a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) \ \forall \ n \ge 2$.

مثال :

لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n (حيث n عدد صحيح موجب) . ولتكن $p(A)$ أسرة كل المجموعات الجزئية من المجموعة A (بما في ذلك $\varnothing$) . لنبرهن على أن عدد عناصر الأسرة $p(A)$ هو 2^n . و ذلك بالاستقراء :

(a) إذا كان $n = 1$ وإذا كانت $A = \{a_1\}$ فإن عدد عناصر $p(A) = \{\varnothing, \{a_1\}\}$ هو $2 = 2^1$

(b) لنفرض صحة الخاصة من أجل $n = k$ ، أي صحة أنه إذا كان عدد عناصر A هو k فإن عدد عناصر $p(A)$ هو 2^K . ولنبرهن صحة الخاصة من أجل $n = k + 1$ ، أي صحة أنه إذا كان عدد عناصر A هو $k + 1$ فإن عدد عناصر $p(A)$ هو 2^{K+1} .

لتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_K, a_{K+1}\}$ مجموعة عدد عناصرها $k + 1$ ولنبرهن على أن عدد عناصر $p(A)$ هو 2^{K+1} . إذا وضعنا $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$ فإنه حسب فرضية الاستقراء يكون عدد عناصر $p(B)$ هو 2^K ومن الواضح أن : $A = B \cup \{a_{K+1}\}$. وبملاحظة أن

$p(A) = p(B) \cup$ {كل المجموعات الجزئية من B بعد اضافة a_{K+1} لكل منها}

أي :

$$p(A) = p(B) \cup \{x \cup \{a_{K+1}\} \mid x \in p(B)\} = p(B) \cup C$$

وبملاحظة أن عدد عناصر المجموعة C هو نفس عدد عناصر المجموعة $p(B)$ الذي هو 2^K ، وبما أنه لا توجد بينهما عناصر مشتركة فإن عدد عناصر $p(A)$ هو $2^{K+1} = 2\,2^K$. وبالتالي يتم المطلوب .

6 . 6 . متناقضة روسيل Russell's paradox :

إن الظاهرة التي سنعرضها الآن ، كانت قد عرضت لأول مرة في العام 1901 من قبل Russell وبعدها عرفت بمتناقضة روسيل . وهي كما يلي :

لنفرض أننا نقبل بأن تنتمي مجموعة إلى نفسها . ولتكن p مجموعة كل المجموعات . من الواضح أنه يمكن أن نقسم p إلى مجموعتين :

$$p_1 = \{ A \in p \mid A \notin A \} \;,\; p_2 = \{ A \in p \mid A \in A \}$$

عند ذلك سوف ينتج التناقض التالي :

$$p_1 \in p_1 \Leftrightarrow p_1 \notin p_1$$

ولبيان ذلك نقول :

بما أن p_1 مجموعة و p مجموعة كل المجموعات فإن $p_1 \in p$ وهنا نميز حالتين :

الحالة الأولى : $p_1 \in p_1$ وحسب تعريف p_1 ينتج أن $p_1 \notin p_1$ (أي أن $p_1 \in p_1 \Rightarrow p_1 \notin p_1$)

الحالة الثانية : $p_1 \notin p_1$ وأيضاً حسب تعريف p_1 ينتج أن $p_1 \in p_1$ (أي أن $p_1 \notin p_1 \Rightarrow p_1 \in p_1$) وبالتالي نحصل على التكافؤ $p_1 \in p_1 \Leftrightarrow p_1 \notin p_1$.

ولتفادي هذا التناقض ، الذي شغل في وقته العديد من الرياضيين فقد اتفق على انه من غير المقبول أن تكون المجموعة عنصر من نفسها .

تمارين (عن الفصل الأول)

(1) إذا كانت $U = \{1\}$ فإنه توجد مجموعتان جزئيتان منها همـــا $\{1\}$ و $\varnothing$. إذا كانت B ، A مجموعتين جزئيتين اختياريتن من U ، فإنه توجد أربعـــة امكانيات لعلاقات من الشكل $A \subseteq B$. ما هو عدد العلاقات الصحيحة منها .

(2) إذا كانت $U = \{1, 2\}$ فإنه توجد أربع مجموعات جزئيـــة منـــها ، اذكرها . و إذا كانت A , B مجموعتين جزئيتين اختياريتن من المجموعة U ، فإنـــه توجد 16 امكانية لعلاقات من الشكل $A \subseteq B$. ما هو عدد العلاقات الصحيحة منها .

(3) إذا كانت $U = \{1, 2, 3\}$ فإنه توجد ثمان مجموعات جزئية منها ، اذكرها ثم تحقق من وجود 64 امكانية لعلاقات من الشكل $A \subseteq B$ ، ما هو عدد العلاقات الصـــحيحة منـــها . هـــل نســـتطيع تعمـــيم ذلـــك عنـــدما تكـــون $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ مؤلفة من n عنصر ، وحيث n عدد صحيح موجب .

(4) إذا كانـــت $\{A_i\}$ ، $\{B_j\}$ أســـرتين مـــن المجموعـــات بحيـــث $\{A_i\} \subseteq \{B_j\}$. برهن على أن :

$$(a) \quad \bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_j B_j \qquad\qquad (b) \quad \bigcap_j B_j \subseteq \bigcap_i A_i$$

(5) من أجل أي مجموعتين A , B برهن ما يلي :

$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

(6) الفرق التناظري (the symmetric difference) لمجموعتين

A , B ، الذي يرمز له $A \Delta B$ يعرف بالمساواة :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

برهن ما يلي :

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

$$A \Delta \varnothing = A \quad ; \quad A \Delta A = \varnothing \; ; \; A \Delta B = B \Delta A$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

(7) لتكن X مجموعة غير خالية و i_X التطبيق المطابق على المجموعة X ، المعرف بالمساواة $i_X(x) = x$ لكل x من X والذي سنرمز له بـ i بدلاً من i_X .

(a) – من أجل كل تطبيق f من X إلى X برهن تحقق المساواة :

$$f o i = i o f = f$$

(b) – وإذا كان f تقابلاً ، فإن تقابله العكسي f^{-1} موجود ، برهن في هذه الحالة أن

$$f o f^{-1} = f^{-1} o f = i$$

(c) – برهن على أن f^{-1} هو التطبيق الوحيد من X إلى X الذي يحقق المساواة في (b) . أي : برهن على أنه إذا كان g تطبيقاً من X إلى X يحقق $f o g = g o f = i$ فإن $g = f^{-1}$.

(لاحظ أن :

$$g = g o i = g o (f o f^{-1}) = (g o f) o f^{-1} = i o f^{-1} = f^{-1} \quad)$$

(8) لتكن X , Y مجموعتين غير خاليتين و f تطبيقاً من X إلى Y . برهن مايلي :

a) التطبيق f متباين $\Leftrightarrow$ يوجد تطبيق g من Y إلى X بحيث $g o f = i_X$ (حيث i_X هو التطبيق المطابق على X)

b) التطبيق f غامر $\Leftrightarrow$ يوجد تطبيق h من Y إلى X بحيث

(Y حيث Y التطبيق المطابق على $f o h = i_Y$)

(9) لتكن X مجموعة غير خالية و f تطبيقاً من X في X . برهن على أن :

التطبيق f تقابلاً $\Leftrightarrow$ يوجد تطبيق g من X في X بحيث $f o g = g o f = i_X$.

(إذا وجد تطبيقاً g محققاً للمساواة السابقة فإنه وحيد لماذا ؟)

(10) a) برهن على أن تركيب تطبيقين غامرين(متباينين) يكون تطبيقاً غامراً (متبايناً)

ثم استنتج أن تركيب تقابلين يكون تقابلاً .

b) لتكن X مجموعة غير خالية و ليكن f , g تطبيقين تقابلين من المجموعة X على نفسها . برهن على أن

$$(f o g)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$$

(11) لتكن X , Y مجموعتين غير خاليتين و f تطبيقاً من X في Y . إذا كانت A مجموعة جزئية من X و B مجموعة جزئية من Y فبرهن مايلي :

(a) $(f o f^{-1})(B) \subseteq B$ وأن [f غامر $\Leftrightarrow$ $(f o f^{-1})(B) = B$ لكل مجموعة جزئية B من Y] .

(b) $A \subseteq (f^{-1} o f)(A)$ وأن [f متباين $\Leftrightarrow$ $A = (f^{-1} 0 f)(A)$ لكل مجموعة جزئية A من X] .

(c) f متباين $\Leftrightarrow$ $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ من أجل كل مجموعتين جزئيتين A_1 , A_2 من X .

(d) f غامر $\Leftrightarrow$ $Y - f(A) \subseteq f(X - A)$ من أجل كل مجموعة جزئية A من X .

(e) إذا كان f غامراً فإنه يتحقق :

f متباين أيضاً $\Leftrightarrow$ $Y - f(A) = f(X - A)$ لكل مجموعة جزئية A من X .

(12) لتكن X , Y مجموعتين غير خاليتين ، إذا كانت A_2 , A_1 مجموعتين جزئيتين من المجموعة X ، و B_2 , B_1 مجموعتين جزئيتين من المجموعة Y فبرهن على أن :

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = [(A_1 - A_2) \times (B_1 - B_2)] \cup$$

$$[(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)] \cup [(A_1 - A_2) \times (B_1 \cap B_2)]$$

(13) لتكن X , Y مجموعتين غير خاليتين ولتكن $\{A_i\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من X ، المغلقة بالنسبة للتقاطع والفرق التناظري لأي عنصرين ولتكن $\{B_j\}_{j \in J}$ أسرة من المجموعات الجزئية من Y ، المغلقة بالنسبة للتقاطع والفرق التناظري لأي عنصرين منها ، برهن على أن الاجتماعات المنتهية لمجموعات من الشكل $A_i \times B_j$ وحيث $A_i \in \{A_i\}$ و $A_j \in \{B_j\}$ تشكل أسرة (من المجموعات الجزئية من مجموعة الضرب الديكارتي $Y \times X$) مغلقة بالنسبة للتقاطع والفرق التناظري لأي عنصرين من عناصرها .

(14) ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً . ولنعرف علاقة R في المجموعة X كما يلي $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 R x_2$ برهن على أن R علاقة تكافؤ ، ثم حدد صفوف التكافؤ (لاحظ أنه إذا كان a عنصراً من X فإن صف تكافؤه $[a]$ يكون بالاعتماد على تعريف الصورة العكسية :

$$([a] = \{x \in X \mid x R a\} = \{x \in X \mid f(x) = f(a)$$
$$= \{f^{-1}(\{f(a)\}))$$

(15) لنعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية R علاقة $\sim$ بالشكل التالي : $x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \sim y$ برهن على أن " $\sim$ " علاقة تكافؤ على R . ثم حدد صفوف التكافؤ .

(16) لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة ، وليكن n عدداً صحيحاً موجباً . نقول

عن العددين الصحيحين a ، b أنهما متطابقان قيـــاس n (congruent modulo n)

ونرمز لهذه العلاقة بالرمز $a \equiv b \pmod n$ ، إذا كان الفـــرق بينـــهما $(a - b)$

مضاعفاً للعدد n . برهن على أن " علاقة التطابق قياس n " ، هي علاقـــة تكـــافؤ

على $\mathbb{Z}$. ثم حدد صفوف التكافؤ و عدد هذه الصفوف .

(17) لنعتبر على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ ، العلاقات الثلاثة المعروفة

: $a < b$ ، $a \leq b$ و a يقسم b (التي نرمز لها عادة $a \mid b$) . بيّن أي من

الخواص التالية تحققها كل من العلاقات السابقة الانعكاسية ، التناظرية وخاصة التعدي

هل توجد علاقة تكافؤ من بين هذه العلاقات الثلاث ؟

(18) لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة مرتبة جزئياً X . برهن على

أن A تملك على الأكثر حد أدنى أعظمي وعلى الأكثر حد أعلى أصغري .

(19) لتكن المجموعة $X = \{1 , 2 , 3 , 4\}$. إن علاقة $\leq$ المعروفة على الأعداد

هي علاقة ترتيب كلي ، بيّن إذا كانت العلاقة a يقسم b (ونرمز لها $a \mid b$)

المعرفة على X تكون علاقة ترتيب جزئي ، كلي . أوجد ، إن أمكـــن $\max X$

و $\min X$ في كلتا الحالتين .

(20) لتكن X , Y مجموعتين غير خاليتين . برهن ما يلي :

$$|Y| \leq |X| \Leftrightarrow \text{يوجد تطبيق غامر من } Y \text{ على } X$$

(21) برهن على أن مجموعة كل النقاط النسبية في المستوي الإحـــداثي $\mathbb{R}^2$ (أي

كل النقاط (x , y) من $\mathbb{R}^2$ بحيث كل من x , y عدد نسبي) تكون قابلة للعد .

(22) إذا كانت كل من المجموعات $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ قابلة للعد (وحيث n

عدد صحيح موجب) ، فـبرهن علـــى أن مجموعـــة الضـــرب الـــديكارتي لهـــا

$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ تكون قابلة للعد أيضاً .

(23) برهن على أن كل مجموعة غير منتهية وقابلة للعد تحوي تماماً مجموعـــة منـــها

مكافئة لها عددياً .

(24) برهن على أن كل مجموعة جزئية و غير خالية من مجموعة قابلة للعد تكـــون قابلة للعد .

(25) لتكن X , Y مجموعتين غير خاليتين ، و $f : X \to Y$ تطبيقاً غامراً . وإذا كانت X قابلة للعد فأثبت ان Y تكون قابلة للعد أيضاً .

(26) أثبت صحة ما يلي :

(a) $\sum_{K=1}^{n} K^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\sum_{K=1}^{n} K^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(c) $\sum_{K=1}^{n} (3K-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

(d) $\sum_{K=1}^{n} (2K-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(e) $\sum_{K=1}^{n} (2K+1)^3 = n(2n^3 + 8n^2 + 11n + 6)$

(f) $\sum_{K=1}^{n} K(K+1)(K+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(g) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2K-1)(2K+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

(h) $n! > n^2 \quad \forall\, n \geq 4$

الفصل الثاني

الفضاءات المترية Metric Spaces

مقدمة :

إذا دققنا النظر في مفهوم تقارب متتالية أعداد حقيقية (أو مركبة) ، أو في مفهوم استمرار تابع حقيقي (أو مركب) ، فإننا سنجد أن كل منهما يرتبط بمفهوم القيمة المطلقة للفرق بين عددين حقيقيين (أو مركبين) ، وبالتالي يرتبط بمفهوم المسافة بين عددين عندما ننظر إلى الأعداد كنقاط من المحور الحقيقي (أو من المستوي المركب) .

ولما كانت المسافة تلعب دوراً أساسياً في التحليل ، كما هو في الهندسة ، فإنه من المفيد جداً العثور على مفهوم للمسافة يعرف على مجموعة مجردة ، بحيث يكون من الممكن حساب المسافة بين أي عنصرين من هذه المجموعة ، وبحيث يكون صالحاً لمعالجة مفهوم تقارب المتتاليات في المجموعة ، ولمفهوم التوابع المستمرة المعرفة على مثل تلك المجموعات . وقد تم ذلك في بداية العام 1906 حيث قدم العالم الرياضي فريشيت (Frechet) مفهوم الفضاءات المترية ، المبنية أساساً على تعريف مسافة بين أي نقطتين من مجموعة E . هذه المسافة التي تمكننا من تعريف استمرار تابع بين فضائين متريين . وفي مرحلة متقدمة نتوصل إلى طريقة لتعريف استمرار تابع بين فضائين متريين دون ذكر المسافة ، وهذا بالطبع سوف يساعدنا في التعرّف على الفضاءات التبولوجية ، التي لا تعتمد أساساً على المسافة ، وكان العالم الرياضي هاوسدورف (Hausdorff) أول من قدم مفهوم الفضاءات التبولوجية في العام 1914 .

1 . § . تابع (تطبيق) المسافة ، الفضاءات المترية :

1 . 1 . تعريف (تابع المسافة)

لتكن E مجموعة غير خالية . كل تطبيق $d : E \times E \to \mathbb{R}$ يسمى تابع (أو تطبيق) مسافة على المجموعة E ، إذا حقق الشروط التالية (من أجل كل x, y, z من E) :

١) $d(x , y) \geq 0$ و $d(x , y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

٢) $d(x , y) = d(y , x)$ (وهذا الشرط نسميه الخاصة التناظرية)

٣) $d(x , z) \leq d(x , y) + d(y , z)$

ونسمي هذه المتباينة ، بالمتباينة المثلثية .

1 . 2 . تعريف (فضاء متري Metric space)

إذا كانت E مجموعة غير خالية ، معرف عليها تابع مسافة d . نسمي الزوج (E , d) فضاءً مترياً . ونسمي العدد الحقيقي غير السالب $d(x , y)$ بالمسافة بين x و y ، وهي مستقلة عن ترتيب العنصرين x , y ، وذلك حسب الخاصة التناظرية . نسمي عناصر E نقاط الفضاء المتري (E , d) .

1 . 3 . ملاحظات ونتائج :

١) مجموعة القيم لأي تابع مسافة على المجموعة E ، هي أعداد حقيقية غير سالبة . لذلك يمكن أخذ مستقر تابع المسافة المجموعة $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ بدلاً من $\mathbb{R}$

٢) يمكن تعميم المتباينة المثلثية على عدد منته n من النقاط $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ من الفضاء المتري (E , d) كما يلي :

$$d(x_1 , x_n) \leq d(x_1 , x_2) + d(x_2 , x_3) + \ldots + d(x_{n-1} , x_n)$$

والتي يتم برهانها بالاستقراء الرياضي على العدد الصحيح الموجب n .

1.4 أمثلة :

مثال (1) :

إن التطبيق $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بالمساواة :

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{R}$$

هو تابع مسافة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنه من أجل كل ثلاثة أعداد حقيقية x, y, z يتحقق :

١) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$. وذلك من تعريف القيمة المطلقة .

وكذلك لدينا :

$$x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0$$

٢) من اجل كل عددين حقيقين x , y يتحقق :

$$d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(x,y)$$

٣) من أجل كل ثلاثة أعداد x , y , z يتحقق :

$$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq$$
$$\leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$$

وبالتالي فإن $(\mathbb{R} , d)$ يكون فضاءً مترياً ، والذي يرمز له $(\mathbb{R} , |\ |)$ ونسميه الفضاء المتري الحقيقي العادي أو المألوف .

إن المثال التالي ، على الرغم من بساطته ، إلا أنه مفيد جداً ، ويتمتع بصفات خاصة .

مثال (2) :

من اجل كل مجموعة غير خالية E . نستطيع أن نعرف تطبيقاً $d : E \times E \to \mathbb{R}$ كما يلي :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x = y \\ 1 & \text{if} \quad x \neq y \end{cases} \qquad \forall\ x,y \in E$$

والذي يكون تابع مسافة على E ، لأنه :

١) من أجل أي عنصرين x , y من E ، فإنه من تعريف d ينتج مباشرة أن $d(x,y) \geq 0$ و أن :

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

٢) إذا كان $x = y$ فإنه من الواضح أن $0 = d(x,y) = d(y,x)$

إذا كان $x \neq y$ فإن كل من $d(x,y)$ و $d(y,x)$ يكون مساوياً للواحد وبالتالي يتساويان .

٣) من أجل أي ثلاثة عناصر x , y , z من E لنبرهن تحقق المتباينة المثلثية

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

ندرس حالتين : (a) $x = z$: في هذه الحالة الطرف الأيسر من المتباينة السابقة سوف يكون صفراً، أما الطرف الأيمن فإنه يحقق $0 \leq 2d(x,y)$ مهما كان العنصر y من E . وتتحقق المتباينة .

(b) $x \neq z$: فإن $d(x,z) = 1$

وأن $d(x,y) + d(y,z) \neq 0$ ، لأنه لو كان مساوٍ للصفر لكان $x = y = z$ وهذا غير ممكن من الفرض بأن $x \neq z$ وبالتالي $1 \leq d(x,y) + d(y,z)$ ومنه تتحقق المتباينة المثلثية .

إن تابع المسافة الناتج يسمى بتابع المسافة المتقطــع (discrete metric) ، والفضاء المتري الناتج (E , d) بالفضاء المتري المتقطع (أو المبتذل)

ملاحظة : عندما نعرف على $E = \mathbb{R}$ المسافة المتقطعة الواردة في المثال (2) فإننا نحصل على فضاء متري $\mathbb{R}$ مختلف عن الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R} , |\ |)$. وهذا يبين أنه على نفس المجموعة نستطيع تعريف أكثر من تابع مسافة .

مثال (3) :

لتكن $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة ، والتي تمثل هندسياً المستوي العقدي أو $\mathbb{R}^2$. ومن المعروف أن المسافة العادية في هذا المستوي من أجل نقطتين z_2 , z_1 تعطى بالمساواة $|z_1 - z_2|$ ، وتُعرف بالبعد بين النقطتين z_2 , z_1 في المستوي . فإذا عرفنا

التطبيق $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ بالمساواة : $d(z_1 , z_2) = |z_1 - z_2|$ فإن d تابع مسافة على $\mathbb{C}$ لأنه :

١) من أجل أي عددين مركبين z_1 , z_2 نجد من تعريف القيمة المطلقة (أو طويلة عدد مركب) أن :

$$|z_1 - z_2| \geq 0 \Rightarrow d(z_1 , z_2) \geq 0$$

وكذلك :

$$d(z_1 , z_2) = 0 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 0 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

٢) من أجل كل عددين مركبين z_1 , z_2 ، يتحقق :

$$d(z_1 , z_2) = |z_1 - z_2| = |-(z_2 - z_1)| = |z_2 - z_1| = d(z_2 , z_1)$$

٣) من أجل كل ثلاثة أعداد مركبة z_1 , z_2 , z_3 يتحقق :

$$d(z_1 , z_2) = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \Rightarrow$$

$$d(z_1 , z_2) \leq d(z_1 , z_3) + d(z_3 , z_2)$$

وبالتالي فإن البعد المعروف بين نقطتين من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ يكون تابع مسافة ، لذلك نسمي الفضاء المتري الناتج $(\mathbb{C} , d)$ بالفضاء المتري المركب العادي .

- في المثال التالي سوف نعرف تطبيقاً على المجموعة $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ونبرهن على أنه تابع مسافة . وهذا البرهان يعتمد على متباينة (كوشي - شوارتز) التالية :

مبرهنة (كوشي - شوارتز) :

مهما تكن الأعداد الحقيقة $a_1 , a_2 , \ldots , a_n , b_1 , b_2 , \ldots , b_n$ فإنه يتحقق :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

البرهان :

من أجل أي عدد حقيقي x لدينا :

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 + 2 a_i b_i x + b_i^2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

بوضع

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad , \quad b = 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad , \quad c = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

نحصل على أن :

$$0 \leq a x^2 + b x + c$$

وبالتالي فإن مميز المعادلة ليس موجباً أي أن

$$\Delta = b^2 - 4 a c \leq 0 \Rightarrow b^2 \leq 4 a . c$$

وبالتعويض عن قيم a , b , c نجد أن :

$$4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq 4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

وبجذر الطرفين نجد :

$$2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

وبإضافة المقدار $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ للطرفين نجد :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + 2 a_i b_i + b_i^2) \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right)^2$$

وبجذر الطرفين نجد :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

مثال (4) :

لتكن المجموعة

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \}$$

ولنعرف التطبيق : $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بالمساواة :

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

وحيث $x = (x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^2$

ولنبرهن على أن d تابع مسافة على المجموعة $\mathbb{R}^n$.

a) واضح من تعريف التطبيق d أن $0 \le d(x,y)$ وذلك حسب مفهوم الجذر التربيعي لعدد حقيقي . وأيضاً لدينا :

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_i - y_i = 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow x = y$$

لنبرهن الخاصة التناظرية :

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = d(y,x)$$

من أجل كل ثلاثة عناصر من $\mathbb{R}^n$. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \ , \ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$

لنبرهن : $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ أي لنبرهن المتباينة

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}$$

لـذلك نفـرض $z_i - y_i = b_i$ و $x_i - z_i = a_i$ وبجمعهمـا نجـد :

$x_i - y_i = a_i + b_i$ والمتباينة التي يجب اثباتها تأخذ الشكل :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

وهي متباينة (كوشي – شوارتز) المثبتة آنفاً وبالتالي تتحقق المتباينة المثلثية .

وبالنتيجة نجد أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^n$ ، والفضاء المتـري النـاتج $(\mathbb{R}^n, d)$ يسـمى الفضـاء الإقليـدي الـذي بعـده n .

من هذا الفضاء تنتج الحالات الخاصة :

a) عندما $n = 1$ فإن $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ وتابع المسافة :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1| \Rightarrow d(x,y) = |x - y|$$

وهي المسافة العادية على $\mathbb{R}$.

b) عندما $n = 2$ فإن $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ وفي هذه الحالة تابع المسافة هو

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

وهي المسافة في المستوي المركب $\mathbb{C}$ أو المستوي الديكارتي $\mathbb{R}^2$.

c) عندما $n = 3$ فإن الفضاء المتري $(\mathbb{R}^3, d)$ هو الفضاء الإقليدي المعروف والذي فيه المسافة تتطابق مع مفهوم البعد بين نقطتين ؛

$y = (y_1, y_2, y_3)$ ، $x = (x_1, x_2, x_3)$ من $\mathbb{R}^3$. وحيث :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

1 . 5 . (توسيع مفهومي inf A , Sup A ، توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية ، المجالات في $\mathbb{R}$ الموسعة)

سوف نتعرف في الفقرة القادمة على مفاهيم (مثل المسافة بـين مجمـوعتين ، قطر مجموعة) تعتمد على مفهومي الحد الأعلى الأصغري والحـد الأدنى الأعظمـي لمجموعات جزئية من مجموعة مرتبة ، المعروضين في الفقرة (3 . 21) مـن الفصـل

الأول . وقد رمزنا للحد الأعلى الأصغري للمجموعة الجزئيـة A مـن مجموعـة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالرمز $\sup A$ ، وقلنا بأنه أصـغر عـدد حقيقـي x يحقـق $a \leq x$ لكل a من A . كما رمزنا للحد الأدنى الأعظمي للمجموعة A الجزئية من $\mathbb{R}$ بالرمز $\inf A$ ، وقلنا بأنه أكبر عدد حقيقي x يحقق $x \leq a$ لكل a من A . واشترطنا في تعريف $\sup A$ أن تكون A غير خالية وأن تملـك A حـداً أعلى ، وكذلك في تعريف $\inf A$ اشترطنا أن تكون A غير خالية وأن تملـك A حداً أدنى ، فإذا اختل أحد الشرطين فإننا سنقدم اصطلاحاً لكل حالة كما يلي :

- إذا كانت $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ وكانت لا تملك حداً أعلى ، وبالتالي لا يوجد حد أعلى أصغري لـ A في $\mathbb{R}$ ، فإننا نعبر عن ذلـك بكتابـة $\sup A = +\infty$ ، ونقرأ ذلك : A غير محدودة من الأعلى أو A لا تملك حداً أعلى .

أما إذا كانت $A = \varnothing$ ، فإننا نكتب اصطلاحاً $\sup \varnothing = -\infty$.

- وإذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ ، وكانت A لاتملك حداً أدنى فإننا نضع $\inf A = -\infty$ ونقرأ ذلك : A غير محـدودة مـن الأدنى ، أو A لاتملك حداً أدنى .

أما إذا كانت $A = \varnothing$ ، فإننا نكتب اصطلاحاً $\inf \varnothing = +\infty$

مما تقدم نلاحظ أن الرمزين $\pm\infty$ ساعدا في تقديم مفهومي $\sup A$, $\inf A$ مهما كانت المجموعة الجزئية A من $\mathbb{R}$. كذلك الرمزين $\pm\infty$ يساعدان في توسيع مفهوم مجال ، من مجموعة الأعداد الحقيقية المرتبة بعلاقة الترتيـب العاديـة $\leq$ والذي يعرف كما يلي :

إذا كان b , a عددين حقيقيين بحيث $a \leq b$ فإن المجال المغلق مـن a إلى b يرمز له $[a, b]$. وهو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، معرفـة بالمساواة :

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

وهذا التعريف يبين أن المجال المغلق قد يتألف من نقطة واحدة ، عندما $a = b$.

وإذا كان a , b عددين حقيقيين بحيث $a < b$ فإن المجال المفتوح مـــن a إلى b يرمز له $]a , b[$ وهو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، معرفة بالمساواة :

$$]a , b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

كما نسمي مجالاً نصف مفتوح من a إلى b ، ونرمز لــه $]a , b]$ ، المجموعـــة الجزئية من $\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي :

$$]a , b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$

كما نسمي مجالاً نصف مغلق من a إلى b ، ونرمز له $[a , b[$ ، المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}$ المعرفة كما يليْ :

$$[a , b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$

وعندما نضيف إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الرمزين $\pm \infty$ فإن المجموعة الناتجـــة $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{ -\infty , +\infty \}$ تسمى مجموعة الأعدادا الحقيقية الموسعة ، ونكتب بالتعريف $-\infty < +\infty$. وأنـــه مـــن أجـــل كـــل عـــدد حقيقـــي x ، يتحقـــق $-\infty < x < +\infty$ إن الرمزين $+\infty$ ، $-\infty$ لا يضيفان شيئاً لمفهومنا للأعـــداد الحقيقية ، ولكنهما يستخدمان بشكل مناسب في بعض المفـــاهيم كمـــا أسـلفنا في اصطلاحنا $\inf \emptyset = +\infty$ و $\sup \emptyset = -\infty$. وكما ســـنرى الآن في توســـيع مفهوم مجال . حيث في المجالات الأربعة السابقة اشترطنا على كـــل مـــن a , b أن يكون عدداً حقيقياً ، وبالتالي فإن المجالات الناتجة كلها محدودة فيها نسمي العـــددين الحقيقين a , b حدي المجال . وطول كل من المجالات الأربعة السابقة هـــو العـــدد الحقيقي $(b - a)$ ، بينما منتصف كل منها هو العدد الحقيقي $\dfrac{a+b}{2}$.

الآن إذا سمحنا لـــ a أن تأخذ الرمز $-\infty$ أو لـــ b أن تأخذ الرمـــز $+\infty$ فإننا سوف نحصل على مجالات غير محدودة (إما من الأعلى أو من الأسفل أو مـــن كليهما) وتعرّف كما يلي :

$$]-\infty , b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b \} \quad ;$$

$$]-\infty, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b \}$$
$$[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < +\infty \} \quad ;$$
$$]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty \}$$

وأخيراً ، وحسب تعريفنا للرمزين $\pm\infty$ والمجالات غير المحدودة السابقة نجد أن :

$$]-\infty, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty \} = \mathbb{R}$$

إن كل من المجالات الأربعة التالية :

$$]a, b[\quad ; \quad]a, +\infty[\quad ; \quad]-\infty, b[\quad ; \quad]-\infty, +\infty[$$

يكون مجالاً مفتوحاً ولا توجد مجالات مفتوحة غيرها من محور الأعداد الحقيقية .

نستنتج مما تقدم من مفاهيم ما يلي :

- إن كل مجال يكون مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ (وذلك لأنه في تعريف المجال المفتوح $]a, b[$ افترضنا $a < b$)
- كل نقطة a من محور الأعداد الحقيقية يمكن اعتبارها مجالاً مغلقاً متساوي الطرفين $[a, a]$.
- كل مجال مفتوح أو مغلق ومختلف الطرفين يملك عدداً غير منته من النقاط .
- تقاطع كل مجالين مفتوحين هو مجال مفتوح أو $\varnothing$.
- تقاطع كل مجالين مغلقين هو مجال مغلق أو $\varnothing$.

2 . § . بعض المفاهيم التي تنشأ عن تابع المسافة :

1 . 2 . تعاريف (المسافة بين مجموعتين ، المسافة بين نقطة و مجموعة ،قطر مجموعة ، مجموعة محدودة ، تطبيق محدود)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً ولتكن A, B مجموعتين جزئيتين من E و x نقطة من E .

(1) نعرف المسافة بين المجموعتين الجزئيتين A, B بأنها العدد الحقيقي

$$d(A, B) = \inf \{ d(x, y) \mid x \in A \, , \, y \in B \}$$

(2) وفي الحالة الخاصة عندما $A = \{a\}$ فإن المسافة $d(\{a\}, B)$ تكتب بالشكل : $d(a, B) = \inf \{ d(a, y) \mid y \in B \}$

تسمى مسافة (أو بعد) النقطة a عن المجموعة الجزئية B
(the distance from a to B)

(3) نعرف قطر المجموعة الجزئية A بأنه :

$$\delta(A) = \sup\{ d(x,y) \mid x, y \in A \}$$

ونقول عن المجموعة A أنها تملك قطراً منتهياً أو غير منتهحسبما يكون $\delta(A)$ عدداً حقيقياً أو $\pm\infty$.

نلاحظ أن قطر المجموعة الخالية غير منته لأن $\delta(\varnothing) = \sup \varnothing = -\infty$

(4) نقول عن المجموعة الجزئية A أنها محدودة (bounded set) إذا كان قطرها منته .

(5) كل تطبيق f منطلقه مجموعة غير خالية A ومستقره الفضاء المتري (E, d) يسمى تطبيقاً محدوداً (bounded mapping) إذا كانت صورته (أي $f(A)$) مجموعة محدودة في الفضاء المتري (E, d) .

2 . 2 . ملاحظات و أمثلة :

(1) ليكن $(\mathbb{R}, d)$ الفضاء المتري العادي ، ولتكن $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 6\}$ مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$. لنوجد قطر كل من A, B ثم لنحسب $d(10, B)$, $d(A, B)$:

نعلم أن :

$$\delta(A) = \sup\{ d(x,y) \mid x, y \in A \} = \sup\{0, 2\} = 2$$

وبالتالي فإن A مجموعة محدودة في الفضاء المتري العادي $\mathbb{R}$ ، لأن قطرها منته .

كذلك :

$$\delta(B) = \sup\{0, 2, 5, 3\} = 5 \Rightarrow$$ المجموعة B محدودة

$$d(a, B) = \inf\{ d(a, x) \mid x \in B \}$$

$$d(10, B) = \inf\{9, 7, 4\} = 4$$

وأخيراً لدينا

$$d(A, B) = \inf\{ d(a,b) \mid a \in A, b \in B \} = \inf\{0, 2, 5, 3\} = 0$$

وبالتالي المسافة بين المجموعتين A , B هو صفرا . ما هو السبب ؟ هل هو وجود عناصر مشتركة بين A , B ، أم توجد أسباب أخرى ؟ والإجابة بالمناقشة التالية .

لنناقش حالات خاصة للمجموعتين A , B الجزئيتين من فضاء متري (E , d) .

(2) إذا كان $A \cap B \neq \emptyset$ فإن $d(A, B) = 0$ وهذا واضح ، لأنه لو فرضنا أن c عنصراً من A ومن B فإن العدد $d(c, c) = 0$ ينتمي إلى المجموعة $\{ d(a,b) \mid a \in A , b \in B \}$ ويكون

$$d(A, B) = \inf \{ d(a,b) \mid a \in A , b \in B \} = 0$$

ومن هذه الملاحظة ينتج مباشرة في المثال السابق (1) أن $d(A, B) = 0$.

(3) إذا كان $a \in B$ فإن $d(a, B) = 0$. والبرهان ينتج من (2) كحالة خاصة

(4) إذا كانت المجموعة الجزئية A مؤلفة من عنصر واحد فقط a فإن قطرها يكون صفراً .

(5) إذا كانت المجموعة الجزئية A تملك أكثر من عنصر فإن قطرها $0 < \delta(A)$.

(6) لتكن

$$A_n = \{ 1, 2, \ldots , n \} \subseteq \mathbb{R}$$

وحيث n عدد صحيح موجب . ولنوجد $\delta(A_n)$ في الفضاء المتري الحقيقي العادي . ثم لنستنتج $\delta(\mathbb{N})$ ، حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية الجزئية من $\mathbb{R}$. نعلم أن : $\delta(A_n) = \sup \{ d(x,y) \mid x, y \in A_n \}$

ومنه نجد :

$$\delta(A_1) = \delta(\{1\}) = 0$$
$$\delta(A_2) = \delta(\{1,2\}) = d(1,2) = |1-2| = 1$$

$$\delta(A_3) = \delta(\{1,2,3\}) = d(1,3) = |1-3| = 2$$

$$\delta(A_n) = \delta(\{1,2,\ldots,n\}) = d(1,n) = |1-n| = n-1$$

الآن من الواضح أنه عندما $n \to \infty$ فإن $A_n \to \mathbb{N}$ أي أن $\mathbb{N} = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$

وبالتالي لحساب $\delta(\mathbb{N})$ نكتب :

$$\delta(\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = \lim_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$$

وبالتالي فإن $\mathbb{N}$ قطرها غير منته ، فهي غير محدودة .

(7) لتكن المجموعة $A = [1,2]$ الجزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي $\mathbb{R}$. ولنوجد $\delta(A)$.

نعلم أن :

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A = [1,2]\} = d(1,2) = |1-2| = 1$$

لاحظ أنه لو حذفنا العنصر 2 من المجموعة A فإننا نحصل على المجموعة $B = [1,2[$ الجزئية من $\mathbb{R}$ وفي هذه الحالة لن نستطيع ايجاد x, y من B بحيث $\delta(A) = d(x,y)$ (لأن $y = 2$ التي تحقق ذلك ليست من B) في هذه الحالة نستعيض عن $y = 2$ بأعداد قريبة جداً من y وتنتمي إلى B أي بمتتالية من عناصر B ومتقاربة من $y = 2$ ، مثلاً المتتالية $\left(2-\frac{1}{n}\right)$. (لاحظ لو أخذنا المتتالية $\left(2+\frac{1}{n}\right)$ فإن عناصرها لن تكون من $B = [1,2[$)

وعند ذلك لحساب $\delta(B)$ نكتب :

$$\begin{aligned}
\delta(B) &= \sup\{d(x,y) \mid x,y \in B\} \\
&= \lim_{n\to\infty} d(1,y_n) \; ; \; y_n = \left(2-\frac{1}{n}\right) \; \forall n = 1,2,\ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|1-\left(2-\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|-1+\frac{1}{n}\right| = 1
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نستطيع حساب قطر المجموعة $C =]1,2[$. وذلك بنفس المناقشة نجد أن :

$$\delta(c) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \ ;$$

وحيث (x_n) أية متتالية من عناصر C ومتقاربة من الواحد ، مثلاً $x_n = 1+\frac{1}{n}$

و (y_n) أية متتالية من عناصر C ومتقاربة من 2 ، مثلاً $y_n = 2-\frac{1}{n}$ فنجد

$$\delta(c) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = \lim_{n\to\infty} |y_n - x_n|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|2-\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|1-\frac{2}{n}\right| = 1$$

(8) في الفضاء المتري الحقيقي العادي لنأخذ المجموعتين الجزئيتين $A=[1,2]$ ، $B=]2,5]$ ولنحسب $d(A,B)$.

لاحظ أنه لو كان العدد 2 ينتمي إلى B لكان $d(A,B) = 0$ (لماذا ؟)

لذلك سوف نأخذ متتالية من عناصر B ومتقاربة من 2 ، مثلاً المتتالية $\left(2+\frac{1}{n}\right)$. ثم نكتب :

$$d(A,B) = \inf\{ d(a,b) \mid a\in A, b\in B \} = \lim_{n\to\infty} d\left(2, 2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|2-\left(2+\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

لاحظ هنا أنه على الرغم من أن $A \cap B = \varnothing$ فإن $d(A,B) = 0$.وبالتالي :

نتيجة :

إذا كان $A \cap B \neq \varnothing$ فإن $d(A,B) = 0$ ، لكن العكس ليس صحيحاً .

مبرهنة :

في فضاء متري (E, d) يتحقق :

اجتماع مجموعتين محدودتين ، يكون مجموعة محدودة . وبالتالي :

اجتماع عدد منته من المجموعات المحدودة يكون مجموعة محدودة .

البرهان :

لنبرهن على أن $\delta(A \cup B) < \infty$ عندما يكون

$\delta(A) < \infty$, $\delta(B) < \infty$.

لدينا : $\delta(A \cup B) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A \cup B\}$

ولنبرهن أن $\delta(A \cup B) < \infty$ في كل من الحالات التالية :

١) إذا كان كل من x , y عنصراً من A . في هذه الحالة يتحقق :

$$d(x,y) \leq \delta(A) < \infty \quad \forall\, x,y \in A \Rightarrow \delta(A \cup B) < \infty$$

٢) إذا كان كل من x , y عنصراً من B بنفس المناقشة نجد أن

$$d(x,y) \leq \delta(B) < \infty \quad \forall\, x,y \in B \Rightarrow \delta(A \cup B) < \infty$$

٣) إذا كان x عنصراً من A و y عنصراً من B فإنه حسب المتراجحة المثلثية :

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,a) + d(a,y) \quad \forall\, x,a \in A\ ,\ y \in B \\ &\leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \quad \forall\, x,a \in A,\ \forall\, b,y \in B \\ &\leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B) \quad \forall\, a \in A\ ,\ \forall\ b \in B \end{aligned}$$

فإذا لاحظنا أن $d(a,b)$ هو عدد حقيقي منته (لأننا نستطيع اختيار a أي عنصر من A ، كما أننا نستطيع اختيار b أي عنصر من B) فإننا نجد أن الطرف الأيمن من المتباينة منته وبالتالي الطرف الأيسر كذلك أي أن

$$d(x,y) < \infty \quad \forall\, x \in A\ ,\ y \in B \Rightarrow \delta(A \cup B) < \infty$$

إذاً في جميع الحالات نحصل على أن

$$\delta(A \cup B) < \infty$$

وبالتالي الإجتماع $A \cup B$ مجموعة محدودة . لأن قطرها منته .

- الآن إذا كانت $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ مجموعات محدودة في الفضاء المتري (E , d) فإن الإجتماع $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ يكون مجموعة محدودة ، من أجل كل عدد

صحيح موجب $n \geq 2$ ، ونبرهن ذلك بالاستقراء . من أجـــل $n = 2$ وجـــدنا صحة الخاصة .

لنفرض صحة الخاصة من أجل $n = k$ ، أي نفرض أن الإجتماع $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ مجموعـــة محدودة ، (حيث كل مجموعة A_i محدودة من أجـــل $1 \leq i \leq k$) ولنـــبرهن صحة الخاصة من أجل $n = k + 1$. أي نفرض A_i مجموعـــات محـــدودة لكـــل $1 \leq i \leq k + 1$ ولنبرهن على أن $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$ محدودة .

إن الإجتماع $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ مجوعة محدودة ، حسب فرضية الاستقراء ، وبالفرض A_{k+1} مجموعة محدودة وبالتالي فإن اجتماعهما يكون مجموعة محدودة أي أ ن :

$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) \cup A_{k+1}$ يكون مجموعة محدودة .

3 § . الكرات في فضاء متري وبعض خواصها .

1 . 3 . تعاريف (كرة مفتوحة : open sphere ، كرة مغلقة closed sphere وسطح كرة sphere)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً . و a نقطة من E ، و r عدداً حقيقياً موجباً .

- نسمي المجموعة الجزئية $B(a, r)$ من الفضاء E المعرفة بالمساواة :

$$B(a,r) = \{ x \in E \mid d(x,a) < r \}$$

كرة مفتوحة مركزها a (center a) ونصف قطرها r (radius r) .

- كما نسمي المجموعة الجزئية $\overline{B}(a; r)$ من الفضاء E المعرفة بالمساواة :

$$\overline{B}(a; r) = \{ x \in E \mid d(x,a) \leq r \}$$

كرة مغلقة مركزها a ونصف قطرها r .

- أخيراً نسمي المجموعة الجزئية $S(a, r)$ من الفضاء E المعرفة بالمساواة .

$$S(a,r) = \{ x \in X \mid d(x,a) = r \}$$

سطح كرة مركزها a ونصف قطرها r .

تمرين :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) فبرهن على أن :

A محدودة $\Leftrightarrow$ توجد كرة مفتوحة تحوي A .

3 . 2 . ملاحظات وأمثلة :

1) سوف نفترض دوماً أن نصف القطر ، لأية كرة مفتوحة أو مغلقة أو سطح كرة ، منته وأكبر من الصفر . وإن لم نذكر ذلك .

2) إن مركز الكرة المفتوحة ينتمي إليها دوماً ، وكذلك مركز الكرة المغلقة ، وبالتالي فإن كلاً من الكرة المفتوحة والكرة المغلقة مجموعة غير خالية دوماً . في حين أن مركز الكرة لا ينتمي إلى سطحها وبالتالي قد يكون سطح الكرة مجموعة خالية .

3) إذا كان $0 < r_1 < r_2$ فإنه يتحقق :

$$(a)\ B(x, r_1) \subseteq B(x, r_2)$$
$$(b)\ \bar{B}(x, r_1) \subseteq \bar{B}(x, r_2)$$

وبالتالي ينتج أن كل كرتين تشتركان بنفس المركز ، في فضاء متري ، تكون احداهما محتواة في الأخرى .

4) $x \in B(a, r) \Leftrightarrow d(x, a) < r$

5) $x \notin B(a, r) \Leftrightarrow d(x, a) \geq r$

6) لنبحث في شكل الكرات المفتوحة والمغلقة وسطح الكرات في الفضاء المتري الحقيقي العادي :

a) شكل الكرات المفتوحة :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x-a < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a-r < x < a+r\}$$
$$B(a, r) =]a-r, a+r[$$

أي أن الكرات المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها r في الفضاء المتري العادي $\mathbb{R}$ ، هي المجالات المفتوحة التي طرفيها $a-r < a+r$.

b) بنفس الطريقة نجد أن الكرات المغلقة التي مركزها a ونصف قطرها r في

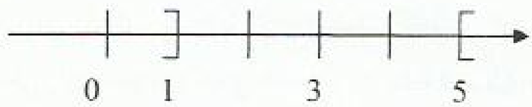
الفضاء $(\mathbb{R}, |\ |)$ هي المجالات المغلقة التي طرفيها $a-r<a+r$. أي أن $\overline{B}(a,r)=[a-r, a+r]$

c) كذلك سطح الكرات التي مركزها a ونصف قطرها r هي فقط النقطتان $\{a-r, a+r\}$

d) إن كل مجال مفتوح $]a, b[$ من محور الأعداد الحقيقية (حيث $a<b$)

يكون كرة مفتوحة مركزها نقطة المنتصف $\frac{a+b}{2}$ ، ونصف قطرها $\frac{a-b}{2}$ ،

فمثلاً المجال المفتوح $]1, 5[$ هو بالضبط الكرة المفتوحة $B(3, 2)$



- بنفس الطريقة نستطيع أن نبين أن كل مجال مغلق يكون كرة مغلقة مركزها النقطة الواقعة في منتصف المجال ، ونصف قطرها يكون مساوٍ لنصف طول المجال .

- وأخيراً كل نقطتين مختلفين تمثلان سطح كرة .

7) إن الكرة المفتوحة $B(a, r)$ في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$. (أو الفضاء المركب العادي (C, d)) هي النقاط (x_1, x_2) من المستوي التي تحقق $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<r^2$ ، وحيث $a=(a_1, a_2)$.

وهي تمثل هندسياً داخل القرص الدائري الذي مركزه $a=(a_1, a_2)$ و نصف قطره r.

- كذلك الكرة المغلقة $\overline{B}(a, r)$ في هذا الفضاء تمثل كامل القرص الدائري الذي مركزه $a=(a_1, a_2)$ ونصف قطره r . والممثلة بالمتباينة

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2\le r^2 .$$

وأما سطح الكرة $S(a, r)$ في هذا الفضاء فهي تمثل محيط الدائرة التي مركزها $a=(a_1, a_2)$ و نصف قطرها r ، أي هندسياً هي الدائرة :

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 = r^2$$

8) ليكن (E, d) الفضاء المتري المتقطّع ، a نقطة من E . و r عـدد حقيقـي موجب . لنبحث في شكل الكرات المفتوحة ، و الكرات المغلقة وسطح الكرات في هذا الفضاء . لنبدأ أولاً بالكرات المفتوحة :

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$$

$$= \begin{cases} E & \text{if } r > 1 \\ \{a\} & \text{if } r = 1 \\ \{a\} & \text{if } r < 1 \end{cases} = \begin{cases} E & \text{if } r > 1 \\ \{a\} & \text{if } r \le 1 \end{cases}$$

وبالتالي شكل الكرة المفتوحة التي مركزها a ، يرتبط بنصـف قطرهـا r بشـكل أساسي . فهي تتألف من المركز a فقط عندما نصف القطـر أصـغر أو يسـاوي الواحد ، وتتألف الكرة المفتوحة من كامل الفضاء E عندما نصف قطرها أكبر مـن الواحد .

بنفس المناقشة نجد أن الكرات المغلقة في هذا الفضاء هي :

$$\overline{B}(a; r) = \{x \in E \mid d(x,a) \le r\} =$$

$$= \begin{cases} E & \text{if } r > 1 \\ E & \text{if } r = 1 \\ \{a\} & \text{if } r < 1 \end{cases} = \begin{cases} E & \text{if } r \ge 1 \\ \{a\} & \text{if } r < 1 \end{cases}$$

وأخيراً سطح الكرات في هذا الفضاء لها الشكل

$$S(a;r) = \{x \in E \mid d(x,a) = r\} = \begin{cases} \varnothing & \text{if } r > 1 \\ E - \{a\} & \text{if } r = 1 \\ \varnothing & \text{if } r < 1 \end{cases}$$

ملاحظة :

إن شكل الكرات المفتوحة والمغلقة وسطح الكرات في الفضاء المتري المتقطع ، يجب أن يجعلنا حذرين ، في التعامل مع هذه المفاهيم ، وعدم التسرع في تصور خواص لها دون التثبت ، متأثرين بنفس التسميات في الهندسة .

3 . 3 . مبرهنات متعلقة بالكرات :

مبرهنة (1)

إذا كان (E, d) فضاءً مترياً ، وكانت $E = \{ a_1 , a_2 , \ldots , a_n \}$ مجموعة منتهية . فإن كل نقطة فيه تمثل كرة مفتوحة .

البرهان :

a) إذا كان $n = 1$ فإن $E = \{ a_1 \}$. واضح في هذه الحالة أن كل نقطة تمثل كرة مفتوحة .

b) $2 \leq n$: لتكن a_i نقطة من E ولنبرهن وجود عدد حقيقي $0 < r_i$ بحيث $B (a_i , r_i) = \{ a_i \}$ من أجل كل $1 \leq i \leq n$. نأخذ :

$$r_i = \min \{d (a_1 , a_i) , d (a_2 , a_i) , \ldots , d (a_{i-1} , a_i) , d (a_{i+1} , a_i) , \ldots , d (a_n , a_i)\}$$

وليكن $r_i = d (a_k , a_i)$ وحيث $1 \leq k \neq i \leq n$ وبالتالي يتحقق :

$$r_i = d (a_k , a_i) \leq d (a_j , a_i) \quad \forall \; j \neq i \; , \; 1 \leq j \leq n \qquad (1)$$

لنبرهن على أن $B (a_i , r_i) = \{ a_i \}$:

$$B (a_i ; r_i) = \{x \in E \mid d (x , a_i) < r_i\} = \{ x \in E \mid d (x , a_i) < d(a_k , a_i)\}$$

بمقارنة عناصر هذه المجموعة مع المتباينة (1) نلاحظ أن العنصر الوحيد x الذي ينتمي إلى هذه المجموعة هو a_i ، أي أن $B (a_i , r_i) = \{ a_i \}$.

(توجيه : إذا صعب على الطالب فهم البرهان ، عليه التدرج بأخذ المجموعة E مؤلفة من عنصرين ثم من ثلاثة عناصر وهكذا حتى يتوصل لفكرة التعميم على مجموعة مؤلفة من n عنصر) .

مبرهنة (2)

إذا كانت $B (a , r)$ كرة مفتوحة في الفضاء المتري (E , d) ، وكانت b نقطة من هذه الكرة فإنه يوجد عدد حقيقي $0 < \rho$ بحيث :

$$B (b , \rho) \subseteq B (a , r)$$

البرهان :

بما أن b نقطة من الكرة المفتوحة $B(a,r)$ فإن $d(b,a) < r$ وبالتـــالي $\rho = r - d(b,a) > 0$. لنبرهن على أن الكرة المفتوحة $B(b,\rho)$ محتـــواة في الكرة $B(a,r)$.

$$\forall\ x \in B(b,\rho) \Rightarrow d(x,b) < \rho = r - d(b,a) \Rightarrow$$
$$d(x,b) + d(b,a) < r \Rightarrow d(x,a) \le d(x,b) + d(b,a) < r$$
$$\Rightarrow d(x,a) < r \Rightarrow x \in B(a,r).$$

نتيجة :

إذا كانت $B(a,r)$ كرة مفتوحة في فضاء متري (E,d) فإن كل نقطة من نقاط هذه الكرة تكون مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في تلك الكرة .

مبرهنة (3)

ليكن (E,d) فضاءً مترياً ، إذا كانت B ، B' كرتين مفتوحتين في الفضاء E بحيث $B \cap B' \neq \varnothing$ فإن كل نقطة من التقاطع تكون مركزاً لكـــرة مفتوحـــة محتواة في ذلك التقاطع .

البرهان :

لتكن x نقطة من $B \cap B'$ وبالتالي فإن x نقطة مـــن الكـــرة المفتوحـــة B وكذلك x نقطة من الكرة المفتوحة B' ، وحسب المبرهنة (2) توجد كرة مفتوحة مركزها x ومحتواة في B ولتكن B_1 وتوجد كرة مفتوحة أخرى مركزها x أيضاً ومحتواة في B' ولتكن B_2 . عند ذلك نحصل على كرتين مفتوحتين B_1 ، B_2 لهما نفس المركز x ، وبالتالي احداهما تحوي الأخرى ، حسب البند (2 . 3) ، ولتكن $B_1 \subseteq B_2$. عند ذلك نجد أن الكرة المفتوحة B_1 التي مركزها x محتواة في كـــل من B' و B وبالتالي محتواة في تقاطعهما $B \cap B'$.

§. 4 . المجموعات المفتوحة (Open sets) وخواصها

4 . 1 . تعريف (مجموعة مفتوحة)

ليكن (E , d) فضاءً مترياً و A مجموعة جزئية من E .

نقول عن المجموعة الجزئية A أنها مفتوحة في الفضاء المتري E إذا وفقط إذا كل نقطة من A (إن وجدت لأنه قد تكون $A = \emptyset$) تكون مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في A .

يمكن كتابة التعريف بشكل رمزي كما يلي :

$$A \subseteq E \text{ مفتوحة} \Leftrightarrow (\forall\ x \in A)(\exists\ r > 0)\ ,\ B(x , r) \subseteq A$$

من التعريف ينتج مباشرة التكافؤ الهام :

$$A \subseteq E \text{ ليست مفتوحة} \Leftrightarrow (\exists\ x \in A)(\forall\ r > 0)\ ,\ B(x , r) \not\subset A$$

أي أن المجموعة الجزئية A لا تكون مفتوحة في الفضاء المتري E ، إذا وفقط إذا ، وجدت نقطة x منها بحيث كل كرة مفتوحة مركزها x ليست محتواة في A .

4 . 2 . مبرهنات وأمثلة تتعلق بالمجموعات والكرات المفتوحة :

مثال (1) :

في الفضاء المتري العادي R . كل مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة a لا تكون مفتوحة . لأن كل كرة مفتوحة مركزها a ، هي مجال مفتوح منتصفه النقطة a ، ولا يمكن أن يكون محتوى في $\{a\}$.

كذلك كل مجموعة مؤلفة من عدد منته من النقاط تكون غير مفتوحة ، لأن أي مجال مفتوح منتصفه احدى نقاط المجموعة(و الذي يمثل كرة مفتوحة مركزها تلك النقطة) يملك عدداً غير منته من الأعداد الحقيقية وبالتالي لا يمكن أن يكون محتوى في مجموعة منتهية .

مثال (2) :

في الفضاء المتري الحقيقي العادي . المجموعة الجزئية $A = [\,0 , 1\,[$ ليست

مفتوحة . لأنه لا توجد كرة مفتوحة مركزها $0 = A$ ومحتواة في A ، حيث كل مجال مفتوح مركزه $0 = A$ يحوي أعداد سالبة . وهي غير موجودة في A .

مثال (3) :

في كل فضاء متري (E , d) المجموعة الخالية $\varnothing$ مفتوحة ، لأنه لا توجد نقطة منها ليست مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في $\varnothing$.

مبرهنة (1) :

إن كل كرة مفتوحة في فضاء متري (E , d) تكون مجموعة مفتوحة .

البرهان :

ينتج من تعريف مجموعة مفتوحة ومن نتيجة المبرهنة (2) من الفقرة (3 . 3) .

مثال (4) :

بما ان كل مجال مفتوح ومحدود هو كرة مفتوحة في الفضاء الحقيقي العادي فإنه يكون مجموعة مفتوحة .

مبرهنة (2) (أهم خواص المجموعات المفتوحة) :

[illegible] هي نفسها المجموعة المفتوحة

إذا رمزنا بـ τ لأسرة كل المجموعات المفتوحة في فضاء متري (E , d) فإنه يتحقق :

a) كل من E ، $\varnothing$ مجموعة مفتوحة (أي أن $\varnothing \in \tau, \ E \in \tau$)

b) تقاطع مجموعتين مفتوحتين يكون مجموعة مفتوحة (وبالتالي تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة)

c) الإجتماع لعناصر أي أسرة (منتهية أو غير منتهية) من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة . أي إذا كانت $\{ A_i \}_{i \in I}$ أسرة جزئية من الأسرة τ فإن $\bigcup_{i \in I} A_i$ يكون عنصراً من τ .

البرهان :

a) إن $\emptyset$ مفتوحة حسب المثال (3) .

كذلك E مفتوحة ، لأن كل نقطة من E ، وكل كرة مفتوحة مركزها تلك النقطة تكون محتواة في E

b) لتكن A , B مجموعتين مفتوحتين في الفضاء E ولنبرهن على أن $A \cap B$ مفتوحة .

إذا كانت x نقطة من التقاطع $A \cap B$ فإن x نقطة من المجموعة المفتوحة A وكذلك x نقطة من المجموعة المفتوحة B . وبالتالي يوجد عدد حقيقي $r > 0$ بحيث $B(x, r) \subseteq A$ ، وكذلك عدد حقيقي آخر $\rho > 0$ بحيث $B(x, \rho) \subseteq B$ ، أي أنه وجدت كرتان مفتوحتان لهما نفس المركز ، وبالتالي احداهما محتواة في الأخرى (وهي التي نصف قطرها أصغر نصفي القطرين r ، ρ) . إن الكرة المفتوحة المحتواة في الأخرى هي التي تكون محتواة في التقاطع $A \cap B$. ويتم المطلوب .

لنبرهن بشكل أعم أنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات مفتوحة في الفضاء E فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ مفتوحة .

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in A_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$$

$$(\exists r_i > 0) \;;\; B(x; r_i) \subseteq A_i \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \exists r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \;; B(x; r) \subseteq A_i \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \exists\, r > 0 \;;\; B(x; r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow$$

$$\left(\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) (\exists r > 0) \;;\; B(x; r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$\Rightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ مفتوحة

c) لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري E ولنبرهن على أن $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ مفتوحة .

$$\forall x\in\bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists \gamma\in I \; ; \; x\in A_\gamma \Rightarrow \exists r>0 \; ; B(x;r)\subseteq A_\gamma \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

إذاً

$$(\forall x\in\bigcup_{i\in I} A_i)\,(\exists r>0) \;\; ; \;\; B(x;r)\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \text{ مفتوحة . } \bigcup_{i\in I} A_i$$

مثال (5) :

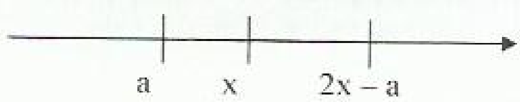
وجدنا في المثال (4) أن كل مجال مفتوح ومحدود من الفضاء المتري الحقيقي العادي يكون مجموعة مفتوحة .

وبالتالي كل من المجالين المفتوحين $]4,5[$ ، $]-1,3[$ يكون مجموعة مفتوحة ، وبالتالي حسب المبرهنة (2) فإن اجتماعهما يكون مجموعة مفتوحة ، والتي ليست كرة مفتوحة . وبالتالي فإن كل كرة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة ولكن العكس ليس صحيحاً .

مثال (6) :

لنبرهن الآن أن كل مجال مفتوح وغير محدود يكون مجموعة مفتوحة أيضاً في الفضاء الحقيقي العادي $\mathbb{R}$.

لنأخذ مثلاً المجال المفتوح غير المحدود من الشكل $A =]a,+\infty[$. فإذا كانت x نقطة من A فإن $a<x<+\infty$. بما أن $a<x$ فإن نقطة منتصف المجال $]a,x[$ هي $\frac{x+a}{2}$ تحقق $a<\frac{x+a}{2}<x$ وبالتالي $2a<x+a<2x$.



وأخيراً نجد $a<x<2x-a$ مجالاً مفتوحاً منتصفه x ، أي كرة مفتوحة

مركزها x وبالطبع محتواة في A . وهذا يعني أن كل نقطة x من A تكون مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في A . إذاً A مفتوحة .

بما أن $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري الحقيقي العادي حسب (a) من المبرهنة (2)فإنه يبقى إثبات أن كل مجال مفتوح وغير محدود من الشكل $]-\infty, b[$ يكون مجموعة مفتوحة . ويترك ذلك تمرين للطالب .

مبرهنة (3) : (شرط مكافئ لتعريف مجموعة مفتوحة)

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) . عند ذلك يتحقق :

المجموعة الجزئية A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا A تساوي اجتماع لكرات مفتوحة.

البرهان : أولاً :

إذا كانت A مجموعة مفتوحة فإنه من أجل كل عنصر x من A ، يوجد عدد حقيقي . $0 < r_x$ بحيث $B(x, r_x) \subseteq A$. وبالتالي يتحقق :

$$x \in B(x, r_x) \subseteq A \qquad ; \quad \forall x \in A$$

ومنه

$$\bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A$$

وبملاحظة أن $\bigcup_{x \in A} \{x\} = A$ نحصل على المساواة :

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$$

أي أن A تساوي اجتماع لكرات مفتوحة .

ثانياً :

إذا كانت A تساوي اجتماع لكرات مفتوحة ، وبما أن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة ، فإن A تساوي اجتماع لمجموعات مفتوحة ، وبالتالي تكون A مفتوحة حسب البند (c) من المبرهنة (2) .

3 . 4 . ملاحظات و أمثلة :

1) إن التقاطع غيرالمنته لمجموعات مفتوحة ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة ، لتوضيح ذلك ، في الفضاء المتري الحقيقي العادي ، إن عناصر الأسرة $\{ A_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ و حيث $A_n =]-\frac{1}{n} , \frac{1}{n} [$ ، هي مجموعات مفتوحة تقاطعها $\{ 0 \}$ ليست مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ كما وجدنا سابقاً .

2) في الفضاء المتري المتقطع (E , d) كل نقطة $\{ a \}$ من E تكون مجموعة مفتوحة لأننا وجدنا أنها تساوي الكرة المفتوحة $\{ a \} = B (a , 1)$ ، وبالتالي كل مجموعة جزئية A من E تكون مفتوحة لأنها تساوي اجتماع لنقاطها التي تشكل مجموعة مفتوحة .

3) في كل فضاء متري (E , d) ، ومن أجل كل نقطة a من E وأي عدد حقيقي $r > 0$ ، المجموعة الجزئية :

$A = \{ x \in E \mid d (x , a) > r \}$ تكون مفتوحة . لأنه :

$$\forall \ x \in A \Rightarrow d (x , a) > r \Rightarrow \rho = d (x , a) - r > 0$$

لنبرهن على أن الكرة المفتوحة $B (x , \rho)$ محتواة في A . من أجل ذلك لدينا :

$$\forall \ y \in B (x , \rho) \Rightarrow d (y , x) < \rho = d (x , a) - r \Rightarrow$$
$$r < d (x , a) - d (y , x) \leq d (y , a) \Rightarrow d (y , a) > r \Rightarrow y \in A$$

إن الإنتقال (1) ينتج من الخاصة (١) المعروفة في المتباينات وهي :

$$| d (x , y) - d (y , z) | \leq d (x , z) \Leftrightarrow$$
$$- d (x , z) \leq d (x , y) - d (y , z) \leq d (x , z)$$

4) إذا كانت $\overline{B} (a , r) = \{ x \in E \mid d (x , a) \leq r \}$ كـرة مغلقـة في الفضاء المتري (E , d) فإن متممها في E هي المجموعة :

$$\begin{aligned} E - \overline{B} (a , r) &= \{ x \mid x \in E \wedge x \notin \overline{B} (a , r) \} = \\ &= \{ x \mid x \in E \wedge d (x , a) > r \} = \\ &= \{ x \in E \mid d (x , a) > r \} \end{aligned}$$

وهي بالضبط المجموعة A الواردة في البند السابق (3) والتي برهنا أنها مجموعة

مفتوحة . وبالتالي نستنتج :

نتيجة :

إن المتمم لأية كرة مغلقة في فضاء متري (E, d) تكون مجموعة مفتوحة .

4 . 4 . النقاط الداخلية وداخل مجموعة A (Interior of A)

تعريف : (نقطة داخلية ، داخل مجموعة)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً ، و A مجموعة جزئية من E . نقول عن النقطة x من A أنها نقطة داخلية من A (an interior point of A) ، إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها x ومحتواة في A .

نرمز لمجموعة النقاط الداخلية من المجموعة A بالرمز A^0 ونقرأ ذلك " داخل A " (interior of A) وبشكل رمزي نكتب :

$$A^0 = \{x \in A \mid \exists r > 0 \,;\, B(x\,;\,r) \subseteq A\}$$

5 . 4 . ملاحظات وأمثلة ومبرهنات :

١)
$$x \in A^0 \Leftrightarrow \exists r > 0 \,;\, B(x\,,\,r) \subseteq A$$
$$x \notin A^0 \Leftrightarrow \forall r > 0 \,;\, B(x\,,\,r) \not\subset A$$

إذاً x ليست نقطة داخلية في A إذا وفقط إذا كل كرة مفتوحة مركزها x لا تكون محتواة في A .

٢) من التعريف ينتج أن $A^0 \subseteq A$.

٣) إذا كانت $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة منتهية جزئية من الفضاء الحقيقي العادي فإن $A^0 = \varnothing$.

لأن كل كرة مفتوحة مركزها نقطة a من A ، سوف تكون مجالاً مفتوحاً منتصفه a وبالتالي يحوي عدداً غير منته من الأعداد الحقيقية ، ولايمكن لهذا المجال أن يكون محتوى في المجموعة المنتهية A . إذاً $A^0 = \varnothing$

٤) **مبرهنة (خواص أساسية لداخل مجموعة)**

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) فإنه يتحقق :

a) A^0 يساوي اجتماع كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A .

b) A^0 مجموعة مفتوحة محتواة في A ، وتحوي كل مجموعة مفتوحة محتواة في A (ونعبر عن الصفة الأخيرة لـ A^0 بقولنا : A^0 هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A وبالتالي إذا كانت G مجموعة مفتوحة و $G \subseteq A$ فإن $G \subseteq A^0$)

c) A مفتوحة $\Leftrightarrow$ $A = A^0$.

البرهان :

(a) لتكن $\{A_i\}_{i \in I}$ أسرة كل المجموعات المفتوحة التي كل منها محتوى في A ولنبرهن على أن $A^0 = \bigcup_{i \in I} A_i$.

إذا كانت x نقطة من A^0 . فإنه يوجد عدد حقيقي $r > 0$ بحيث $B(x, r) \subseteq A$ ، وذلك حسب تعريف نقطة داخلية ، إن الكرة المفتوحة $B(x, r)$ هي مجموعة مفتوحة (حسب المبرهنة (1) من البند (4.2)) ومحتواة في A ، وبالتالي هي أحد عناصر الأسرة $\{A_i\}_{i \in I}$ ومنه نجد :

$$x \in B(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

لنبرهن الإحتواء المعاكس : إذا كانت x نقطة من $\bigcup_{i \in I} A_i$ ، فإنه يوجد دليل α من I بحيث x تنتمي إلى $A \supseteq A_\alpha$. وبما أن A_α مفتوحة و x نقطة منها ، فإنه توجد كرة مفتوحة $B(x, r)$ مركزها x ومحتواة في A_α . ومنه ينتج :

$$x \in B(x, r) \subseteq A_\alpha \subseteq A$$

إذاً x نقطة داخلية من A ، أي أن $x \in A^0$. ومنه تنتج المساواة المطلوبة .

(b) بما أن A^0 تساوي اجتماع كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A ، فإنه من جهة A^0 مفتوحة ، حسب مبرهنة (2) من (4.2) . ومن جهة أخرى تحوي

هام
جـ ١

كل مجموعة مفتوحة محتواة في A ، إذاً A^0 أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A .

(c) $(\Rightarrow)$ بما أن A^0 مجموعة مفتوحة . فإن المساواة $A = A^0$ تؤدي إلى أن A مفتوحة .

العكس $(\Leftarrow)$: إذا كانت A مفتوحة ، وهي محتواة في نفسها ، إذاً A محتواة في A^0 حسب البند (b) ، وبما أن الإحتواء المعاكس $A^0 \subseteq A$ محقق دوماً ، إذاً $A = A^0$.

مثال :

في الفضاء المتري الحقيقي العادي ، إن داخل المجموعة الجزئية $A =]0, 1[$. هو نفسه المجموعة A . لأن A مفتوحة و حسب (c) من المبرهنة السابقة تكون داخليتها نفسها ، في حين أن داخل المجموعة الجزئية $B =]a, b]$ ، هو أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في B ومن الواضح أنها المجال المفتوح $]a, b[$ ،وبالتالي $B^0 = (]a, b])^0 =]a, b[$ بنفس الطريقة نجد أن داخل المجموعة $C = [a, b]$ هو $C^0 = ([a, b])^0 =]a, b[$.

(5) مبرهنة (تتمة في خواص A^0)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً و A, B مجموعتين جزئيتين من E . عند ذلك يتحقق :

a) $E^0 = E$, $\varnothing^0 = \varnothing$ (لأن كل منهما مفتوحة) .

b) $(A^0)^0 = A^0$ (لأن A^0 مجموعة مفتوحة ، وبالتالي فهي تساوي داخليتها) .

c) $A \subseteq B \Rightarrow A^0 \subseteq B^0$

d) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$

e) $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$

هام
جداً

البرهان :

إن كل من (a) , (b) مبرهنة بجانبها لنبرهن (c)

$$\forall x \in A^0 \Rightarrow \exists r > 0 \;;\; B(x, r) \subseteq A$$

وبما أن $B \subseteq A$ فرضاً . فإن الكـــرة المفتوحـــة $B(x, r)$ محتـــواة في B ، وبالتالي فإن $x \in B$.

برهان (d) :

$$\forall x \in A^0 \cap B^0 \Rightarrow x \in A^0 \wedge x \in B^0 \Rightarrow \exists r_1 ; r_2 > 0$$
$$; \; B(x, r_1) \subseteq A \wedge B(x, r_2) \subseteq B$$

وبما أن الكرتين لهما نفس المركز x فإن إحداهما تكون محتواة في الأخـــرى ولـــتكن $B(x, r_1) \subseteq B(x, r_2)$ عند ذلك نجد أن الكرة $B(x, r_1)$ محتواة في كل من A , B وبالتالي محتواة في تقاطعهما ، أي أن

$$\forall x \in A^0 \cap B^0 \Rightarrow \exists B(x, r_1) \subset A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^0 \Rightarrow$$
$$A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0 \; . \; . \; . \; (1)$$

طريقة ثانية لبرهان الإحتواء (1) ، يعتمد (c) وبعض الخواص الأخرى :

$$A^0 \subseteq A \wedge B^0 \subseteq B \Rightarrow A^0 \cap B^0 \subseteq A \cap B \overset{(c)}{\Longrightarrow}$$
$$(A^0 \cap B^0)^0 \subseteq (A \cap B)^0$$

وبما أن $A^0 \cap B^0$ مجموعة مفتوحة (لأنها تقاطع مجموعتين مفتوحتين) فإن داخليتها نفسها ، وبالتالي ، من الإحتواء الأخير ينتج

$$(A^0 \cap B^0) \subseteq (A \cap B)^0$$

لبرهان الإحتواء المعاكس ، لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \overset{(c)}{\Longrightarrow} (A \cap B)^0 \subseteq A^0 \\ A \cap B \subseteq B \overset{(c)}{\Longrightarrow} (A \cap B)^0 \subseteq B^0 \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0 \; . \; . \; . \; (2)$$

من (1) و (2) تنتج المساواة في (d) .

برهان (e) :

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \overset{(c)}{\Longrightarrow} A^0 \subseteq (A \cap B)^0 \\ B \subseteq A \cup B \overset{(c)}{\Longrightarrow} B^0 \subseteq (A \cap B)^0 \end{array}\right\} \Rightarrow A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$$

لنقدم الآن مثالاً نبين فيه أن الإحتواء المعاكس في البند (e) من المبرهنة الأخيرة قد لا

يتحقق . فإذا أخذنا المجموعتين $B =]2,3[$ و $A = [1,2]$ الجزئيتين من الفضاء المتري الحقيقي العادي فإننا نجد أن

$$A^0 =]1,2[\ , \ B^0 =]2,3[\Rightarrow A^0 \cup B^0 =]1,3[- \{2\}$$
$$A \cup B = [1,3[\Rightarrow (A \cup B)^0 =]1,3[$$

واضح هنا أن $(A \cup B)^0 \not\subset A^0 \cup B^0$.

5 . § . المجاورات

5 . 1 تعريف (مجاورة نقطة)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً و x نقطة من E ، كل مجموعة مفتوحة G في E تحقق $x \in G$ تسمى مجاورة مفتوحة للنقطة x ، وكل مجموعة v جزئية من E وتحوي مجاورة مفتوحة لـ x تسمى مجاورة لـ x . وبالتالي :

$(E, d) \supseteq v$ مجاور للنقطة x $\Leftrightarrow$ توجد مجموعة (أو مجاورة) مفتوحة ، بحيث $x \in G \subseteq v$.

5 . 2 . ملاحظات وأمثلة

١) كل مجاورة مفتوحة للنقطة x تكون مجاورة للنقطة x ، والعكس ليس صحيحاً .

٢) نرمز لمجموعة مجاورات النقطة x بالرمز $V(x)$ ، وقد رمزنا لأسرة كل المجموعات المفتوحة في الفضاء (E, d) بالرمز τ ، وعند ذلك نستطيع كتابة

$$\exists G \in \tau \ ; \ x \in G \subseteq v \Leftrightarrow v \in V(x)$$

٣) المجموعة المفتوحة تكون مجاورة لكل نقطة من نقاطها (وسوف نرى في مبرهنة أن العكس أيضاً صحيح) .

٤) في الفضاء المتري الحقيقي العادي المجموعة الجزئية $v =]-1, 3]$ ليست مجاورة لكل نقطة x لاتنتمي إلى v ، بالإضافة إلى ذلك فإن v ليست مجاورة للنقطة 3 منها . لأن أي مجاورة مفتوحة للنقطة 3 سوف

تحتوي على نقاط واقعة على اليمين من العدد 3 . والتي لاتكون محتواة في v .

أخيراً إن v مجاورة لجميع نقاطها المختلفة عن 3 . لأنه مهما كان $a \in v - \{3\}$

فإنه توجد المجموعة المفتوحة $]-1, 3[$ وتحقق

$v =]-1, 3] \supseteq]-1, 3[\ni a$ وبالتالي v مجاورة للنقطة a .

ملاحظة :

من المثال السابق نلاحظ أن v ليست مجاورة لكل نقطة من نقاطها والسبب في ذلك هو النقطة 3 فقط .وهذه النقطة هي نفسها السبب في أن v ليست مفتوحة . إن مفهوم داخل مجموعة v^0 يكافئ عملياً نزع النقاط من المجموعة v التي تمنعها من أن تكون مفتوحة ، وبالتالي حصلنا على التكافؤ (v مفتوحة $\Leftrightarrow$ $v = v^0$) فهل نتوقع بالمثل : [v مجاورة لكل نقطة من نقاطها $\Leftrightarrow$ v مفتوحة] والإجابة بنعم . وهي مضمون المبرهنة التالية .

5.3 . مبرهنات :

مبرهنة (1)

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) فإنه يتحقق :

A مفتوحة $\Leftrightarrow$ A مجاورة لكل نقطة من نقاطها .

البرهان :

إذا كانت A مفتوحة فإنه من الواضح أنها مجاورة (مفتوحة) لكل نقطة من نقاطها .

العكس : إذا كانت A مجاورة لكل نقطة من نقاطها فإنه :

$$\forall x \in A : \exists G_x \in \tau \; ; \; x \in G_x \subseteq A \Rightarrow$$
$$\forall x \in A : \exists G_x \in \tau \; ; \{x\} \subseteq G_x \subseteq A \Rightarrow$$
$$\bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} G_x \subseteq A \quad ; \quad G_x \in \tau \; \forall x \in A$$

ولكن $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ وبالتالي تنتج المساواة :

$$A = \bigcup_{x \in A} G_x \quad ; \quad G_x \in \tau \ \forall x \in A$$

أي أن A اجتماع لمجموعات مفتوحة ، وبالتالي تكون مفتوحة .

مبرهنة (2) (خواص أسرة مجاورات نقطة)

لتكن x نقطة من الفضاء المتري (E, d) و $V(x)$ أسرة مجاورة النقطة x ، عند ذلك يتحقق :

a) كل مجموعة جزئية تحوي مجاورة للنقطة x تكون بدورها مجاورة لـ x .

b) تقاطع عدد منته من مجاورات النقطة x ، تكون مجاورة لـ x .

البرهان :

(a) إذا كانت A مجموعة جزئية من E ، وكانت v مجاورة للنقطـة x بحيث $v \subseteq A$ فإن

$$v \in V(x) \Rightarrow \exists G \in \tau \ ; \ x \in G \subseteq v$$

وبما أن $v \subseteq A$ فإن $x \in G \subseteq A$. أي أن A مجاورة لـ x .

(b) لتكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مجاورات للنقطة x عددها n ولنبرهن على أن $\bigcap_{i=1} v_i$ مجاورة لـ x . لدينا :

$$\begin{aligned} v_i \in V(x) \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists G_i \in \tau ; x \in G_i \subseteq v_i \forall i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} v_i \qquad (1) \end{aligned}$$

وبما أن تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة فإن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن العلاقة (1) تبين أن $\bigcap_{i=1}^{n} v_i$ مجاورة للنقطة x .

ملاحظة :

إن تقاطع عدد غير منته من مجاورات نقطة،ليس بالضرورة مجاورة لتلك النقطة .

مثال :

في الفضاء المتري الحقيقي العادي $A_n =]-\frac{1}{n} , \frac{1}{n}[$ مجاورة للنقطة 0 من أجل كل عدد صحيح موجب n . إن التقاطع $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ لأسرة المجاورات A_n ليست مجاورة للصفر لأنه كما نعلم :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

والمجموعة $\{ 0 \}$ ليست مجاورة للصفر لأنها لا يمكن أن تحوي مجموعة مفتوحة ، حيث المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ غير منتهية .

4 . 5 . تعريف (أساس لمجاورات نقطة x (A nhood base at x))

لتكن x نقطة من الفضاء المتري (E , d) ، ولتكن $\{ \upsilon_i \}_{i \in I}$ أسرة من مجاورات النقطة x . نقول عن هذه الأسرة أنها أساس لمجاورات x ، إذا كانت كل مجاورة للنقطة x تحوي أحد عناصر الأسرة $\{ \upsilon_i \}_{i \in I}$. وهذا يعني أن أسرة المجاورات $V(x)$ للنقطة x تتحدد بالأساس $\{ \upsilon_i \}_{i \in I}$ لمجاورات x كما يلي :

$$V(x) = \{ u \subseteq E \mid \exists \ \upsilon_i \in \{ \upsilon_i \}_{i \in I} \ ; \ \upsilon_i \subseteq u \}$$

مثال :

بما أن المجموعة الجزئية A من فضاء متري (E , d) تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت تساوي اجتماع لكرات مفتوحة حسب مبرهنة (3)من الفقرة (2 . 4) .

فإنه من الواضح تحقق ما يلي :

- أسرة كل الكرات المفتوحة التي مركزها x من الفضاء المتري (E , d) تشكل أساساً لمجاورات x .
- كذلك أسرة كل الكرات المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها عدد نسبي موجب تشكل أساساً لمجاورات x .

– وأخيراً أسرة كل الكرات المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها $\frac{1}{n}$ (حيث n عدد صحيح موجب) تشكل أساساً لمجاورات x .

§. 6 أساس وتحت أساس في فضاء متري (Base and subbase of espace)

6 . 1 . تعريف (أساس أو قاعدة)

ليكن (E , d) فضاءً مترياً ، و τ أسرة كل المجموعات المفتوحة في الفضاء E ، ولتكن $B = \{ B_i \}_{i \in I}$ أسرة جزئية من الأسرة τ نقول عن الأسرة B أنها أساس للفضاء المتري E (أوللأسرة τ) إذا كانت كل مجموعة مفتوحة في E هي اجتماع لعناصر من الأسرة B . أي أن :

$$(\forall \ G \in \tau \Rightarrow G = \bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \tau \ ; \ B_j \in B \, , J \subseteq I) \Leftrightarrow$$

$B \subseteq \tau = \{ B_i \}_{i \in I}$ أساس للفضاء E

6 . 2 . ملاحظات ونتائج و أمثلة :

1) مبرهنة :

الأسرة B الجزئية من τ تكون أساساً للفضاء E ⇔

$$(\forall \ G \in \tau \ , \forall \ x \in G \Rightarrow \exists \, B_x \in B \ ; \ x \in B_x \subseteq G)$$

البرهان :

(⇐) واضح من التكافؤ الوارد في تعريف الأساس .

(⇒) من أجل كل $G \in \tau$ و كل $x \in G$ فإنه يوجد B_x من B بحيث $x \in B_x \subseteq G$ وبالتالي من أجل كل x من G يوجد B_x من B ويتحقق $\{ x \} \subseteq B_x \subseteq G$ وبأخذ الاجتماع على G نجد $G \subseteq \bigcup_{x \in G} \{ x \} \subseteq \bigcup_{x \in G} B_x \subseteq G$ ومنه $G = \bigcup_{x \in G} B_x \ ; B_x \in B$.

2) إن أسرة كل الكرات المفتوحة في فضاء متري (E , d) تشكل أساساً لهذا الفضاء . لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة من جهة ، ومن جهة أخرى كل

مجموعة مفتوحة وغير خالية هي اجتماع لكرات مفتوحة ، وذلك حسب مبرهنة (3) من البند (2 . 4) . (أما $\emptyset$ فهي اجتماع لأسرة خالية من الكرات المفتوحة) .

3) إن أسرة كل المجموعات المفتوحة τ في فضاء متري (E , d) تشكل دوماً ، قاعدة لهذا الفضاء .

4) ليكن (E , d) الفضاء المتري المتقطع . إن الأسرة $B = \{ \{ x \} \mid x \in E \}$ تشكل أساساً لهذا الفضاء . لأنه من جهة أولى جميع عناصر B مجموعات مفتوحة ، لأن كل مجموعة جزئية في هذا الفضاء تكون مجموعة مفتوحة كما نعلم ، ومن جهة ثانية ، فإن كل مجموعة مفتوحة وغير خالية G تكتب بالشكل :
$G = \bigcup_{x \in G} \{ x \}$ وبالتالي فهي اجتماع لعناصر من B ، والخالية دوماً اجتماع لأسرة خالية من عناصر B .

5) إذا كان d أي تابع مسافة معرف على المجموعة $E = \{ a , b \}$ المؤلفة من عنصرين فإن كل مجموعة جزئية من E تكون مفتوحة (برهن ذلك) .
وبشكل أعم إذا كان d أي تابع مسافة معرف على مجموعة منتهية $E = \{ a_1 , a_2 , . . . , a_n \}$ فإن كل مجموعة جزئية من E تكون مفتوحة أي أن $\tau = P (E)$ (حيث P (E) أسرة كل المجموعات الجزئية من E) . وبالتالي في كل فضاء متري منته (E , d) ، الأسرة $B = \{ \{ a_1 \} , \{ a_2 \} , . . . , \{ a_n \} \}$ تشكل أساساً له .

6) إذا كانت الأسرة B أساساً للفضاء المتري (E , d) وكانت B' أسرة مجموعات جزئية من E بحيث : $B \subseteq B' \subseteq \tau$ فإن B' تكون أساساً آخر للفضاء (E , d) . وهذا واضح لأن $\forall G \in \tau \Rightarrow G = \bigcup_{i \in I} B_i \; ; B_i \in B \subseteq B'$

3 . 6 . مبرهنة (شرط مكافئ لمفهوم الأساس لفضاء متري و الأساس لمجاورات نقطة x من E)

إذا كانت B أسرة من المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري (E , d) فإنه يتحقق :

الأسرة B تكون أساساً للفضاء E $\Leftrightarrow$ من أجل كل x من E ، الأسرة الجزئية من B $B_x = \{ B_i \in B \mid x \in B_i \}$ تكون أساساً لمجاورات x .

البرهان :

($\Leftarrow$) لتكن B أساساً للفضاء E و x عنصراً من E ولنبرهن على أن الأسرة الجزئية $B_x = \{ B_i \in B \mid x \in B_i \}$ تكون قاعدة لمجاورات x . من الواضح أولاً أن عناصر B_x هي مجاورات (مفتوحة) لـ x . لتكن U مجاورة كيفية لـ x ، وبالتالي فإن $x \in U^0$ ، وبما أن U^0 مفتوحة في E و B اساس له فإن U^0 تساوي اجتماعاً لعناصر من الأساس B . إذاً يوجد عنصر B_i من B بحيث $x \in B_i \subseteq U^0$. وبالتالي فإن B_i يكون عنصراً من B_x ويحقق $B_i \subseteq U^0 \subseteq U$. وهكذا نجد أن B_x أساس لمجاورات x .

($\Rightarrow$) العكس : إذا كانت B_x أسرة من المجموعات المفتوحة تشكل أساساً لمجاورات النقطة x من E ، من اجل كل x من E ، ولتكن $B = \bigcup\limits_{x \in E} B_x$ ، عند ذلك من أجل كل مجموعة مفتوحة G في E وكل عنصر y من G ، يوجد B_y من B بحيث $y \in B_y \subseteq G$ ، ومنه المجموعة $G = \bigcup\limits_{y \in G} B_y$ تكون اجتماعاً لعناصر من B ، وبالتالي فإن B أساساً لـ E .

6 . 4 . تعريف (تحت أساس Subbase)

لقد تم بناء مفهوم الأساس لفضاء متري على خاصة الإغلاق لعناصر الأسرة τ بالنسبة للاجتماع الكيفي، والآن نقدم مفهوم تحت الأساس (subbase) لفضاء متري على خاصة الإغلاق لعناصر τ بالنسبة للتقاطع المنتهي .

1)تعريف تحت أساس :

إذا كان (E , d) فضاءً مترياً وكانت τ أسرة كل المجموعات المفتوحة فيه . فإن كل اسرة جزئية s من الأسرة τ ، تسمى تحت أساس للفضاء E (أو للأسرة τ) إذا تحقق الشرط :

الأسرة المؤلفة من كل التقاطعات المنتهية لعناصر من s تشكل أساساً للفضاء E (أو للأسرة τ) . أي أن :

$s \subseteq \tau$ تكون تحت أساس للفضاء E ⇔

$$B = \{ B_i \mid B_i \bigcap_{j=1}^{n} S_{ij} \; ; \; S_{ij} \in S \; ; \; n \in Z^+ \}$$ قاعدة للفضاء E

2) مثال :

في الفضاء المتري الحقيقي العادي أسرة المجالات المفتوحة التي من الشكل $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ تشكل تحت أساس له .

6 . 5 . تعريف (خاصة العد الأولى the first axiom of countability)

نقول عن فضاء متري (E , d) أنه يحقق خاصة العد الأولى (the first axiom of countability) إذا وفقط إذا كانت كل نقطة x من E تملك أساساً لمجاورات x قابلاً للعد (has a countable nhood base)

مثال :

في الفضاء المتري الحقيقي العادي ، الكرات المفتوحة التي تشترك بنفس المركز x من R ، وأنصاف أقطارها أعداد نسبية تشكل أساساً لمجاورات x قابلاً للعد .

وبالتالي فإن R يتمتع بخاصة العد الأولى .

مثال :

إذا كانت E مجموعة غير قابلة للعد ، فإن الفضاء المتري المتقطع (E , d) يحقق خاصة العد الاولى . لأنه من أجل كل نقطة x من E فإن الكرات المفتوحة

التي مركزها x ونصف قطرها عدد عادي (أو نصف قطرها $\frac{1}{n}$ حيث n عدد صحيح موجب) تكون أساساً لـ V (x) قابلاً للعد .

6 . 6 . تعريف (خاصة العد الثانية the second axiom of countability)

نقول عن فضاء متري (E , d) أنه يحقق خاصة العد الثانية إذا وفقط إذا كان يملك أساساً قابلاً للعد .

7 . 6 . ملاحظات وأمثلة :

١) إذا كانت E مجموعة منتهية فإن الفضاء المتري (E , d) يحقق خاصة العد الثانية ، لأن الأسرة $B = \{ \{ x \} \mid x \in E \}$ تشكل أساساً منته (أي قابلاً للعد) لهذا الفضاء .

٢) إذا كانت E مجموعة قابلة للعد ، فإن الفضاء المتري المتقطع (E , d) يحقق خاصة العد الثانية ، لأن الأسرة $B = \{ \{ x \} \mid x \in E \}$ تشكل اساساً قابلاً للعد لهذا الفضاء .

٣) إذا كانت E مجموعة غير قابلة للعد فإن الفضاء المتري المتقطع (E , d) لا يحقق خاصة العد الثانية (تحقق من ذلك) .

٤) كل فضاء متري يحقق خاصة العد الثانية فإنه يحقق خاصة العد الأولى ، إلا أن العكس ليس صحيحاً . وقد وجدنا أن الفضاء المتري المتقطع (E , d) ، وحيث E غير قابلة للعد ، يحقق خاصة العد الأولى و لا يحقق خاصة العد الثانية .

7 . § . المجموعات المغلقة (Closed sets)

1 . 7 . تعريف (مجموعة مغلقة)

نقول عن المجموعة الجزئية F من الفضاء المتري (E , d) أنها مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة . وسوف نرمز لمجموعة كل المجموعات المغلقة في فضاء متري بالرمز $\mathbb{F}$.

إن خواص متمم مجموعة ، تلعب دوراً أساسياً في نقل الخواص المتعلقة بالمجموعات المفتوحة إلى خواص مناظرة لها بالنسبة للمجموعات المغلقة .فمثلاً نعلم أن كل من $\varnothing$, E تكون مجموعة مفتوحة في كل فضاء متري (E, d) ، وبما أن $\varnothing$ هي متممة E المفتوحة فإن $\varnothing$ مغلقة ، وكذلك بما أن E هي متممة $\varnothing$ المفتوحة فإن E مغلقة . وبالتالي ينتج أن كل من $\varnothing$ و E مغلقة ومفتوحة في أي فضاء متري (E, d) . كما ينتج من تعريف المجموعة المغلقة ومن المساواة :

$$E - (E - G) = G$$

التكافؤان :

$$F \in \mathbb{F} \Leftrightarrow E - F \in \tau \quad ; \quad G \in \tau \Leftrightarrow E - G \in \mathbb{F}$$

7 . 2 . مبرهنة (خواص أساسية للمجموعات المغلقة)

في كل فضاء متري (E, d) يتحقق .

a) كل من $\varnothing$, E مجموعة مغلقة (أي أن $E \in \mathbb{F}$, $\varnothing \in \mathbb{F}$)

b) التقاطع لعناصر أي أسرة (منتهية أو غير منتهية) من المجموعات المغلقة ، يكون مجموعة مغلقة أي إذا كانت $\{F_i\}_{i \in I}$ أسرة جزئية من الأسرة $\mathbb{F}$ فإن $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ يكون عنصراً من $\mathbb{F}$.

c) اجتماع عدد منته من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة .

البرهان :

a) إن كل من $\varnothing$, E مغلقة كما ذكرنا في التعليق على تعريف مجموعة مغلقة .

b) لبرهان أن $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ مجموعة مغلقة ، نبرهن على أن متممتها $E - \bigcap\limits_{i \in I} F_i$ مجموعة مفتوحة . لدينا حسب قانون ديمورغان :

$$E - \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E - F_i)$$

وبما أن $E - F_i$ مفتوحة ، لأنها متممة المغلقة F_i ، من أجل كل i من I ، وبما أن الإجتماع لمجموعات مفتوحة يكون مجموعة مفتوحة فإن المجموعة $\bigcup\limits_{i \in I} (E - F_i)$

مفتوحة وبالتالي مساويتها ($E - \bigcap_{i\in I} F_i$) مفتوحة ، وهكذا تكون متممتها $\bigcap_{i\in I} F_i$ مغلقة .

c) لتكن $F_1 , F_2 , \ldots , F_n$ مجموعات مغلقة في الفضاء (E , d) ولنبرهن على أن $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مغلقة وهذا يكافئ برهان أن $E - \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مفتوحة .

حسب قانون ديمورغان . لدينا

$$E - \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (E - F_i)$$

وبما أنه من أجل كل $i = 1 , 2 , \ldots , n$ المجموعة F_i مغلقة فإن $E - F$ مفتوحة وبالتالي التقاطع $\bigcap_{i=1}^{n} (E - F_i)$ يكون مجموعة مفتوحة ، لأنه تقاطع لعدد منته من المجموعات المفتوحة ، وهكذا نجد أن المجموعة المساوية لهذا التقاطع وهي $E - \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مفتوحة ، ومنه $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مغلقة .

3 . 7 . أمثلة وملاحظات ومبرهنات :

1) مبرهنة :

كل مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة ، أو من عدد منته من النقاط في فضاء متري تكون مغلقة .

البرهان :

إذا كانت $A = \{ a \}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E , d) . فإنه لبرهان أنها مغلقة يكفي أن نبرهن على أن $G = E - \{ a \}$ مفتوحة . ويتم ذلك بالإعتماد على تعريف مجموعة مفتوحة . بأن نبرهن على أن كل نقطة x من G تكون مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في G . وذلك كما يلي :

$$\forall\ x \in E - \{ a \} \Rightarrow x \in E\ ,\ x \neq a \Rightarrow d(x , a) > 0$$

إن الكرة المفتوحة $B(x\ ,\ d(x , a))$ ، التي مركزها x ونصف قطرها

$d(x,a)$ محتواة في E و a ليست نقطة منها ، وبالتالي فإن هذه الكرة محتـــواة في $E-\{a\}$. إذاً $E-\{a\}$ مفتوحة وبالتالي $\{a\}$ مغلقة .

الآن إذا كانـــت $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ فـــإن $A=\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\}$ ، وبالتالي فإن A اجتماع لعدد منته من المجموعات المغلقة ، وبالتالي تكون مغلقة .

2) مبرهنة :

كل كرة مغلقة تكون مجموعة مغلقة .

البرهان :

لتكن $\overline{B}(a,r)$ كرة مغلقة في الفضاء المتريّ (E,d) ، إن متممتها :

$$E-\overline{B}(a,r)=\{x \mid x\in E, x\notin \overline{B}(a,r)\}=\{x\in E \mid d(x,a)>r\}=A$$

وقد وجدنا أن هذه المجموعـــة مفتوحـــة في البنـــد (4.3) . وبالتـــالي متممتـــها $\overline{B}(a,r)$ مغلقة .

3) مبرهنة :

كل سطح كرة في فضاء متري (E,d) يكون مجموعة مغلقة .

البرهان :

يكفي ملاحظـــة أن $S(a,r)=\overline{B}(a,r)\cap[E-B(a,r)]$ ، وبالتالي فهي مجموعة مغلقة لأنها تقاطع لمجموعتين مغلقـــتين ، الأولى الكـــرة المغلقـــة $\overline{B}(a,r)$ وهي مجموعة مغلقة كما وجدنا في (2) والثانية $E-B(a,r)$ هـــي متمم كرة مفتوحة . أي متمم مجموعة مفتوحة ، وبالتالي مغلقة .

4) كل مجال مغلق $[a,b]$ في الفضاء المتري الحقيقي العادي يكون مجموعة مغلقة لأن متممته تكون اجتماع للمجالين المفتوحين $]b,+\infty[$ ، $]-\infty,a[$ ، أي أن متممته مجموعة مفتوحة .

في حين أن كل مجال نصف مفتوح $]a,b]$ أو نصف مغلـــق $[a,b[$ أو مفتوح $]a,b[$ لن يكون مجموعة مغلقة لأن المتمم لكل منها مجموعـــة مفتوحـــة .

ليس

(تحقق من ذلك) . وبالتالي توجد مجموعات جزئية من فضاء متري ليست مغلقة ولا مفتوحة .

5) في الفضاء المتري المتقطع (E , d) وجدنا أن كل مجموعة جزئية فيه مفتوحة ، وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية فيه تكون مغلقة أيضاً . وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية في هذا الفضاء تكون مفتوحة ومغلقة بنفس الوقت .

6) لنورد الآن مثالاً على أن اجتماع عدد غير منته من المجموعات المغلقة قد يكـــون مجموعة غير مغلقة .

في الفضاء المتري الحقيقي العادي ، نعلم أن كل من المجالات $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ، (حيث n عدد صحيح موجب) يكون مجموعة مفتوحة ، وبالتالي فإن المتمم لكـــل منها $\mathbb{R} -]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ يكون مجموعة مغلقة (من أجل كل عدد صحيح موجب n) . لنوجد اجتماعها :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\mathbb{R} -]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\right) = \mathbb{R} - \bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \mathbb{R} - \{0\}$$

إن $\mathbb{R} - \{0\}$ ليست مغلقة لأن المتمم { 0 } ليست مفتوحة ، وبالتالي الإجتماع لعدد غير منته من المجموعات المغلقة ليس بالضرورة مجموعة مغلقة .

7) إن مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، الجزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي ، تكون مغلقة لأن متممتها $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ مفتوحة ، وذلـــك لأنهـــا مساوية لإجتماع المجموعات المفتوحة $]n, n+1[$.

8 § . نقاط التراكم (أو النهاية) ، المجموعة المشتقة (derived set)

8 . 1 . تعريف (نقطة تراكم ، المجموعة المشتقة لمجموعة A)

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E , d) ، نقول عن النقطة x من E ، أنها نقطة تراكم (accumulation piont) (أو نقطـــة نهايـــة limit piont)

للمجموعة A ، إذا كانت كل كرة مفتوحة مركزها x تتقاطع مع $A - \{x\}$

(وهذا الشرط يعبر عن أن نقاط A تتواجد بكثرة حول النقطة x) .

نرمز لمجموعة نقاط التراكم للمجموعة A بالرمز A' ونسميها المجموعة المشتقة لـ A . أي أن

$$A' = \{x \in E \mid (\forall r > 0) : B(x, r) \cap (A - \{x\} \neq \varnothing\}$$
$$= \{x \in E \mid \forall B(x, r) : B(x, r) \cap (A - \{x\} \neq \varnothing\}$$

8 . 2 أمثلة

$$\forall \; B(x, r) : B(x, r) \cap (A - \{x\} \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in A'$$
$$\exists \; B(x, r) : B(x, r) \cap (A - \{x\} = \varnothing \Leftrightarrow x \notin A'$$

أي أن النقطة x من E لا تكون نقطة تراكم للمجموعة الجزئية A إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها x لا تتقاطع مع المجموعة $A - \{x\}$.

مثال (1) :

لتكن $A = \{1, 2\}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري العادي R ولنوجد A' .

إن النقطة 1 ليست نقطة تراكم لـ A . لأنه توجد كرة مفتوحة $B(1, \frac{1}{2})$ و لا تتقاطع مع المجموعات $A - \{1\} = \{2\}$. كذلك الأمر بالنسبة للنقطة 2 ليست نقطة تراكم لـ A .وأيضاً كل نقطة x من $(R - A)$ ليست نقطة تراكم لـ A . لأنـــه في هـــذه الحالـــة $A - \{x\} = A$ و إذا أخـــذنا $r = \min\{d(x, 1), d(x, 2)\}$ فإن الكرة المفتوحة $B(x, r)$ لا تتقاطع مع A .وبالتالي x ليست نقطة تراكم لـ A . وبهذا نكون قد برهنا أن $A' = \varnothing$.

يمكن بنفس المناقشة التوصل إلى انه إذا كانت $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. مجموعة جزئية منتهية من R فإن $A' = \varnothing$. وبمناقشة مشابهة نستطيع بيـــان أن المجموعـــة المشتقة لمجموعة الأعداد الصحيحة Z الجزئية من R ، هي $\varnothing$. أي أن $Z' = \varnothing$.

مثال (2) :

لتكن المجموعة $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ الجزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي .إن A تملك نقطة تراكم وحيدة هي 0. لأنه مهما كان العدد الحقيقي $r > 0$ فإن الكرة المفتوحة $B(0, r)$ سوف تتقاطع مع $A = \{0\} - A$. أي أننا ندعي $B(0, r) \cap A \neq \varnothing$ ، لنبرهن ذلك .

بما ان العدد $r > 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث : $0 < \frac{1}{n} < r$ (تبرهن لاحقاً) .

إن العدد $\frac{1}{n}$ ينتمي إلى A من جهة ، وينتمي إلى الكرة $B(0, r)$ من جهة ثانية ، لأن $d(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n} < r$. وبالتالي $S(0, r) \cap A \neq \varnothing$.

– الآن إذا كانت x نقطة من $R - \{0\}$ فإن x لن تكون نقطة تراكم لـ A (برهن ذلك) . واستنتج أن $A' = \{0\}$.

– أما لبرهان أنه إذا كان $r > 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $0 < \frac{1}{n} < r$. نفرض جدلاً عدم وجود عدد صحيح موجب n بحيث $\frac{1}{n} < r$ وبالتالي فإن $r \leq \frac{1}{n}$ لكل عددصحيح موجب n . وبالتالي $n \leq \frac{1}{r}$ لكل عدد صحيح موجب n ، أي أن N مجموعة محدودة من الأعلى ، وهذا غير صحيح .

مثال (3) :

المجال نصف المغلق $A = [0, 1[$ من الفضاء المتري الحقيقي العادي فيه كل نقطة من نقاطه نقطة تراكم له ، بالإضافة إلى ذلك الواحد نقطة تراكم له ، والسبب في ذلك أن كل نقطة x من المجال المغلق $[0, 1]$ تحقق : كل كرة مفتوحة مركزها x ، والتي هي مجال مفتوح منتصفه x ، تتقاطع مع $A - \{x\}$. وأما بقية النقاط ، أي نقاط المجموعة $B = R - [0, 1]$ ، والتي هي مفتوحة طبعاً ، فإن

كل نقطة b منها تكون مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في B وبالتالي لاتتقاطع مع $[0$

$1]$ ، وبالطبع فهي لاتتقاطع مع $A = A - \{b\}$. مما تقدم نجد أن $([0,1[)' = [0,1]$

بنفس طريقة المناقشة السابقة نجد أنه في الفضاء المتري الحقيقي العادي يتحقق :

$$([a,b[)'=[a,b]\ ;\ (]a,b])'=[a,b]\ \ (]a,b[)'=[a,b]$$
$$;([a,b])'=[a,b]$$

$$([a,+\infty[)'=[a,+\infty[\,;(]a,+\infty[)'=[a,+\infty[\,,(]-\infty,b])'=]-\infty,b]$$

وبالطبع $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$ $\quad (]-\infty,b[)'=]-\infty,b]$

مثال (4) :

في الفضاء المتري المتقطع (E,d) وجدنا أن كرة مفتوحة $B(a,r)$ وحيث $0<r\leq 1$ تتألف من مركزها $B(a;r) = \{a\}$ ، وبشكل خاص $B(a,1) = \{a\}$. فإذا كانت A أية مجموعة جزئية من هذا الفضاء فإن كل نقطة x من E لن تكون نقطة تراكم لـ A لأن الكرة المفتوحة $B(a,1) = \{x\}$ لن تتقاطع مع $A - \{x\}$. وبالتالي ينتج أن

$$\forall A \subseteq E \Rightarrow A' = \varnothing$$

3 . 8 . مبرهنة :

المجموعة الجزئية من الفضاء المتري (E,d) تكون مغلقة إذا وفقط إذا $B' \subseteq B$.

البرهان :

لتكن المجموعة الجزئية B مغلقة و لنبرهن على أن $B' \subseteq B$ ، لذلك يكفي برهان أن $E-B \subseteq E-B'$

بما أن B مغلقة فإن $E - B$ مفتوحة ، وبالتالي حسب تعريف مجموعة مفتوحة يتحقق :

$$\forall\ x \in E-B \Rightarrow \exists\ r>0\ ; B(x,r) \subseteq E-B \Rightarrow$$
$$\forall\ x \notin B\ : \exists\ B(x,r); B(x,r) \cap B = \varnothing \Rightarrow$$

$$\forall x \notin B \ : \exists B(x,r) \ ; B(x,r) \cap (B - \{x\}) = \varnothing \Rightarrow$$
$$x \notin B' \Rightarrow x \in E - B'$$

وبالتالي يتحقق : $E - B \subseteq E - B'$

العكس : لنكن $B' \subseteq B$ ولنبرهن على أن B مغلقة ، وهذا يكافئ الفرض بأن $E - B \subseteq E - B'$ والبرهان أن $E - B$ مفتوحة ، وذلك باعتماد تعريف مجموعة مفتوحة .

$$\forall x \in E - B \subseteq E - B' \Rightarrow x \in E , x \notin B , \ x \notin B' \Rightarrow$$
$$\exists r > 0 \ ; B(x,r) \cap (B - \{x\}) = \varnothing$$

وبما أن $x \notin B$ فإن $B - \{x\} = B$. ومنه :

$$\Rightarrow \exists r > 0 \ ; \ B(x,r) \cap B = \varnothing \Rightarrow \exists r > 0 \ ; \ B(x,r) \subseteq E - B$$

وهذا يعني وجود كرة مفتوحة مركزها x ومحتواة في $E - B$. من أجل كل x من $E - B$ ، إذاً $E - B$ مجموعة مفتوحة . وبالتالي متممتها B مغلقة .

ملاحظة :

من المبرهنة السابقة نلاحظ أن مجموعة نقاط التراكم ، لمجموعة كيفية ، تلعب دوراً رئيسياً في بيان أن تلك المجموعة مغلقة أم لا . كذلك سوف نجد أن للمجموعة $A \cup A'$ دوراً أساساً في بيان بنية المجموعات المغلقة .

9 . § . النقاط اللاصقة ، لصاقة مجموعة (The Closure of set)

9 . 1 تعريف :

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E , d) ، نقول عن نقطة x من E أنها نقطة لاصقة بالمجموعة A إذا وفقط إذا كانت كل كرة مفتوحة مركزها x تتقاطع مع A . ونرمز لمجموعة النقاط الاصقة بالمجموعة A بالرمز $\overline{A}$ ونسميها لصاقة A . وبالتالي نستطيع كتابة :

$$\overline{A} = \{ x \in E \mid \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \varnothing \}$$

9 . 2 . ملاحظات ونتائج وأمثلة :

١) $\forall r > 0 \ : \ B(x,r) \cap A \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow x \in \overline{A}$

$A \neq \emptyset \Rightarrow \bar{A} \neq \emptyset$

كل نقطة تراكم هي نقطة لاصقة

هامة جداً

$A' \subseteq \bar{A}$ تراكم لاصقة

$$\exists r > 0 \; ; \; B(x, r) \cap A = \emptyset \quad \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$$

أي أن النقطة x من E لا تكون نقطة لاصقة بالمجموعة الجزئية A إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها x لا تتقاطع مع A .

٢) إذا كانت $A = \emptyset$ فإن $\bar{A} = \emptyset$ لأنه لاتوجد أي نقطة لاصقة بالمجموعة $\emptyset$ ، أي مهما كانت x من E فإن كل كرة مفتوحة $B(x, r)$ تحقق $B(x, r) \cap \emptyset = \emptyset$ وبالتالي $x \notin \bar{A}$ (أي أن $\bar{\emptyset} = \emptyset$) .

إذا كانت $A \neq \emptyset$ مجموعة جزئية من E فإن $A \subseteq \bar{A}$ دوماً ، لأنه إذا كانت a نقطة من A فإن كل كرة مفتوحة مركزها a ، تتقاطع مع A بالنقطة a على الأقل ، وبالتالي $a \in \bar{A}$. ومنه ينتج $A \subseteq \bar{A}$ (و لو كانت $A = \emptyset$)

٣) لتكن $A = \{1, 2\}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي ولنوجد $\bar{A}$. من البند السابق ٢ نجد أن كل من 1 و 2 نقطة لاصقة بـ A . لنأخذ الآن x ليست من A ولنبرهن على أن $x \notin \bar{A}$. أي لنبرهن وجود كرة مفتوحة مركزها x لاتتقاطع مع A . بما أن $x \notin A$ فإن $x \neq 2$ ، $x \neq 1$ وبالتالي :

$d(x, 1) > 0, d(x, 2) > 0$ ، نأخذ العدد الحقيقي الموجب $r = \min\{d(x, 1), d(x, 2)\}$ ، عند ذلك الكرة المفتوحة $B(x, r)$ لاتتقاطع مع A ، لأنه لو فرضنا $y \in B(x, r) \cap A$ فإن

$$y \in A = \{1,2\} \wedge d(y,x) < r \Rightarrow d(1,x) < r \text{ أو } d(2,x) < r$$

وهذا تناقض لأننا اخترنا r بأنه أصغر العددين $d(1, x), d(1, y)$ إذاً $B(x, r) \cap A = \emptyset$ وبالتالي $x \notin \bar{A}$. وبالنتيجة نحصل على أن $\bar{A} = A = \{1, 2\}$.

وبتعميم ما سبق على المجموعة المنتهية $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ الجزئية من R نجد أن $\overline{A} = A$

٤) لتكن المجموعة $A =]1, 2[$ الجزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي ولنوجد $\overline{A}$.

لدينا دوماً $A \subseteq \overline{A}$. لذلك نبحث عن النقاط من المجموعة $R - A$ اللاصقة بـ A ، أي نبحث عن النقاط x من $R - A$ ، التي تحقق أن كل كرة مفتوحة مركزها x تتقاطع مع A ،لذلك نركز على أقرب النقاط لـ A مثل 2 , 1 . من الواضح أن كل كرة مفتوحة مركزها 1 هي مجال مفتوح منتصفه الواحد وبالتالي سوف يتقاطع مع A بالنقاط التي هي أكبر من الواحد . وتكون 1 لاصقة بـ A . وكذلك نجد ، بطريق مشابهة ، أن $2 \in \overline{A}$. وبالتالي نستنتج أن $\overline{A} \subseteq [a, b]$. لنبرهن على أن كل نقطة x لاتنتمي إلى $[a, b]$ ليست لاصقة بـ A . لذلك علينا إيجاد كرة مفتوحة مركزها x ولاتتقاطع مع A ، أي إيجاد عدد حقيقي $r > 0$ بحيث $B(x, r) \cap A = \varnothing$. إن r الذي نبحث عنه هو :

$$r = d(x ; [a,b]) = \inf\{ d(x,y) \mid y \in [a,b] \}$$

ومن هنا يتضح (من تعريف $\inf$) أن : $\forall y \in [a, b] \Rightarrow d(x, y) \geq r$

وبالتالي فإن $B(x, r) \cap A = \varnothing$ لأنه إذا كان y عنصراً من التقاطع فإنه ينتج أن $y \in A$ و $d(x,y) < r$ وهذا تناقض مع تعريفنا لـ r .

إذاً $B(x, r) \cap A = \varnothing$ وبالتالي كل نقطة x لاتنتمي إلى $[a, b]$ لن تكون نقطة لاصقة بـ A وبالتالي : $\overline{A} = \overline{(]a,b[)} = [a, b]$.

٥) بنفس الطريقة في (4) نبرهن على أن :

$$\overline{[a,b[} = [a,b] \ ; \ \overline{]a,b]} = [a,b] \ ; \ \overline{[a,b]} = [a,b]$$
$$\overline{[a,+\infty[} = [a,+\infty[\ ; \ \overline{]a,+\infty[} = [a,+\infty[\ ;$$
$$\overline{]-\infty,b]} =]-\infty,b] \ ; \ \overline{]-\infty,b[} =]-\infty,b]$$

9.3 . مبرهنات و نتائج و أمثلة :

1) مبرهنة (الصفة الأساسية لـ $\overline{A}$)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً و A مجموعة جزئية من E . إن $\overline{A}$ هي تقاطع كل المجموعات المغلقة الحاوية A .

أي إذا كانت $\{F_i\}_{i \in I}$ أسرة كل المجموعات المغلقة في E بحيث $A \subseteq F_i$ لكل i من I فإن $\overline{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$

البرهان :

للبرهان على الإحتواء $\overline{A} \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i$ يكفي البرهان على الإحتـــواء المكـــافئ $E - \overline{A} \subseteq E - \bigcap_{i \in I} F_i$ وبملاحظة أن $E - \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E - F_i)$ ، حسب قانون ديمورغان ، فإننا نجد :

$$\forall x \in E - \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E - F_i) \Rightarrow \exists \alpha \in I, x \in E - F_\alpha$$

وبما أن $E - F_\alpha$ مفتوحة . لأن F_α مغلقة ، فإنه حسب تعريف المجموعة المفتوحة

$$\Rightarrow \exists r > 0 ; B(x, r) \subseteq E - F_\alpha ; \alpha \in I \Rightarrow$$
$$\exists r > 0 ; B(x, r) \cap F_\alpha = \varnothing$$

(وبما أن $A \subseteq F_\alpha$ فرضاً)

$$\Rightarrow \exists r > 0 ; B(x, r) \cap A = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow x \in E - \overline{A}$$

وبالتالي نحصل على الإحتواء $E - \overline{A} \subseteq E - \bigcap_{i \in I} F_i$ ومنه يتحقق :

$$\overline{A} \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i$$

لنبرهن على الإحتواء المعاكس :

أي لنبرهن على $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq \overline{A}$ والذي يكافئ $E - \overline{A} \subseteq E - \bigcap_{i \in I} F_i$

$$\forall x \in E - \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists r > 0 ; B(x, r) \cap A = \varnothing$$
$$\Rightarrow A \subseteq E - B(x, r)$$

وبما ان $E - B(x, r)$ مغلقة (لأنها متممة الكرة المفتوحة $B(x, r)$ ، والتي هي مجموعة مفتوحة ، لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة) وتحوي A ، فإنها أحد عناصر الأسرة $\{F_i\}_{i \in I}$. وبالتالي فهي تحوي التقاطع لعناصر هذه الأسرة أي أن $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq E - B(x, r)$ وبأخذ متمم الطرفين نجد أن : $x \in B(x, r) \subseteq E - \bigcap_{i \in I} F_i$ ، وبالتالي نحصل على الإحتواء $E - \overline{A} \subseteq E - \bigcap_{i \in I} F_i$ ومنه نجد $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq \overline{A}$. ومن صحة الإحتواء وعكسه نحصل على المساواة : $\overline{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$.

2) بما ان $\overline{A}$ تساوي تقاطع كل المجموعات المغلقة الحاوية A فإن $\overline{A}$ مغلقة وتحوي A . (إن $\overline{A}$ مغلقة لأن التقاطع لأي أسرة من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة . و $\overline{A}$ تحوي A ، لأن $A \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i \subseteq \overline{A}$ أو حسب (2) من البند 2 . 8) .

3) إن $\overline{A}$ هي أصغر المجموعات المغلقة الحاوية A ، لأنها تساوي التقاطع لتلك المجموعات . وبالتالي إذا كانت B مجموعة مغلقة و $A \subseteq B$ فإن $\overline{A} \subseteq B$. وهذه نتيجة كثيرة الاستخدام .

4) **مبرهنة :**

ليكن (E, d) فضاءً مترياً ، و A مجموعة جزئية من E . عند ذلك يتحقق :

$$A \text{ مغلقة } \Leftrightarrow A = \overline{A}$$

البرهان :

($\Rightarrow$) من الواضح أنه إذا كانت $A = \overline{A}$ فإن A مغلقة لأن مساويتها $\overline{A}$ مغقلة .

($\Leftarrow$) إذا كانت A مغقلة و $A \subseteq A$ فإن $\overline{A} \subseteq A$ حسب (3) . وبما أن الإحتواء المعاكس $A \subseteq \overline{A}$ محقق دوماً حسب (3) فإننا نحصل على المساواة $A = \overline{A}$.

5) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتقطع (E , d) عند ذلك نجد أن $\overline{A} = A$ ، لأن كل مجموعة جزئية في هذا الفضاء تكون مفتوحة ومغلقة بنفس الوقت ، فهي تساوي لصاقتها من كونها مغلقة .

6) في الفضاء الحقيقي العادي المجموعة الجزئية $A =]a , b]$ ليست مغلقة ، وبالتالي فإن $\overline{A} \neq A$.ولكن أصغر مجموعة مغلقة تحوي A ، كما نعلم ، هي $[a , b]$ ، وبالتالي فإن $\overline{A} = [a , b]$.

7) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ $\qquad$ $\overline{E} = E$

8) **مبرهنة :**

ليكن (E , d) فضاءً مترياً و A , B مجموعتين جزئيتين من E عند ذلك يتحقق :

a) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

d) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$

البرهان :

a) إذا كانت x من $\overline{A}$ فإن كل كرة مفتوحة $B(x , r)$ ، مركزها x ، تتقاطع مع A وبالتالي تتقاطع مع B الحاوية A وهذا يعني أن x لاصقة بالمجموعة B ، لأن كل كرة مفتوحة مركزها x تتقاطع مع B ، إذاً $x \in \overline{B}$ ومنه $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

b) لنبرهن أولاً على الإحتواء $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \overline{A} \\ B \subseteq \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

وبما أن $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$ مجموعة مغلقة (لماذا) و تحوي $A \cup B$

فإن $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$ تحوي لصاقة $A \cup B$ ، أي أن $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ (1)

لنبرهن الآن على الإحتواء المعاكس $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد المساواة المطلوبة في b .

c) بما ان
$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \overline{A} \\ B \subseteq \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

وبما ان $\overline{A} \cap \overline{B}$ مغلقة وتحوي $(A \cap B)$

فإن $\overline{A} \cap \overline{B}$ تحوي لصاقة $A \cap B$ ، أي أن $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

d) بما ان $\overline{A}$ مغلقة فهي تساوي لصاقتها ، حسب (4) أي أن $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

4 . 9 . المجموعات الكثيفة في فضاء متري :

1) تعريف (مجموعة كثيفة Dense)

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) . نقول عن المجموعة A أنها كثيفة (dense) في الفضاء E إذا كانت $\overline{A} = E$.

2) في كل فضاء متري (E, d) يوجد على الأقل مجموعة كثيفة وهي E لأن $\overline{E} = E$ دوماً .

3) إذا كانت A مجموعة كثيفة وكانت $A \subseteq B$ فإن B تكون كثيفة أيضاً لأن :

$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$$

وبما أن A كثيفة فإن $\overline{A} = E$ ومنه $\overline{B} = E$ ، أي أن B كثيفة .

4) إذا كانت A مجموعة مغلقة في الفضاء المتري (E, d) وكانت $A \neq E$ فإن A ليست كثيفةطبعاً ، لأنه إذا كانت A مغلقة فإن $\overline{A} = A$ وبما أن $A \neq E$ فإن $\overline{A} \neq E$ وبالتالي A ليست كثيفة . من ذلك ينتج :

5) في الفضاء المتري المتقطع (E, d) كل مجموعة $A \neq E$ ليست كثيفة . وبالتالي المجموعة الكثيفة الوحيدة هي E نفسها .

6) **مبرهنة :**

ليكن (E , d) فضاءً مترياً و A مجموعة جزئية من E . عند ذلك يتحقق :

A كثيفة $\Leftrightarrow$ A تتقاطع مع كل كرة مفتوحة في E

البرهان :

($\Leftarrow$) إذا كانت A كثيفة فإن $\overline{A} = E$ ، وبالتالي فإن كل نقطة x من E تكون لاصقة بالمجموعة A ، وحسب تعريف نقطة لاصقة بمجموعة ، فإن A تتقاطع مع كل كرة مفتوحة مركزها أي نقطة x من E ، أي أن A تتقاطع مع كل كرة مفتوحة في E .

($\Rightarrow$) إذا كانت A تتقاطع مع كل كرة مفتوحة في E ، فإن العلاقة $A \cap B (x , r) \neq \varnothing$ محققة من أجل كل x من E وكل $r > 0$ ، وبالتالي فإن كل نقطة x من E تكون لاصقة بـ A أي أن

$$\forall x \in E \Rightarrow x \in \overline{A}$$

وبالتالي نحصل على الإحتواء $E \subseteq \overline{A}$ ، وبما أن الإحتواء المعاكس $\overline{A} \subseteq E$ محقق دوماً ، فإننا نحصل على المساواة $\overline{A} = E$ ، ومنه نجد أن A كثيفة .

7) مثال :

إن مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، الجزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي ، ليست كثيفة ، لأنها لا تتقاطع مع جميع الكرات المفتوحة في هذا الفضاء ، والتي هي مجالات مفتوحة محدودة لأنه مثلاً :

$$\mathbb{Z} \cap]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= \varnothing$$

5 . 9 . مبرهنات أساسية :

1) إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء متري (E , d) فإنه يتحقق :

(a $A' \subseteq \overline{A}$ و $A \cup A' = \overline{A}$

b) $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$

c) إذا كانت A مجموعة محدودة فإن $\delta(A) = \delta(\overline{A})$

برهان (a) :

إذا كانت x نقطة تراكم للمجموعة A (أي $x \in A'$) فإنه من أجل كل $r > 0$ يتحقق : $B(x,r) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ وبالتالي يتحقق $\forall\ r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. أي أن x لاصقة بالمجموعة A (أي أن $x \in \overline{A}$) . وبالتالي $A' \subseteq \overline{A}$.

للبرهان على المساواة $A \cup A' = \overline{A}$ ، نلاحظ أولاً :

$$A \subseteq \overline{A} \ \wedge \ A' \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \overline{A} \qquad (1)$$

لنبرهن على الإحتواء المعاكس :

أي لنفرض أن x لاصقة بـ A (أي $x \in \overline{A}$) . وهنا نميز حالتين :

١) إذا كانت $x \in A$ فإن $x \in A \cup A'$ ويتحقق الإحتواء المعاكس .

٢) إذا كانت $x \notin A$. فإنه من جهة $A = A - \{x\}$ ، ومن جهة أخرى بما أن x لاصقة بالمجموعة $\overline{A}$ فإن كل كرة مفتوحة $B(r,x)$ مركزها x تتقاطع مع A ، وبالتالي تتقاطع مع مساويتها $A - \{x\}$ ، وهذا يعني أن x نقطة تراكم لـ A . أي أن $x \in A'$ ومنه $x \in A' \cup A$ وبالتالي في كلتا الحالتين نحصل على أن $\overline{A} \subseteq A \cup A'$ . . . (2)

وبالنتيجة نحصل على المساواة في (a) .

برهان (b) :

($\Leftarrow$) نفرض أن $x \in \overline{A}$ ونبرهن على أن $d(x,A) = 0$

نفرض جدلاً أن $d(x,r) \neq 0$ ، أي أن $0 < d(x,A)$ ، وبالتالي يوجد عدد حقيقي r بحيث $0 < r < d(x,A)$. عند ذلك الكرة المفتوحة

$B(x,r)$ لا تتقاطع مع A ، لأنه لو كـان $B(x,r)\cap A\neq\varnothing$ ، لوجـد على الأقل عنصر y من التقاطع يحقق :

$$y\in B(x,r)\wedge y\in A\Rightarrow d(y,x)<r\wedge d(y,x)\geq d(x,A)$$

وهذا يتناقض مع كون $0<r<d(x,A)$. إذاً $B(x,r)\cap A=\varnothing$ وهـذا يعني أن x ليست لاصقة بـ A ، وهذا يتناقض مع كون $x\in\overline{A}$. إذاً الفرض بأن $d(x,A)>0$ غير صحيح إذاً $d(x,A)=0$.

$(\Rightarrow)$ نفرض أن $d(x,A)=0$ ونبرهن على أن $x\in\overline{A}$.

نفرض جدلاً أن $x\notin\overline{A}$. عندئذ توجد كرة مفتوحة $B(x,r)$ ، مركزها x بحيث $B(x,r)\cap A=\varnothing$ وبالتالي : $\forall y\in A\Rightarrow y\notin B(x,r)$. ومنه

$$\forall y\in A\Rightarrow d(y,x)\geq r$$

وهذا يعني أن r حد أدنى للمجموعـة $\{d(x,A)\ ;\ y\in A\}$ ومنـه يتحقق

$$r\leq\inf\{d(x,A)\ ;\ y\in A\}=d(x,A)$$

وبالتالي $0<r\leq d(x,A)$ ، ومنه $d(x,A)>0$ وهذا يتناقض مع الفرض بأن $d(x,A)=0$. إذاً الفرض الجدلي غير صحيح أي أن $x\in\overline{A}$.

برهان (c) :

بما أن $A\subseteq\overline{A}$ فإن $\delta(A)\leq\delta(\overline{A})$ . . . (1)

لنـــــبرهن أيضـــــاً علـــــى أن $\delta(\overline{A})\leq\delta(A)$

$$\forall x,y\in\overline{A}\Rightarrow B(x,\frac{1}{2n})\cap A\neq\varnothing\wedge B(y,\frac{1}{2n})\cap A\neq\varnothing\Rightarrow$$

$$\exists x'\in B(x,\frac{1}{2n})\cap A\wedge\exists y'\in B(y,\frac{1}{2n})\cap A\Rightarrow$$

$$d(x',x)<\frac{1}{2n}\ ;\ x'\in A\wedge d(y',x)<\frac{1}{2n}\ ;\ y'\in A\Rightarrow$$

$$d(x,y)\leq d(x,x')+d(x',y)\leq$$

$$d(x,x')+d(x',y')+d(y',y)<\frac{1}{2n}+d(x',y')+\frac{1}{2n}$$

وبما ان $x', y' \in A$ ، فإنه حسب تعريف $\delta(A)$ نجد أن

$d(x', y') \leq \delta(A)$ ، ومنه :

$$d(x,y) < \frac{1}{n} + \delta(A) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

وعندما $n \to \infty$ فإن

$$d(x,y) \leq \delta(A)$$

إذاً $\delta(A)$ حد أعلى للمجموعة $\{ d(x,y) \mid x, y \in \overline{A} \}$ وبالتالي فإن

$$\sup \{ d(x,y) \mid x, y \in \overline{A} \} \leq \delta(A) \Rightarrow \delta(\overline{A}) \leq \delta(A) \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد المساواة $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

2) نتيجة :

بما أن $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ فإنه ينتج ، بالنفي المنطقي للطرفين أن :

$d(x, A) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$ أي أن

$$0 < d(x, A) \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$$

3) مبرهنة :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) فإنه يتحقق :

١) $(E-A)^0 = E - \overline{A}$

٢) $\overline{(E-A)} = E - A^0$

البرهان : برهان (1) :

من خواص اللصاقة ، والمجموعات المغلقة و المفتوحة و التمم للإحتواء لدينا :

$$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow E - \overline{A} \subseteq E - A \Rightarrow (E - \overline{A})^0 \subseteq (E-A)^0$$
$$\Rightarrow E - \overline{A} \subseteq (E-A)^0 \ldots (1)$$

إن المجموعة $E - \overline{A}$ تساوي داخليتها لأنها مجموعة مفتوحة ، على اعتبارها متممة المغلقة $\overline{A}$.

لبرهان الإحتواء المعاكس ، لدينا :

$$(E-A)^0 \subseteq E-A \Rightarrow E-(E-A) \subseteq E-(E-A)^0 \Rightarrow$$
$$A \subseteq E-(E-A)^0$$

وبأخذ لصاقة الطرفين ، وملاحظة أن $(E-A)^0$ مفتوحة وبالتالي متممتها $E-(E-A)^0$ مغلقة . إذاً لصاقة الأخيرة تساوي نفسها ، نجد :

$$\overline{A} \subseteq E-(E-A)^0 \Rightarrow (E-A)^0 \subseteq E-\overline{A} \ldots (2)$$

من الإحتوائين (1) و (2) نحصل على المساواة المطلوبة

$$(E-A)^0 = E-\overline{A}$$

برهان (2) : بطريقة مشابهة للبند الأول نجد :

$$A^0 \subseteq A \Rightarrow E-A \subseteq E-A^0$$

وبما أن A^0 مفتوحة فإن $E-A^0$ مغلقة ، إذاً لصاقة الأخيرة تساوي نفسها .

ومنه ينتج :

$$\overline{E-A} \subseteq E-A^0 \quad \ldots (1)$$

لبرهان الإحتواء المعاكس ، لدينا :

$$E-A \subseteq \overline{E-A} \Rightarrow E-\overline{(E-A)} \subseteq A \Rightarrow$$

بأخذ داخلية الطرفين وملاحظة أن $\overline{E-A}$ مغلقة فإن متممتها $E-\overline{(E-A)}$ مفتوحة ، وبالتالي داخليتها نفسها . نجد :

$$\Rightarrow E-\overline{(E-A)} \subseteq A^0 \Rightarrow E-A^0 \subseteq \overline{E-A} \quad \ldots (2)$$

من الإحتوائين (1) و (2) نحصل على المساواة المطلوبة :

$$\overline{E-A} = E-A^0$$

§. 10 . جبهية (أو حدود) مجموعة

1 . 10 . تعريف (نقطة حدودية لمجموعة ، حدود مجموعة) :

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء متري (E , d) . نقول عن النقطة x من E أنها نقطة جبهية (أو حدودية) للمجموعة A

(Frontier piont or Boundary) إذا وفقط إذا كانت x لاصقة بالمجموعة A و لاصقة بالمتمم E – A . أي أن :

$$x \in E \text{ نقطة جبهية (حدودية) لـ } A \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{E-A}$$

نرمز لمجموعة كل النقاط الحدودية للمجموعة A بالرمز (bd (A ونسميها حدود A (boundary of A) أو جبهيـة A (frontier of A) . وبالتـالي يكون لدينا :

$$bd(A) = \overline{A} \cap \overline{X-A} \quad \ldots (1)$$

2 . 10 ملاحظات ونتائج و أمثلة :

١) $x \in bd(A) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{X-A}$

⇔ كل كرة مفتوحة مركزها x تتقاطع مع A ومع متممتها E – A .

٢) $x \notin bd(A) \Leftrightarrow$ توجد كرة مفتوحة مركزها x لا تتقاطع مـع A أو لا تتقاطع مع متممتها E – A .

⇔ x نقطة داخلية في E – A أو x نقطة داخلية في A .

$$\Leftrightarrow x \in (E-A)^0 \cup A^0$$

من ذلك ينتج التكافؤ :

$$x \in A^0 \cup (E-A)^0 \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \cap \overline{E-A}$$

٣) كفائدة من (2) يعرف البعض ، نقطة جبهية لمجموعة A ، بأنها كل نقطة من الفضاء E ، ليست داخلية في A و لا داخلية في المتمم E – A .

٤) عند الإبدال عن A بمتممتها في العلاقة $bd(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{E-A}\right)$ فإننا نجد أن :

$$bd(E-A) = \overline{E-A} \cap \overline{A} = bd(A) \Rightarrow bd(E-A) = bd(A)$$

أي أن جبهية كل مجموعة A في الفضاء المتري E يساوي جبهية متممتها $E - A$.

٥) من العلاقة (1) ينتج مباشرة أن $bd(A)$ مجموعة مغلقة دوماً .

٦) لتكن $A = \{1, 2\}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي ، ولنوجد $bd(A)$.

نعلم ان $\overline{A} = A$ في هذا الفضاء ، لأن A منتهية . لنحسب لصاقة المتممة :

$$\mathbb{R} - A = \mathbb{R} - \{1, 2\} =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$$

وبما أن لصاقة الإجتماع المنته يساوي اجتماع اللصاقات فإن :

$$\overline{\mathbb{R} - A} = \overline{]-\infty, 1[} \cup \overline{]1, 2[} \cup \overline{]2, +\infty[} =$$
$$]-\infty, 1] \cup [1, 2] \cup [2, +\infty[= \mathbb{R}$$

وبالتالي :

$$bd(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R} - A} = \{1, 2\} \cap \mathbb{R} = \{1, 2\} = A$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة على أية مجموعة منتهية $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ وجزئية من $\mathbb{R}$ فيكون $bd(A) = A$. ويمكن حساب $\overline{\mathbb{R} - A}$ بالإعتماد على المبرهنة الثانية من الفقرة (8 . 5) . كما يلي :

$$\overline{\mathbb{R} - A} = \mathbb{R} - A^0 = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R} \quad ; \quad \{1, 2\}^0 = \varnothing$$

٧) في الفضاء المتري المتقطع (E, d) ، لنوجد جبهية أية مجموعة A جزئية من E . نعلم أنه في هذا الفضاء كل مجموعة جزئية تكون مغلقة ، وبالتالي كل من $E - A$ و A مغلقة ومنه :

$\overline{A} = A$ ، $\overline{E - A} = E - A$ ومن ذلك ينتج أن :

$$bd(A) = \overline{A} \cap \overline{E - A} = A \cap (E - A) = \varnothing$$

إذاً في الفضاء المتقطع لا توجد جبهية لأية مجموعة جزئية . أي أن

$$bd(A) = \varnothing \quad \forall A \subseteq E$$

٨) **مبرهنة (خواص $bd(A)$)**

ليكن (E, d) فضاءً مترياً و A, B مجموعتين جزئيتين من E . عند ذلك يتحقق :

a) A مغلقة $\Leftrightarrow \quad bd(A) \subseteq A$

b) A مفتوحة $\Leftrightarrow \quad bd(A) \subseteq E-A$

c) $bd(A) = \overline{A} - A^0$

d) $\overline{A} = A \cup bd(A)$

e) $A^0 = A - bd(A)$

البرهان :

a) إذا كانت A مغلقة فإن $\overline{A} = A$ ، ومنه

$$bd(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} \subseteq \overline{A} = A$$

العكس : لتكن $bd(A) \subseteq A$ ، ولنبرهن على أن A مغلقة لذلك يكفي برهان أن $\overline{A} \subseteq A$ لأن $A \subseteq \overline{A}$ محقق دوماً .

نفرض جدلاً أن $\overline{A} \not\subset A$ ، وبالتالي يوجد x من $\overline{A}$ و x لاتنتمي إلى A . وبما أن $A^0 \subseteq A$ ، فإن x لا تنتمي إلى A^0 ، إذاً x تنتمي إلى المتمم $E - A^0$ ،

وبذلك نحصل على :

$$x \in \overline{A} \wedge x \in E - A^0 = \overline{E - A} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{E - A}$$
$$\Rightarrow x \in bd(A) \subseteq A \Rightarrow x \in A$$

وهذا يتناقض مع الفرض الجدلي بأن $x \notin A$. إذاً $\overline{A} \subseteq A$ ، ومنه $A = \overline{A}$ وبالتالي A مغلقة لأنها تساوي لصاقتها .

b) بما أن : A مفتوحة $\Leftrightarrow$ $E - A$ مغلقة وحسب (a) فإن ذلك يكافئ :

$$bd(E - A) \subseteq E - A$$

وبما أن $bd(E - A) = bd(A)$ فإنه يتحقق :

$bd(A) \subseteq E - A \Leftrightarrow A$ مفتوحة .

c) لدينا :

$$bd(A) = \overline{A} \cap (\overline{E - A}) = \overline{A} \cap (E - A^0) = \overline{A} - A^0$$

والمساواة الأخيرة تتحقق ببساطة لأن :

$$x \in \overline{A} \cap (E - A^0) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in E - A^0 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \notin A^0$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} - A^0$$

أما برهان كل من (d) و (e) يترك تمرين للدارس .

11 . § . نقاط خارجية ، خارجية مجموعة

11 . 1 تعريف (نقطة خارجية ، خارجية مجموعة) :

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E , d) . نقول عن النقطة x من E أنها نقطة خارجية عن المجموعة A إذا وفقط إذا كانت داخلية في المتمم $E - A$. أي أن :

$$x \in E \text{ نقطة خارجية عن } A \Leftrightarrow x \in (E - A)^0$$

نرمز لمجموعة كل النقاط الخارجية عن A بالرمز $\text{ext } A$ أو اختصاراً $e (A)$ ، ونسميها خارجية A . أي أن :

$$e (A) = (E - A)^0 \; = E \setminus \overline{A} \qquad (1)$$

11 . 2 . ملاحظات ونتائج و أمثلة :

1) بما أن $(E - A)^0 = E - \overline{A}$ فإن $e(A) = E - \overline{A}$. وبالتالي نستطيع القول أن النقاط الخارجية عن A هي وفقط هي النقاط غير اللاصقة بـ A . ومنه ينتج :

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in e (A)$$
$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin e (A)$$

2) بما أن $e (A) = (E - A)^0$ فإن الخارجية تكون مجموعة مفتوحة دوماً .

3) في الفضاء المتري الحقيقي العادي ، بما ان كل مجموعة جزئية منتهية $A = \{ a_1 , a_2 , \; . \; . \; . \; . \; , a_n \}$ تكون مغلقة فإن $A = \overline{A}$. وبالتالي :

$$e (A) = (\mathbb{R} - A)^0 = \mathbb{R} - \overline{A} = \mathbb{R} - A$$

في نفس الفضاء لحساب $e (B)$ وحيث $B =] a , b [$ فإننا نحسب أولاً $\overline{B}$ ، وهي كما نعلم $\overline{B} = [a , b]$ وبالتالي نجد :

$$e(B)=\mathbb{R}-\overline{B}=\mathbb{R}-[a,b]=]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$$

4) بما أن كل مجموعة في الفضاء المتقطع (E , d) تكون مغلقة ومفتوحة بنفس الوقت ، فإنه من أجل كل مجموعة جزئية A من E نجد :

$$e(A)=E-\overline{A}=E-A$$

أي أن خارجية كل مجموعة جزئية A في الفضاء المتري المتقطع هي متمم A .

5) مبرهنة : (خواص (e (A)

ليكن (E , d) فضاءً مترياً و A , B مجموعتين جزئيتين من E عند ذلك يتحقق :

a) $A\subseteq B \Rightarrow e(B)\subseteq e(A)$

b) $e(A)=e(\overline{A})$

c) $e(A)=e(E-e(A))$

d) $e(A\cup B)=e(A)\cap e(B)$

ولكن $e(A\cap B)\neq e(A)\cup e(B)$

البرهان : a)

$$A\subseteq B\Rightarrow E-B\subseteq E-A \Rightarrow (E-B)^0\subseteq (E-A)^0\Rightarrow e(B)\subseteq e(A)$$

b)

$$e(\overline{A})=(E-\overline{\overline{A}})^0=E-\overline{\overline{A}}=E-\overline{A}=(E-A)^0=e(A)$$

c)

$$e(A)=(E-A)^0=E-\overline{A}\Rightarrow E-e(A)=\overline{A}\Rightarrow e(E-e(A))=e(\overline{A})$$

وبما أن $e(\overline{A})=e(A)$ حسب (b) فإن :

$$e(A)=e(E-e(A))$$

d)

$$e(A\cup B)=[E-(A\cup B)]^0=[(E-A)\cap(E-A)]^0=(E-A)^0\cap(E-B)^0=e(A)\cap e(B)$$

إن $e(A \cap B) \neq e(A) \cup e(B)$ (والسبب هو $(A \cup B)^0 \neq A^0 \cup B^0$))

لنوضح ذلك بمثال في الفضاء المتري الحقيقي العادي . إذا أخذنا $B = \{a, b\}$, $A =]a, b]$ فإننا نعلم أن B مغلقة . وبالتالي $\bar{B} = B$ وأن $\bar{A} = [a, b]$. كذلك $A \cap B = \{b\}$ مغلقة وبالتالي فإن $\overline{A \cap B} = \{b\}$ في حين أن $\bar{A} \cap \bar{B} = \{a, b\}$ لنحسب أولاً $e(A \cap B)$.

$$\left.\begin{aligned} &e(A\cap B) = \mathbb{R} - \overline{(A\cap B)} = \mathbb{R} - \{b\} \\ &e(A) \cup e(B) = (\mathbb{R} - \bar{A}) \cup (\mathbb{R} - \bar{B}) \\ &= \mathbb{R} - (\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{R} - \{a, b\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$e(A\cap B) \neq e(A) \cup e(B)$$

12 . § . النقاط المنعزلة

12 . 1 تعريف (نقطة منعزلة) :

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) . نقول عن النقطة x من A أنها منعزلة isolate إذا وجدت كرة مفتوحة $B(x, r)$ مركزها x بحيث $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

نرمز لمجموعة كل النقاط المنعزلة من A بالرمز $Is(A)$ ، ويكون

$$Is(A) = \{ x \in A \mid \exists r > 0 \;;\; B(x\,;\, r) \cap A = \{x\} \}$$

12 . 2 ملاحظات ونتائج وأمثلة :

١) $x \in Is(A) \Leftrightarrow \exists r > 0 \;;\; B(x, r) \cap A = \{x\}$

$x \notin Is(A) \Leftrightarrow$ إما $x \notin A$

أو $x \in A$ و $\forall r > 0 : B(x, r) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

وبالتالي نستطيع أن نكتب :

$x \notin Is(A) \Leftrightarrow$ إما $x \notin A$ أو $x \in A \cap A'$

٢) من البند السابق نلاحظ أن نقاط كل مجموعة جزئية A تنقسم إلى قسمين ، إما نقاط منعزلة أو نقاط تراكم . أي أن

$$Is(A) \cap A' = \emptyset \quad و \quad A \subseteq A' \cup Is(A)$$

٣) على الرغم من أن $A \subseteq A' \cup Is(A)$ ، إلا أن المساواة ليست صحيحة دوماً وهذا واضح لأنه توجد نقاط تراكم لـ A لاتنتمي إلى A ، أي أن $A' \not\subset A$.

٤) نعلم أن المجموعة $A=\{1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$ الجزئية من R . لها نقطة تراكم وحيدة الصفر ، في الفضاء الحقيقي العادي ، و هي لا تنتمي إلى A . وكل نقطة من A تكون نقطة منعزلة في A ، لأنه من أجل كل نقطة

$\frac{1}{n}$ من A ، وحيث n عدد صحيح موجب فإن $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$.ويكون لدينا المجال المفتوح $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ الذي يتقاطع مع A فقط بالنقطة $\frac{1}{n}$.

٥) كل نقطة من نقاط Z تكون نقطة منعزلة في الفضاء المتري الحقيقي العادي وبالتالي تكون $IS(Z) = Z$

3 . 12 . مبرهنة ونتائج :

1) مبرهنة :

a) بين كل عددين حقيقين و مختلفين يوجد عدد نسبي .

b) إن مجموعة الأعداد النسبية (القابلة للعد) تكون كثيفة في الفضاء المتري الحقيقي العادي .

البرهان :

a) لنفرض أن $a < b$ عددين حقيقين ومختلفين ، ولنبرهن على وجود عدد نسبي q بحيث $a < q < b$ أي لنبرهن على أن $Q \cap]a,b[\neq \emptyset$

وهنا نميز حالات ثلاث :

الحالة الأولى :

إذا كان $a < 0 < b$ فإن العدد النسبي $q = 0$ يحقق المطلوب (أي أن $(0 \in \mathbb{Q} \cap]a, b[$

الحالة الثانية :

$0 \le a < b$ في هذه الحالة نجد أن $0 < b - a$ ومنه $0 < \frac{b-a}{2}$

وبالتالي حسب ملاحظة سابقة يوجد عدد طبيعي m بحيث $0 < \frac{1}{m} < \frac{b-a}{2}$

لنشكل متتالية حدها العام $u_n = \frac{n}{m}$ وحيث m عدد طبيعي مثبت . أي أن :

$$\{u_n\} = \{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots\}$$

هذه المتتالية تحقق :

$$0 < u_1 = \frac{1}{m} < \frac{b-a}{2} < b - a \le b$$

وهي متتالية متزايدة ومحدودة من الأسفل ولكنها غير محدودة من الأعلـــى . ولـــذلك يوجد بعض من حدودها تكون أكبر من b لنرمز بـــ u_{n_0} لأصغر حد يحقق $b \le u_{n_0}$ ، وبالتالي فإن الحد الذي يسبقه u_{n_0-1} يحقق $u_{n_0-1} < b$ ، فإذا برهنا أن $a < u_{n_0-1}$ فإن هذا العدد النسبي u_{n_0-1} يكون هو العدد المنشود .

لبرهان ذلك نفرض جدلاً أن $u_{n_0-1} \le a$. وبضرب الطرفين بـــ (-1) نجد :

$$-a \le -u_{n_0-1}$$

ثم بإضافة العدد b للطرفين نجد :

$$b - a \le b - u_{n_0-1} \le u_{n_0} - u_{n_0-1} = \frac{n_0}{m} - \frac{n_{0-1}}{m} = \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b - a \le \frac{1}{m} < \frac{b-a}{2}$$

بالقسمة على $b - a \neq 0$ نجد : $1 < \frac{1}{2}$ وهذا غير صحيح . إذاً الفرض الجدلي ليس صحيحاً . إذاً $u_{n_0 - 1} < a$ ، وبالنتيجة نحصل على أن :

$$a < u_{n_0-1} = \frac{n_{0-1}}{m} < b$$

وهكذا نجد أن العدد النسبي $q = \frac{n_{0-1}}{m}$ يقع بين العددين a , b . أي أن

$$Q \cap]a, b[\neq \varnothing$$

الحالة الثالثة :

إذا كان $a < b \leq 0$ فإن $0 \leq -b < -a$. وحسب الحالة الثانية فإنه يوجد عدد نسبي q بحيث $-b < q < -a$ ، ومنه $a < -q < b$. أي أن

$$Q \cap]a, b[\neq \varnothing$$

b) نشير أولاً إلى أن مجموعة الأعداد النسبية Q قابلة للعد ، وذلك حسبما ورد في البند d من المبرهنة (5 . 6) من الفصل الأول . ولبرهان أن Q كثيفة في R . يكفي أن نبرهن ، حسب المبرهنة (6) من البند (8 . 4) ، أن Q تتقاطع مع كل كرة مفتوحة في R ، وبما أن كل كرة مفتوحة في الفضاء المتري العادي R هي مجال مفتوح من الشكل $]a, b[$ وحيث $a < b$ فإنه علينا أن نبرهن على أن $]a, b[\cap Q \neq \varnothing$ ، وهذا ما فعلناه في (a) .

2) نتيجة (1) :

مما تقدم نجد أن الفضاء المتري الحقيقي العادي يحوي مجموعة Q كثيفة وقابلة للعد ، وهذه النتيجة هامة للفقرة التالية

3) نتيجة (2) :

إن المجموعة $Q^2 = \{(a, b) \in R^2 | a, b \in Q\}$ الجزئية من الفضاء الإقليدي R^2 تكون كثيفة فيه ، وهي قابلة للعد . (علل ذلك) .

في حين أن المجموعة $A = \{(a,a) \in R^2 | a \in Q\}$ ليست كثيفة في الفضاء الإقليدي R^2 (لماذا ؟)

§ 13 . الفضاءات المنفصلة :

13 . 1 . تعريف (فضاء منفصل)

نقول عن فضاء متري (E , d) أنه منفصل إذا كان يملك مجموعة كثيفة وقابلة للعد .

13 . 2 . ملاحظات و أمثلة :

١) الفضاء المتري الحقيقي العادي هو فضاء منفصل لأنه يملك مجموعة الأعداد النسبية Q القابلة للعد والكثيفة كما وجدنا في الفقرة السابقة .

٢) كذلك وجدناه في الفقرة السابقة ، أن Q^2 كثيفة في الفضاء الإقليدي R^2 ، وهي قابلة للعد لأنها تمثل مجموعة الضرب الديكارتي لمجموعتين قابلتين للعد . وبالتالي فإن الفضاء الأقليدي R^2 يكون فضاءً منفصلاً .

وبشكل أعم Q^n كثيفة وقابلة للعد في الفضاء الإقليدي R^n ، وبالتالي فهو فضاء منفصل .

٣) إذا كان (E , d) فضاءً مترياً وكانت E قابلة للعد ، فإن هذا الفضاء يكون منفصلاً ، لأن فيه E نفسها كثيفة وقابلة للعد .

13 . 3 . مبرهنة (خاصة الفصل لهاوسدورف)

ليكن (E , d) فضاءً مترياً ، من أجل كل نقطتين مختلفتين a , b من هذا الفضاء ، توجد مجموعتان متوحتان G_a , G_b بحيث :

$$a \in G_a \text{ وَ } b \in G_b \text{ وَ } G_a \cap G_b = \varnothing$$

البرهان :

بما أن $a \neq b$ فإن $r = d(a,b) > 0$ ، عند ذلك الكرتين المفتوحتين :

$B(a\,;\,r/2)\ ,\ B(b\,;\,r/2)$ ، وهما مجموعتان مفتوحتان ، تحققان المطلوب لأن

$$a \in B(a\,;\,r/2)\ ,\ b \in B(b\,;\,r/2)\ ,\ B(a\,;\,r/2) \cap B(b\,;\,r/2) = \varnothing$$

لنبرهن على أن الكرتين غير متقاطعتين لذلك نفرض جدلاً وجود نقطة x في كل منهما ونبرهن على وجود تناقض :

$$x \in B(a\,;\,r/2) \cap B(b\,;\,r/2) \Rightarrow d(x,a) < r/2 \wedge d(x,b) < r/2$$

لدينا :

$$d(a,b) \le d(a,x) + d(x,b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Rightarrow d(a,b) < r$$

وهذا تناقض مع كون $r = d(a,b)$ ، وبالتالي الفرض الجدلي غير صحيح ، إذاً الكرتان غير متقاطعتين ويتحقق المطلوب .

13 . 4 . مبرهنة :

لتكن F مجموعة مغلقة في الفضاء المتري (E,d) ولتكن x نقطة من E بحيث $x \notin F$. عند ذلك :

توجد مجموعتان مفتوحتان G_x , G_F بحيث يتحقق :

$$x \in G_x \wedge F \subseteq G_F \wedge G_x \cap G_F = \varnothing$$

البرهان :

بما أن F مغلقة فإن $F = \overline{F}$ ، وبما أن $x \notin F$ فإن $x \notin \overline{F}$ ، وبالتالي حسب النتيجة (2) من البند (8 . 5) نجد أن $r = d(x,F) > 0$.

إن المجموعتين المفتوحتين : $B(x\,;\,r/2) \wedge E - \overline{B}(x\,;\,r/2) = A$ تحققان

١) $x \in B(x\,;\,r/2)$ (لأن كل كرة مفتوحة تحوي مركزها)

٢) $F \subseteq E - \overline{B}(x\,;\,r/2)$. لأنه بالإعتماد على تعريف بعد نقطة عن مجموعة ، يكون لدينا :

$$d(x,F) \le d(x,y) \forall y \in F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\forall y \in F \Rightarrow d(y,x) \ge d(x,F) = r > \frac{r}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall y \in F : d(y,x) > r/2$$

$$\Rightarrow y \notin \overline{B}(x\,;\tfrac{r}{2}) \Rightarrow y \in E - \overline{B}(x\,;\tfrac{r}{2}) \Rightarrow F \subseteq E - \overline{B}(x\,;\tfrac{r}{2})$$

٣) $B(x\,;r/2) \cap \left[E - \overline{B}(x\,;r/2)\right] = \varnothing$ ، لأنه لو فرضنا جدلاً

وجود عنصر y من التقاطع لكان :

$$y \in B(x\,;r/2) \cap \left[E - \overline{B}(x\,;r/2)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \in B(x\,;r/2) \wedge y \notin \overline{B}(x\,;r/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(y,x) < \tfrac{r}{2} \wedge d(y,x) > r/2$$

وهذا غير ممكن ، إذاً الفرض الجدلي غير صحيح ، وبالتالي التقاطع $\varnothing$

13 . 5 . مبرهنة :

الفضاء المتري (E,d) يكون منفصلاً $\Leftrightarrow$ (E,d) يحقق خاصة العد الثانية .

البرهان :

($\Rightarrow$) نفرض ان الفضاء E يحقق خاصة العد الثانية، ونبرهن على أنه منفصل .

بما أن E يحقق خاصة العد الثانية فإنه يملك أساساً قابلاً للعد وليكن :

$$B = \{ B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \}$$

ولنشكل المجموعة A الجزئية من E كما يلي :

$$A = \{ x_n \mid x_n \in B_n \quad \forall n = 1, 2, \ldots \}$$

أي أننا نختار من كل مجموعة B_i عنصراً x_i ، وبذلك نكون قد عرفنا تطبيقاً غامراً من $\mathbb{N}$ في A (لأنه إذا كان $i \neq j$ فإنه قد يتساوى العنصران (x_i , x_j) وبالتالي فإن $|A| \le |\mathbb{N}|$.

إذاً A مجموعة قابلة للعد وهي تحقق $\overline{A} = E$ ، لأنه من أجل كل مجموعة مفتوحة

$G \neq \varnothing$ فإن $G = \bigcup_{i\in I} B_{n_i}$ وحيث $B_{n_i} \in B$ ويتحقق $x_{n_i} \in B_{n_i} \cap A$

وبما أن $B_{n_i} \subseteq G$ فإن $x_{n_i} \in G \cap A$ أي أن $G \cap A \neq \varnothing$. وبالتالي فإن A كثيفة في E ، إذاً أصبحت A قابلة للعد وكثيفة في E وبالتالي E منفصل .

($\Leftarrow$) نفرض أن E منفصل ، ونبرهن على أنه يحقق خاصة العد الثانية .

بما أن E فضاء منفصل فإنه يملك مجموعة كثيفة وقابلة للعد ولتكن A . من اجل كل عنصر a من A لنعرف الأسرة التالية من الكرات المفتوحة $B_a = \{ B(a, q) \mid q \in \mathbb{Q}^+ \}$ والتي تكون قابلة للعد لأنها تقابل $\mathbb{Q}^+$ القابلة للعد . إن الاجتماع $B = \bigcup_{a\in A} B_a$ يكون مجموعة قابلة للعد لأنها اجتماع قابل للعد لمجموعات كل منها قابل للعد . لنبرهن على أن الأسرة B (والتي عناصرها كرات مفتوحة) تشكل أساساً للفضاء E .

أولاً : بما ان عناصر B كرات مفتوحة ، والكرات المفتوحة هي مجموعات مفتوحة ، فإن عناصر B مجموعات مفتوحة .

ثانياً : لنبرهن على أن كل مجموعة مفتوحة و غيرخالية G في الفضاء المتري E ، هي احتماع لعناصر من B .

بما ان G مفتوحة فإن كل نقطة منها x تكون مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في G . أي أن

$$\forall x \in G \ , \exists\ r > 0 \ ; B(x, r) \subseteq G$$

بما ان $r > 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث $0 < \frac{1}{m} < r$ (وقد برهنا ذلك سابقاً) لنأخذ $q = \frac{1}{2m}$ (الذي من أجله $0 < q = \frac{1}{2m} < \frac{1}{m} < r$) ، عندئذٍ الكرة المفتوحة $B(x, q)$ ، والتي هي مجموعة مفتوحة ، تتقاطع مع A الكثيفة ، أي أن $B(x, q) \cap A \neq \varnothing$.

وبالتالي يوجد عنصر a من التقاطع $B(x, q) \cap A$ ، لنبرهن على أنه يتحقق :

$$x \in B(a,q) \subseteq B(x,r) \subseteq G$$

لنبرهن أولاً أن $x \in B(a,q)$ ، والذي ينتج مباشرة بملاحظة أن :

$$a \in B(x,q) \Rightarrow d(x,a) < q \Rightarrow x \in B(a,q)$$

ولنبرهن ثانياً أن $B(a,q) \subseteq B(x,r)$.

$$\forall\ z \in B(a,q) \Rightarrow d(z,a) < q$$

ولدينا :

$$d(z,x) \leq d(z,a) + d(a,x) < q + q = 2q = \frac{1}{m} < r$$
$$\Rightarrow z \in B(x,r)$$

أصبح لدينا :

$$\forall\ x \in G \Rightarrow x \in B(a,q) \subseteq B(x,r) \subseteq G$$

ومنه نجد
$$\forall\ x \in G \Rightarrow \{x\} \subseteq B(a,q) \subseteq B(x,r) \subseteq G$$

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in G} B(a,q) \subseteq \bigcup_{x \in G} B(x;r) \subseteq G$$

وهكذا نحصل على المساواة :

$$G = \bigcup_{x \in G} B(a,q) = \bigcup_{x \in G} B(x,r)$$

أي أن G تساوي اجتماعاً لعناصر من B .(لأن كل كرة $B(a,q)$ عنصر من B حيث a من A و q من Q^+)

14 . § الفضاءات الجزئية (Subspases)

14 . 1 . تعريف (فضاء متري جزئي)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً و A مجموعة جزئية غير خالية من E . إن مقصور تابع المسافة d على المجموعة الجزئية A ، الذي نرمز له بالرمز d_A يحقق جميع شروط تابع المسافة ، وبالتالي ينتج دوماً فضاء متري (A, d_A) نسميه فضاءً مترياً جزئياً من الفضاء المتري (E, d) ، ونسمي المسافة d_A بالمسافة النسبية في A (relative distance of A) ، ونرمز لها بالرمز d بدلاً من d_A .

14 . 2 . ملاحظات وأمثلة :

١) إن المقصور $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ يعطى ، كما هو معروف ، بالمساواة

$$d_A(x,y) = d(x,y) \qquad , \quad \forall (x,y) \in A \times A$$

وهذا يبرر الرمز له بـ d بدلاً من d_A .

٢) إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري (E, d) ، فإن (A, d) يكون دوماً فضاءً مترياً جزئياً من الفضاء المتري (E, d) .

أي أن كل مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري تكون فضاءً مترياً جزئياً بالنسبة لنفس المسافة d .

٣) ملاحظة :

إذا كان (E, d) فضاءً مترياً و A مجموعة جزئية غير خالية من E ، فإنه يكون لدينا فضائين متريين الفضاء الأصلي (E, d) ، والفضاء الجزئي منه (A, d) ، فإذا كانت B مجموعة جزئية من المجموعة A ، فإنها تكون جزئية من E أيضاً ، وإذا كانت a نقطة من A فإنها تكون نقطة من E أيضاً ، وبالتالي عندما نتكلم عن صفات المجموعة الجزئية B ، مثل مفتوحة ، مغلقة ، اللصاقة ، والمشتقة والخ . . . ، فإنه يجب أن نحدد بعناية في أي فضاء من الفضائين نتكلم ، مثلاً A تكون مفتوحة ومغلقة دوماً في الفضاء الجزئي (A, d) ، ولكنها ليست بالضرورة مفتوحة أو مغلقة في الفضاء الأصلي (E, d) . كذلك عندما نتكلم عن كرة مفتوحة أو مغلقة أو سطح كرة ، مركزها a ، فإنه يجب أن نحدد بعناية في أي فضاء من الفضائين نتكلم . ولتمييز ذلك سوف نرمز للكرة المفتوحة ، الكرة المغلقة ، وسطح الكرة ، التي مركزها a ونصف قطرها r في الفضاء الأصلي (E, d) بالرمز : $B_E(a, r)$, $\overline{B}_E(a, r)$, $S_E(a, r)$ ، وأحياناً بدون وضع E ، وبالمقابل نرمز لهذه المفاهيم في الفضاء الجزئي (A, d) بالرمز :

$B_A(a, r)$, $\overline{B}_A(a, r)$, $S_A(a, r)$ على الترتيب

وكذلك سوف نرمز لداخلية ، لصاقة ، مشتقة ، خارجية ، جبهية B الجزئية من A ، في الفضاء الأصلي (E, d) بالرموز :

$$bd_E(B)\ ,\ e_E(B)\ , B'_E\ ,\ \overline{B}_E\ ,\ \overset{\circ}{B}_E$$

وفي الفضاء الجزئي (A, d) بالرموز :

$$bd_A(B)\ ,\ e_A(B)\ ,\ B'_A\ ,\ \overline{B}_A\ ,\ \overset{\circ}{B}_A$$

إن لكل من المفاهيم السابقة في الفضاء الأصلي وفي الفضاء الجزئي علاقة تربط بينهما كما سنجد في مبرهنة لاحقة . والتي نمهد لها ببعض الأمثلة :

٤) لتكن $A =]-1, 2]$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي $\mathbb{R}$. إن $a = 0$ نقطة من A ، وبالطبع هي نقطة من $\mathbb{R}$. نعلم أن الكرة المفتوحة $B(0 , 1)$ في الفضاء الأصلي $\mathbb{R}$ هي المجال المفتوح $]-1, 1[$ ، وأن الكرة المغلقة $B(0 , r)$ فيه هي المجال المغلق $[-1, 1]$ ، وأن سطح الكرة $S(0 , 1)$ في $\mathbb{R}$ هي المجموعة المؤلفة من النقطتين $\{-1, 1\}$. لنوجد نفس هذه الكرات المفتوحة و المغلقة ، وسطح الكرة في الفضاء الجزئي (A , d) وحيث d هو نفس تابع المسافة في $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} B_A(0 , 1) &= \{x \in A \mid d(x,0)<1\} = \{x \in]-1,2] \mid |x|<1\} = \\ &= \{x \in]-1,2] \mid -1 < x < 1\} = \\ &=]-1,2] \cap]-1,1[= A \cap B_{\mathbb{R}}(0 , 1) =]-1,1[\end{aligned}$$

ونلاحظ هنا أن الكرة المفتوحة $B(0 , 1)$ هي نفسها في الفضاء الأصلي $\mathbb{R}$ وفي الفضاء الجزئي A .

(احسب $B_A(0 , 2)$ وتحقق أنها تختلف عن نفس الكرة المفتوحة في الفضاء الأصلي $\mathbb{R}$) .

من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} \overline{B}_A(0 , 1) &= \{x \in A \mid d(x,0)\le 1\} = \{x \in A \mid |x|\le 1\} = \\ &= \{x \in A \mid |x|\le 1\} = \{x \in A \mid -1 \le x \le 1\} = \\ &= A \cap [-1,1] = A \cap B_{\mathbb{R}}(0 , 1) =]-1,1] \end{aligned}$$

ونلاحظ هنا أن الكرة المغلقة $\overline{B}_A(0 , 1)$ في الفضاء الجزئي A تختلف عن نفس الكرة في الفضاء الأصلي $\mathbb{R}$.

وأخيراً لدينا :

$$S_A(0 , 1) = \{x \in A \mid d(x,0)=1\} = \{x \in]-1,2] \mid |x|=1\} =$$
$$= \{x \in]-1,2] \mid x = \pm 1\} =$$
$$=]-1,2] \cap \{-1,+1\} = A \cap S_{\mathbb{R}}(0 , 1) = \{1\}$$

نلاحظ هنا أيضاً أن $S_A(0 , 1) \neq A \cap S_{\mathbb{R}}(0 , 1)$. على الرغم من ذلك

نلاحظ في الحالات الثلاثة تحقق :

$$B_A(0 , 1) = A \cap B_{\mathbb{R}}(0 , 1) \ ;$$
$$\overline{B}_A(0 , 1) = A \cap \overline{B}_{\mathbb{R}}(0 , 1) \ ;$$
$$S_A(0 , 1) = A \cap S_{\mathbb{R}}(0 , 1)$$

وسوف نجد أن هذه العلاقات صحيحة دوماً في الفضاءات المترية والفضاءات الجزئية منها. بما أن شكل الكرات المفتوحة ، والكرات المغلقة ، وسطح الكرات في الفضاءات الجزئية يتغير عما هو في الفضاءات المترية الأصلية ، فمن الطبيعي أن تتغير أشكال كل المفاهيم المتعلقة بذلك من داخلية ، لصاقة ، مشتقة ، . . . ، في الفضاءات الأصلية .

فمثلاً المجال $]-1 , 1]$ يمثل الكرة المغلقة $\overline{B}_A(0 ; 1)$ في الفضاء الجزئي A ، وبالتالي فإنه يكون مجموعة مغلقة فيه ، في حين أن نفس المجال لن يكون مجموعة مغلقة (ولامفتوحة) في الفضاء الأصلي $\mathbb{R}$.

3 . 14 . مبرهنة (علاقات بين نفس المفاهيم في فضاء متري وفضاء جزئي منه)

إذا كان (E , d) فضاءً مترياً و A مجموعة جزئية غير خالية من E ،

وإذا كانت B مجموعة جزئية من A ، و a عنصراً من A عند ذلك يتحقق :

(1) $B_A(a\,,r) = A \cap B(a\,,r)$ حيث $B(a\,,r)$ ترمز للكــرة المفتوحة في الفضاء المتري الأصلي $(E\,,d)$.

(2) $B \subseteq A$ مفتوحة في الفضاء الجزئي $(A\,,d)$ $\Leftrightarrow$ توجــد مجموعــة مفتوحة G في الفضاء $(E\,,d)$ بحيث $B = A \cap G$

(3) $B \subseteq A$ مغلقة في الفضاء الجزئي $(A\,,d)$ $\Leftrightarrow$ توجد مجموعة مغلقة F في الفضاء $(E\,,d)$ بحيث $B = A \cap F$

(4) $u \subseteq A$ مجاورة للنقطة a في الفضاء الجزئي $(A\,,d) \Leftrightarrow u = A \cap v$ وحيث v مجاورة لــ a في $(E\,,d)$

(5) إذا كانت x نقطة من A وكانت $B = \{B_i\}_{i \in I}$ أساساً لمجاورات x في الفضاء الأصلي E فإن الأسرة $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ تكون أساساً لمجــاورات x في الفضاء الجزئي A .

(6) إذا كانت $B = \{B_i\}_{i \in I}$ أساساً للفضاء الأصلي $(E\,,d)$ فإن الأســرة $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ تكون أساساً للفضاء الجزئي A .

البرهان (1) :

لدينا :

$$A \cap B(a,r) = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B(a,r)\}$$
$$= \{x \in A \mid d(x,a) < r\} = B_A(a,r)$$

(2) ($\Leftarrow$) إذا كانت B مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي A فإنه يتحقق :

$$\forall\ b \in B : \exists\ r_b > 0\ ;\ B_A(b\,,r_b) \subseteq B$$

وبما انه حسب (1) $B_A(b\,,r_b) = A \cap B_E(b\,,r_b)$ فإننا نجد :

$$\forall\ b \in B : \exists\ r_b > 0\ ;\ A \cap B_E(b\,,r_b) \subseteq B$$

وبالتالي من أجل كل عنصر b من B يوجد عدد حقيقي $0 < r_b$ بحيث :

$$b \in A \cap B_E(b\,,r_b) \subseteq B \Rightarrow$$
$$\{b\} \subseteq A \cap B_E(b\,,r_b) \subseteq B \Rightarrow$$
$$\bigcup_{b \in B} \{b\} \subseteq \bigcup_{b \in B} (A \cap B_E(b\,,r_b)) \subseteq B \Rightarrow$$

$$B \subseteq A \cap \bigcup_{b \in B} B_E(b, r_b) \subseteq B \Rightarrow A \cap [\bigcup_{b \in B} B_E(b, r_b)] = B$$

إذاً توجد $G = \bigcup_{b \in B} B_E(b, r_b)$. مفتوحة في E ، لأنها اجتماع لمجموعات مفتوحة ، (حيث كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة) تحقق : $A \cap G = B$

($\Rightarrow$) لتكن $B = A \cap G$ حيث G ، مفتوحة في E ولنبرهن على أن B مفتوحة في الفضاء الجزئي A .

$$\forall \; b \in B = A \cap G \Rightarrow b \in A \;\; \wedge \;\; b \in G$$

وبما أن G مفتوحة في E و b عنصر منها فإنه يوجد عدد حقيقي $0 < r_b$ بحيث :

$$B_E(b, r_b) \subseteq G$$

وبأخذ التقاطع للمجموعة A مع كل من طرفي الإحتواء (و ملاحظة أن $A \cap B_E(b, r_b) \neq \varnothing$ ، لأن b عنصر في كل منهما) نجد :

$$b \in A \cap B_E(b, r_b) \subseteq A \cap G = B$$

وبما أن $A \cap B_E(b, r_b) = B_A(b, r_b)$. حسب (1) فإننا نحصل على ما يلي :

$$\forall \; b \in B \;\; \exists \; r_b > 0 \; ; \; B_A(b, r_b) \subseteq B$$

أي أن B مفتوحة في A ، لأن كل نقطة b من B ، تكون مركزاً لكرة مفتوحة في A ومحتواة في B .

(3) $B \subseteq A$ مغلقة في $A \Leftrightarrow A - B$ مفتوحة في $A \Leftrightarrow$ توجد مجموعة G مفتوحة في E بحيث $A - B = A \cap G \Leftrightarrow$ توجد مجموعة $(E - G)$ مغلقة في E بحيث $B = A \cap (E - G)$.

إن التكافؤ الأخير ينتج كما يلي : بأخذ التمم في A للمساواة $A - B = A \cap G$ نحصل على التكافؤ .

$$A - B = A \cap G \Leftrightarrow B = A - (A \cap G)$$

وبما أن $A - (A \cap G) = A \cap (E - G)$ (تحقق من ذلك) فإننا نحصل

على التكافؤ .

$$A - B = A \cap G \Leftrightarrow B = A \cap (E - G)$$

(4)

($\Rightarrow$) لدينا من الفرض $u = A \cap v$ وحيث v محاورة لـ a في E . وبالتالي (حسب تعريف محاورة) توجد مجموعة مفتوحة G في E بحيث $a \in G \subseteq v$. وحسب البند (2) من المبرهنة فإن $G \cap A$ مجموعة مفتوحة في A ويتحقق : $a \in G \cap A \subseteq v \cap A = u$

وهذا يعني أن u محاورة للنقطة a في A .

وبالعكس ($\Leftarrow$) إذا كانت u محاورة للنقطة a في A ، فإنه يطلب البرهان على وجود محاورة v للنقطة a في E بحيث $u = A \cap v$.

بما أن u محاورة للنقطة a في A فإنه توجد مجموعة مفتوحة C في A بحيث :

$a \in C \subseteq u$ وحسب (2) فإنه توجد مجموعة مفتوحة G في E بحيث $C = G \cap A$ ومنه نجد :

$$a \in G \cap A \subseteq u \qquad (1)$$

بما أن $G \cap A \subseteq u \subseteq A$ فإننا ندعي تحقق : $(G \cup u) \cap A = u$ (2) .

لنبرهن على ذلك .

إن الإحتواء ($\supseteq$) واضح لأن $u \subseteq A$ و $u \subseteq G \cup u$ وبالتالي :

$$u \subseteq (G \cup u) \cap A$$

لبرهان الإحتواء المعاكس $\subseteq$ ، لدينا :

$$\begin{gathered} \forall x \in (G \cup u) \cap A \Rightarrow x \in (G \cup u) \wedge x \in A \Rightarrow \\ (x \in G \vee x \in u) \wedge x \in A \Rightarrow \\ (x \in G \wedge x \in A) \vee (x \in u \wedge x \in A) \Rightarrow \\ x \in G \cap A \subseteq u \vee x \in u \cap A = u \Rightarrow x \in u \end{gathered}$$

وبالتالي تتحقق المساواة (2) .

الآن نفرض أن $v = u \cup G$ والتي من جهة أولى تحقق $v \subseteq G \ni a$ أي أن v مجاورة لـ a في E ومن جهة ثانية (حسب (2)) $u = A \cap V$. وهو المطلوب .

(5) لبرهان أن $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ أساس لمجاورات x في الفضاء الجزئي A . نلاحظ (حسب (4))

أولاً : أن كل عنصر من عناصرها $B_i \cap A$ مجاورة لـ x في A . و ثانياً من أجل أي مجاورة u للنقطة x في الفضاء الجزئي A ، توجد مجاورة v لـ x في الفضاء الأصلي E بحيث $u = A \cap V$. وبما أن $\{B_i\}_{i \in I}$ أساس لمجاورات x في E ، و V مجاورة لـ x في E ، فإن V تحوي عنصراً من الأساس وليكن B_α . وبالتالي يتحقق $x \in B_\alpha \subseteq V$ ومنه نحصل على أن :

$$x \in B_\alpha \cap A \subseteq V \cap A = u$$

وهذا يعني أن المجاورة u لـ x في A حوت العنصر $B_\alpha \cap A$ من الأسرة $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ وهذا يبرهن على أن الأسرة $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ أساس لمجاورات x في الفضاء الجزئي A .

(6) بما أن $\{ B_i \}$ أساس للفضاء E فإن العناصر B_i تكون مجموعات مفتوحة في الفضاء الأصلي E ، وبالتالي حسب (2) فإن $B_i \cap A$ مجموعة مفتوحة في A . وبالتالي عناصر الأسرة $B' = \{B_i \cap A\}$ ، مجموعات مفتوحة في الفضاء الجزئي A ، ولكي تكون أساساً له يجب أن تكتب كل مجموعة مفتوحة H في A بشكل اجتماع لعناصر من B' . بما أن H مجموعة مفتوحة في A . فإنه توجد مجموعة مفتوحة G في E بحيث $H = A \cap G$. وبما أن $\{B_i\}_{i \in I}$ أساساً للفضاء E فإن G تساوي اجتماعاً لعناصر من B ولتكن $G = \bigcup_{i \in I} B_{\alpha_i}$. ومنه فإن $H = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i \in I} \left(A \cap B_{\alpha_i}\right)$. وبما أن $A \cap B_{\alpha_i}$ عناصر من B' و H تساوي اجتماع هذه العناصر فإنه يتحقق المطلوب .

14 . 4 . نتائج :

a) بما ان كل مجموعة مفتوحة B في الفضاء المتري A ، الجزئي من الفضاء المتري E تكتب بالشكل $B = A \cap G$ ، وحيث G مجموعة مفتوحة في E فإنه في الحالة الخاصة ، إذا كانت A مفتوحة في E فإن B تتكون من تقاطع مفتوحتين من E ، وبالتالي تكون B مفتوحة في E ، أي أنه إذا كانت $B \subseteq A \subseteq (E, d)$ فإنه إذا كانت B مفتوحة في الفضاء الجزئي A ، وكانت A مفتوحة في الفضاء الأصلي E ، فإن B تكون مفتوحة في الفضاء E .

b) بنفس المناقشة في (a) ، وإذا كانت $B \subseteq A \subseteq (E, d)$ فإنه يتحقق إذا كانت B مغلقة الفضاء الجزئي A ، وكانت A مغلقة في الفضاء الأصلي E ، فإن B تكون مغلقة في الفضاء E .

c) إذا كانت $x \in A \subseteq (E, d)$ ، وإذا كانت u مجاورة للنقطة x في A فإنه حسب (4) $u = v \cap A$ وحيث v مجاورة لـ x في E فإذا كانت A في الحالة الخاصة مجاورة لـ x في E فإن u تتكون من تقاطع مجاورتين لـ x في E وبالتالي تكون u مجاورة لـ x في E ونلخص ما تقدم بقولنا : إذا كانت $x \in A \subseteq (E, d)$ فإنه يتحقق :

إذا كانت u مجاورة لـ x في الفضاء الجزئي A وكانت A مجاورة للنقطة x في الفضاء الأصلي E فإن u تكون مجاورة لـ x في الفضاء E .

14 . 5 . مبرهنة : (تتمة في العلاقات)

ليكن (E, d) فضاءً مترياً و A مجموعة جزئية غير خالية من E . و a نقطة من A . و B مجموعة جزئية من A . عند ذلك يتحقق :

(a) a نقطة تراكم لـ B في الفضاء الجزئي A $\Leftrightarrow$ a نقطة تراكم لـ B في الفضاء الأصلي (E, d) أي أن $B'_A = B'_E \cap A$

(b) $\overline{B}_A = \overline{B}_E \cap A$

البرهان :

(a) لتكن a نقطة تراكم للمجموعة B في الفضاء الجزئي A ولنبرهن على أن a نقطة تراكم لـ B في E . فإذا كانت $B(a, r)$ كرة مفتوحة في E مركزها a فإن $B_A(a, r) = A \cap B(a, r)$ تكون كرة مفتوحة في A مركزها a ، وبما أن a نقطة تراكم لـ B في A فإنه يتحقق:

$B_A(a, r) \cap B - \{a\} \neq \varnothing$ وبما أن

$B_A(a, r) = A \cap B(a, r) \subseteq B(a, r)$ فإنه يتحقق :

$$B(a, r) \cap (B - \{a\}) \neq \varnothing$$

وهذا يعني أن a نقطة تراكم لـ B في E .

العكس : نفرض أن a نقطة تراكم لـ B في الفضاء E ، ولنبرهن على أن a نقطة تراكم لـ B في A . إذا كانت $B_A(a, r)$ كرة مفتوحة في A مركزها a ،

فإن الكرة المفتوحة $B(a, r)$ في الفضاء E تحقق

$B_A(a, r) = A \cap B(a, r)$. وبما أن a نقطة تراكم لـ B في E ، فإن الكرة المفتوحة $B(a, r)$ في E تتقاطع مع $B - \{a\}$ ، أي أن $B(a, r) \cap (B - \{a\}) \neq \varnothing$. وبملاحظة أن $B - \{a\} \subseteq A$ فإن $(B - \{a\}) \cap A = B - \{a\}$. وبالتالي نحصل على أن :

$$B(a, r) \cap A \cap (B - \{a\}) \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow B_A(a, r) \cap (B - \{a\}) \neq \varnothing$$

وهذا يعني أن a نقطة تراكم لـ B في A

(b) بما ان المساواة $\overline{B} = B' \cup B$ محققة في أي فضاء متري ، وباستخدام الفقرة (a) نجد أن :

$$\overline{B}_A = B'_A \cup B = (B'_E \cap A) \cup B = (B'_E \cup B) \cap (A \cup B) = \overline{B}_E \cap A$$

وبالنتيجة نجد أن $\overline{B}_A = \overline{B}_E \cap A$

14 . 6 . ملاحظات و أمثلة

1) إذا دققنا في العلاقات الواردة في المبرهنتين الأخيرتين ، فإننا لن نعثر على علاقة مساواة تعطينا داخلية مجموعة في فضاء جزئي بدلالة داخليتها في فضاء كلي وكذلك ، لا توجد علاقة مساواة بين جبهية مجموعة في فضاء جزئي بدلالة جبهيتها في فضاء كلي ، والسبب في ذلك عدم تحقق مثل هذه المساواة . والمثال التالي يوضح ذلك .

2) مثال :

ليكن $E = \mathbb{R}$ الفضاء المتري الحقيقي العادي و $A = \mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ بما أن $\mathbb{Z}$ مفتوحة في الفضاء الجزئي $\mathbb{Z}$ (لماذا ؟) فإن $\mathbb{Z}^0_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ و نعلم أن داخلية $\mathbb{Z}$ في $\mathbb{R}$ هي $\varnothing$ (لأن $\mathbb{Z}$ لا يمكن أن تحوي مجالاً مفتوحاً ، الذي يمثل كرة مفتوحة) أي أن $\mathbb{Z}^0_{\mathbb{R}} = \varnothing$ والتي تقاطعها مع $\mathbb{Z}$ هو $\varnothing$. أي أن $\mathbb{Z}^0_{\mathbb{Z}} \neq \mathbb{Z}^0_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}$ ويجب ملاحظة ان $A \cap B^0_E \subseteq B^0_A$ محقق دوماً (برهن ذلك)

لنحسب الآن الجبهية لـ $\mathbb{Z}$ في كل من الفضاء الجزئي $\mathbb{Z}$ والفضاء الأصلي $\mathbb{R}$ فنجد

$$bd_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z}} \cap (\overline{\mathbb{Z} - \mathbb{Z}}) = \mathbb{Z} \cap \varnothing = \varnothing$$

وبما أن $\mathbb{Z}$ مغلقة في $\mathbb{R}$ فإنها تساوي لصاقتها في $\mathbb{R}$ ومنه :

$$bd_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) =$$

$$\overline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}} \cap (\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}})_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}^0) = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$$

ونلاحظ أن

$$bd_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \neq bd_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z}$$

وهنا أيضاً يجب ملاحظة أن $bd_A(B) \subseteq A \cap bd_E(B)$ محقق دوماً (برهن ذلك)

لنحسب أخيراً خارجية $A = \mathbb{Z}$ في كل من الفضاء الجزئي $\mathbb{Z}$ والفضاء الأصلي $\mathbb{R}$ فنجد :

$$e_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z} - \mathbb{Z})^0 = \varnothing$$

$$e_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) = (\mathbb{R} - \mathbb{Z})^0 = \mathbb{R} - \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow e_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z} = \varnothing \Rightarrow$$

$$e_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = e_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z}$$

وهذا يقودنا إلى السؤال هل تتحقق المساواة $e_A(B) = A \cap e_E(B)$ بشكل عام الإجابة في المبرهنة التالية .

14 . 7 . مبرهنة (تتمة أخيرة في العلاقات)

إذا كان (E , d) فضاءً مترياً وكانت A مجموعة جزئية غير خالية من E فإنه من أجل كل مجموعة جزئية B من A يتحقق :

$$e_A(B) = A \cap e_E(B)$$

البرهان :

$$\forall x \in e_A(B) = (A-B)^0 = A - \overline{B_A} \Rightarrow x \in A \wedge x \notin \overline{B_A} \Rightarrow$$
$$\exists B_A(x;r) ; B_A(x;r) \cap B = \varnothing$$

وبما أن $B_A(x,r) = A \cap B(x,r)$ فإن الكرة المفتوحة $B(x,r)$ في E تحقق : $B(x,r) \cap A \cap B = \varnothing$ ومنه $B(x,r) \cap B = \varnothing$

وهذا يعني أن x ليست لاصقة بالمجموعة B في E ، أي أن

$$x \notin \overline{B_E} \Rightarrow x \in E - \overline{B_E} = (E-B)_E^0 = e_E(B)$$

وبما أن $x \in A$ أيضاً فإنه يصبح لدينا :

$$\forall x \in e_A(B) \Rightarrow x \in e_E(B) \cap A \Rightarrow e_A(B) \subseteq e_E(B) \cap A \quad (1)$$

لنبرهن على الإحتواء المعاكس .

$$\forall x \in e_E(B) \cap A = (E-B)_E^0 \cap A = (E - \overline{B}_E) \cap A$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in E - \overline{B_E} \Rightarrow x \in A \wedge x \notin \overline{B_E}$$

بما أن x ليست لاصقة في المجموعة B في E فإنه توجد كرة مفتوحة $B(x,r)$ في E بحيث $B(x,r) \cap B = \varnothing$ ، وبما أن

$B_A(x,r) = B(x,r) \cap A \subseteq B(x,r)$ فإنه ينتج أن

$B_A(x,r) \cap B = \varnothing$ وهذا يعني أن $x \notin \overline{B_A}$ وبالتالي أصبح لدينا :

$$x \in A \wedge x \notin \overline{B_A} \Rightarrow x \in A - \overline{B_A} = (E-B)_A^0 = e_A(B) \Rightarrow$$
$$e_E(B) \cap A \subseteq e_A(B) \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على المساواة المطلوبة .

تمارين (الفصل الثاني)

(1) لتكن E مجموعة غير خالية و $d : X \times X \to \mathbb{R}$ تطبيقاً . برهن على أن الشروط التالية متكافئة :

(a) d تابع مسافة على E .

(b) من أجل كل ثلاثة عناصر z , y , x من E يتحقق :

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \qquad (1)$$
$$d(x,z) \le d(x,y) + d(z,y) \qquad (2)$$

(2) ليكن d تابع مسافة على المجموعة غير الخالية E . ولنعرف على $E \times E$ ثلاثة تطبيقات بواسطة d ، كمايلي :

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \qquad \forall (x,y) \in E \times E$$
$$d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \qquad \forall (x,y) \in E \times E$$
$$d_3(x,y) = r\, d(x,y) \qquad \forall (x,y) \in E \times E, \forall r \in \mathbb{R}^+$$

أثبت أن كلاً من d_1 , d_2 , d_3 يكون تابع مسافة على E .

(3) ليكن (E , d) فضاءً مترياً ، ولنعــرف علــى $E^2 \times E^2$ تطبيقــاً d_1 بواسطة d كمايلي :

من أجل كل عنصرين $x = (x_1 , x_2)$, $y = (y_1 , y_2)$ من E^2 ، نضع :

$$d_1(x,y) = d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2)$$

برهن على أن d_1 تابع مسافة على المجموعة E^2 ، ثم استنتج من ذلك مسافة على E^n .

(4) لنعرف على المجموعة $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ تطبيقاً d بالمساواة :

$$d(x,y) = d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

وذلك من أجل كل عنصرين $x = (x_1 , x_2)$, $y = (y_1 , y_2)$ من $\mathbb{R}^2$.

برهن على أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}^2$. ثم أوجد في الفضاء $(\mathbb{R}^2, d)$

الكرة المفتوحة $B((0,0),1)$ و $\bar{B}$ و S

(5) ليكن (E, d) فضاءً مترياً و X مجموعة غير خالية ، ولتكن المجموعة $F = \{ f : X \to E |$ محدود $f \}$ ، مجموعة كل التطبيقات المحدودة التي منطلقها X ومستقرها الفضاء المتري E . لنعرف تطبيقاً d' على المجموعة $F \times F$ بالمساواة :

$$d'(f, g) = \sup\{ d(f(x), g(x)) | x \in X \} \quad \forall f, g \in F$$

برهن على أن d' تابع مسافة على المجموعة F .

(6) لتكن $\{(E_1, d_1), (E_2, d_2), \ldots, (E_m, d_m)\}$ أسرة منتهية من الفضاءات المترية ، ولتكن $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m = \prod_{i=1}^{m} E_i$ مجموعة الضرب الديكارتي لهذه الفضاءات لنعرف على المجموعة $E \times E$ ثلاثة تطبيقات كمايلي :

من أجل كل عنصرين $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ من E ، يكون :

$$d(x, y) = \max\{ d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_m(x_m, y_m) \}$$

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^{m} d_i(x_i, y_i)$$

$$d''(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2(x_i, y_i)}$$

برهن على أن كل من d, d', d'' يكون تابع مسافة على E .

(7) لنعرف على المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تطبيقاً d كمايلي :

– إذا كان كل من n, m مختلف عن الصفر فإن :

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

– إذا كان m عدداً صحيحاً مختلف عن الصفر فإن :

$$d(m, 0) = d(0, m) = \left| \frac{1}{m} \right|$$

– وأخيراً $d(0,0)=0$

بين إذا كان d تابع مسافة على $\mathbb{Z}$ ؟ .

(8) لتكن $E=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f \text{ مستمر}\}$ ، مجموعة كل التوابع (الدوال) الحقيقية المستمرة ، والمعرفة على المجال المغلق $[a,b]$. ولنعرف على المجموعة $E\times E$ تطبيقين d_1 , d_2 كمايلي :

من أجل كل عنصرين f , g من E ، يكون :

$$d_1(f,g)=\sup\{|(f(x)-g(x))|\ ;\ x\in[a,b]\}$$

$$d_1(f,g)=\int_a^b|(f(x)-g(x))|dx$$

(a) برهن على أن كل من d_1 , d_2 يكون تابع مسافة على E .

(b) برهن على أن الفضاء المتري (E , d) تام .

(9) لنعرف على المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ تطبيقاً d ، كمايلي :

$$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$$

أثبت أن d تابع مسافة على $\mathbb{R}$.

(10) برهن على أن الشرط : $0\le d(x,y)$ ، في تعريف تابع المسافة ، ينتج من بقية الشروط .

(11) لتكن $B=]-\infty,-1[$ و $A=\left\{\frac{1}{n}\ ;n\in\mathbb{Z}^+\right\}$ مجموعتين جزئيتين من الفضاء المتري الحقيقي العادي ، المطلوب احسب كلاً ممايلي :

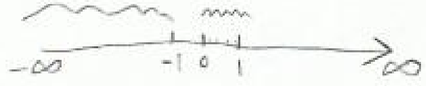
$$d(0,A)\ ,\ d(0,B)\ ,\ d(-1,A)\ ,\ d(-1,B)\ ,\ d(A,B)$$

(12) ليكن (E , d) فضاءً مترياً ، و F مجموعة جزئية غير خالية من E .

برهن على أن :

$$F \text{ مغلقة } \Leftrightarrow 0<d(x,F)\quad\forall x\in E-F$$

(13) لتكن $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة ، وليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على $\overline{\mathbb{R}}$ كمايلي :



$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f(+\infty) = 1 \, ; \, f(-\infty) = -1$$

لنعرف تطبيقاً d على المجموعة $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ بواسطة f كمايلي :

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

(a) برهن على أن d تابع مسافة على $\overline{\mathbb{R}}$ ، نسمي الفضاء المتري الناتج $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ بالفضاء الحقيقي الموسع .

(b) أثبت أن $B(0\ ,\ 1) = \mathbb{R}$ في الفضاء المتري الحقيقي الموسع ، وأن

$$\overline{B}(0\ ,\ 1) = [-1,1]$$

وأخيراً $S(0\ ,\ \frac{1}{2}) = \{-1,1\}$

(14) قدّم مثالاً في فضاء متري على مايلي :

(a) مجموعة جزئية مغلقة ومفتوحة .

(b) مجموعة جزئية ليست مغلقة ولا مفتوحة .

(c) مجموعة جزئية مفتوحة وليست مغلقة ، وأخرى مغلقة وليست مفتوحة .

(d) مجموعة جزئية غير منتهية ولا تملك نقاط تراكم .

(15) ليكن (E, d) فضاءً مترياً . و A مجموعة مفتوحة فيه . برهن على مايلي :

A لا تتقاطع مع المجموعة الجزئية B من E $\Leftrightarrow$ A لا تتقاطع مع $\overline{B}$.

هام **(16)** ليكن (E, d) فضاءً مترياً ، برهن على مايلي :

كل مجموعة جزئية من E تكون مفتوحة فيه $\Leftrightarrow$ كل مجموعة جزئية من E ، ومؤلفة من عنصر واحد تكون مفتوحة في E .

(17) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) بحيث $\delta(A) = r$

إذا كانت a نقطة من A فبرهن على أن الكرة المفتوحة $B(a\ ,\ 2r)$ تحوي A .

(18) لتكن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء المتري (E, d) ، برهن على مايلي :

$A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$ (a)

$(A \cup B)' = A' \cup B'$ (b) للمناقشة

(19) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) و x نقطة من E

برهن على تكافؤ الشرطين :

(a) x ليست نقطة تراكم للمجموعة A في الفضاء (E, d)

(b) توجد ، في الفضاء E ، كرة مفتوحة $B(x, r)$ بحيث

$A \cap B(x, r) \subseteq \{x\}$

(20) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) و A' المجموعة المشتقة لها ، ولنرمز بـ A'' للمجموعة المشتقة للمجموعة A' . أي أن $A'' = (A')'$ ، برهن على أن $A'' \subseteq A'$ ، ثم استنتج أن A' مغلقة في الفضاء (E, d) .

(21) لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتري الحقيقي العادي .

وليكن x عنصراً من $\mathbb{R}$. المطلوب :

هام

(a) إذا كانت x نقطة منعزلة من A ، فأثبت أن :

$$x \in bd(A) \cap (\mathbb{R} - A)'$$

(b) أثبت أن x يجب أن تكون نقطة تراكم لواحدة ، على الأقل ، من المجموعتين A و $\mathbb{R} - A$.

(c) برهن على أنه إذا كانت A مفتوحة في $\mathbb{R}$ فإنها تكون غير منتهية .

(d) برهن على أنه إذا كانت A منتهية فإنها ليست مفتوحة .

(e) برهن على أنه إذا كانت B مجموعة جزئية منتهية ومفتوحة في $\mathbb{R}$ فإن $B = \varnothing$

(22) لتكن G مجموعة مفتوحة وغير خالية في الفضاء المتري (E, d) ، ولتكن A مجموعة جزئية من E بحيث $(\overline{A})^{\circ} = \varnothing$ ، المطلوب:

(a) أثبت أن $E - \overline{A}$ كثيفة في الفضاء E .

(b) برهن على وجود نقطة x من E و عدد حقيقي موجب r بحيث يتحقق :

$$B(x\,,r) \subseteq G \ \wedge\ B(x\,;r) \cap A = \varnothing$$

(23) لتكن $B(a\,,\,r)$ كرة مفتوحة في الفضاء المتري $(E\,,d)$ ، و x نقطة من E لاتنتمي إلى تلك الكرة .

برهن على أن : $d(x,B(a\,,\,r)) \geq d(x,a) - r$.

(24) في كل فضاء متري $(E\,,d)$ برهن على تحقق :

$$\overline{B(a\,,\,r)} \subseteq \bar{B}(a\,,\,r)$$

(وحيث الطرف الأيسر يرمز إلى لصاقة الكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها r ، في حين أن الطرف الأيمن من الإحتواء يرمز $\bar{B}$ لعادة الكرة المغلقة التي مركزها a ونصف قطرها r) . ثم قدّم مثالاً في فضاء متري تبين فيه :

$\overline{B(a\,;\,r)} \subsetneq \bar{B}(a\,;\,r)$ ، ومثالاً آخر في فضاء متري تبين فيه :

$\overline{B(a\,,\,r)} = \bar{B}(a\,,\,r)$.

(25) لتكن G مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري $(E\,,d)$ برهن على أن المجموعة :

$G \cup (E-G)^0$ تكون كثيفة في هذا الفضاء .

هام

(26) لتكن $A\,,B$ مجموعتين جزئيتين من الفضاء المتري $(E\,,d)$. برهن على ما يلي :

a) المجموعة A تكون مغلقة و مفتوحة في $E \Leftrightarrow bd(A) = \varnothing$

b) $bd(\bar{A}) \subseteq bd(A)$ ، $bd(A^0) \subseteq bd(A)$

c) $bd(bd(A)) \subseteq bd(A)$ ، $bd(A) \subseteq \overline{bd(A)}$

d) $bd(A \cup B) \subseteq bd(A) \cup bd(B)$. ثم قدم مثالاً في $\mathbb{R}\,,|\ |$ يبين عدم صحة الإحتواء المعاكس .

e) إذا كانت $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$ فأثبت أن

$$bd(A \cup B) = bd(A) \cup bd(B)$$

(27) لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتري $(E\,,d)$ ، ولتكن B

مجموعة جزئية من A ، ومفتوحة في الفضاء الجزئي A . برهن على أن :

B مفتوحة في الفضاء $E \Leftrightarrow A$ مفتوحة في E .

(**28**) لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتري (E, d) ، ولتكن F مجموعة جزئية من A ، ومغلقة في الفضاء الجزئي A . برهن على أن :

F مغلقة في الفضاء $E \Leftrightarrow A$ مغلقة في E .

(**29**) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) . برهن على التالي :

A كثيفة في الفضاء $E \Leftrightarrow A$ تتقاطع مع كل مجموعة جزئية مفتوحة وغير خالية من E .

(**30**) ليكن (E, d) الفضاء المتري المتقطع . برهن على أن $A' = \varnothing$ من أجل كل مجموعة جزئية A من E .

هل $bd(A) = \varnothing$ من أجل كل مجموعة جزئية A في هذا الفضاء ؟ .

(**31**) إذا كانت كل مجموعة غير منتهية تملك نقطة تراكم في الفضاء المتري (E, d) ، فبرهن على أن هذا الفضاء يكون منفصلاً .

(**32**) برهن على أن كل فضاء جزئي من من فضاء متري منفصل يكون فضاءً منفصلاً .

(**33**) ليكن (E, d) فضاءً مترياً ، و A, B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من E تحققان $E = A \cup B$. ولتكن M مجموعة جزئية من التقاطع $A \cap B$ برهن على التالي

a) M مفتوحة في الفضاء $E \Leftrightarrow M$ مفتوحة في كل من الفضائين الجزئيين A, B .

b) M مغلقة في الفضاء $E \Leftrightarrow M$ مغلقة في كل من الفضائين الجزئيين A, B .

(**34**) لتكن $A =]1, 3]$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري المتقطع $\mathbb{R}$.

التراكم في المجتمع حالية (للتأكد)

ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

✗ a) إن A مجموعة ليست مفتوحة .

✓ b) إن A مجموعة مغلقة .

✗ c) إن $1 \in \overline{A}$.

✗ d) إن $3 \in A'$

(35) لتكن A, B مجموعتين جزئيتين من فضاء متري (E, d) .

ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

✗ a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

✓ b) $A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$

✗ c) $\overline{\overline{A}} = A$

✓ d) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(36) لنعرف على المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ التطبيق d كما يلي :

$d(x, y) = (x - y)^2$.

ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

✗ a) إن التطبيق d هو تابع مسافة على $\mathbb{R}$.

✗ b) إن d ليس تابع مسافة على $\mathbb{R}$ لأنه لا يحقق الشرط الأول من شروط تابع المسافة .

✗ c) إن d ليس تابع مسافة على $\mathbb{R}$ لأنه لا يحقق خاصة التناظر .

✓ d) إن d ليس تابع مسافة على $\mathbb{R}$ لأنه لا يحقق المتراجحة المثلثاتية .

(37) لتكن $E = \{1, 2, 3, 4\}$ وليكن d تابع مسافة على E .

ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

✓ a) كل مجموعة جزئية من الفضاء المتري (E, d) هي مجموعة مفتوحة .

✓ b) كل نقطة من E هي نقطة منعزلة في هذا الفضاء .

✗ c) كل مجموعة جزئية غير خالية من E هي مجموعة كثيفة في هذا الفضاء

d) كل مجموعة جزئية من E لصاقتها نفسها في هذا الفضاء .

(38) لتكن $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0 \}$ مجموعة جزئية من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^2$.

ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

a) A مجموعة مغلقة .

b) A مجموعة مفتوحة .

c) A مجموعة ليست مفتوحة و ليست مغلقة .

d) A مجموعة محدودة .

(39) لتكن $B = \mathbb{R} - \{ 1, 2, 3 \}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتري الحقيقي العادي $\mathbb{R}$.

ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

a) $B = \overline{B}$

b) B كثيفة في هذا الفضاء .

c) $bd(\{8\}) = \varnothing$

d) $2 \in B'$

(40) ليكن (E, d) فضاءً مترياً . ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

a) أي اجتماع لمجموعات مغلقة في الفضاء E يكون مجموعة مغلقة .

b) أي اجتماع منته لمجموعات مفتوحة في الفضاء E يكون مجموعة مفتوحة .

c) كل مجموعة جزئية من الفضاء E وقابلة للعد تكون مغلقة .

d) أي تقاطع لمجموعات مفتوحة في الفضاء E يكون مجموعة مفتوحة .

(41) ضع كلمة صح على كل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

a) في الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}$. المجموعة الجزئية $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ كثيفة فيه .

b) إذا كانت A مجموعة كثيفة في فضاء متري (E, d) فإن متممتها

$E - A$ تكون أيضاً كثيفة فيه .

c) إذا كانت A مجموعة مغلقة في فضاء متري (E , d) وكانـــت $A \neq E$ فإن A ليست كثيفة في هذا الفضاء .

d) إن المجموعة $\mathbb{Q}$ كثيفة في الفضاء المتري المتقطع $\mathbb{R}$.

(42) ليكن $(\mathbb{R} , d)$ الفضاء المتري الحقيقي العادي . ضع كلمة صح على كـــل عبارة صحيحة من بين العبارات التالية :

a) إن $d(\frac{1}{2}, \mathbb{N}) = 0$ في الفضاء الجزئي $\cancel{\mathbb{Z}}$. $\mathbb{Q}$

b) إن المجموعة $\mathbb{N}$ مفتوحة في الفضاء الجزئي $\mathbb{Z}$.

c) إن المجموعة $\mathbb{Z} - \{5\}$ في الفضاء الجزئي $\mathbb{Z}$ ..

d) إن الكرة المفتوحة $B_{\mathbb{Z}}(1, \frac{1}{2})$ في الفضاء الجزئي $\mathbb{Z}$ هي نفس الكرة المفتوحة $B_{\mathbb{R}}(1, \frac{1}{2})$ في الفضاء المتري $\mathbb{R}$.

الفصل الثالث

التقارب في الفضاءات المترية Convergence in metric space

1. § - المتتاليات وتقاربها في فضاء متري (E,d)

1.1 - تعريف:

المتتالية في فضاء متري (E,d) هي تطبيق u ، ينطلق من مجموعة الأعـــداد الطبيعية N ويستقر في الفضاء (E,d) من الشكل: $u : N \to (E,d)$

بحيث ينقل كل عدد طبيعي n إلى صورته في (E,d) التي نرمز لها بـــ u_n .

1.2 - ملاحظات وأمثلة:

1. لما كانت معرفة التطبيق u ، تتم من خلال معرفة u_n لكـــل n مـــن N ، فإنـــه يعبر عن المتتالية u ، عادةً ، بالرمز (u_n) ، ويسمى u_n بالحد العام للمتتالية .

وعليه فإن :

$$(u_n) = (u_1 , u_2 , u_3 , \dots , u_n , \dots)$$

2. إن التطبيق : $u : N \to (R ,d_u)$ المعرف بـــــ $u_n = \frac{1}{n}$ هـــو المتتاليـــة العددية :

$$(\frac{1}{n}) = (1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \dots , \frac{1}{n} , \dots)$$

3. إن التطبيق : $u : N \to (R^2,d_e)$ المعرف بـــ $u_n = (\frac{1}{n^2},n)$ هو متتاليـــة في الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) وهي:

$$((\frac{1}{n^2},n)) = ((1,1) , (\frac{1}{4},2) , \dots (\frac{1}{n^2},n) , \dots)$$

4. إذا كانت (u_n) متتالية في فضاء متري (E,d) ، وكانت u نقطة ثابتة من E ، فـــإن $d(u_n ,u)$ يمثل حداً عاماً لمتتالية عددية (متتالية في (R,d_u)) قد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة .

فمثلاً : لو أخذنا في (R^2, d_e) ، المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n^2}, 2)$ وأخذنا النقطة $u = (0, 2)$ فإن :

$$d(u_n, u) = \sqrt{(\frac{1}{n^2} - 0)^2 + (2-2)^2} = \frac{1}{n^2}$$

وهو يمثل حداً عاماً لمتتالية عددية متقاربة نحو الصفر ، كما نعلم .

أما لو أخذنا ، في نفس الفضاء (R^2, d_e) ، المتتالية التي حدها العام $u_n = (n, 2)$ وأخذنا النقطة $u = (0, 2)$ فإن :

$$d(u_n, u) = \sqrt{(n-0)^2 + (2-2)^2} = n$$

وهو يمثل حداً عاماً لمتتالية عددية متباعدة .

5. يجب التمييز بين المتتالية (u_n) ، التي تحوي دوماً عدداً غير منته من الحدود ، وبين مجموعة حدود المتتالية (u_n) ، التي سنرمز لها بـ $\{u_n\}$ ، وهي مجموعة قد تكون منتهية ، وقد تكون غير منتهية .

فمثلاً: المتتالية التي حدها العام : $u_n = (-1)^n$ هي:

$(u_n) : -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

ومجموعة حدودها هي :

$\{u_n\} = \{-1, 1\}$

1.3- تعريف:

لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) . إذا وجدت نقطة u من (E,d) بحيث تكون المتتالية العددية التي حدها العام $d(u_n, u)$ ، متقاربة من العدد 0 ، فإننا نقول إن المتتالية (u_n) متقاربة في الفضاء (E,d) نحو النقطة u . ونسمي النقطة u ، نقطة نهاية للمتتالية (u_n) . ونكتب :

$$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u \qquad \text{أو} \qquad u = \lim_{n \to \infty} u_n$$

وأحياناً نكتب $u_n \to u$ ، إذا لم يكن هناك التباس .

1.4 - ملاحظات وأمثلة:

1. نلخص التعريف السابق بالعبارة الرياضية :

$$d(u_n , u) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u$$

– إذا كانت المتتالية (u_n) لا تتقارب إلى النقطة u ، فإننا نكتب $u_n \not\to u$.

2. ينتج عن تعريف تقارب المتتاليات العددية ، الذي تعلمانه سابقاً ، أنه إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) فإن : $u_n \to u$ ، إذا وفقط إذا ، تحقق الشرط (c) التالي :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_0 \in N\ \ ;\ \ n > n_0\ \Rightarrow\ d(u_n , u) < \varepsilon$$

3. إذا كانت (u_n) متتالية من (E,d) ، وكانت غير متقاربة في هذا الفضاء ، فإننا نقول إن (u_n) متباعدة في (E,d) .

4. إن شرط التقارب (c) ، يكتب في الفضاء (R , d_u) على الشكل التالي:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_0 \in N\ \ ;\ \ n > n_0\ \Rightarrow\ |u_n - u| < \varepsilon$$

وهو شرط تقارب المتتالية الحقيقية (u_n) نحو العدد u الذي تعلمناه سابقاً في دراسة التفاضل .

5. إذا كانت (u_n) متتالية ثابتة من فضاء متري (E,d) ، حدها العام $u_n = c$ لكل $n \in N$ فإن هذه المتتالية متقاربة نحو c ، لأن :

$$d\ (u_n , c) = d\ (c, c) = 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

6. إن حذف (أو إضافة) عدد منته من الحدود من (إلى) متتالية (u_n) ، لا يغير من طبيعة هذه المتتالية ، من حيث التقارب والتباعد، وذلك لأن شرط التقارب (c) يرتبط بالحد u_n ، عندما $n \to \infty$.

7. إذا كانت (u_n) متتالية غير ثابتة ، من الفضاء المبتذل (E,d_t) فإن (u_n) متباعدة

لأنه : أياً كانت النقطة u ∋ E ، فإنه من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ نلاحظ أنه :

أياً كان $n_0 \in \mathbb{N}$ ، يوجد $n > n_0$ بحيث $u_n \neq u$ ، لأن (u_n) غير ثابتة .

ولذلك فإن : $d(u_n , u) = 1 > \varepsilon$.

إذاً : الشرط (c) غير محقق ، لأي نقطة u من E ، ولذلك فإن (u_n) غير متقاربة لأي نقطة u من E ، إذن فهي متباعدة .

8. المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}\text{Sin}\, n\frac{\pi}{2}, \frac{1}{n}\text{Cos}\, n\frac{\pi}{2})$ متقاربة نحو النقطة $u = (0,0)$ ، في الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) ، لأن :

$$d(u_n,u) = \sqrt{(\frac{1}{n^2}\text{Sin}^2 n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\text{Cos}^2 n\frac{\pi}{2})}$$

$$= \frac{1}{n}(\sqrt{(\frac{1}{n^2}\text{Sin}^2 n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\text{Cos}^2 n\frac{\pi}{2})}) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

9. المتتالية التي حدها العام $u_n = (n , 1)$ متباعدة في الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) لأنه أياً كانت النقطة $u = (a,b)$ من (R^2,d_e) لدينا:

$$d(u_n,u) = \sqrt{(n-a)^2 + (1-b)^2} \geq \sqrt{(n-a)^2} = |n-a| \geq n-a$$

وبما أن $(u-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ فإن $d(u_n,u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

أي أن $d(u_n,u) \not\to 0$ وبالتالي $u_n \not\to u$ ولذلك فإن (u_n) متباعدة في (R^2,d_e) .

2.§ - مبرهنات عن المتتاليات المتقاربة :

2.1 - مبرهنة:

لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) ولتكن u نقطة من (E,d) . إن الشرطين التاليين متكافئان :

1) المتتالية (u_n) تتقارب نحو u .

2) كل كرة مفتوحة مركزها u ، تحوي على جميع حدود المتتالية (u_n) إلا عدداً

منتهياً من هذه الحدود .

البرهان :

$1 \Rightarrow 2$: لتكن $B(u,\varepsilon)$ كرة مفتوحة مركزها u ونصف قطرها ε . عندئذ $\varepsilon > 0$

وبما أن $u_n \to u$ فإنه ينتج عن الشرط (c) أنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \ n_0 \in N \ : \ n > n_0 \ \Rightarrow \ d(u_n , u) < \varepsilon$$

وينتج عن تعريف الكرة المفتوحة أن :

$$n > n_0 \ \Rightarrow \ u_n \in B(u,\varepsilon)$$

وهذا يعني أن جميع حدود المتتالية (u_n) تنتمي إلى الكرة $B(u,\varepsilon)$ باستثناء n_0 حداً من هذه الحدود ، على الأكثر ، لا تنتمي إليها .

$2 \Rightarrow 1$: لتكن $\varepsilon > 0$. ينتج عن الشرط 2) أن الكرة المفتوحة $B(u,\varepsilon)$ سوف تحوي على جميع حدود المتتالية (u_n) ما عدا عدد منته من هذه الحدود .

لتكن $\{u_{n1} , u_{n2} , u_{n3} , \ldots , u_{nk}\}$ مجموعة الحدود التي لا تنتمي إلى $B(u,\varepsilon)$

وليكن $n_0 = \max\{n_1 , n_2 , \ldots , n_k\}$ عندئذ نجد أن :

$$n > n_0 \ \Rightarrow \ u_n \in B(u,\varepsilon) \Rightarrow \ d(u_n , u) < \varepsilon$$

إذاً :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \ n_0 \in N \ : \ n > n_0 \ \Rightarrow \ d(u_n , u) < \varepsilon$$

وهذا هو الشرط (c) الذي يعني أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو النقطة u .

2.2 - ملاحظات وأمثلة:

1. نعلم أن الكرات المفتوحة في الفضاء (R,d_u) هي مجالات مفتوحة ومحدودة من الشكل $]a \ , \ b[$. فإذا كانت (u_n) متتالية من الفضاء (R,d_u) ، متقاربة من النقطة u، فإن كل مجال مفتوح من الشكل $]u - \varepsilon , u + \varepsilon[$ سوف يحوي على جميع حدود المتتالية (u_n) إلا عدداً منتهياً من هذه الحدود .

فمثلاً : المتتالية التي حدها العام $u_n = \dfrac{1}{n}$ ، تتقارب من النقطة 0 في الفضاء (R,d_u) ، ولذلك فإن أي مجال من الشكل $]-\varepsilon , \varepsilon[$ سوف يحوي على جميع حدود هذه المتتالية ، إلا عدداً منتهياً من هذه الحدود .

$$\text{———}\varepsilon[\text{———}0\text{———}\frac{1}{n}\text{———}]\,\varepsilon\text{———}$$

2. لقد برهنا ، في 7 من 1.4، أنه إذا كانت (u_n) متتالية غير ثابتة ، من الفضاء المبتذل (E,d_t) ، فإن (u_n) متباعدة . ونوضح هذه الحقيقة هنا بالمثال التالي :

إن المتتالية التي حدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ غير متقاربة نحو الصفر في الفضاء (R,d_t) ، لأن الكرة المفتوحة $B(0, \frac{1}{2}) = \{ 0 \}$ ، تترك خارجها عدداً غير منته من حدود هذه المتتالية .

3. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ متباعدة في الفضاء (R,d_u) لأنه :

أياً كانت النقطة u من R فإن $u = 1$ أو $u = -1$ أو $u \neq \pm 1$.

– إذا كانت $u = 1$ فإن الكرة المفتوحة $B(1, \frac{1}{2}) =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ لا تحوي -1 وبالتالي فإن هذه الكرة تترك خارجها جميع حدود المتتالية (u_n) حيث n فردياً ، فهي تترك خارجها عدداً غير منته من الحدود ، ولذلك فإن $u_n \nrightarrow u = 1$.

– إذا كانت $u = -1$ فإن الكرة المفتوحة $B(-1, \frac{1}{2}) =]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ لا تحوي 1 ، وبالتالي فإن هذه الكرة تترك خارجها جميع حدود المتتالية (u_n) حيث n زوجياً ،فهي تترك خارجها عدداً غير منته من الحدود،ولذلك فإن $u_n \nrightarrow u = -1$

إذا كانت $u \neq \pm 1$ فإن $d_u(u,1) > 0$ و $d_u(u,-1) > 0$.

لتكن $\varepsilon = \min\{ d_u(u,1) , d_u(u,-1) \}$ ، إن الكرة المفتوحة $B(u,\varepsilon) =]u - \varepsilon , u + \varepsilon[$ لا تحوي النقطة 1 ولا النقطة -1 وبالتالي فهي تترك خارجها جميع حدود المتتالية وبالتالي فالمتتالية (u_n) لا تتقارب نحو u .

إذاً : (u_n) لا تتقارب نحو u أياً كانت النقطة u من R ، ولذلك فإن (u_n) متباعدة .

4 . إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين من فضاء متري (E,d) بحيث أن $u_n \to u$ و $v_n \to v$ فإن المتتالية العددية $d(u_n , v_n)$ تتقارب

نحو النقطة $d(u,v)$ في الفضاء (R,d_u) .

2.3 - نتيجة:

لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) ولتكن u نقطة من (E,d) ، عندئذٍ :

$u_n \to u \Leftrightarrow$ كل مجاورة لـــ u تحوي جميع حدود (u_n) إلا عدداً منتهياً من هذه الحدود .

البرهان : من تعريف المجاورة ، نعلم أنه إذا كانت v مجاورة للنقطة u فإنه توجد كرة مفتوحة $B(u,\varepsilon)$ بحيث يكون $B(u,\varepsilon) \subseteq v$ ، ثم إن كل كرة مفتوحة مركزها u هي مجاورة لـــ u .

2.4 - مبرهنة:

لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) . إذا كانت (u_n) متقاربة في (E,d) فإن نهايتها وحيدة .

البرهان : لنفرض أن u و v نقطتي نهاية للمتتالية (u_n) ، عندئذٍ نجد أن :

$u_n \to u$ ولذلك فإن $d(u_n , u) \to 0$

$u_n \to v$ ولذلك فإن $d(u_n , v) \to 0$

ومنه نجد أن $d(u_n , u) + d(u_n , v) \to 0$ ومن المتراجحة المثلثاتية نجد أن :

$$0 \leq d(u,v) \leq d(u_n , u) + d(u_n , v)$$

واعتماداً على مبرهنة الشطيرة (Pinching Th.) في دراسة النهايات نجد أن :

$d(u,v) = 0$ ولذلك فإن $u = v$.

2.5 - ملاحظات وأمثلة:

1. ينتج عن المبرهنة السابقة أنه إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) وكانت هذه المتتالية تتقارب نحو نقطة u وكانت v نقطة تختلف عن u فإننا نحكم على أن $u_n \not\to v$.

<u>فمثلاً</u> : نعلم أن المتتالية التي حدها العام $u_n = \frac{n}{n+1}$ ، تتقارب في الفضاء (R,d_u)

نحو النقطة $u = 1$ ولذلك فإن هذه المتتالية لا تتقارب إلى أي نقطة من (R,d_u) تختلف عن 1 .

2. ليكن (E^*, d^*) فضاءً جزئياً من فضاء متري (E,d) ، ولتكن (u_n) متتالية من نقط (E^*, d^*) عندئذٍ :

a) إذا كانت (u_n) متقاربة في (E^*, d^*) نحو النقطة u ، فإن (u_n) متقاربة في (E,d) نحو النقطة u .

b) إذا كانت (u_n) متقاربة في (E,d) ، فليس من الضروري أن تكون (u_n) متقاربة في (E^*, d^*) .

البرهان :

a) بما أن (u_n) تتقارب في (E^*, d^*) نحو u ، فإن $u \in E^*$ ، ويكون $d^*(u_n , u) = d(u_n , u)$ ولذلك فإن الشرط (c) في (E,d) ، هو نفس الشرط (c) في (E^*, d^*) .

b) قد تكون (u_n) متقاربة في (E,d) إلى نقطة v ليست من E^* ، وفي هذه الحالة لا يمكن أن تكون (u_n) متقاربة في (E^*, d^*) ، لأنه لو كانت (u_n) متقاربة في (E^*, d^*) لوجدت نقطة u من E^* بحيث يكون $u_n \to u$. وفي هذه الحالة تكون $u_n \to u$ في (E,d) بحسب a) ، وبما أن $u_n \to v$ في (E,d) ، فإن $u = v$ لأن نهاية المتتالية وحيدة . ومنه نجد أن $v \in E^*$ ونحصل على تناقض .

إذاً : لا يمكن لـ (u_n) أن تتقارب في (E^*, d^*) .

<u>فمثلاً</u> : لنعتبر الفضاء (Q,d_u) ، الجزئي من الفضاء (R,d_u) ، ولنعتبر المتتالية التي حدها العام $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$. واضح أن هذه المتتالية هي من الفضاء الجزئي (Q,d_u)، ونعلم أن هذه المتتالية متقاربة في الفضاء (R,d_u) نحو العدد النيري e ، ونعلم أيضاً أن $e \notin Q$ ، لذلك فإن هذه المتتالية ليست متقاربة في (Q,d_u) .

2.6 - تعريف:

نقول عن متتالية (u_n) ، من فضاء متري (E,d) ، إنها متتاليــة محــدودة ، إذا كانت مجموعة حدودها $\{u_n\}$ مجموعة محدودة .

2.7 - ملاحظات وأمثلة:

1. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ من الفضاء (R,d_u) هي متتالية محدودة لأن مجموعة حدودها $\{u_n\}=\{\pm 1\}$ هي مجموعة محدودة .

2. كل متتالية من الفضاء المبتذل (E,d_t) ، هي متتالية محدودة ، لأن كل مجموعة من هذا الفضاء هي مجموعة محدودة .

3. المتتالية التي حدها العام $u_n=(\frac{1}{n}\ ,\ Sin\ n\frac{\pi}{2})$ من الفضاء الاقليدي $(R^2\ ,\ d_e)$ هي متتالية محدودة لأن : $\{u_n\} \subseteq B(\mathbf{0}\ ,2)$ حيث $\mathbf{0}=(0,0)$ وذلك لأن :

$$d(\mathbf{0},u_n) = \sqrt{(\frac{1}{n})^2+Sin^2\ n\frac{\pi}{2}} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 2$$

2.8 - مبرهنة:

كل متتالية متقاربة (في أي فضاء متري) ، هي متتالية محدودة . ولكن العكس غير صحيح بشكل عام.

البرهان : لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) ، متقاربة من نقطة u ، عندئــذ ينتج عن الشرط (c) أنه :

$$\forall\ \varepsilon=1\ ,\ \exists\ \ n_o\in N:\ \ n>n_o\ \Rightarrow\ d(u,u_n)<1$$

أي :

$$\forall\ \varepsilon=1\ ,\ \exists\ \ n_o\in N:\ \ n>n_o\ \Rightarrow\ u_n\in B(u,1)$$

نضع $A=\{u_1, u_2, \ldots, u_{no}\}$ و $B=\{u_n\}_{n>no}$

فنجد أن : $\{u_n\}=A\cup B$ حيث :

إن A مجموعة محدودة لأنهـا مجموعـة منتهيـة ، وإن B مجموعـة محـدودة لأن $B\subseteq B(u,1)$. وبما أن اجتماع مجموعتين محدودتين هو مجموعة محدودة ، فإن $\{u_n\}$

مجموعة محدودة ، وبالتالي فإن المتتالية (u_n) هي متتالية محدودة .

<u>مثال عن العكس</u> : وجدنا ، في 3) من 2.2 ، أن المتتالية التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ غير متقاربة في الفضاء (R,d_u) ، ووجدنا ، في 1) من 2.7 ، أن هذه المتتالية محدودة .

إذاً : فكون المتتالية محدودة ،لا يؤدي ، بشكل عام ، إلى كونها متقاربة .

2.9 - ملاحظات وأمثلة:

1. إذا كان (E^*, d^*) فضاءً جزئياً من الفضاء (E,d) ، وكانت (u_n) متتالية من (E^*, d^*) فإنه من الواضح أن :

(u_n) محدودة في (E^*, d^*) $\Leftrightarrow$ (u_n) محدودة في (E,d) .

وينتج عن هذا أنه : إذا كانت (u_n) متتالية من (E^*, d^*) وغير متقاربة في (E^*, d^*) ولكنها متقاربة في (E,d) ،فإنها تكون محدودة في (E,d) ، وبالتالي محدودة في (E^*, d^*).

<u>فمثلاً</u> : المتتالية التي حدها العام $u_n=(1+\frac{1}{n})^n$ محدودة في الفضاء (Q,d_u) ، الجزئي من (R,d_u) لأنها متقاربة في (R,d_u) .

2. رأينا في 3) من 2.7 ، أن المتتالية التي حدها العام $u_n=(\frac{1}{n},Sin\, n\frac{\pi}{2})$ محدودة في الفضاء (R^2, d_e) ولكننا سنجد في 3.1 ، أن هذه المتتالية غير متقاربة في هذا الفضاء .

2.10 - تعريف(المتتالية الجزئية):

إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) ، وكانت (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية بحيث أن :

$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$

فإننا نسمي المتتالية (u_{n_k}) بمتتالية جزئية من المتتالية (u_n) ، حيث أن :

$(u_{n_k}): \; u_{n1} \; , \; u_{n2} \; , \; u_{n3} \; , \; \ldots \; , \; u_{n_k} \; , \; \ldots$

2.11 - ملاحظات وأمثلة:

1. نوضح مفهوم المتتالية الجزئية كما يلي : لنفرض أننا اخترنا متتالية الأعداد الطبيعية (n_k) كما يلي :

$$(n_k) : n_1 = 2\ ,\ n_2 = 4\ ,\ n_3 = 6\ ,\ n_4 = 8\ , \ldots ,\ n_k = 2k\ , \ldots$$

عندئذ نجد أن :

$$(u_n) :\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ u_4\ ,\ u_5\ ,\ u_6\ ,\ u_7\ ,\ u_8\ , \ldots$$

$$(u_{n_k}) :\ u_2\ ,\ u_4\ ,\ u_6\ ,\ u_8\ , \ldots$$

2. ينتج عن التعريف السابق أنه إذا كانت (v_n) متتالية جزئية من (u_n) فإن:

$$v_n = u_m \quad : \quad m \geq n$$

3. قد يوجد ، في متتالية واحدة (u_n) ، عدد كبير من المتتاليات الجزئية . وإن (u_n) نفسها هي متتالية جزئية من (u_n) .

2.12 - مبرهنة:

إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) ، متقاربة نحو نقطة u ، فإن كل متتالية جزئية من (u_n) ، تتقارب أيضاً نحو النقطة u .

البرهان : لتكن (v_n) متتالية جزئية من (u_n) ، ولنبرهن على أن (v_n) تتقارب أيضـــاً نحو النقطة u :

لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ : ينتج عن كون (u_n) متقاربة نحو النقطة u ، أن الشرط (c) محقق وهو:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \ n_o \in N\ :\ n > n_o \quad \Rightarrow \quad d\,(u_n\,,u) < \varepsilon$$

وبما أن (v_n) متتالية جزئية من (u_n) ، فإن $v_n = u_m$ حيث $m \geq n$ ، ومنه نجد أنه إذا كانت $n > n_o$ فإن $m > n_o$ ، ولذلك فإن $d\,(v_n\,,u) = d\,(u_m\,,u) < \varepsilon$.

إذاً :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \ n_o \in N\ :\ n > n_o \quad \Rightarrow \quad d\,(v_n\,,u) < \varepsilon$$

أي أن المتتالية (v_n) تحقق الشرط (c) بالنسبة للنقطة u ، ولذلك فإن (v_n)

تتقارب نحو u .

2.13 - ملاحظات وأمثلة:

1. إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بشكل عام ، أي أنه : إذا كانت (v_n) متتالية جزئية من (u_n) وكانت (v_n) متقاربة نحو نقطة u ، فليس من الضروري أن تكون (u_n) متقاربة نحو u .

فمثلاً : في الفضاء (R,d_u) ، لو أخذ المتتالية التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ ، وأخذنا منها المتتالية الجزئية التي حدها العام $v_n = u_{2n}$ ، لوجدنا أن :

$v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ ، ولكن (u_n) غير متقاربة في هذا الفضاء ، كما ذكرنا سابقاً .

2. لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) . إذا وجدنا متتالية (v_n) ، جزئية من (u_n) ، بحيث أن (v_n) متباعدة في (E,d) ، فإننا نحكم على أن (u_n) متباعدة في (E,d) .

فمثلاً : لو أخذنا في (R,d_u) ، المتتالية التي حدها العام $u_n = Sin\, n\frac{\pi}{2}$ وأخذنا منها المتتالية الجزئية (v_n) التي حدها العام $v_n = u_{2n+1}$ نجد أن :

$$v_n = u_{2n+1} = Sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = Sin(n\pi+\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$$

وقد رأينا سابقاً أن هذه المتتالية متباعدة ، ولذلك فإن المتتالية (u_n) متباعدة .

3. إذا وجدنا في المتتالية (u_n) ، متتاليتين جزئيتين (v_n) و (w_n) ، تتقاربان نحو نقطتين مختلفتين v و w ، فإننا نحكم على أن (u_n) متباعدة . لأنه : لو كانت (u_n) متقاربة نحو نقطة u ، لنتج عن المبرهنة السابقة أن (v_n) تتقارب نحو u و (w_n) تتقارب نحو u ، ولما كانت نهاية المتتالية وحيدة ، فإن $v = u = w$ ، ونحصل على تناقض مع كون $v \neq w$.

توضيح :

$$\left.\begin{array}{l} v_n \to v \\ u_n \cdots\cdots \to u \\ w_n \to w \end{array}\right. \Rightarrow v = u = w$$

فمثلاً : المتتالية التي حدها العام

$$u_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n} & \forall \text{ زوجي } n \\ -1+\dfrac{1}{n} & \forall \text{ فردي } n \end{cases}$$

متباعدة في الفضاء (R,d_u) لأنها تحوي على المتتاليتين الجزئيتين :

$$v_n = u_{2n} = 1+\frac{1}{2n}$$

$$w_n = u_{2n+1} = -1+\frac{1}{2n+1}$$

اللتين تتقاربان نحو النقطتين المختلفتين 1 و 1- على الترتيب .

4. إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) ، بحيث أن المجموعة $\{u_n\}$ منتهية ، فإنه يوجد في (u_n) متتالية جزئية متقاربة .

البرهان : لنفرض أن $A = \{u_1, u_2, \dots, u_t\} = \{u_n\}$. بما أن عدد حدود المتتالية غير منته ، فإن أحد عناصر المجموعة A ، سيظهر عدداً غير منته من المرات في حدود المتتالية (u_n) ، وليكن هذا الحد هو u_2 (مثلاً) ، عندئذ نجد متتالية من الأعداد الطبيعية :

$$2 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_K < \dots$$

بحيث أن :

$$u_{n1} = u_2 \ , \ u_{n2} = u_2 \ , \ u_{n3} = u_2 \ , \ \dots \ , \ (u_{n_k}) = u_2 \ , \ \dots$$

وهكذا نحصل على المتتالية الجزئية (u_{n_k}) التي حدها العام ثابت ، حيث $u_{n_k} = u_2$ ولذلك فإن $u_{n_k} \xrightarrow[K\to\infty]{} u_2$.

2.14 - تعريف:

لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) .

نقول عن نقطة x من E ، إنها نقطة لاصقة بالمتتالية (u_n) ، إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \forall\ i\in\mathbb{N}\ ,\ \exists\ K\in\mathbb{N}\ ;\ K\geq i\ :\ u_K\in B(x,\varepsilon)$$

2.15 - مبرهنة:

لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) .

النقطة x لاصقة بـــ (u_n) $\Leftrightarrow$ توجد متتالية جزئية من (u_n) تتقارب نحو x .

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن x لاصقة بـــ (u_n) فإنه ينتج عن التعريف السابق أنه :

$$\forall\ 1>0\ ,\ \forall\ 1\in\mathbb{N}\ ,\ \exists\ n_1>1\ :\ u_{n_1}\in B(x,1)$$

$$\forall\ \frac{1}{2}>0\ ,\ \forall\ n_1\in\mathbb{N}\ ,\ \exists\ n_2>n_1\ :\ u_{n_2}\in B(x,\frac{1}{2})$$

$$\forall\ \frac{1}{3}>0\ ,\ \forall\ n_2\in\mathbb{N}\ ,\ \exists\ n_3>n_2\ :\ u_{n_3}\in B(x,\frac{1}{3})$$

....

$$\forall\ \frac{1}{K}>0\ ,\ \forall\ n_{K-1}\in\mathbb{N}\ ,\ \exists\ n_K>n_{K-1}\ :\ u_{n_k}\in B(x,\frac{1}{K})$$

....

وهكذا نجد أن (u_{n_k}) تشكل متتالية جزئية من (u_n) لأن :

$$1\leq n_1<n_2<\ldots<n_K<\ldots$$

ولدينا $(u_{n_k}\in B(x,\frac{1}{K})$ ولذلك فإن :

$$0\leq d(u_{n_k},x)<\frac{1}{K}$$

وعندما $K\to\infty$ نجد من مبرهنة الشطيرة أن :

$d(u_{n_k}, x) \to 0$ ولذلك فإن $u_{n_k} \to x$.

$\Leftarrow$: لنفرض أنه توجد متتالية (v_n) جزئية من (u_n) بحيث أن (v_n) تتقارب من النقطة x . ولتكن $0 < \varepsilon$ و $i \in \mathbb{N}$. ينتج عن المبرهنة 2.1 ، أن الكرة المفتوحة $B(x,\varepsilon)$ سوف تحوي جميع حدود (v_n) إلا عدداً منتهياً من هذه الحدود. لنفرض أن مجموعة الحدود التي تقع خارج الكرة $B(x,\varepsilon)$ هي :

$\{ v_{n1} , v_{n2} , \dots , v_{n_l} \}$

ليكن $h \in \mathbb{N}$ بحيث أن $h > \max\{n_l , i\}$ عندئذ يكون $v_h \in B(x,\varepsilon)$ و $h > i$ ، وبما أن (v_n) متتالية جزئية من (u_n) ، فإن $v_h = u_K$ حيث $K \geq h$.

إذاً : $u_K \in B(x,\varepsilon)$ حيث $K \geq h > i$. وهكذا نجد أنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \forall \ i \in N \ , \exists \ K > i \ : \ u_K \in B(x,\varepsilon)$$

وهذا يعني أن x نقطة لاصقة بالمتتالية (u_n) .

2.16 - ملاحظات وأمثلة:

1. إذا كانت x نقطة نهاية للمتتالية (u_n) ، فإن x نقطة لاصقة بـــ (u_n) ، ولكن العكس غير صحيح بشكل عام ، وذلك لأنه : إذا كانت x نقطة نهاية لـــ (u_n) فإنه توجد متتالية جزئية من (u_n) (وهي (u_n) نفسها) تتقارب نحو x ، ولذلك فإن x هي لاصقة بـــ (u_n) بحسب المبرهنة السابقة .

ولكن نلاحظ أن النقطة 1 ، ليست نقطة نهاية للمتتالية التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ في الفضاء العادي لـــ R ، في حين أن هذه النقطة هي نقطة لاصقة بهذه المتتالية ، لأنه توجد متتالية جزئية من (u_n) حدها العام $v_n = u_{2n}$ تتقارب نحو x .

2.17 - مبرهنة: مطلوب

إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) ، وكانت x نقطة من هذا الفضاء فإن : $x \in A'$ $\Leftrightarrow$ توجد متتالية من نقط $A \backslash \{x\}$ تتقارب نحو x .

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن $x \in A'$ فإن $B(x, \frac{1}{n}) \cap A\backslash\{x\} \neq \varnothing$ لكل $n \in N$.

لنأخذ $u_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A\backslash\{x\}$ من أجل كل $n \in N$ ، عندئذٍ نحصل على المتتالية (u_n) التي هي من $A\backslash\{x\}$ ، [لأن $u_n \in A\backslash\{x\}$] وهي تتقارب نحو x لأن :

$u_n \in B(x, \frac{1}{n})$ ولذلك فإن $0 \leq d(u_n , x) < \frac{1}{n}$ وبحسب مبرهنة الشطيرة نجد أن $d(u_n , x) \to 0$ وبالتالي $u_n \to x$.

$\Rightarrow$: لتكن (u_n) متتالية من نقط $A\backslash\{x\}$ تتقارب نحو x ، ولنبرهن على أن $x \in A'$: لتكن $B(x,\varepsilon)$ كرة مفتوحة مركزها x ، عندئذٍ ينتج عن الشرط (c) أنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \ n_0 \in N : \ \ n > n_0 \ \ \Rightarrow \ \ d(u_n , x) < \varepsilon$$

ومنه : $n > n_0 \Rightarrow u_n \in B(x,\varepsilon)$. ولما كان $u_n \in A\backslash\{x\}$ فإن :

$u_n \in B(x, \varepsilon) \cap A\backslash\{x\}$ أي أن : $B(x, \varepsilon) \cap A\backslash\{x\} \neq \varnothing$ وبالتالي : $x \in A'$.

2.18 - نتيجة:

إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) وكانت x نقطة من هـــذا الفضاء فإن : $x \in \bar{A}$ $\Leftrightarrow$ توجد متتالية من نقط A تتقارب نحو x .

البرهان :

$\Leftarrow$: نعلم أن $\bar{A} = A \cup A'$ ولذلك فإنه إذا كانت $x \in \bar{A}$ فإنه :

- إما $x \in A$ وبهذه الحالة نأخذ $u_n = x$ لكل $n \in N$ فنحصل على المتتالية (u_n) من نقط A تتقارب نحو x لأنها ثابتة .
- وإما $x \in A'$ وبهذه الحالة ينتج عن المبرهنة السابقة أنه توجد متتالية من نقط $A\backslash\{x\}$ ، المحتواة في A ، تتقارب نحو x .

$\Rightarrow$: لتكن (u_n) متتالية من نقط A تتقارب نحو x ، لتكن $B(x,\varepsilon)$ كرة مفتوحة مركزها x عندئذٍ ينتج عن الشرط (c) أنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \exists \quad n_o \in N : \quad n > n_o \quad \Rightarrow \quad d(u_n , x) < \varepsilon$$

ومنه : $n > n_o \Rightarrow u_n \in B(x,\varepsilon)$

وبالتالي : $u_n \in B(x,\varepsilon) \cap A$ أي أن $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ولذلك فإن $x \in \bar{A}$.

2.19 - نتيجة:

إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) فإن :

A مغلقة $\Leftrightarrow$ كل متتالية متقاربة من نقط A ، تكون نهايتها من A .

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن A مغلقة فإن $A = \bar{A}$. لتكن (u_n) متتالية من نقط A متقاربة نحو نقطة x ، عندئذٍ ينتج عن النتيجة السابقة أن $x \in \bar{A}$ وبالتالي $x \in A$.

$\Rightarrow$: لتكن $x \in \bar{A}$ عندئذٍ توجد متتالية (u_n) من نقط A تتقارب نحو x (بحسب النتيجة السابقة) ، ومن الفرض تكون $x \in A$. إذاً : $\bar{A} \subseteq A$ وبالتالي A مغلقة .

2.20 - ملاحظات وأمثلة:

1. من النتيجة 2.19 ، نجد أنه إذا وجدنا متتالية من نقط المجموعة A تتقارب إلى نقطة ليست من A ، فإننا نحكم على أن A ليست مغلقة .

<u>فمثلاً</u> : إن المجموعة $A = \{ (x,y) \in R^2 : x > 0 \}$ غير مغلقة في الفضاء الإقليدي (R^2 , d_e) ، لأن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ هي من نقط A وتتقارب إلى $x = (0 , 0)$ وهي ليست من A .

2. إن النقطة $x = (0,0)$ في المثال السابق هي من 'A ، لأن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ هي من نقط $A\backslash\{x\}$ وتتقارب نحو x .

3. إذا كانت $A =]1,2]$ من الفضاء العادي لـ R فإن $1 \in \bar{A}$ ، لأنه توجد متتالية حدها العام $u_n = \frac{n+1}{n}$ من نقط A تتقارب نحو 1 .

4. إذا كانت $A = \{ 1 , \frac{1}{2}, \frac{1}{3} , \dots , \frac{1}{n} , \dots \}$ مجموعة من (R,d_u) فإن $0 \in A'$ لأنه توجد متتالية حدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ من نقط $A \setminus \{0\}$ تتقارب نحو 0 .

5. إذا كانت (x_n) متتالية من فضاء متري بحيث أن $A = \{x_n\}$ مجموعة غير منتهية ، وبحيث أن $x_n \to x$ فإن $x \in A'$.

§3 - التقارب في بعض الفضاءات المترية .

أولاً: التقارب في الفضاءات الإقليدية (R^n,d_e) .

نعلم أن : $R^n = R \times R \times \dots \times R$ (n مرة)

ولذلك فإنه ، إذا كانت u نقطة من R^n فإن :

$u = (x_1 , x_2 , \dots , x_j , \dots, x_n)$ حيث $R \ni x_j$ من أجل $j = 1 , 2 , \dots , n$

وإذا كانت (u_i) متتالية من (R^n ,d_e) ، فإن الحد العام لهذه المتتالية هو :

$u_i = (x_{i1} , x_{i2} , \dots , x_{ij} , \dots, x_{in})$

وهكذا فإن الحدود المتتابعة لهذه المتتالية هي :

$$\begin{array}{l}
u_1 = (x_{11} , x_{12} , \dots , x_{1j} , \dots, x_{1n}) \\
u_2 = (x_{21} , x_{22} , \dots , x_{2j} , \dots, x_{2n}) \\
u_3 = (x_{31} , x_{32} , \dots , x_{3j} , \dots, x_{3n}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_i = (x_{i1} , x_{i2} , \dots , x_{ij} , \dots, x_{in}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

$$i \downarrow \infty$$

وهكذا فإنه من أجل $j = 1 , 2 , \dots , n$ نحصل على المتتاليات الحقيقية (x_{ij}) من الفضاء (R,d_u) التي نسميها **متتاليات المركبات** للمتتالية (u_i) .

3.1 - مبرهنة:

إذا كان $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in})$ حداً عاماً لمتتالية من الفضاء الإقليدي (R^n, d_e) وكانت $u = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ نقطة من (R^n, d_e) فإن :

$$u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} u \text{ في } (R^n, d_e) \iff x_{ij} \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j \text{ في } (R^n, d_e)$$

من أجل $j = 1, 2, \dots, n$.

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن $u_i \to u$ في (R^n, d_e) فإن $d_e(u_i, u) \to 0$ وبما أن :

$$\underset{\searrow 0}{0} \le d_u(x_{ij}, x_j) = |x_{ij} - x_j| = \sqrt{(x_{ij}-x_j)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-x_j)^2} = \underset{\swarrow 0}{d_e(u_i, u)}$$

فإنه ينتج عن مبرهنة الشطيرة أن $d_u(x_{ij}, x_j) \to 0$ ومعنى هذا أن $x_{ij} \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$ في (R, d_u) من أجل $j = 1, 2, \dots, n$.

$\Rightarrow$: بما أن $x_{ij} \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$ في (R, d_u) ، فإن $d_u(x_{ij}, x_j) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$

ومنه $|x_{ij} - x_j| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ ومنه $(x_{ij} - x_j)^2 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$

من أجل $j = 1, 2, \dots, n$ ولذلك $\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-x_j)^2} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ ، أي أن

$d_e(u_i, u) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ وبالتالي $u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ في الفضاء (R^n, d_e) .

3.2 - ملاحظات وأمثلة:

1. ينتج عن المبرهنة السابقة أن دراسة التقارب لمتتالية (u_i) في الفضاء الإقليدي (R^n, d_e) ، تعود لدراسة التقارب لـ n متتالية في الفضاء (R, d_u) ، هي متتاليات

المركبات للمتتالية (u_i) . فإذا كانت جميع متتاليات المركبات متقاربة فإننا نحكم على أن المتتالية (u_i) متقاربة وإن نهايتها هي النقطة التي إحداثياتها هي نهايات متتاليات المركبات على الترتيب . أما إذا كانت إحدى متتاليات المركبات لـ (u_i) متباعدة فإننا نحكم على أن المتتالية (u_i) متباعدة .

2. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ متقاربة في الفضاء الإقليدي (R^2, d_e) نحو النقطة $u = (0,0)$ لأنه في الفضاء (R, d_u) لدينا :

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{n^2} \to 0$$

3. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, (-1)^n, \frac{1}{n^2})$ متباعدة في الفضاء الإقليدي (R^3, d_e) لأن المركبة $(-1)^n$ متباعدة في الفضاء (R, d_u) كما نعلم .

ثانياً: التقارب في فضاء الضرب (الجداء) لفضاءات مترية :

ليكن (E_1, d_1) و (E_2, d_2) فضائين متريين ، ولتكن $E = E_1 \times E_2$ ولنعرف التطبيق $d : E \times E \to R^+ \cup \{0\}$ كما يلي :

إذا كانت $X = (x_1, x_2)$ و $Y = (y_1, y_2)$ نقطتين من E فإن :

$$d(X, Y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}$$

عندئذ نجد ، بسهولة ، أن d تطبيق مسافة على E . (عد إلى الأمثلة عن الفضاءات المترية في الفصل الأول) . نسمي (E,d) بفضاء الضرب (أو فضاء الجداء) للفضائين (E_1, d_1) و (E_2, d_2) .

بالأسلوب نفسه نعرف فضاء الضرب لـ n فضاء متري ، وإن دراسة التقارب في فضاءات الضرب ، تتم بنفس الأسلوب الذي سنقدمه فيما يلي عن دراسة التقارب في فضاء الضرب لفضائين متريين .

ليكن (E,d) فضاء الضرب للفضائين (E_1, d_1) و (E_2, d_2) ، عندئذ نلاحظ مايلي :

إذا كانت u نقطة من (E,d) فإن $u = (x_1, x_2)$ حيث $x_1 \in E_1$ و $x_2 \in E_2$ ،

وإذا كانت (u_n) متتالية من (E,d) فإن $u_n = (x_{n1}, x_{n2})$ ، وإن الحدود المتتابعة لهذه المتتالية هي :

$$u_1 = (x_{11}, x_{12})$$
$$u_2 = (x_{21}, x_{22})$$
$$u_3 = (x_{31}, x_{32})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n = (x_{n1}, x_{n2})$$

وهكذا نحصل على المتتالية (x_{n1}) من الفضاء (E_1 , d_1) والمتتالية (x_{n2}) من الفضاء (E_2 , d_2) .

3.3 - مبرهنة:

إذا كان $u_n = (x_{n1}, x_{n2})$ حداً عاماً لمتتالية من فضاء الضرب (E,d) للفضائين (E_1 , d_1) و (E_2 , d_2) ، وكانت $u = (x_1, x_2)$ نقطة من (E,d) فإن :

$$u_n \to u \text{ في } (E,d) \iff x_{n1} \to x_1 \text{ في } (E_1 , d_1)$$
$$\text{و } x_{n2} \to x_2 \text{ في } (E_2 , d_2)$$

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن $u_n \to u$ في (E,d) ، فإن $d(u_n , u) \to 0$ ، وبما أن :

$$0 \le d_1(x_{n1}, x_1) = \sqrt{d_1^2(x_{n1},x_1)} \le \sqrt{d_1^2(x_{n1},x_1)+d_2^2(x_{n2},x_2)} = d(u_n , u)$$

فإنه ينتج عن مبرهنة الشطيرة أن $d_1(x_{n1}, x_1) \to 0$

وبالتالي $x_{n1} \to x_1$ في (E_1 , d_1) وبالمثل نجد أن $x_{n2} \to x_2$ في (E_2 , d_2)

$\Rightarrow$: بما أن $x_{n1} \to x_1$ في (E_1 , d_1) و $x_{n2} \to x_2$ في (E_2 , d_2) فإن :

$d_1(x_{n1}, x_1) \to 0$ و $d_2(x_{n2}, x_2) \to 0$ ومنه نجد أن :

$$d(u_n , u) = \sqrt{d_1^2(x_{n1},x_1)+d_2^2(x_{n2},x_2)} \to 0$$

وهذا يعني أن $u_n \to u$ في الفضاء (E,d) .

3.4 - ملاحظات وأمثلة:

1. نعلم أن المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{1}{n}$ متقاربة في الفضاء العادي (R,d_u) نحو النقطة $x = 0$ ، وأن المتتالية التي حدها العام $y_n = 5$ متقاربة في الفضاء المبتذل (R,d_u) نحو النقطة $y = 5$ ، ولذلك فإن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, 5)$ متقاربة في فضاء الضرب $(R\times R , d)$ نحو النقطة $(0, 5)$.

2. إن المتتالية التي حدها العام $u_n=(1, (1+\frac{1}{n})^n)$ غير متقاربة في فضاء الضرب للفضائين (Q,d_u) و (N,d_u) لأن المتتالية التي حدها العام $(1+\frac{1}{n})^n$ غير متقاربة في الفضاء (Q,d_u) .

3. يمكن استنتاج مفهوم التقارب في الفضاءات الإقليدية (R^n, d_e) من مفهوم التقارب في فضاء الضرب ، على اعتبار أن (R^n, d_e) هو فضاء الضرب لـ (R,d_u) في نفسه n مرة .

ثالثاً: التقارب في فضاء هيلبرت L_2 : حذف

نعرف المجموعة L_2 كما يلي :

$$L_2 = \{ (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \text{ متتالية حقيقية تحقق } (x_n) \}$$

نعرف التطبيق $d : L_2 \times L_2 \to R$ كما يلي :

إذا كانت $x = (x_n)$ و $y = (y_n)$ نقطتين من L_2 فإننا نضع :

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$$

عندئذ نجد ، بسهولة ، أن d تطبيق مسافة على L_2 (راجع الأمثلة عن الفضاءات المترية في الفصل الأول) . نسمي (L_2 , d) بفضاء هيلبرت .

إذا كانت u نقطة من (L_2 , d) فإن $u = (x_1 , x_2 , \dots , x_n , \dots)$ حيث

$x_n \in R$ لكل $n \in N$ ، وإذا كانت (u_i) متتالية من (L_2 , d) فإن $u_i = (x_{i1} , x_{i2}, \ldots , x_{in} , \ldots)$ وهكذا ؛ فإنه من أجل $n \in N$ نحصل على المتتالية الحقيقية (x_{in}) من الفضاء (R,d_u) التي نسميها متتاليات المركبات للمتتالية (u_i) .

3.5 - مبرهنة:

إذا كان $u_i = (x_{i1} , x_{i2} , \ldots , x_{in} , \ldots)$ حداً عاماً لمتتالية من فضاء هيلبرت (L_2 , d) ، وكانت $u = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots)$ نقطة من (L_2 , d) فإن:

$u_i \xrightarrow[i \to \infty]{} u$ في (L_2 , d) $\not\Leftarrow$ $x_{in} \xrightarrow[i \to \infty]{} x_n$ في (R,d_u) من أجل $n = 1 , 2 , 3 , \ldots$.

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن $u_i \to u$ في (L_2 , d) فإن $d(u_i , u) \to 0$ ، وبما أن :

$$0 \le d_u(x_{in} , x_n) = | x_{in} - x_n | = \sqrt{(x_{in}-x_n)^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_{in}-x_n)^2} = d (u_i , u)$$

فإنه ينتج عن مبرهنة الشطيرة أن $d_u(x_{in} , x_n) \to 0$ ومعنى هذا أن $x_{in} \to x_n$ في (R,d_u) من أجل كل $n \in N$.

$\not\Rightarrow$: لبيان أن العكس غير صحيح ، بشكل عام ، نضرب المثال التالي :

نأخذ من الفضاء (L_2 , d) المتتالية (u_i) التي نعرف حدها العام كما يلي :

$u_1 = (1 , 0 , 0 , 0 , \ldots , 0 , \ldots)$
$u_2 = (0 , 1 , 0 , 0 , \ldots , 0 , \ldots)$
$u_3 = (0 , 0 , 1 , 0 , \ldots , 0 , \ldots)$
$u_4 = (0 , 0 , 0 , 1, \ldots , 0 , \ldots)$
....
$u_i = (0 , 0 , 0 , 0 , \ldots , 1 , \ldots)$
....

إن متتاليات المركبات لهذه المتتالية في (R,d_u) هي :

$$(x_{i1}) = (1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

$$(x_{i2}) = (0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

$$(x_{i3}) = (0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

$$\vdots$$

....

$$(x_{in}) = (0, 0, 0, 0, \dots, 1, \dots) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

....

أي أن $x_{in} \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$ لكل $n \in N$ في (R, d_u) ولكن $u_i \not\xrightarrow[i \to \infty]{} u$ حيث:

$u = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. لأن :

$$d(u_i, u) = \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + \dots + (1-0)^2 + (0-0)^2 + \dots} = 1 \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

3.6 - ملاحظات وأمثلة:

1 . إن المتتالية التي حدها العام $u_i = (\frac{1}{i}, 0, 0, 0, \dots)$ هي متتالية من

(L_2, d) لأن :

$$(\frac{1}{i})^2 + (0)^2 + (0)^2 + (0)^2 + \dots = (\frac{1}{i})^2 < \infty$$

ولذلك فإن $u_i \in L_2$ لكل $i \in N$ ، ولدينا :

$$(x_{i1}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{i}, \dots) \to 0$$

$$(x_{i2}) = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \to 0$$

$$(x_{i3}) = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \to 0$$

$$\vdots$$

....

$$(x_{in}) = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \to 0$$

كما أن $u_i \longrightarrow u$ حيث: $u = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ لأن :

رابعاً: التقارب $d(u_i, u)=\sqrt{(\frac{1}{i}-0)^2+(0-0)^2+(0-0)^2+\ldots}=\frac{1}{i}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$

في الفضاء العقدي (C,d) Convergence in Complex space

لنتذكر أن النقطة في المجموعة C هي من الشكل $z = x + y\,i$ ، حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$. ولنتذكر أن تطبيق المسافة $d : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ يعرف كما يلي : إذا كانت $X = a + b\,i$ و $Y = c + d\,i$ نقطتين من C فإن :

$$d(X, Y) = |X - Y| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

وإذا كانت (z_n) متتالية في الفضاء (C,d) فإن : $z_n = x_n + y_n\,i$ ، وعليه فإنه مقابل المتتالية (z_n) في الفضاء العقدي (C,d) ، لدينا متتاليتان (x_n) و (y_n) في الفضاء الحقيقي (R,d_u) .

3.7 - مبرهنة :

إذا كان $z_n = x_n + y_n\,i$ حداً عاماً لمتتالية من الفضاء العقدي(C,d) ، وكانت $z = x + y\,i$ نقطة في هذا الفضاء ، فإن :

$$z_n \longrightarrow z \text{ في } (\mathbb{C},d) \Leftrightarrow \begin{matrix} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{matrix} \text{ في } (R,d_u)$$

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن $z_n \longrightarrow z$ فإن $d(z_n, z) \longrightarrow 0$ وبما أن :

$$\underset{\searrow 0}{0} \le d_u(x_n, x) = |x_n - x| = \sqrt{(x_n-x)^2} \le \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} = \underset{\swarrow 0}{d(z_n, z)}$$

فإنه ينتج عن مبرهنة الشطيرة أن $d_u(x_n, x) \to 0$ وبالتالي فإن $x_n \longrightarrow x$ في

الفضاء (R,d_u) . وبالمثل نجد أن $y_n \longrightarrow y$ في الفضاء (R,d_u) .

$\Rightarrow$: بما أن $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ في الفضاء (R,d_u) ، فإن :

$$| x_n - x | = d_u(x_n , x) \to 0 \quad \text{و} \quad | y_n - y | = d_u(y_n , y) \to 0$$

ولذلك فإن $(x_n - x)^2 \to 0$ و $(y_n - y)^2 \to 0$

ومنه $d(z_n , z) = \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} \longrightarrow 0$ ومعنى هذا $z_n \longrightarrow z$ في الفضاء العقدي (C,d) .

3.8 - ملاحظات وأمثلة :

1. إن المتتالية التي حدها العام $z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} i$ متقاربة في الفضاء العقدي (C,d) نحو النقطة $z = 0 + i$ لأن $\frac{1}{n} \to 0$ و $\frac{n}{n+1} \to 0$ في الفضاء الحقيقي (R,d_u) .

2. إن التقارب في الفضاء العقدي (C,d) يماثل تماماً التقارب في الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) .

3. إن المتتالية التي حدها العام $z_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2} i$ ، متباعدة في الفضاء العقدي (C,d) لأن المتتالية التي حدها العام $(-1)^n$ ، متباعدة في الفضاء الحقيقي (R,d_u) .

§4 - متتاليات كوشي في الفضاءات المترية :

4.1 - تعريف :

لتكن (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) . نقول عن (u_n) إنها متتالية لكوشي إذا تحقق شرط كوشي التالي :

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \ , \ \exists \quad n_0(\varepsilon) \in N : \quad \begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(u_p , u_q) < \varepsilon$$

4.2 - ملاحظات وأمثلة:

1. يمكن أن نكتب شرط كوشي بالصيغة التالية :

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \ , \quad \exists \quad n_0(\varepsilon) \in N : \quad \begin{matrix} p > n_0 \\ q \geq 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(u_p , u_{p+q}) < \varepsilon$$

2. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ هي متتالية لكوشي في الفضاء (Q,d_u)

البرهان :

- إن المتتالية (u_n) متزايدة لأن :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = (\frac{n+1}{n} \times \frac{n-1}{n})^n \times (\frac{n}{n-1})$$

$$= (1 - \frac{1}{n^2})^n \ (\frac{n}{n-1})$$

واعتماداً على متراجحة برنوللي التي تقول :

إذا كانت $x \neq 0$ و $x > -1$ و $n > 1$ فإن $(1+x)^n > 1 + n\,x$ يكون :

$$(1 - \frac{1}{n^2})^n > 1 - \frac{n}{n^2} = \frac{n-1}{n}$$

ومنه نجد أن : $\frac{u_n}{u_{n-1}} > \frac{n-1}{n} . \frac{n}{n-1} = 1$ وبالتالي $u_n > u_{n-1}$

أي أن : $2 = u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} < u_n < \dots$

- إن المتتالية التي حدها العام $v_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ متناقصة ، لأن :

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{n^2}{n^2-1})^n \times (\frac{n}{n+1})$$

$$= (1+\frac{1}{n^2-1})^n \, (\frac{n}{n+1}) > (1+\frac{n}{n^2-1}) \quad (\frac{n}{n+1}) \;= \frac{n^3+n^2-1}{n^3+n^2-1-n} > 1$$

وبالتالي $v_{n-1} > v_n$ ، أي أن : $\dots < v_n < v_{n-1} < \dots < v_2 < v_1 = 4$

استناداً إلى الملاحظتين السابقتين ؛ وبفرض أن $r = p + q$ نجد أن :

$$d_u(u_p , u_r) = |\, u_p , u_r \,| = |\ (1+\frac{1}{r})^r - (1+\frac{1}{p})^p\ |$$

$$< (1+\frac{1}{r})^{r+1} - (1+\frac{1}{p})^p < (1+\frac{1}{p})^{p+1} - (1+\frac{1}{p})^p$$

$$= (1+\frac{1}{p})^p \times \frac{1}{p} < (1+\frac{1}{p})^{p+1} \times \frac{1}{p} < 4 \times \frac{1}{p} = \frac{4}{p}$$

فإذا أخذنا $n_o \ni N$ بحيث أن $\frac{4}{\varepsilon} \leq n_o$ نجد أن $\frac{4}{n_o} < \varepsilon$ وبالتالي :

$$p > n_o \ \& \ q \geq 1 \Rightarrow d_u(u_p , u_{p+q}) < \frac{4}{p} < \frac{4}{n_o} < \varepsilon$$

لكل $\varepsilon > 0$. وهذا يعني أن (u_n) متتالية لكوشي .

(لاحظ أن $u_m < v_n$ لكل n و m من N . برهن على ذلك كتمرين) .

3. إذا كانت (u_n) متتالية من الفضاء المبتذل (E,d_t) فإن :

(u_n) لكوشي $\Leftrightarrow$ (u_n) ثابتة .

لأن :

$\Rightarrow$: واضح .

$\Leftarrow$: بما أن (u_n) لكوشي فإنه من أجل $\varepsilon = 1$ ، يوجد $n_o \in N$ بحيث :

$$\begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \Rightarrow d_t(u_p , u_q) < 1 \Rightarrow d_t(u_p , u_q) = 0 \Rightarrow u_p = u_q$$

أي أن (u_n) ثابتة بدءً من n_o وما بعد .

4. إذا كان (E^*,d^*) فضاءً جزئياً من الفضاء (E,d) ، وكانت (u_n) متتالية من نقط (E^*,d^*) فإن : (u_n) لكوشي في (E^*,d^*) $\Leftrightarrow$ (u_n) لكوشي في (E,d) .

لأن $d^*(u_p , u_q) = d(u_p , u_q)$ بحسب تعريف الفضاء الجزئي .

4.3 - مبرهنة :

إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) فإن :

(u_n) متقاربة في (E,d) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ (u_n) لكوشي في (E,d) .

البرهان :

$\Rightarrow$: لنفرض أن (u_n) متقاربة في (E,d) نحو النقطة u ، ولتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ وينتج عن الشرط (c) أنه :

$$\forall \ \frac{\varepsilon}{2} > 0 , \ \exists \ \ n_o \in N \quad : \ p > n_o \ \Rightarrow \ d(u_p , u) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$q > n_o \ \Rightarrow \ d(u_q , u) < \frac{\varepsilon}{2}$$

واعتماداً على المتراجحة المثلثاتية نجد :

$$\begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \ \Rightarrow \ d(u_p , u_q) \le d(u_p , u) + d(u , u_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذاً :

$$\forall \ \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \ n_o \in N : \ \begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \ \Rightarrow \ d(u_p , u_q) < \varepsilon$$

وبالتالي فإن المتتالية (u_n) تحقق شرط كوشي ، فهي لكوشي .

$\not\Leftarrow$: للبرهان على هذا ؛ يكفي أن نعطي مثالاً عن متتالية لكوشي ، ولكنها غير متقاربة . لتكن $E =]\,0 , 1\,]$ ولنعتبر الفضاء (E,d_u) .

إن المتتالية التي حدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ هي متتالية لكوشي في (E,d_u) لأن :

لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ولذلك فإنه يوجد $n_o \in N$ بحيث أن :

$0 < \frac{1}{n_o} < \frac{\varepsilon}{2}$ ، ومنه نجد أن :

$$\begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{p} < \frac{1}{n_o} \\ \frac{1}{q} < \frac{1}{n_o} \end{matrix} \Rightarrow \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \le \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right| = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{n_o} + \frac{1}{n_o} < \varepsilon$$

أي أن (u_n) تحقق شرط كوشي ، فهي لكوشي في (E,d_u) . ولكن هذه المتتالية غير متقاربة في هذا الفضاء ، لأنه : لو فرضنا جدلاً أن هذه المتتالية متقاربة في (E,d_u) نحو نقطة $u \in E$ ، لكانت هذه المتتالية متقاربة نحو u في (R,d_u) بحسب 2) من 2.5 ، ولكننا نعلم أن هذه المتتالية تتقارب نحو 0 في الفضاء (R,d_u) ، ولما كانت نهاية المتتالية المتقاربة وحيدة ، فإن $u = 0$ وهذا يعني أن $0 \in E$ ، وهذا غير صحيح .

إذاً : (u_n) غير متقاربة في (E,d_u) .

4.4 - ملاحظات وأمثلة:

1. إذا كان (E^*,d^*) فضاءً جزئياً من (E,d) ، وكانت (u_n) متتالية متقاربة في (E,d) فإنها تكون لكوشي في (E,d) بحسب المبرهنة السابقة ، وبالتالي فإنها تكون لكوشي في (E^*,d^*) بحسب 4) من 4.2 .

فمثلاً : إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ، هي متتالية من الفضاء (Q,d_u) ، الجزئي من (R,d_u) ، وهي غير متقاربة في (Q,d_u) ، ولكنها متقاربة في (R,d_u) نحو النقطة e ، ولذلك فهي لكوشي في (Q,d_u) .

2. لنعتبر الفضاء (E^*,d^*) ، الجزئي من الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) ، حيث $E^* =]\,1,3\,] \times Q$. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{n+1}{n}, (1 + \frac{1}{n})^n)$ ، هي من نقط (E^*,d^*) ، وهي متقاربة في (R^2,d_e) نحو النقطة $u = (1,e)$ بحسب المبرهنة 3.1 ، وهذه النقطة لا تنتمي إلى E^* ، كما هو واضح . بحسب الملاحظة 1 السابقة، نجد أن هذه المتتالية هي متتالية لكوشي في (E^*,d^*) .

3. إذا كانت (u_n) متتالية من الفضاء المبتذل (E,d_t) فإننا نستطيع أن نرى بسهولة أن:

(u_n) لكوشي $\Leftrightarrow$ (u_n) ثابتة .

4.5 - مبرهنة:

إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) فإن :

$$(u_n) \text{ لكوشي } \underset{\not\Rightarrow}{\Rightarrow} (u_n) \text{ محدودة }.$$

البرهان :

$\Rightarrow$: لتكن $A = \{u_n\}$ ، ولنبرهن على أن المجموعة A محدودة .

بما أن (u_n) متتالية لكوشي ، فإنه من أجل $\varepsilon = 1$ ، يوجد $n_0 \in N$ بحيث أن :

$$\begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(u_p , u_q) < 1$$

ومنه $d(u_{n_0+1} , u_q) < 1$ لكل $n_0 < q$ ، أي أن $u_q \in B(u_{n_0+1} , 1)$ لكل $n_0 < q$

لتكن : $C = \{ u_1 , u_2 , \dots , u_{n_0} \}$ و $D = \{ u_{n_0+1} , u_{n_0+2} , u_{n_0+3} , \dots \}$

عندئذ نجد أن $A = C \cup D$ ، وإن C مجموعة محدودة لأنها منتهيــة ، وإن D مجموعة محدودة لأن $D \subseteq B(u_{n_0+1} , 1)$ ولذلك فإن A مجموعة محــدودة ، لأنهــا اجتماع لمجموعتين محدودتين .

$\not\Leftarrow$: للبرهان على هذا الاتجاه ، يكفي أن نعطي مثالاً عن متتالية محدودة وليســت لكوشي :

إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ ، في الفضاء (R,d_u) ، هي متتالية محدودة لأن $\{u_n\} = \{ -1 , +1 \}$ ، ولكن هذه المتتالية ليست لكوشي في (R,d_u) لأنه ؛ إذا أخذنا $\varepsilon = 1$ فإننا نجد أنه لكل $n_0 \in N$ يوجد $n_0 < p = n_0 + 1$ ، ويوجد $n_0 < q = n_0 + 2$ بحيث أن :

$$\begin{aligned} d(u_p , u_q) = | u_{n_0+1} - u_{n_0+2} | &= | (-1)^{n_0+1} - (-1)^{n_0+2} | \\ &= | (-1)^{n_0+1} | . | 1 - (-1) | = 2 > \varepsilon \end{aligned}$$

4.6 - ملاحظات وأمثلة :

1. نستنتج من المبرهنة 4.3 ومن المبرهنة 4.5 أنه إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة ، فــإن (u_n) محدودة ، وهذا ما رأيناه في المبرهنة 2.7 .

4.7- مبرهنة:

إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) ،وكانت (v_n) متتالية جزئية من (u_n) فإن :

$$(u_n) \text{ لكوشي } \underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} (v_n) \text{ لكوشي .}$$

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذٍ ينتج عن كون (u_n) لكوشي أنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \quad n_0 \in N : \begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(u_p , u_q) < \varepsilon$$

وبما أن (v_n) متتالية جزئية من (u_n) فإن :

$$\begin{aligned} v_p &= u_m \ : \ m \geq p > n_0 \\ v_q &= u_r \ : \ r \geq q > n_0 \end{aligned}$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(v_p , v_q) = d (u_m , u_r) < \varepsilon$$

وبالتالي فإن المتتالية (v_n) تحقق شرط كوشي فهي لكوشي .

$\not\Rightarrow$: للبرهان على هذا الاتجاه ، نضرب مثالاً :

إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (-1)^n$ ، ليست لكوشي (كما رأينا في برهان 4.5) .

ولكن المتتالية (v_n) ، الجزئية منها ، المعرفة بـ $v_n = u_{2n} = 1$ لكل $n \ni N$ ، هي متتالية ثابتة ، فهي متقاربة ، وبالتالي فهي لكوشي .

4.8 - مبرهنة :

إذا كانت (u_n) متتالية لكوشي من فضاء متري (E,d) ، وكانت (v_n) متتالية جزئية من (u_n) فإن : $\quad v_n \to u \quad \Leftrightarrow \quad u_n \to u$

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذٍ ينتج عن كون (u_n) لكوشي أن :

$$\forall \ \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ , \ \exists \quad n_1 \in N \ : \ \begin{matrix} p > n_1 \\ q > n_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(u_p , u_q) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

وبما أن $v_n \to u$ فإنه :

$$\forall \ \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ , \ \exists \ n_2 \in N \ : \ n > n_2 \quad \Rightarrow \quad d(v_n , u) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

لتكن $n_o = \max\{n_1, n_2\}$ ، عندئذ نجد ، من المتراجحة المثلثاتية ، أن :

$$n > n_o \ \Rightarrow \ d(u_n , u) \leq d(u_n , v_n) + d(v_n , u)$$

حيث من (2) نجد أن $d(v_n , u) < \frac{\varepsilon}{2}$ لأن $n > n_o \geq 2$ ، ثم إنه ينتج عن كون (v_n) متتالية جزئية من (u_n) أن : $v_n = u_m$ حيث أن $n < m$ ولذلك فإن $d(u_n , v_n) = d(u_n , u_m)$ حيث $n > n_o \geq n_1$ و $m \geq n > n_o \geq n_1$

ولذلك ينتج عن (1) أن : $d(u_n , v_n) = d(u_n , u_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ ولذلك فإن :

$$n > n_o \ \Rightarrow \ d(u_n , u) \leq d(u_n , v_n) + d(v_n , u) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهكذا نجد أنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ n_o \in N \ : \ n > n_o \ \Rightarrow \ d(u_n , u) < \varepsilon$$

أي أن (u_n) تحقق الشرط (c) ، ولذلك فإن $u_n \to u$.

$\Rightarrow$: هذا الاتجاه ينتج عن المبرهنة 2.10 .

4.9 - ملاحظات وأمثلة :

1. نستنتج من المبرهنة السابقة أنه إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة ، في فضاء متري (E,d) ، وكانت (u_n) تحوي متتالية جزئية (v_n) متقاربة ، فإننا نحكم على أن (u_n) ليست لكوشي .

فمثلاً : في الفضاء (R,d_u) ، نعلم أن المتتالية التي حدها العام $u_n = Sin n\frac{\pi}{2}$ ، متباعدة (راجع 2 من 2.11) ، ولكن هذه المتتالية تحوي على المتتالية الجزئية (v_n) التي حدها العام معرف بـ $v_n = u_{2n} = 0$ لكل n ، وهي متقاربة نحو النقطة 0 .

إذاً : (u_n) ليست لكوشي .

2. إذا وجدنا في المتتالية (u_n) متتاليتين ، تتقاربان إلى نهايتين مختلفتين ، فإننا نحكم على

أن (u_n) ليست لكوشي ، لأن (u_n) تكون متباعدة (بحسب 3 من 2.11) وتحوي متتالية جزئية متقاربة .

محذوف فمثلاً : المتتالية التي حدها العام $u_n = ((-5)^n, (-3)^n)$ ، في الفضاء الإقليدي (R^2,d_e)، ليست لكوشي ، لأنها تحوي على المتتاليتين الجزئيتين (v_n) و (W_n) حيث :

$$v_n = u_{2n} = ((-5)^{2n}, (-3)^{2n}) = (5,3) \rightarrow (5,3)$$

$$W_n = u_{2n+1} = ((-5)^{2n+1}, (-3)^{2n+1}) = (-5,-3) \rightarrow (-5,-3)$$

الباقي مطلوب

4.10 - مبرهنة :

إذا كانت (u_n) متتالية لكوشي من فضاء متري (E,d) وكانت (v_n) متتالية من (E,d) ، تحقق : $d(u_n,v_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ، فإن (v_n) لكوشي .

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $0 < \frac{\varepsilon}{3}$. بما أن (u_n) لكوشي فإنه :

$$\forall\ \frac{\varepsilon}{3} > 0\ ,\ \exists\ \ n_1 \in N\ :\ \begin{matrix} p > n_1 \\ q > n_1 \end{matrix}\ \Rightarrow\ d(u_p, u_q) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

وبما أن $d(u_n, v_n) \rightarrow 0$ ، فإنه :

$$\forall\ \frac{\varepsilon}{3} > 0\ ,\ \exists\ \ n_2 \in N\ :\ n > n_2\ \Rightarrow\ d(u_n, v_n) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

لتكن $n_o = \max\{n_1,n_2\}$ عندئذ نجد أن :

$$\begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{aligned} d(v_p, v_q) &\le d(v_p, u_q) + d(u_p, v_q) \\ &\le d(v_p, u_q) + d(u_p, u_q) + d(u_q, v_q) \end{aligned}$$

من (1) نجد أن $d(u_p, u_q) < \frac{\varepsilon}{3}$ ومن (2) نجد أن $d(v_p, u_p) < \frac{\varepsilon}{3}$ كما أن $d(u_q, v_q) < \frac{\varepsilon}{3}$ ، ولذلك فإنه من أجل $\begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix}$ لدينا :

$$d(v_p, v_q) \le d(v_p, u_p) + d(u_p, v_q) + d(u_q, v_q) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

أي أن المتتالية (v_n) تحقق شرط كوشي .

4.11 - ملاحظات وأمثلة :

1. نعلم أن المتتالية التي حدها العام $u_n=(1+\frac{1}{n})^n$ ، هي متتالية لكوشي في الفضاء (Q,d_u) . لنعتبر المتتالية التي حدها العام $v_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ في هذا الفضاء . نلاحـــظ أن:

$$d_u(v_n , u_n) = \left| (1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n \right|$$
$$= (1+\frac{1}{n})^n . \left| (1+\frac{1}{n}) - 1 \right|$$
$$= (1+\frac{1}{n})^n . \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e . 0 = 0$$

إذن (v_n) هي متتالية لكوشي في (Q,d_u) .

*** متتاليات كوشي في الفضاءات الإقليدية (R^n,d_e) .**

4.12 - مبرهنة :

إذا كان $u_i = (x_{i1} , x_{i2} , \dots , x_{ij} , \dots , x_{in})$ ، حداً عاماً لمتتاليـــة مـــن الفضاء الإقليدي (R^n , d_e)، فإن:

(u_i) متتالية لكوشي في (R^n , d_e) $\Leftrightarrow$ (x_{ij}) متتالية لكوشي في (R , d_u) من أجل $j = 1 , 2 , \dots , n$

البرهان:

$\Leftarrow$: لتكن $\varepsilon > 0$. بما أن (u_i) لكوشي في (R^n , d_e) ، فإنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 , \ \exists \ i_0 \in N : \ \begin{matrix} p > i_0 \\ q > i_0 \end{matrix} \Rightarrow d_e(u_p , u_q) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{pj}-x_{qj})^2} < \varepsilon$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{matrix} p > i_o \\ q > i_o \end{matrix} \Rightarrow d_u(x_{pj}, x_{qj}) = |x_{pj} - x_{qj}| = \sqrt{(x_{pj}-x_{qj})^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{pj}-x_{qj})^2} < \varepsilon$$

وهذا يعني أن المتتالية (x_{ij}) لكوشي في الفضـــاء (R, d_u) ، مـــن أجـــل $j = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow$: لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $0 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. بما أن (x_{ij}) لكوشي في (R, d_u) من أجل $j = 1, 2, \dots, n$ ، فإنه :

$$\forall \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0 \ , \ \exists \ i_j \in N : \begin{matrix} p > i_j \\ q > i_j \end{matrix} \Rightarrow d_u(x_{pj}, x_{qj}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow |x_{pj} - x_{qj}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

لتكن $i_o = \max\{ i_j : j = 1, 2, \dots, n \}$ ، عندئذ نجد أن :

$$\begin{matrix} p > i_o \\ q > i_o \end{matrix} \Rightarrow |x_{pj} - x_{qj}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad \forall \ j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow (x_{pj} - x_{qj})^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} \qquad \forall \ j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow (x_{pj} - x_{qj})^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} \qquad \forall \ j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}(x_{pj}-x_{qj})^2 < n.\frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{pj}-x_{qj})^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d_e(u_p, u_q) < \varepsilon$$

إذاً :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ i_o \in N : \begin{matrix} p > i_o \\ q > i_o \end{matrix} \Rightarrow d_e(u_p, u_q) < \varepsilon$$

وهذا يعني أن (u_i) متتالية لكوشي في (R^n, d_e) .

4.13 - ملاحظات وأمثلة :

1. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, (-1)^n, \frac{1}{n^2})$ ، ليست لكوشي في الفضاء الإقليدي (R^3, d_e) ، وذلك لأن المتتالية التي حدها العام $(-1)^n$ ، ليست لكوشي في (R, d_u) ، (نستطيع أن نرى ذلك بسهولة من 1 في 4.9) .

2. إن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, (1+\frac{1}{n})^{n+1})$ ، هي متتالية لكوشي في الفضاء الإقليدي (R^2, d_e) ، لأن المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n}$ لكوشي في (R, d_u) لكونها متقاربة فيه ،كما أن المتتالية التي حدها العام $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ لكوشي في (Q, d_u) بحسب 1 من 4.11 ، ولذلك فهي لكوشي في (R, d_u) بحسب 4 من 4.2 .

خطأ ×

*** متتاليات كوشي في فضاءات الضرب .**

4.14 - مبرهنة :

إذا كان $u_n = (x_{n1}, x_{n2})$ ، حداً عاماً لمتتالية من فضاء الضرب (E,d) ، للفضائين (E_1, d_1) و (E_2, d_2) فإن :

(u_n) لكوشي في (E,d) $\Leftrightarrow$ (x_{nj}) لكوشي في (E_j, d_j) حيث $j = 1, 2$

البرهان:

$\Leftarrow$: لتكن $\varepsilon > 0$ ، بما أن (u_n) لكوشي في (E, d) فإنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ n_0 \in N \ : \quad \begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{d_1^2(x_{p1}, x_{q1}) + d_2^2(x_{p2}, x_{q2})} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d_1(x_{p1}, x_{q1}) = \sqrt{d_1^2(x_{p1}, x_{q1})} \le \sqrt{d_1^2(x_{p1}, x_{q1}) + d_2^2(x_{p2}, x_{q2})} < \varepsilon$$

إذاً :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ n_0 \in N \ : \quad \begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d_1(x_{p1}, x_{q1}) < \varepsilon$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \ n_0 \in N :\ \begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \Rightarrow\ d_1(x_{p1}\ ,\ x_{q1}) < \varepsilon$$

وهذا يعني أن (x_{n1}) متتالية لكوشي في $(E_1\ ,\ d_1)$. وبالمثـــل نجـــد أن (x_{n2}) متتاليـــة لكوشي في $(E_2\ ,\ d_2)$.

$\Rightarrow$: لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $0 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. بما أن (x_{n1}) متتالية لكوشي في $(E_1\ ,\ d_1)$

فإنه :

$$\forall\ \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0\ \ \exists\ \ n_1 \in N :\ \begin{matrix} p > n_1 \\ q > n_1 \end{matrix}\ \Rightarrow\ d_1(x_{p1}\ ,\ x_{q1})\ < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ \ d_1^2(x_{p1}, x_{q1}) < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

وبما أن (x_{n2}) متتالية لكوشي في $(E_2\ ,\ d_2)$ فإنه :

$$\forall\ \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0\ \ ,\ \exists\ \ n_2 \in N :\ \ \begin{matrix} p > n_2 \\ q > n_2 \end{matrix}\ \Rightarrow\ d_2(x_{p2}\ ,\ x_{q2})\ < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\ d_2^2(x_{p2}, x_{q2}) < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ليكن $n_0 = \max\{\ n_1\ ,\ n_2\ \}$ ، عندئذ نجد أن :

$$\begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix}\ \ \Rightarrow\ \ d_2^2(x_{p2}, x_{q2}) < \frac{\varepsilon^2}{2}\ \ \&\ \ d_1^2(x_{p1}, x_{q1}) < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ \ d_1^2(x_{p1}, x_{q1}) + d_2^2(x_{p2}, x_{q2}) < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow\ \ \sqrt{d_1^2(x_{p1}\ ,\ x_{q1}) + d_2^2(x_{p2}\ ,\ x_{q2})} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \ d(u_p\ ,\ u_q) < \varepsilon$$

إذاً :

$$\forall\ \ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \ n_0 \in N\ \ :\ \begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix}\ \ \Rightarrow\ \ d(u_p\ ,\ u_q) < \varepsilon$$

وهذا يعني أن (u_n) متتالية لكوشي في (E,d) .

4.15 - ملاحظات وأمثلة:

1. يمكن تعميم المبرهنة السابقة على فضاء الضرب لـــ n من الفضاءات المترية .

2. إن المتتالية التي حدها العام $u_n=(5,(1+\frac{1}{n})^n)$ ، هي متتالية لكوشي في فضــاء الضرب $(R\times Q\ ,\ d)$ ، للفضائين (R,d_t) و (Q,d_u) ، لأن المتتالية التي حدها العام 5 ، هي متتالية لكوشي في الفضاء المبتذل (R,d_t) ، لكونها ثابتة . كما أن المتتالية التي حدها العام $(1+\frac{1}{n})^n$ ، هي متتالية لكوشي في الفضاء (Q,d_u) ، كما رأينــا في 2 من 4.1 .

3. إن المتتالية التي حدها العام $u_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ ، ليست لكوشي في فضــاء الضــرب $(R\times R\ ,\ d)$ للفضائين (R,d_t) و (R,d_u) ، لأن المتتالية التي حــدها العــام $\frac{1}{n}$ ، ليست لكوشي في (R,d_t) ، لأنها غير ثابتة (انظر 3 من 4.2) .

*** متتاليات كوشي في فضاء هيلبرت .**

4.16 - مبرهنة:

إذا كان $u_i = (x_{i1}\ ,\ x_{i2}\ ,\ \dots\ ,\ x_{in}\ ,\ \dots)$ حداً عاماً لمتتالية من فضاء هيلبرت (L_2,d) فإن : (u_i) لكوشي في (L_2,d) $\Leftarrow$ (x_{jn}) لكوشي في $(R\ ,\ d_u)$ من أجل $n=1\ ,2\ ,3\ ,\dots$

$$\not\Rightarrow$$

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن $\varepsilon>0$. بما أن (u_i) لكوشي ؛ فإنه :

$$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ \ i_0\in N\ \ :\ \ \begin{matrix} p>i_0 \\ q>i_0 \end{matrix}\ \Rightarrow\ d(u_p\ ,u_q)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_{pn}-x_{qn})^2}<\varepsilon$$

وبما أن : $d_u(x_{pn}\ ,\ x_{qn}) = |\,x_{pn}-x_{qn}\,| = \sqrt{(x_{pn}-x_{qn})^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_{pn}-x_{qn})^2}$

فإن :
$$\begin{matrix} p > i_o \\ q > i_o \end{matrix} \Rightarrow d_u(x_{pn}, x_{qn}) < \varepsilon$$

وبالتالي (x_{in}) هي متتالية لكوشي ، من أجل $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\Leftarrow$: للبرهان على هذا الاتجاه ، يكفي أن نضرب مثلاً على متتالية من الفضاء (L_2, d) ، ليست لكوشي ، ولكن متتاليات المركبات فيها كلها لكوشي ، فنأخذ المتتالية (u_i) التي حدها العام يعرف كما يلي :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, \ldots) \\ u_2 &= (0, 1, 0, \ldots) \\ u_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_i &= (0, 0, 0, \ldots, 1, \ldots) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

فقد رأينا في البرهان على 3.5 ، أن متتاليات المركبات (x_{in}) ، لهذه المتتالية ، كلها متقاربة ولذلك فهي لكوشي في (R, d_u) ، ولكن المتتالية (u_i) ليست لكوشي (L_2, d)، لأنه لكل $p \neq q$ لدينا $d(u_p, u_q) = \sqrt{2}$ ، فلو أخذنا $\varepsilon = 1$ لوجدنا أنه : أياً كانت $i_o \in N$ فإنه يوجد $\begin{matrix} p > i_o \\ q > i_o \end{matrix}$ بحيث أن $d(u_p, u_q) > \varepsilon$.

حذف

*** متتاليات كوشي في الفضاء العقدي (C, d).**

4.17 - مبرهنة:

إذا كان $u_n = a_n + b_n i$ حداً عاماً لمتتالية من الفضاء العقدي (C, d) فإن :

(u_n) لكوشي في (C, d) $\Leftrightarrow$ (a_n) و (b_n) لكوشي في (R, d_u) .

البرهان:

$\Leftarrow$: لتكن $0 < \varepsilon$. بما أن (u_n) لكوشي في (C, d) فإنه :

$$\forall \ \varepsilon > 0 , \ \exists \ n_o \in N : \begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \Rightarrow d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a_p-a_q)^2+(b_p-b_q)^2} < \varepsilon$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \Rightarrow d_u(a_p , a_q) = | a_p - a_q | = \sqrt{(a_p-a_q)^2} \leq \sqrt{(a_p-a_q)^2+(b_p-b_q)^2} < \varepsilon$$

وهذا يعني أن المتتالية (a_n) لكوشي في (R , d_u) . وبالأسلوب نفسه ، نبرهن على أن المتتالية (b_n) لكوشي في (R , d_u) .

⇐ : لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $0 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. بما أن (a_n) و (b_n) لكوشي في (R , d_u)

$$\forall \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0 \ , \ \exists \ \ n_1 \in N : \begin{matrix} p > n_1 \\ q > n_1 \end{matrix} \ \Rightarrow \ d_u(a_p , a_q) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \ (a_p - a_q)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

وكذلك فإن :

$$\forall \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0 , \ \exists \ \ n_2 \in N : \ \begin{matrix} p > n_2 \\ q > n_2 \end{matrix} \ \Rightarrow \ d_u(b_p , b_q) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \ (b_p - b_q)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ليكن $n_o = \max\{ n_1 , n_2 \}$ ، عندئذ نجد أن :

$$\begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \ \Rightarrow \ (b_p - b_q)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \ \ \& \ \ (a_p - a_q)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{(a_p-a_q)^2+(b_p-b_q)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \ d(u_p , u_q) < \varepsilon$$

إذاً :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \ n_o \in N \ : \ \begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \ \Rightarrow \ d(u_p , u_q) < \varepsilon$$

وهذا يعني أن (u_n) متتالية لكوشي في (C,d) .

§5 - الفضاءات المترية التامة :

رأينا في الفقرة السابقة أنه في كل فضاء متري (E,d) لدينا :

$$(u_n) \text{ متتالية متقاربة } \underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} (u_n) \text{ لكوشي}$$

5.1 - تعريف (الفضاء التام) :

نقول عن فضاء متري (E,d) إنه فضاء تام ، إذا كانت كل متتالية لكوشي في (E,d) متقاربة فيه .

5.2 - ملاحظات وأمثلة :

1. ينتج عن التعريف السابق أنه ؛ إذا كان الفضاء المتري (E,d) تاماً ، وكانت (u_n) متتالية من (E,d) ، فإن : (u_n) لكوشي $\Leftrightarrow$ (u_n) متقاربة .

2. إن الفضاء (Q,d_u) هو فضاء غير تام، لأن المتتالية التي حدها العام $u_n=(1+\frac{1}{n})^n$ هي متتالية لكوشي وغير متقاربة فيه .

3. إن الفضاء المبتذل (E,d_t) هو فضاء تام ، لأنه إذا كانت (u_n) متتالية لكوشي في (E,d_t) ، فإن (u_n) ثابتة (بحسب 3 من 4.2) ، ولذلك فإن (u_n) متقاربة (بحسب 5 من 1.3) .

4. إذا كانت $E =]\,0\,,\,1\,]$ ، واعتبرنا الفضاء (E,d_u) ، الجزئي من (R,d_u) ، فإن فضاء الضرب $(R\times E\,,\,d)$ للفضائين (R,d_u) و (E,d_u) ، ليس تاماً ، لأن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ ، هي متتالية لكوشي في هذا الفضاء ، وذلك لأن المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n}$ هي متتالية لكوشي في (R,d_u) ، لكونها متقاربة فيه . كما أن المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n}$ هي متتالية لكوشي في الفضاء (E,d_u) ، بحسب ما رأينا في البرهان على 4.3 . وبحسب 4.14 تكون (u_n) لكوشي في فضاء الضرب $(R\times E,\ d)$.
ولكن المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n}$ ، غير متقاربة في الفضاء (E,d_u) ، بحسب 2.5.

ولذلك فإن (u_n) غير متقاربة في فضاء الضرب $(R\times E , d)$ ، بحسب المبرهنة 3.3 .

5. إذا كانت E مجموعة منتهية ، فإن الفضاء (E,d) هو فضاء تام أياً كانت المسافة d.

البرهان :

لتكن (u_n) متتالية لكوشي في الفضاء (E,d) ، عندئذ ينتج عن كون E مجموعة منتهية أن $\{u_n\}$ مجموعة منتهية ، ولذلك فإن (u_n) تحوي متتالية جزئية متقاربة ، بحسب 4 من 2.13 . وبما أن (u_n) لكوشي فإن (u_n) متقاربة ، بحسب 4.8 ، وبالتالي فإن الفضاء (E,d) تام .

6. سوف نبرهن بعد قليل أن الفضاء العادي لـ R هو فضاء تام ، ومن أجل ذلك نمهد بالمبرهنتين التاليتين :

5.3 - مبرهنة (المجالات المتداخلة) : حذف

إذا كانت :

$$I_1 = [a_1 , b_1] \ , \ I_2 = [a_2 , b_2] \ , \ \dots \ , \ I_n = [a_n , b_n] \ , \ \dots$$

مجالات مغلقة من R بحيث أن : $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$

فإن $\bigcap\limits_{n\in N} I_n \neq \phi$

البرهان:

في البداية نلاحظ أنه ، إذا كان s و r من N بحيث أن $r \le s$ فإن $a_r \le a_s$ و $b_s \le b_r$ ، وينتج عن هذا أنه أياً كان n و m من N فإن $a_n \le b_m$ لأنه :

إذا كان $n \le m$ فإن $a_n \le a_m \le b_m$ ، وإذا كان $m < n$ فإن $a_n \le b_n < b_m$ ، وينتج عن هذا أنه لو وضعنا :

$$A = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots \} \quad \text{و} \quad B = \{ b_1 , b_2 , b_3 , \dots , b_n , \dots \}$$

لوجدنا أن كل عنصر من عناصر B هو حد أعلى للمجموعة A ، وأن كل عنصر من

عناصر A هو حد أدنى للمجموعة B .

ليكن $p = \sup A$ ($\sup A$ موجود لأن A محدودة من الأعلى)، عندئـذٍ ينـتج عما تقدم ، وعن تعريف sup ، أن : $a_n \le p \le b_n$ لكل $n \ni N$ ومنـه $p \in I_n$ لكل $n \ni N$ ، أي أن $p \in \bigcap_{n\in N} I_n$ ، وبالتالي $\bigcap_{n\in N} I_n \ne \phi$.

5.4 - مبرهنة (بولزانو ــ وايرشتراس):

إذا كانت A مجموعة جزئية من R ، محدودة وغير منتهية ، فإن $A' \ne \varnothing$.

البرهان:

بما أن A محدودة ، فإنه يوجد مجال $I_1 = [a_1 , b_1]$ مـن R بحيـث يكـون $A \subseteq I_1$.

لنفرض أن طول المجال I_1 هو $L = |I_1|$ ، ولتكن x_1 نقطة المنتصف للمجـال I_1 .

بما أن A غير منتهية ، فإن أحد المجالين $[a_1 , x_1]$ و $[x_1 , b_1]$ سوف يحوي على عدد غير منته من نقط A ، ولنرمز لهذا المجال بـ $I_2 = [a_2 , b_2]$. إن $I_2 \subset I_1$ و $|I_2| = \frac{L}{2}$

لتكن x_2 نقطة المنتصف للمجال I_2 ، عندئذٍ يكون أحد المجالين $[a_2 , x_2]$ و $[x_2 , b_2]$ حاوياً على عدد غير منته من نقط A ، ولنرمز لهذا المجال بـ $I_3 = [a_3 , b_3]$.

إن $I_3 \subset I_2 \subset I_1$ و $|I_3| = \frac{l}{2^2}$ ؛ نتابع التجزيء ، فنحصل على سلسلة من المجالات المغلقة والمتداخلة من R هي :

$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$

بحيث أن $|I_n| = \frac{l}{2^{n-1}}$ وإن I_n يحتوي على عدد غير منته من نقط A ، وذلك لكل $n \ni N$. واعتماداً على مبرهنة المجالات المتداخلة السابقة ، فإنه يوجد نقطة p بحيث أن $p \in \bigcap_{n\in N} I_n$. لنبرهن على أن $p \in A'$:

لتكن $B(p,r)$ كرة مفتوحة من (R,d_u) ، ولنبرهن على أن $B(p,r) \cap A \backslash \{p\} \ne \varnothing$

إن $B(p,r)$ هي ، كما تعلم ، عبارة عن مجال مفتوح غير خالي من الشكل:

$J =]\, c\, , d\, [$ ، مركزه النقطة p . بمـا أن $|I_n| = \frac{l}{2^{n-1}}$ فـإن $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$

ولذلك فإنه :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_0 \in N\ :\ n > n_0 \Rightarrow |I_n| < \varepsilon$$

لتكن $\varepsilon = p - c = d - p$

$$\underset{c}{]}\!-\!\!-\!\!-\, p\, -\!\!-\!\!-\underset{d}{[}$$

عندئذ نجد أن $0 < \varepsilon$ لأن $c \neq p \neq d$ حيث أن $p \in J$ بينما $c\, , d \notin J$ ولذلك يوجد $n_0 \in N$ بحيث يكون $|I_{n_0+1}| < \varepsilon$. إن $I_{n_0+1} \subseteq J$ لأن :

$$x \in I_{n_0+1} \Rightarrow x\, , p \in I_{n_0+1} \Rightarrow |x - p| \leq |I_{n_0+1}| < \varepsilon$$

$$\underbrace{[\ x\ \ p\ ]}_{I_{n_0+1}}$$

ومنه $|x - p| < p - c = \varepsilon$

وبالتالي $c - p < x - p < p - c$ ، ومنه $c < x$

كما أن $|x - p| < d - p = \varepsilon$ ، ومنه $x < d$

إذن $c < x < d$ ، وبالتالي $x \in J$. إذاً : $I_{n_0+1} \subseteq J$. وبما أن I_{n_0+1} يحوي على عدد غير منته من نقط A ؛ فإن $J = B(p,r)$ سوف يحوي على عدد غير منته من نقط A . إذاً $B(p,r) \cap A \backslash \{p\}$ سوف يحوي على عدد غير منته من النقط ، أي أن $B(p,r) \cap A \backslash \{p\} \neq \varnothing$ ، ولذلك $p \in A'$.

5.5 - مبرهنة :

إن الفضاء العادي (R, d_u) ، هو فضاء تام .

البرهان:

لتكن (u_n) متتالية لكوشي في الفضاء (R, d_u) ، ولنبرهن على أن هذه المتتالية متقاربة . من أجل ذلك نضع $A = \{u_n\}$ ، ولنلاحظ ما يلي :

← إذا كانت A مجموعة منتهية ، فإنه ينتج عن 4 من 2.13 ، أنه يوجـد في (u_n) متتالية جزئية (v_n) متقاربة نحو نقطة u ، ولما كانت (u_n) لكوشي ، فإنه ينتج عن

المبرهنة 4.8 ، أن (u_n) متقاربة نحو النقطة u .

$\Leftarrow$ إذا كانت A مجموعة غير منتهية ، فإنه ينتج عن المبرهنة 4.5 أن A محدودة ، وينتج عن مبرهنة بولزانو وايرشتراس أن $A' \neq \varnothing$ ، لتكن $x \in A'$ عندئذٍ ينتج عن المبرهنة 2.17 ، أنه توجد متتالية (v_n) من نقط $A \supseteq A\backslash\{x\}$ تتقارب نحو x ، إن (v_n) متتالية جزئية من (u_n) ، لأن $A = \{u_n\}$ ، وتتقارب نحو x ، ولما كانت (u_n) لكوشي ، فإنه ينتج عن المبرهنة 4.8 ، أن (u_n) تتقارب نحو x .

إذاً (u_n) متقاربة في (R,d_u) .أي أن كل متتالية لكوشي من (R,d_u) ، هي متقاربة فيه ولذلك فإن (R,d_u) فضاء تام .

5.6 - نتيجة :

إن الفضاء الإقليدي (R^n,d_e) هو فضاء تام ، لكل $n \in \mathbb{N}$.

البرهان:

إذا كان $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{in})$ حداً عاماً لمتتالية (u_i) لكوشي في الفضاء الإقليدي (R^n,d_e) ، فإن المتتاليات (x_{ij}) تكون لكوشي (R,d_u) ، من أجل $j = 1, 2, \ldots, n$ وذلك بحسب 4.12 ، وبما أن (R,d_u) تام (بحسب 5.5) ، فإن (x_{ij}) متقاربة في (R,d_u) ، من أجل $j = 1, 2, \ldots, n$ ، وهذا يؤدي إلى أن (u_i) متقاربة في (R^n,d_e) بحسب 3.1 . ومنه فإن (R^n,d_e) فضاء تام ، لأن كل متتالية لكوشي منه ، متقاربة فيه .

5.7 - مبرهنة :

إذا كان (E,d) فضاء الضرب للفضائين (E_1, d_1) و (E_2, d_2) ، فإن :

$$(E,d) \text{ تام } \Leftrightarrow (E_i, d_i) \text{ تام ، من أجل } i = 1, 2$$

البرهان:

$\Rightarrow$: لتكن (x_{n1}) متتالية لكوشي في الفضاء (E_1, d_1) ، ولتكن $x_{n2} = c$ ، حيث c نقطة ثابتة من (E_2, d_2) ، عندئذٍ (x_{n2}) متتالية لكوشي في (E_2, d_2) ، لأنها ثابتة .

ليكن $u_n = (x_{n1}, x_{n2})$ ، عندئذٍ (u_n) متتالية لكوشي في فضاء الضرب (E,d) ، (بحسب المبرهنة 4.14) . وبما أن (E,d) فضاء تام ، فإن المتتالية (u_n) تكون متقاربة فيه نحو نقطة ، مثل $u = (x_1 , c)$ ، ولكن هذا يؤدي إلى أن المتتالية (x_{n1}) متقاربة في الفضاء (E_1 , d_1) نحو النقطة x_1 (بحسب المبرهنة 3.3) . إذن كل متتالية لكوشي من (E_1 , d_1) متقاربة فيه ولذلك فهو فضاء تام .

وبالطريقة نفسها ، نبرهن على أن الفضاء (E_2 , d_2) تام .

$\Rightarrow$: ليكن $u_n = (x_{n1}, x_{n2})$ حداً عاماً لمتتالية لكوشي في فضاء الضرب (E,d) ، عندئذٍ ؛ ينتج عن المبرهنة 4.14 أن (x_{ni}) متتالية لكوشي في الفضاء (E_i , d_i) حيث $i = 1 , 2$. وبما أن الفضاء (E_i , d_i) تام ، فإن المتتالية (x_{ni}) تكون متقاربة في هذا الفضاء نحو نقطة $x_i \in E_i$. إذاً $x_{ni} \to x_i$ من أجل $i = 1 , 2$ ، وهذا يؤدي إلى أن:

$$u_n = (x_{n1}, x_{n2}) \to (x_1 , x_2) = u \in E$$

في الفضاء (E,d) (بحسب المبرهنة 3.3) .

إذاً : كل متتالية لكوشي من فضاء الضرب (E,d) ، هي متتالية متقاربة فيه ، ولذلك فإن (E,d) فضاء تام .

5.8 - ملاحظات وأمثلة :

1. يمكن تعميم المبرهنة السابقة على فضاء الضرب لـ n فضاء متري .

2. إن فضاء الضرب للفضائين (R,d_u) و (E,d_t) ، هو فضاء تام . لأن هذين الفضائين هما فضاءان تامان ، كما رأينا سابقاً .

3. إن فضاء الضرب للفضائين (R,d_u) و (Q,d_u) ، هو فضاء غير تام . لأن الفضاء (Q,d_u) غير تام ، كما رأينا سابقاً .

5.9 - مبرهنة :

إن الفضاء العقدي (C,d) هو فضاء تام .

البرهان:

ليكن $u_n = a_n + b_n i$ حداً عاماً لمتتالية لكوشي من الفضاء العقدي (C,d) ، عندئذٍ ؛ ينتج عن المبرهنة 4.17 أن (a_n) و (b_n) متتاليات لكوشي في (R,d_u) ، وبما أن (R,d_u) فضاء تام ، فإن (a_n) تتقارب إلى نقطة a من R ، وكذلك (b_n) تتقارب إلى نقطة b من R.وينتج عن المبرهنة 3.7، أن المتتالية (u_n) تتقارب إلى النقطة $u = a + bi$ من C .

إذاً : كل متتالية لكوشي من الفضاء (C,d) ، تتقارب إلى نقطة فيه ، وبالتالي فإن (C,d) فضاء تام .

5.10 - مبرهنة :

إذا كان (E,d) فضاءً تاماً وكانت $\varnothing \neq E^* \subseteq E$ فإن :

الفضاء الجزئي (E^* , d^*) تام $\Leftrightarrow$ E^* مجموعة مغلقة في (E,d)

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن $x \in \overline{E^*}$ عندئذٍ ينتج عن 2.18 ، أنه توجد متتالية (x_n) من نقط E^* بحيث أن (x_n) تتقارب نحو x في الفضاء (E,d) ، ولذلك فإن (x_n) لكوشي في (E,d) بحسب المبرهنة 4.3 ، وهذا يؤدي إلى أن (x_n) لكوشي في (E^* , d^*) بحسب 4 من 4.2 ، وبما أن الفضاء (E^* , d^*) هو فضاء تام ؛ فإن (x_n) تتقارب نحو نقطة $y \in E^*$ ، ولكن هذا يعني أن (x_n) تتقارب نحو y في الفضاء (E,d) بحسب 2 من 2.5 .

إذاً : المتتالية (x_n) تتقارب في الفضاء (E,d) نحو x ونحو y ، ولما كانت نهاية المتتالية المتقاربة وحيدة فإن $x = y$ ومنه $x \in E^*$.

بهذا نكون قد برهنا على أن $\overline{E^*} \subseteq E^*$ وهذا يعني أن المجموعة E^* مغلقة في الفضاء (E,d) .

$\Rightarrow$: لنفرض أن E^* مغلقة في (E,d) ، ولتكن (x_n) متتالية لكوشي في (E^* , d^*) . عندئذ ينتج عن 4 من 4.2 أن (x_n) متتالية لكوشي في (E,d) . وبما أن (E,d) تام، فإن (x_n) تتقارب في (E,d) نحو نقطة ، ولتكن x .

إذاً : (x_n) متتالية من نقط E^* تتقارب نحو النقطة x ، ولذلك فإن $x \in \overline{E^*}$ بحسب 2.18 . ولما كانت E^* مغلقة في (E,d) ، فإن $\overline{E^*} = E^*$ ، ولذلك فإن $x \in E^*$.

إذاً : كل متتالية لكوشي ، من الفضاء (E^* , d^*) ، تتقارب إلى نقطة في هذا الفضاء. ولذلك فإن الفضاء (E^* , d^*) تام .

5.11 - ملاحظات وأمثلة :

1. نعلم أن (R,d_u) فضاء تام، وأن Q مجموعة غير مغلقة فيه ، ولذلك فإن الفضاء الجزئي (Q,d_u) هو فضاء غير تام .

2. إذا كان (E,d) فضاءً تاماً ، وكانت $E^* \neq \varnothing$ مجموعة جزئية منتهية من (E,d)، فإن الفضاء الجزئي (E^* , d^*) هو فضاء تام ، لأن كل مجموعة منتهية هي مجموعة مغلقة في أي فضاء متري .

3. إن الفضاء (Z^2,d_e) ، الجزئي من الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) ، هو فضاء تـام لأن (R^2,d_e) هو فضاء تام و Z^2 هي مجموعة مغلقة فيه .

5.12 - مبرهنة باناخ (مبرهنة النقطة الثابتة) :

إذا كان (E,d) فضاءً مترياً تاماً ، وكان : $f : (E,d) \rightarrow (E,d)$ تابعاً يحقق الشرط التالي :

$$\exists\ \alpha \in [\, 0 , 1\, [\quad ; \quad d(f(x) , f(y)) \leq \alpha \,.\, d(x,y)$$

لكل x و y من E (نسمي هذا النوع من التوابع بـ Contracting) ، فإنه يوجد نقطة وحيدة x^* من E بحيث يكون $f(x^*) = x^*$.

البرهان: لتكن x_o نقطة من E ، ولنعرف المتتالية (x_n) كما يلي :

$$x_1 = f(x_o) \ , \ \ x_2 = f(x_1) \ \ , \ldots , \ x_n = f(x_{n-1}) \ , \ \ldots$$

عندئذ نجد أن :

$$d(x_n , x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}) , f (x_n)) \leq \alpha \,.\, d(x_{n-1} , x_n)$$

وذلك لكل $n \in \mathbb{N}$. ومنه نجد أن :

$$d(x_n , x_{n+1}) \leq \alpha \,.\, d(x_{n-1} , x_n) \leq \alpha^2 \,.\, d(x_{n-2} , x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n \,.\, d(x_o , x_1)$$

إذاً :

$$d(x_n , x_{n+1}) \le \alpha^n . d(x_o , x_1) \quad \forall \ n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

وإذا كان m و n ∋ $\mathbb{N}$ بحيث $n < m$ ، فإنه ينتج المتراجحة المثلثاتية أن :

$$d(x_n , x_m) \le d(x_n , x_{n+1}) + d(x_{n+1} , x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1} , x_m)$$

وبحسب (1) ، ينتج أن :

$$d(x_n , x_m) \le \alpha^n . d(x_o , x_1) \le \alpha^{n+1} . d(x_o , x_1) + \ldots + \le \alpha^{m-1} . d(x_o , x_1)$$

أي أن :

$$d(x_n , x_m) \le (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{m-1}) . d(x_o , x_1) = \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} . d(x_o , x_1)$$

$$< \frac{\alpha^n}{1-\alpha} . d(x_o , x_1) = c . \alpha$$

وبجعل $n \to \infty$ نجد أن $\alpha^n \to 0$ لأن $0 < \alpha < 1$ وبالتالي فإن $d(x_n , x_m) \to 0$ وذلك عندما $n \to \infty$ (وبالتالي $m \to \infty$ لأن $n < m$) ، وهذا يعني أن (x_n) متتالية لكوشي في (E,d) . وبما أن (E,d) فضاء تام ، فإن (x_n) متقاربة في هذا الفضاء .

لتكن $E \ni x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ، عندئذ نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} d(f(x^*) , x^*) &\le d(f(x^*) , f (x_n)) + d(f (x_n) , x^*) \\ &\le \alpha \, d(x^* , x_n) + d(x_{n+1} , x^*) \end{aligned}$$

إذاً :

$$\begin{array}{ccccc} 0 \le & d(f(x^*) , x^*) & \le & \alpha \, d(x_n , x^*) + d(x_{n+1} , x^*) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n \to c} & \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle n \to \infty} \\ 0 \le & d(f(x^*) , x^*) & \le & 0 \end{array}$$

إذاً : $d(f(x^*) , x^*) = 0$ وبالتالي $f(x^*) = x^*$.

لنبرهن الآن على وحدانية x^* : إذا كانت x نقطة ثانية من (E,d) ، يكون من أجلها

$$f(x) = x$$

فإننا نجد أن :

$$d(x , x^*) = d(f(x) , f (x^*)) \le \alpha . d(x , x^*)$$

ومنه نجد أن : $0 \le (\alpha-1) . d(x , x^*)$ ، فإذا كانت $x \ne x^*$ نحصل على $0 \le \alpha-1$ ،

أي أن $\alpha \ge 1$ ، ونحصل على تناقض مع الشرط الوارد في نص المبرهنة .

إذاً $x = x^*$.

5.13 - ملاحظات وأمثلة :

1. إذا كانت $E = [0 , \frac{1}{4}]$ ، فإننا نجد من المبرهنة 5.10 ، أن الفضاء (E,d_u) ، الجزئي من (R,d_u) ، هو فضاء تام . ليكن $f : (E,d_u) \to (E,d_u)$ التابع المعرف بـ $f(x) = x^2$ عندئذٍ $\alpha = \frac{1}{2} \in] 0 , 1 [$ تحقق $d(f(x) , f (y)) \le \alpha . d(x , y)$ لكل x و y من E لأن :

$$x , y \in E \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 0 \le y \le \frac{1}{4} \end{matrix} \;\Rightarrow\; 0 \le x + y \le \frac{1}{2}$$

وبالتالي :

$$d_u(f(x) , f (y)) = d_u(x^2 , y^2) = | x^2 , y^2 | = | x - y | . | x + y | \le \frac{1}{2} | x - y |$$
$$= \alpha . d_u(x,y)$$

ولذلك فإنه يوجد $x^* \in [0 , \frac{1}{4}]$ بحيث يكون $f(x^*) = x^*$. وبالحقيقة فإن $x^* = 0$ تحقق المطلوب .

2. إذا كان $E = [1,3]$ ، فإن (E,d_u) فضاء تام ، وإذا أخذنا $f : (E,d_u) \to (E,d_u)$: معرفاً بـ $f(x) = \frac{1}{2} (x +1)$ ، فإننا نجد $\alpha = \frac{1}{2}$ تحقق شرط مبرهنة باناخ، ولذلك فإنه يوجد $x^* \in E$ بحيث أن $f(x^*) = x^*$.

5.14- مبرهنة:

إذا كان (E,d) فضاءً مترياً ، فإن الشرطين التاليين متكافئان :

1. الفضاء (E,d) تام

2. إذا كانت $\{F_n\}_{n\in N}$ أسرة مجموعات مغلقة وغير خالية من (E,d)، بحيث أن :

$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$

و $\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n)=0$ ، فإن $\bigcap\limits_{n\in N} F_n \neq \phi$.

البرهان :

$2 \Rightarrow 1$: بما أن $F_n \neq \varnothing$ لكل $n \ni N$ ، فإننا نأخذ $x_n \ni F_n$ لكل $n \ni N$ ، فنحصل على المتتالية (x_n) . إن (x_n) لكوشي لأن :

لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذٍ ينتج من كون $\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n)=0$ أنه يوجد $n_o \ni N$ بحيث

أن : $n \geq n_o \Rightarrow d(F_n) < \varepsilon$. وبما أن :

$s > r \Rightarrow F_s \subset F_r$

فإن :

$$\begin{matrix} p > n_o \\ q > n_o \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_p \subset F_{n_o} \\ F_q \subset F_{n_o} \end{matrix} \Rightarrow x_p, x_q \in F_{n_o}$$

$$\Rightarrow d(x_p, x_q) \leq d(F_{n_o}) < \varepsilon$$

إذاً : (x_n) متتالية لكوشي في (E,d) . وبما أن (E,d) فضاء تام ، فإن (x_n) متقاربة في (E,d) ، نحو نقطة ولتكن u . إن $u \in \bigcap\limits_{n\in N} F_n$ لأنه : لو فرضنا جدلاً أن $u \notin \bigcap\limits_{n\notin N} F_n$ لوجد $K \ni N$ بحيث أن $u \notin f_K$. وبما أن F_K مغلقة فإن :

$d(u,F_K) = \delta < 0$ (انظر موضوع البعد بين نقطة ومجموعة ، في الفصل الثاني)،

وينتج عن هذا أن $B(u, \frac{1}{2}\delta) \cap F_K = \varnothing$ لأنه : لو كان y من $B(u, \frac{1}{2}\delta)$

لوجدنا أن $d(y,u) < \frac{1}{2}\delta$ ، ولو كان y من F_K لوجدنا أن :

$$d(y,u) \geq d(u,F_K) = \delta > \frac{1}{2}\delta$$

إذاً ؛ لا يوجد y بحيث $y \in B(u, \frac{1}{2}\delta) \cap F_K$ ، ومنه نجد أن :

$$n > K \Rightarrow F_n \subset F_K \Rightarrow x_n \in F_K \Rightarrow x_n \notin B(u, \frac{1}{2}\delta)$$

$$\Rightarrow d(x_n , u) \geq \frac{1}{2}\delta \quad \Rightarrow d(x_n , u) \not\to 0$$

وهذا يعني أن المتتالية (x_n) لا تتقارب نحو u . ونحصل على تناقض ، ولذلك فإن $u \in \bigcap_{n \in N} F_n$ وبالتالي $\bigcap_{n \in N} F_n \neq \phi$.

$1 \Rightarrow 2$: لتكن (x_n) متتالية لكوشي في (E,d) ، ولنبرهن على أن هذه المتتالية تتقارب في (E,d) . سنضع :

$$F_1 = \{ x_1 , x_2 , x_3 , \dots \}$$
$$F_2 = \{ x_2 , x_3 , x_4 , \dots \}$$
$$F_3 = \{ x_3 , x_4 , x_5 , \dots \}$$
....
$$F_n = \{ x_n , x_{n+1} , x_{n+2} , \dots \}$$
....

نحصل بذلك على أسرة المجموعات الجزئية ، غير الخالية ، $\{F_n\}$ التي تحقق :

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$$

ومنه

$$\overline{F_1} \supset \overline{F_2} \supset \dots \supset \overline{F_n} \supset \dots$$

وبذلك نحصل على أسرة المجموعات المغلقة وغير الخالية $\{ \overline{F_i} \}$ من (E,d) التي تحقق الشرط 2) لأن : (x_n) لكوشي ولذلك فهي تحقق الشرط :

$$\forall \ \varepsilon > 0 , \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \quad \begin{matrix} p > n_0 \\ q > n_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d(x_p , x_q) < \varepsilon$$

ومنه : $n > n_0 \Rightarrow d(F_n) < \varepsilon$ ، وهذا يعني أن : $\lim_{n \to \infty} d(F_n) = 0$

وبما أن $d(\overline{F_n}) = d(F_n)$ ، فإن $\lim_{n \to \infty} d(\overline{F_n}) = 0$ ، وبحسب الشرط 2)

يكون $\bigcap_{n\in N}\overline{F_n}\neq\phi$. لتكن $u\in\bigcap_{n\in N}\overline{F_n}$ عندئذٍ $x_n\to u$ لأن :

لتكن $\varepsilon>0$. ينتج عن $\lim_{n\to\infty} d(\overline{F_n})=0$ أنه :

$$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ n_0\in N\ :\ n>n_0\ \Rightarrow\ d(\overline{F_n})<\varepsilon$$

ومنه :

$$n>n_0\ \Rightarrow x_n\,,u\in\overline{F_n}\ \Rightarrow\ d(x_n\,,u)\le d(\overline{F_n})<\varepsilon$$

وهذا يعني أن الشرط (c) محقق ، ولذلك فإن $x_n\to u$. إذاً ؛ كل متتالية لكوشي من (E,d) تكون متقاربة في (E,d) ، ولذلك فإن (E,d) فضاء تام .

5.15 - ملاحظات وأمثلة:

1. بما أن الفضاء العادي (R,d_u) هو فضاء تام ، فإن مبرهنة المجالات المتداخلة (5.3) تنتج مباشرة عن المبرهنة 5.14 . كما أنه يمكن الاعتماد على المبرهنة السابقة ، وعلى مبرهنة المجالات المتداخلة ، في البرهان على أن (R,d_u) فضاء تام .

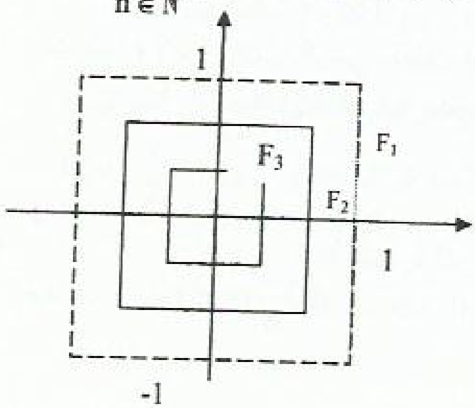
2. إذا وضعنا في الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) :

$$F_n=\{\,(x,y)\in R^2\ :\ -\frac{1}{n}\le x\le\frac{1}{n}\ \ ,\ \ -\frac{1}{n}\le y\le\frac{1}{n}\,\}$$

لكل $n\in N$ ، عندئذٍ نجد ـــ بسهولة ـــ أن F_n مجموعة مغلقة لكل $n\in N$ وأن :

$$F_1\supset F_2\supset\ldots\supset F_n\supset\ldots$$

وأن $\lim_{n\to\infty} d(F_n)=0$ وبما أن الفضاء (R^2,d_e) تام ، فإن $\bigcap_{n\in N}F_n\neq\varphi$.



تمارين على مواضيع الفصل الثالث

1. ادرس تقارب كل من المتتاليات التالية ، في الفضاء المبين إلى جانب كل منها :

a) المتتالية التي حدها العام $u_n = \frac{1}{n} Sin\, n\frac{\pi}{2}$ ، في الفضاء (R, d_u) .

b) المتتالية التي حدها العام $u_n = (1, (1-\frac{1}{n})^n)$ ، في الفضاء (R^2, d_e) .

c) المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, (-1)^n, \frac{n}{n+1})$ ، في الفضاء (R^3, d_e) .

d) المتتالية التي حدها العام $u_n = (\sqrt{\frac{1}{n}}, 5)$ ، في الفضاء (R^2, d_t) .

e) المتتالية التي حدها العام $z_n = \frac{n^n}{n!} + (\frac{n+2}{n})^n i$ ، في الفضاء (C, d_t) .

f) المتتالية التي حدها العام $u_{in} = (\frac{i}{1^2}, \frac{i}{2^2}, \dots, \frac{i}{n^2}, \dots)$ ، في الفضاء (L_2, d_e) .

g) المتتالية التي حدها العام $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}$ ، في الفضاء (R, d_u) .

2. في الفضاء (Q, d_u) بين أن :

a) المتتالية التي حدها العام $u_n = (1, \frac{2}{n})^{2n}$ ، لكوشي ولكنها غير متقاربة .

b) المتتالية التي حدها العام $u_n = \frac{1-n}{n+1}$ ، متقاربة وبالتالي لكوشي .

c) المتتالية التي حدها العام

$$u_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & if \quad n \ odd \\ 2 + \frac{1}{n} & if \quad n \ even \end{cases}$$

، ليست متقاربة ، وليست لكوشي .

3. ليكن $E^* =]0,2[$ ، ولنعتبر الفضاء $(E^* \times Q, d_e)$ ، الجزئي من (R^2, d_e) .

بين أن :

a) المتتالية التي حدها العام $u_n = (1-\frac{1}{n},(\frac{n+3}{n})^n)$ ، لكوشي وغير متقاربة في $(E^* \times Q , d_e)$.

b) المتتالية التي حدها العام $u_n = (2-\frac{1}{n}, Sin\, n\frac{\pi}{2})$ ، ليست لكوشي في الفضاء $(E^* \times Q , d_e)$.

c) المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ لكوشي وغير متقاربة في $(E^* \times Q , d_e)$.

4. لتكن A مجموعة كثيفة في الفضاء المتري (E,d) ، ولنفرض أن كل متتالية لكوشي من نقط $\overline{A}$ ، تتقارب نحو نقطة من E . برهن على أن (E,d) تام .

5. لنفرض أن كل مجموعة جزئية قابلة للعد ، ومغلقة ، من الفضاء المتري (E,d) ، تشكل فضاءً تاماً . برهن على أن الفضاء (E,d) تام .

6. إذا كانت (u_n) متتالية من فضاء متري (E,d) متقاربة نحو النقطة u ، وكانت $A = \{u_n\}_{n \in N}$. برهن على أن $A' \subseteq \{u\}$.

7. برهن على أن المتتالية التي حدها العام $u_n = Cos\, n\frac{\pi}{2}$ ، ليست لكوشي في الفضاء (R,d_u) .

8. إذا كانت E مجموعة منتهية ، فبرهن على أن الفضاء (E,d) تام .

9. برهن على أن الفضاء (E,d_t) تام ، وذلك أياً كانت المجموعة $E \neq \varnothing$.

10. لتكن $E =]\ 1\ ,\ 2\ [$. ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$ ، وكذلك المتتالية التي حدها العام $v_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1).n}$ ، في الفضاء (R,d_u) ، وفي الفضاء الجزئي (E,d_u) .

11. إذا كانت (u_n) متتالية لكوشي في الفضاء (E,d) ، وكانت (v_n) متتالية ثانية في

(E,d) تحقق $d(u_n , v_n) \to 0$. برهن على أن (v_n) لكوشي .

.12 ليكن $A = \{ (\sqrt[n]{n} , \frac{1}{n}) : n \in N \}$. برهن على أن $A' = \{ (1,0) \}$ ، في الفضاء (R^2,d_e) .

.13 لتكن (u_n) متتالية من النقط المختلفة في فضاء متري (E,d)،متقاربة نحو النقطة u، وليكن $f : \{u_n\} \to \{u_n\}$ تابعاً متبايناً ، بـــرهن علـــى أن المتتاليـــة $(f(u_n))$ متقاربة أيضاً نحو النقطة u .

.14 ادرس تقارب المتتالية الـــتي حـــدها العـــام
$$u_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt[n]{n}} & if \quad n\ odd \\ n\,Sin\dfrac{1}{n} & if \quad n\ even \end{cases}$$
في الفضاء (R,d_u) .

.15 لتكن $E^* = [\ 1\ ,\ 2\ [$. ادرس تقارب كل من المتتاليات التالية ، في كـــل مـــن الفضائين (R,d_u) و (E^*,d_u) .

a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$ ، b) $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ ، c) $u_n = \dfrac{n}{2n-1}$

d) $$u_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{3^n} & if \quad n\ odd \\ 2 - \dfrac{1}{3^n} & if \quad n\ even \end{cases}$$.

.16 لتكن $A = \{ (x,y) \in R^2 : x \le 0 \}$ ، من الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) . برهن على أن كل متتالية متقاربة (u_n) ، من نقط A ، تتقارب إلى نقطة تنتمي إلى A، واستنتج من ذلك أن A مغلقة في الفضاء (R^2,d_e) .

.17 لتكن A مجموعة جزئية من (E,d) ، ولتكن (u_n) متتالية من نقط A' ، متقاربة من النقطة u . برهن على أن $u \in A'$.

18. ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام
$$u_n = \begin{cases} 2-\dfrac{1}{n} & if \quad n\ odd \\ \dfrac{4n-2}{2n} & if \quad n\ even \end{cases}$$
في الفضاء (R,d_u) ، وفي الفضاء الجزئي منه (E,d_u) ، حيث $E = [0,2[$. هل هذه المتتالية لكوشي في الفضاء (R,d_u) ؟ وفي (E,d_u) ؟ . هل الفضاء (E,d_u) تام ؟ .

19. علل - بما لا يزيد عن سطرين - صحة ، أو خطأ ، كل من العبارات التالية :

a) المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, 1)$ تتقارب في الفضاء (R^2,d_t) نحو النقطة $(0,1)$

b) المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, 1)$ تتقارب في الفضاء (R^2,d_e) نحو النقطة $(1,0)$

c) إذا كانت $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ من (R,d_u) فإن $A' \neq \varnothing$.

d) إذا كانت $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فإن الفضاء (E,d) تام ،أياً كانت المسافة d.

e) كل فضاء جزئي من فضاء تام ، هو فضاء تام .

f) المتتالية التي حدها العام $u_n = (\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n^2})$ ، لكوشي في الفضاء (R^2,d_e) .

g) المتتالية التي حدها العام $u_n = ((1, \frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n})^n)$ ، لكوشي في فضاء الضرب $(R^2 \times Q, d)$ ، للفضائين (R^2,d) و (Q,d_u) .

أسئلة أتمتة :

السؤال الأول : في الفضاء (R^2, d_e) .

ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n} , \frac{1}{n^2})$ لكوشي .

X B) المتتالية التي حدها العام $u_n = (Sin\ n\frac{\pi}{2} , \sqrt{\frac{1}{n}})$ متقاربة .

X C) كل متتالية لكوشي في هذا الفضاء هي متتالية غير متقاربة فيه .

X D) كل متتالية محدودة في الفضاء (R^2, d_e) هي متتالية متقاربة.

السؤال الثاني : لتكن A مجموعة جزئية من فضاء متري (E , d).

ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) $x \in \overline{A} \Leftarrow$ توجد متتالية من نقط A تتقارب إلى x .

B) $x \in A' \Leftrightarrow$ توجد متتالية من نقط $E \setminus A$ تتقارب إلى x .

C) $x \in \mathrm{Is}\, A \Leftrightarrow$ توجد متتالية من نقط $A \setminus \{x\}$ تتقارب إلى x .

D) $x \in \mathrm{ext}\, A \Rightarrow$ توجد متتالية من نقط $E \setminus A$ تتقارب إلى x .

السؤال الثالث : ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) إن (Q , d_u) فضاء تام .

B) إن (R, d_u) فضاء تام .

C) إن $(\mathbb{N} , d_t)$ فضاء تام .

D) إذا كانت $E^* =]0 , 1[$ فإن الفضاء (E^* , d_u) هو فضاء تام .

السؤال الرابع : ليكن $u_{in} = \{ x_{i1} , x_{i2} , \ldots , x_{in} , \ldots \}$ حداً عاماً لمتتالية في فضاء هيلبرت (L_2 , D) . ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) إذا كانت المتتاليات (x_{in}) متقاربة لكل n من $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (u_{in}) متقاربة.

B) إذا كانت المتتالية (u_{in}) متقاربة فإن المتتاليات (x_{in}) متقاربة .

C) إذا كانت المتتالية (u_{in}) لكوشي فإن المتتاليات (x_{in}) لكوشي .

D) إذا كانت المتتالية (u_{in}) متقاربة فإنها تكون لكوشي.

الفصل الرابع

توابع الفضاءات المترية **Functions of Metric Space**

تمهيد :

إذا كان: (E_1, d_1) و (E_2, d_2) فضائيين متريين ، فإننا نسمي كل تابع من الشكل : $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ بتابع فضاءات مترية .

إن أهمية دراسة هذه التوابع تأتي من كونها تشمل دراسة لأصناف كثيرة من التوابع التي ندرسها ، عادة ، في مواد متعددة من مواد التحليل . فمثلاً لو أخذنا :

$(E_1,d_1) = (E_2, d_2) = (R, d_u)$ نحصل على التوابع الحقيقية متعددة المتغيرات ، التي ندرسها عادة في مادة التحليل (1) . ولو أخذنا $(E_1,d_1) = (R^n, d_e)$ و $(E_2, d_2) = (R, d_u)$ نحصل على التوابع الحقيقية متعددة المتغيرات التي ندرسها عادة في مادة التحليل(4) .

ولو أخذنا $(E_1,d_1) = (R^n, d_e)$ و $(E_2,d_2) = (R^m, d_e)$ نحصل على بعض أصناف هامة من توابع المتجهات .

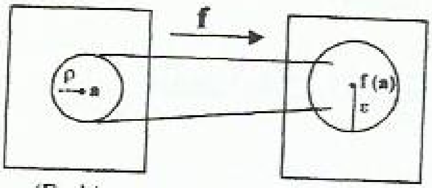
ولو أخذنا $(E_1,d_1) = (E_2,d_2) = (C, d)$ نحصل على التوابع العقدية ، وهكذا.......

§.1 - استمرار توابع الفضاءات المترية :

1.1 - تعريف :

ليكن $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية ، ولتكن $a \in E_1$.
نقول إن التابع f مستمر في النقطة a إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \rho > 0 \ : \ f(B(a, \rho)) \subseteq B(f(a), \varepsilon) \quad ....(1)$$



(E_1,d_1) $\qquad\qquad\qquad$ (E_2,d_2)

1.2 - ملاحظات وأمثلة :

1. إن شرط الاستمرار (1) الوارد في التعريف السابق ، يكافئ الشرط (2) التالي:

$$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ \rho>0\ :\ d_1(x\ ,a)<\rho\ \Rightarrow\ d_2(\ f(x)\ ,f(a)\ )<\varepsilon\quad ...\ (2)$$

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$: لأن :

$$d_1(x\ ,a)<\rho\ \Rightarrow x\in B(a\ ,\rho)\ \Rightarrow f(x)\in f\,(\ B(a\ ,\rho)\ )\overset{1}{\Longrightarrow} f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ d_2(\ f(x)\ ,f(a)\ )<\varepsilon$$

$(1) \Leftarrow (2)$: لأن :

$$x\in B(a\ ,\rho)\Rightarrow\ d_1(x\ ,a)<\rho\ \overset{2}{\Longrightarrow}\ d_2(\ f(x)\ ,f(a)\ )<\varepsilon\Rightarrow f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$$

ومنه : $f\,(\ B(a\ ,\rho)\ )\subseteq B(\ f(a)\ ,\varepsilon)$.

2. ينتج من الملاحظة السابقة أنه لدراسة استمرار التابع f ، في نقطة a من $(\ E_1,\ d_1)$ يمكن أن نستخدم الشرط (!) أو الشرط (2) .

3. إذا كان $f:(R\ ,d_u)\to(R\ ,d_u)$ تابعاً حقيقياً ، وكانت $a\in R$ ، فإن شرط الاستمرار في النقطة a الواردة في (2) يكتب في هذه الحالة كما يلي :

$$\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ \rho>0\ :\ |\,x-a\,|<\rho\ \Rightarrow\ |\,f(x)-f(a)\,|<\varepsilon$$

وهذه الصيغة هي التي تألفنا عليها عند دراسة استمرار التوابع الحقيقية بمتغير واحد في نقطة a .

<u>فمثلاً</u> : إن التابع الحقيقي $f:(R\ ,d_u)\to(R\ ,d_u)$ المعرف بـ $f(x)=|\,x\,|$ مستمر في النقطة $a=0$ ، لأن : لتكن $\varepsilon>0$ ، عندئذ نجد أن :

$$|\,f(x)-f(a)\,|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ |\,|x|-0\,|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ |x|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ |\,x-0\,|<\varepsilon$$

وعليه فإنه لو أخذنا $\rho = \varepsilon$ لوجدنا أن :

$$|x - 0| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

وعليه فإن f مستمر في النقطة $a = 0$

4. ينتج عن المبرهنة السابقة أنه إذا كان $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية وكانت $a \in E_1$ فإن : f غير مستمر في النقطة a ، إذا وفقط إذا ، وجدت كرة مفتوحة $B(f(a), \varepsilon)$ مركزها $f(a)$ في الفضاء (E_2, d_2) بحيث أن $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ لا تحوي أي كرة مفتوحة مركزها a .

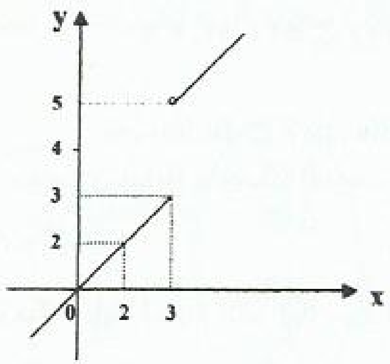
5. إن التابع الحقيقي $f : (R, d_u) \to (R, d_u)$ المعرف بـ :

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall\ x \le 3 \\ x+2 & \forall\ x > 3 \end{cases}$$

غير مستمر في النقطة 3 ، لأنه لو أخذنا الكرة المفتوحة $B = B(f(3), 1) =]2,4[$ التي مركزها $f(3) = 3$ في فضاء المستقر ، لوجدنا أن :

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(]2,4[) =]2,3[$$

ولا نستطيع إيجاد كرة مفتوحة من (R, d_u) مركزها 3 ، وتكون محتواة في $f^{-1}(B)$ ، لأن الكرات المفتوحة في (R, d_u) هي مجالات مفتوحة ، كما نعلم .



1.3 - مبرهنة :

ليكن $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية ، ولنكن $a \in E_1$. إن الشرطين التاليين متكافئان :

1. f مستمر في النقطة a .

2. $f^{-1}(v) \in V(a)$ أياً كانت $v \in V(f(a))$.

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$: لتكن $v \in V(f(a))$ ، عندئذ ينتج عن تعريف المجاورة لعنصر أنه توجد كرة مفتوحة $B(f(a), \varepsilon)$ بحيث أن :

$$f(a) \in B(f(a), \varepsilon) \subseteq v$$

وبما أن f مستمر في النقطة a ، فإنه ينتج التعريف 1.1 ، أنه :

$$\exists\ B(a, \rho) \ :\ f(B(a, \rho)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

وبما أن : $B(f(a), \varepsilon) \subseteq v$ ، فإن

ومنه :

$$B(a, \rho) \subseteq f^{-1}[f(B(a, \rho))] \subseteq f^{-1}(v)$$

وهذا يعني أن $f^{-1}(v)$ مجاورة لـ a أي أن : $f^{-1}(v) \in V(a)$.

$(2) \Rightarrow (1)$:

لتكن لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ $B(f(a), \varepsilon) \in V(f(a))$ ، وبحسب 2 ، فإن $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \in V(a)$ ، وبحسب تعريف المجاورة فإنه توجد $B(a, \rho)$ بحيث يكون $B(a, \rho) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ ومنه :

$$f(B(a, \rho)) \subseteq f\, f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

إذاً :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \rho > 0\ :\ f(B(a, \rho)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

وهذا يعني أن f مستمر في النقطة a بحسب التعريف 1.1 .

1.4 - ملاحظات وأمثلة :

1. ينتج عن المبرهنة السابقة أنه إذا كان $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية وكانت $a \in E_1$ فإن :

i. f مستمر في a $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(T) \in V(a)$ لكل مجموعة مفتوحة T من (E_2, d_2) بحيث $f^{-1}(a) \in T$

ii. f غير مستمر في a $\Leftrightarrow$ توجد مجموعة مفتوحة T من (E_2, d_2) بحيث $f^{-1}(a) \in T$ ولكن $f^{-1}(T) \notin V(a)$

2. إن التابع $f:(R, d_u) \rightarrow (R, d_t)$ المعرف بـ : $f(x) = x + 1$ غير مستمر في النقطة $a = 1$ ، لأن : $T = \{1,2\}$ مجموعة مفتوحة في (R, d_t) وتحوي $f(1) = 2$ ولكن $f^{-1}(T) = \{0,1\}$ ليست مجاورة للنقطة 1 ، في الفضاء (R, d_u) .

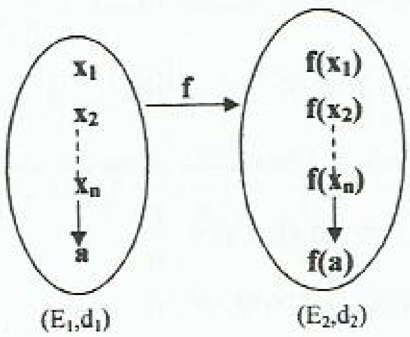
3. إن التابع $f:(R, d_t) \rightarrow (R^2, d_e)$ المعرف بـ : $f(x) = (x, 2x)$ مستمر في النقطة $a = 1$ ،لأنه لكل مجموعة مفتوحة T من (R^2, d_e) بحيث $f(1) \in T$ يكون $1 \in f^{-1}(f(1)) \subseteq f^{-1}(T)$ و $f^{-1}(T)$ مفتوحة في (R, d_t) [كل مجموعة جزئية من الفضاء المبتذل هي مجموعة مفتوحة] ولذلك فإن $f^{-1}(T) \in V(1)$.

1.5 - مبرهنة :

ليكن $f:(E_1, d_1) \rightarrow (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية ، ولتكن $a \in E_1$ إن الشرطين التاليين متكافئان :

1 . f مستمر في a

2 . لكل متتالية (x_n) من نقط (E_1, d_1) متقاربة نحو a تكون المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة نحو $f(a)$ في (E_2, d_2) .



البرهان :

$(2) \Rightarrow (1)$: لتكن (x_n) متتالية من نقط (E_1, d_1) تتقارب نحو a ولنبرهن على أن المتتالية $(f(x_n))$ تتقارب نحو $f(a)$ في (E_2, d_2) .

لتكن $(f(a), \varepsilon)$ عندئذ ينتج عن كون f مستمر في a أنه :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \rho > 0 : f(B(a, \rho)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

وبما أن $x_n \to a$ فإنه :

$$\forall \rho > 0 , \exists n_0 \in N : n > n_0 \Rightarrow x_0 \in B(a, \rho)$$

ومنه

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_0 \in N : n > n_0 \Rightarrow f(x_n) \in B(f(a), \rho)$$

$$\Rightarrow d_2(f(x_n), f(a)) < \rho$$

إذاً :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \rho > 0 : f(B(a, \rho)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

وهذا يعني أن $(f(x_n))$ تتقارب نحو $f(a)$ في الفضاء (E_2, d_2) .

$(2) \Leftarrow (1)$: لنفرض ، جدلاً ، أن f غير مستمر في a ، عندئذ توجد كرة مفتوحة $B(f(a), \varepsilon)$ بحيث يكون : $f(B(a, \rho)) \not\subset B(f(a), \varepsilon)$ لكــل $\rho>$.

وبشكل خاص : لكل n من N لدينا :

$$f\left(B\left(a, \frac{1}{n}\right)\right) \not\subset B(f(a), \varepsilon)$$

ليكن $x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right)$ بحيث أن $f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon)$ لكل n من N .

نكون بهذه الطريقة قد شكلنا متتالية (x_n) من نقط (E_1, d_1) تتقارب نحو a لأن :

$$x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow d_1(x_n, a) < \frac{1}{n}$$

وعندما $n \to \infty$ نجد أن $d_1(x_n, a) \to 0$ وبالتالي $x_n \to a$. ولكن المتتالية $(f(x_n))$ لا تتقارب نحو $f(a)$ لأن :

$$f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon) \Rightarrow d_2(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$$

ومنه :

$$\lim_{n \to \infty} d_2(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon > 0$$

وبالتالي :

$$d_2(f(x_n), f(a)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

وهذا يعني أن المتتالية $(f(x_n))$ لا تتقارب نحو $f(a)$ ، وهكذا نحصل على تناقض مع الشرط 2 . إذاً f مستمر في النقطة a .

1.6 - ملاحظات وأمثلة :

1. ينتج عن المبرهنة السابقة أنه إذا كان $f:(E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية ، ووجدنا متتالية (x_n) من نقط E_1 تتقارب نحو النقطة a ، في حين أن المتتالية $(f(x_n))$ لا تتقارب نحو $f(a)$ ، فإننا نحكم على أن التابع f غير مستمر في النقطة a .

2. إن التابع $f:(R^2, d_e) \to (R, d_u)$ المعرف بـ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ;(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

غير مستمر في النقطة $\mathbf{0} = (0, 0)$ لأن المتتالية التي حدها العام $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ تتقارب في الفضاء (R^2, d_e) نحو النقطة $\mathbf{0} = (0, 0)$ ، ولكن :

$$f(u_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2} \to f(0) = 1$$

3 . إن التابع $f:(R^2, d_e) \to (R, d_u)$ المعرف بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2.y}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مستمر في النقطة $(0,0)=\mathbf{0}$ ، لأنه أياً كانت المتتالية التي حدها العام $u_n=(x_n,y_n)$ المتقاربة نحو النقطة $(0,0)=\mathbf{0}$ فإن : $f(u_n)\to f(0)=0$ لأن :

$$f(u_n)=f(x_n,y_n)=\frac{x_n^2\ y_n}{x_n^2+y_n^2}$$

ومنه :

$$0\le d_u\left(f(u_n),f(0)\right)=\left|f(u_n)-f(0)\right|=\left|\frac{x_n^2\ y_n}{x_n^2+y_n^2}-0\right|=\frac{x_n^2\left|y_n\right|}{x_n^2+y_n^2}$$

وبما أن :

$$\frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}\langle 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x_n^2\left|y_n\right|}{x_n^2+y_n^2}\le\left|y_n\right|$$

فإننا نجد أن :

$$\underset{\searrow 0}{0}\le d_u\left(f(u_n),f(0)\right)\le \underset{\swarrow 0}{\left|y_n\right|}$$

وبالاعتماد على مبرهنة الشطيرة ، وبعد ملاحظة أن $u_n=(x_n,y_n)\to\mathbf{0}=(0,0)$ يؤدي إلى أن $y_n\to 0$ ومنه $|y_n|\to 0$ ، نجد أن :

$$d_u\left(f(u_n),f(0)\right)\to 0$$

وبالتالي : $f(u_n)\to f(0)$. وبحسب المبرهنة السابقة يكون f مستمراً في النقطة 0 .

* الاستمرار على مجموعة والاستمرار على الفضاء

1.7 - تعريف :

ليكن $f : (E_1, d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية ، ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E_1 . نقول إن f مستمر على المجموعة A ، إذا كان f مستمراً في كل نقطة من نقط A . ونقول إن f مستمر ، إذا كان f مستمراً على E_1 بكاملها .

1.8 - مبرهنة :

ليكن $f : (E_1, d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية . إن الشروط التالية متكافئة :

1. f تابع مستمر
2. الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة ، هي مجموعة مغلقة .
3. الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة ، هي مجموعة مفتوحة .
4. الصورة العكسية لأي كرة مفتوحة ، هي مجموعة مفتوحة . حل ح

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$: لتكن F مجموعة مغلقة في الفضاء (E_2,d_2) ، ولنبرهن على أن المجموعة $f^{-1}(F)$ مغلقة في الفضاء (E_1,d_1) . ومن أجل ذلك يكفي أن نبرهن على أن $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$.

لتكن $x \in \overline{f^{-1}(F)}$ ، عندئذ ينتج عن 2.15 (من الفصل الثاني) أنه توجد متتالية (x_n) من نقط $f^{-1}(F)$ تتقارب نحو x ، وبما أن f مستمر ، فإنه مستمر في النقطة x ولذلك فإن المتتالية $(f(x_n))$ تتقارب نحو النقطة f(x) بحسب المبرهنة 1.5 ، وبما أن $x_n \in f^{-1}(F)$ فإن $f(x_n) \in F$. إذاً : $(f(x_n))$ متتالية من نقط F ، تتقارب نحو النقطة f(x) ولذلك فإن $f(x) \in \overline{F}$ بحسب 2.15 ، من الفصل الثالث . وبما أن F مغلقة فإن $F = \overline{F}$. ولذلك فإن $f(x) \in F$ وبالتالي فإن :

$$x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(F)$$

إذاً : $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$ وبالتالي فإن $f^{-1}(F)$ مغلقة .

(2) ⇐ (1): لتكن T مجموعة مفتوحة في الفضاء (E_2,d_2) ، ولنبرهن على أن المجموعة $f^{-1}(T)$ مفتوحة في الفضاء (E_1,d_1) . بما أن T مفتوحة في (E_2,d_2) فإن $E_2 \setminus T$ مغلقة ، وبحسب الشرط 2 تكون $f^{-1}(E_2 \setminus T)$ مغلقة في (E_1,d_1) ، ولكن $E_1 \setminus f^{-1}(T) = f^{-1}(E_2) \setminus f^{-1}(T) = f^{-1}(E_2 \setminus T)$.

إذاً : $E_1 \setminus f^{-1}(T)$ مغلقة في (E_1,d_1) وبالتالي $f^{-1}(T)$ مفتوحة في الفضاء (E_1, d_1) .

$(4) \Rightarrow (3)$: محققة ، لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة .

$(1) \Rightarrow (4)$: لتكن $x \in E_1$ ولنبرهن على أن f مستمر في x :

لتكن $\varepsilon > 0$ عندئذ $B(f(a), \varepsilon)$ كرة مفتوحة في (E_2,d_2) ، و بحسب الشرط 4 ، تكون $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ مجموعة مفتوحة في (E_1,d_1) ، وبما أن :

$$x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

وبما أنه ، من (تعريف المجموعة المفتوحة) يوجد $\rho > 0$ بحيث يكون :

$$B(x,\rho) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

فإن :

$$f(B(x,\rho) \subseteq f(f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

إذاً : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \rho > 0 : f(B(a, \rho)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$

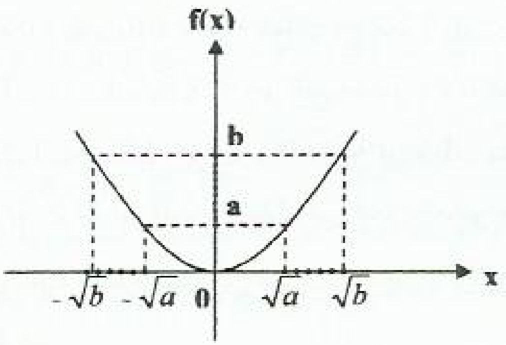
وهذا يعني أن f مستمر في النقطة x بحسب التعريف 1.1 ، ولما كانت x نقطة كيفية من E_1 ، فإن f مستمر على E_1 ، فهو تابع مستمر .

1.9 - ملاحظات وأمثلة :

.1 إذا كان $f:(R, d_u) \to (R, d_u)$ تابعاً ما ، فإنه لكي نبرهن على أن f مستمر ؛ يكفي أن نبرهن على أن الصورة العكسية لأي مجال مفتوح ومحدود في R هي مجموعة مفتوحة في (R, d_u) ، وذلك لأن الكرات المفتوحة في (R, d_u) هي مجالات مفتوحة ومحدودة ،كما نعلم .

فمثلاً : إن التابع $f:(R,d_u) \to (R,d_u)$ المعرف بـ $f(x)=x^2$ هو تـابع مستمر ، لأنه لو أخذنا $B=]a,b[$ مجال مفتوح ومحدود كيفي في R ، لوجدنا أن :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in R \ : \ f(x) \in B\} \\ &= \{x \in R \ : \ a \langle x^2 \langle b\} \\ &= \{x \in R \ : \ \sqrt{a} \langle |x| \langle \sqrt{b}\} \\ &= \{x \in R \ : \ \sqrt{a} \langle |x| \langle \sqrt{b} \qquad \sqrt{a} \langle -x \langle \sqrt{b}\} \\ &=]\sqrt{a}, \sqrt{b}[\ \cup \ ]-\sqrt{b}, -\sqrt{a}[\end{aligned}$$



أي أن $f^{-1}(B)$ هي اجتماع لكرتين مفتوحتين في (R, d_u) فهي مجموعة مفتوحة . إذاً الصورة العكسية لكل مجال مفتوح هي مجموعة مفتوحة ، ولذلك فإن f مستمر .

2. حتى نبرهن على أن التابع : $f:(E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ غير مستمر ؛ يكفي أن نوجد مجموعة مفتوحة (E_2, d_2) ولكن صورتها العكسية غير مفتوحة في (E_1,d_1)

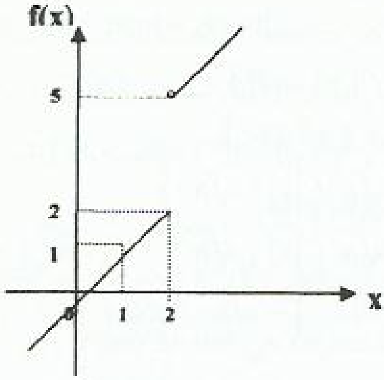
فمثلاً : إن التابع المعرف بـ $f:(R,d_u) \to (R,d_u)$

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall \ x \le 2 \\ x+3 & \forall \ x \rangle 2 \end{cases}$$

هو تابع غير مستمر ، لأن : $B=]1,3[$ مجموعة مفتوحة في فضاء المستقر ، ولكن صورتها العكسية هي :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in R \ : \ f(x) \in B\} \\ &= \{x \in R \ : 1 < f(x) < B\} =]1,2[\end{aligned}$$

وهي مجموعة غير مفتوحة في فضاء المنطلق (R, d_u) .



3. إذا كان (E_1, d_t) الفضاء المبتذل ، وكان (E_2, d_2) فضاءً ما ، فـإن أي تـابع $f : (E_1, d_t) \to (E_2, d_2)$ هو تابع مستمر ، لأن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في (E_2, d_2) هي مجموعة جزئية من (E_1, d_t) ، ولذلك فهي مفتوحة ، لأن أي مجموعة جزئية من الفضاء المبتذل هي مجموعة مفتوحة .

4. إن تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر ، والبرهان على هذا ينتج مباشرة من المبرهنة 1.8 .

1.10 - نتيجة :

ليكن $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية . إن الشروط التالية متكافئة .

1. إن f تابع مستمر .
2. $f^{-1}(\mathring{B}) \subseteq \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}$ لكل مجموعة B جزئية من (E_2, d_2) .
3. $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ لكل مجموعة B جزئية من (E_2, d_2)

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$: بما أن f مستمر و $\mathring{B}$ مجموعة مفتوحة في (E_2, d_2) فإن

$f^{-1}(\dot{B})$ مجموعة مفتوحة في (E_1 , d_1) بحسب المبرهنة 1.8 ، ولذلك فإن :

$f^{-1}(\dot{B}) \subseteq \dot{\overline{f^{-1}(\dot{B})}}$ وبما أن $\dot{B} \subseteq B$ فإن $f^{-1}(\dot{B}) \subseteq f^{-1}(B)$ ولذلك

$\dot{\overline{f^{-1}(\dot{B})}} \subseteq \dot{\overline{f^{-1}(B)}}$ وبالتالي $f^{-1}(\dot{B}) \subseteq \dot{\overline{f^{-1}(B)}}$

$(2) \Rightarrow (3)$: نعلم أن $E_2 \setminus \overline{B} = \dot{\overline{E_2 \setminus B}}$ وبحسب الشرط ٢ لدينا

$f^{-1}(\dot{\overline{E_2 \setminus B}}) \subseteq \dot{\overline{f^{-1}(E_2 \setminus B)}}$. إذاً : $f^{-1}(E_2 \setminus \overline{B}) \subseteq \dot{\overline{f^{-1}(E_2 \setminus B)}}$

وبالاعتماد على خواص الصورة العكسية نجد أن هذا يؤدي إلى :

$$E_1 \setminus f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overset{0}{\overline{E_1 \setminus f^{-1}(B)}} = E_1 \setminus \overline{f^{-1}(B)}$$

ومنه :

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

$(1) \Leftarrow (3)$: بحسب المبرهنة 1.8 يكفي أن نبرهن على أن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة . لتكن B مجموعة مغلقة في (E_2 , d_2) عندئذ يكون $\overline{B} = B$ ، وبحسب الشرط 3 يكون :

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$$

وهذا يعني أن $f^{-1}(B)$ مغلقة . وبالتالي f مستمر .

1.11 - نتيجة :

ليكن $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية . إن الشروط التالية متكافئة .

1 . إن f تابع مستمر .

2 . $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل مجموعة A جزئية من (E_1 , d_1) .

3 . $\dot{\overline{f(A)}} \subseteq f(\dot{A})$ لكل مجموعة A جزئية من (E_1 , d_1) .

البرهان : (تمرين)

§2 - التابع المفتوح والتابع المغلق والهوميومورفيزم :

Open Function , Closed Function , Homeomorphism

رأينا في الفقرة السابقة أنه إذا كان $f:(E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابعاً مستمراً فإن الصورة العكسية لمجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة ، ولكننا لم نتحدث عن الصورة المباشرة لمجموعة وفق تابع ما . في هذه الفقرة سنتعرض لهذا الموضوع .

2.1 - تعريف :

نقول عن تابع $f:(E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ أنه تابع مفتوح (Open) إذا كانت الصورة المباشرة لأي مجموعة مفتوحة (E_1 , d_1) هي مجموعة مفتوحة في (E_2 , d_2) .

2.2 - ملاحظات وأمثلة :

1 . إن التابع $f:(R , d_u) \to (R , d_u)$ المعرف بـ $f(x) = x$ هو تابع مفتوح لأنه إذا كانت T مجموعة مفتوحة من فضاء المنطلق (R , d_u) فإن $f(T) = T$ مفتوحة في فضاء المستقر (R , d_u) .

2 . قد نجد تابعاً مستمراً ولكنه غير مفتوح .

فمثلاً: التابع الثابت $f:(R , d_u) \to (R , d_u)$ المعرف بـ $f(x) = C$ هو تابع مستمر [لأن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي إما R أو ϕ فهي مجموعة مفتوحة] ولكن هذا التابع غير مفتوح لأن المجموعة R مفتوحة في فضاء المنطلق (R , d_u) ولكن صورتها المباشرة $f(R) = \{C\}$ وهي مجموعة غير مفتوحة في فضاء المستقر (R , d_u) .

كذلك فإن التابع $f:(R , d_u) \to (R , d_u)$ المعرف بـ $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ هو تابع مستمر ولكنه غير مفتوح لأن $f(R) =]0 , 1]$.

3 . قد نجد تابعاً مفتوحاً ولكنه غير مستمر .

فمثلاً : التابع $f:(R , d_u) \to (R , d_t)$ المعرف بـ $f(x) = x$ هو تابع غير مستمر لأن المجموعة $\{2\}$ مفتوحة في (R , d_t) [كل مجموعة جزئية من الفضاء

المبتذل هي مجموعة مفتوحة] ولكن صورتها العكسية$f^{-1}(\{2\}) = \{2\}$ غير مفتوحـــة في (R , du) [كل مجموعة منتهية من الفضاء العادي لــ R هي مجموعة مغلقـــة وغـــير مفتوحة] ولكن هذا التابع هو تابع مفتوح لأن الصورة المباشرة لأي مجموعة مفتوحة في (R , d_u) هي مجموعة مفتوحة في الفضاء المبتذل (R , d_t) ولذلك فهي مفتوحة .

(*) كل تابع يستقر في الفضاء المبتذل (E , d_t) هو تابع مفتوح وذلك أياً كان منطلقه وأياً كانت قاعدة ربطه . لأن كل مجموعة جزئية من الفضاء المبتـــذل هـــي مجموعـــة مفتوحة .

2.3 - مبرهنة :

ليكن $f : (E_1 , d_1) \rightarrow (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية. إن الشرطين التاليين متكافئان :

1 . f تابع مفتوح .

2 . $f(\overset{\circ}{A}) \subseteq \overset{\circ}{\overline{f(A)}}$ لكل مجموعة A جزئية من (E_1 , d_1)

البرهان :

$(2) \Rightarrow (1)$: بما أن f تابع مفتوح و $\overset{0}{A}$ مجموعة مفتوحة في (E_1 , d_1) فـــإن $f(\overset{\circ}{A})$ مجموعة مفتوحة في (E_2 , d_2) ولذلك فإن $\overset{\circ}{\overline{f(\overset{\circ}{A})}} = f(\overset{\circ}{A})$

وبما أن $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ ، فإن $f(\overset{\circ}{A}) \subseteq f(A)$ ومنه $\overset{\circ}{\overline{f(\overset{\circ}{A})}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{f(A)}}$ وبالتالي فإن $f(\overset{\circ}{A}) \subseteq \overset{\circ}{\overline{f(A)}}$.

$(1) \Rightarrow (2)$: لتكن A مجموعـــة مفتوحـــة في (E_1 , d_1) عندئـــذٍ يكـــون $\overset{0}{A} = A$ وبحسب الشرط 2 يكون : $f(A) = f(\overset{\circ}{A}) \subseteq \overset{\circ}{\overline{f(A)}}$ ، ومعنى هذا أن f(A) مجموعة مفتوحة في (E_2 , d_2) وبالتالي فإن f تابع مفتوح .

2.4 - ملاحظة : إن تركيب تابعين مفتوحين هو تابع مفتوح .

البرهان : ليكن f و g تابعين مفتوحين ، حيث أن :

$$\underbrace{(E_1, d_1) \xrightarrow{f} (E_2, d_2) \xrightarrow{g} (E_3, d_3)}_{gof}$$

ولنبرهن على أن gof تابع مفتوح :

لتكن A مجموعة جزئية من (E_1, d_1) عندئذ ينتج عن كون f تابع مفتـــوح وعـــن المبرهنة السابقة أن $f(\mathring{A}) \subseteq \overbrace{f(A)}^{\circ}$ ومنه $g(f(\mathring{A})) \subseteq g(\overbrace{f(A)}^{\circ})$ وينتج عن كون g مفتوح وعن المبرهنة السابقة أن : $g(\overbrace{f(A)}^{\circ}) \subseteq \overbrace{g(f(A))}^{\circ}$

وبالتالي فإن : $g(f(\mathring{A})) \subseteq \overbrace{g(f(A))}^{\circ}$ أي أن : $gof(\mathring{A}) \subseteq \overbrace{gof(A)}^{\circ}$

وهذا يعني أن gof تابع مفتوح ، بحسب المبرهنة السابقة .

(*) برهن على هذه الملاحظة بالاعتماد على التعريف مباشرة .

2.5 - تعريف :

نقول عن تابع $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ أنه تابع مغلق (Closed) إذا كانت الصورة المباشرة لأي مجموعة مغلقة (E_1, d_1) هي مجموعة مغلقة في (E_2, d_2) .

2.6 - ملاحظات وأمثلة :

1 . إذا كان $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابعاً ثابتاً معرفاً بـــ $f(x) = C$ فإن f تابع مغلق لأنه إذا كانت $F \neq \phi$ مجموعة مغلقة في (E_1, d_1) فإن $f(F) = \{C\}$ وهـــي مجموعة مغلقة في (E_2, d_2) لأن كل مجموعة منتهية هي مجموعة مغلقـــة في أي فضـــاء متري كان ونعلم أن $f(\phi) = \phi$. إذن الصورة المباشرة لأي مجموعة مغلقة هي مجموعـــة مغلقة وبالتالي فإن f تابع مغلق .

2 . قد نجد تابعاً مستمراً و غير مغلق .

فمثلاً : التابع $f : (R, d_t) \to (R, d_u)$ المعرف بـــ $f(x) = x$ هو تابع مســـتمر [كل تابع ينطلق من الفضاء المبتذل هو تابع مستمر أياً كان مستقره وأياً كانت قاعدة ربطه] ولكن هذا التابع غير مغلق لأن المجموعة $A =]1, 2[$ مغلقة في فضـــاء المنطلـــق

(R , d_t) [كل مجموعة جزئية من الفضاء المبتذل هي مجموعة مغلقة] ولكن الصورة المباشرة لهذه المجموعة هي $f(A) = A =]1,2[$ غير مغلقة في فضاء المستقر (R , d_u) .

3 . قد نجد تابعاً مغلقاً وليس مستمراً .

<u>فمثلاً</u> : التابع $f : (R , d_u) \rightarrow (R , d_t)$ المعرف بـ $f(x) = x + 1$ مغلقاً [كل تابع يستقر في الفضاء المبتذل هو تابع مغلق لأن كل مجموعة جزئية من الفضاء المبتذل هي مجموعة مغلقة] ولكن هذا التابع غير مستمر لأن المجموعة $B =]1,2[$ مغلقة في فضاء المستقر (R , d_t) ولكن صورتها العكسية $f^{-1}(B) =]0,1[$ ليست مغلقة في فضاء المنطلق (R , d_u) .

2.7 - مبرهنة :

ليكن $f : (E_1 , d_1) \rightarrow (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية. إن الشرطين التاليين متكافئان .

1 . f تابع مغلق .

2 . $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ لكل مجموعة A جزئية من (E_1 , d_1) .

البرهان :

$(2) \Rightarrow (1)$: بما أن f تابع مغلق و $\overline{A}$ مجموعة مغلقة فإن $f(\overline{A})$ مجموعة مغلقة ولذلك فإن $f(\overline{A}) = \overline{f(\overline{A})}$ وبما أن $A \subseteq \overline{A}$ فـإن $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ ومنـه $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})}$

أي أن : $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

$(1) \Rightarrow (2)$: لتكن F مجموعة مغلقة في (E_1 , d_1) عندئذ يكون $F = \overline{F}$ ومنه $f(F) = f(\overline{F})$ وبما أن $\overline{f(F)} \subseteq f(\overline{F})$ بحسب الشـرط 2 فـإن $\overline{f(F)} \subseteq f(F)$ وهذا يعني أ ن $f(F)$ مغلقة في (E_2 , d_2) وبالتالي فإن f تابع مغلق .

2.8 - ملاحظة :

إن تركيب تابعين مغلقين هو تابع مغلق .

البرهان :

ليكن f و g تابعين مغلقين حيث

$$\begin{tikzcd} (E_1 , d_1) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & (E_2 , d_2) \arrow[r, "g"] & (E_3 , d_3) \end{tikzcd}$$

ولنرهن على أن gof تابع مغلق :

لتكن F مجموعة مغلقة في (E_1 , d_1) عندئذ ينتج عن كون f تابعاً مغلقاً أن المجموعة $f(F)$ مغلقة في (E_2 , d_2) وينتج عن كون g تابعاً مغلقاً أن $g(f(F))$ مجموعة مغلقة في (E_3 , d_3) أي أن $gof(F)$ مجموعة مغلقة في (E_3 , d_3) ومنه فإن gof تابع مغلق .

2.9 - تعريف :

نقول عن تابع $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ إنه هوميومورفيزم (Homeomorphism) إذا كان f تقابلاً ومستمراً وكان تابعه العكسي f^{-1} مستمراً ، في هذه الحالة نقول إن الفضاء (E_2 , d_2) هوميومورف للفضاء (E_1 , d_1) .

2.10 - ملاحظات وأمثلة : حذف

2 . إذا كانت $E =]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}[$ وكان (E , d_u) الفضاء الجزئي من الفضاء العادي لـ R فإن التابع $f : (R , d_u) \to (R , d_u)$ المعرف بـ $f(x) = \operatorname{arctg} x$ هو هوميومورفيزم لأنه تقابل ومستمر كما أن تابعه العكسي المعرف بـ $f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$ هو تابع مستمر .

2 . إذا كان $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ هوميومورفيزم فإن :

$f^{-1} : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ هو أيضاً هوميومورفيزم كما هو واضح من التعريف ولذلك فإننا نقول في مثل هذه الحالة : إن الفضائيين (E_2 , d_2) و (E_1 , d_1) هومومورفيان ونعبر عن ذلك بالكتابة $(E_1 , d_1) \approx (E_2 , d_2)$.

3 . إذا كانت $E_1 =]a , b[$ و $E_2 =]0 , 1[$ فإن $(E_1 , d_u) \approx (E_2 , d_u)$ حيث $a \neq b$ من R .

لأن التابع $f:(E_1,d_u)\to(E_2,d_u)$ المعرف بـ $f(x)=\frac{x-a}{x-b}$ هـو تقابـل ومستمر كما أن تابعه العكسي :

$f^{-1}:(E_2,du)\to(E_1,d_u)$ المعرف بـ $f^{-1}(x)=(b-a)x+a$ مسـتمر .

4 . إذا كانت $E_1=]a,\infty[$ حيث $a\in R$ وكانت $E_2=]1,\infty[$ فإن :

$(E_1,d_u)\approx(E_2,d_u)$ لأن التابع $f:(E_1,d_u)\to(E_2,d_u)$ المعرف بـ :

$f(x)=x-a+1$ هو تقابل ومستمر ، كما أن تابعه العكسي :

$f^{-1}:(E_2,d_u)\to(E_1,d_u)$ المعرف بـ $f^{-1}(x)=x+a-1$ هو تابع مستمر .

6 . إذا كانت $E_1=]0,1[$ وكانت $E_2=]1,\infty[$ فإن

$(E_1,d_u)\approx(E_2,d_u)$ لأن التابع $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$ المعرف بـ :

$f(x)=\frac{1}{x}$ هو تقابل ومستمر ، كما أن تابعه العكسي

$f^{-1}:(E_2,d_u)\to(E_1,d_u)$ المعرف بـ $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$ هو تابع مستمر .

6 . إذا كانت $E_1=]a,\infty[$ وكانـت $E_2=]-\infty,-a[$ حيـث $a\in R$ فـإن

$(E_1,d_u)\approx(E_2,d_u)$ لأن التابع $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$ المعرف بـــ

$f(x)=-x$ هو تقابل ومستمر ، كما أن تابعه العكسي :

$f^{-1}:(E_2,d_2)\to(E_1,d_1)$ المعرف بـ $f^{-1}(x)=-x$ هو تابع مستمر .

7 . من الأمثلة السابقة نجد أن :

$$(R,d_u)\approx(\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,,d_u)\approx(\,]0,1[\,,d_u)\approx(\,]a,b[\,,d_u)$$

8. إذا كانت $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$ هوميومورفيزماً وكانـت (x_n) متتاليـة لكوشي في (E_1,d_1) فإنه ليس من الضروري أن تكون المتتالية $(f(x_n))$ لكوشـي في (E_2,d_2) .

فمثلاً : وجدنا في 5. أعلاه أن التابع :

$$f:(\,]0,1[\,,d_u)\to(\,]1,\infty[\,,d_u)$$

المعرف بـ $f(x) = \frac{1}{x}$ هو هوميومورفيزم ، ونلاحظ أن المتتالية (x_n) التي حدها العام $x_n = \frac{1}{n+1}$ هي متتالية لكوشي في الفضاء $( ]0,1[, d_u)$ (انظر برهان 4.3 من الفصل الثالث). ولكن المتتالية $(f(x_n)) = (n + 1)$ ليست لكوشي في الفضاء $( ]1,\infty [, d_u)$ لأنها ليست محدودة في هذا الفضاء .

2.10 - مبرهنة:

ليكن $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية وتقابل . إن الشروط التالية متكافئة

1) f هوميومورفيزم . 2) f مستمر ومفتوح . 3) f مستمر ومغلق .

4) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ لكل مجموعة جزئية A من E_1 .

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$: إذا كانت A مجموعة جزئية من E_1 وإذا وضعنا $B = f(A)$ فإنه ينتج عن كون f تقابل أن $f^{-1}(B) = A$ وفيه $(f^{-1})^{-1} (A) = B$ (لأن $(f^{-1})^{-1} = f$) أي أن : $(f^{-1})^{-1} (A) = f(A)$.

ولذلك فإنه إذا كانت A مجموعة مفتوحة في (E_1 , d_1) فإنه ينتج عن كون f^{-1} مستمر (لأن f هوميومورفيزم) أن $(f^{-1})^{-1} (A)$ مجموعة مفتوحة في (E_2 , d_2) ولذلك فإن f تابع مفتوح .

$3 \Leftarrow 2$: إذا كانت F مجموعة مغلقة في (E_1 , d_1) فإن $E_1 \setminus F$ مجموعة مفتوحة في (E_1 , d_1) ولذلك فإن $f(E_1 \setminus F)$ مجموعة مفتوحة في (E_2 , d_2) لأن f تابع مفتوح بحسب الشرط 2) .ولكن $f(E_1 \setminus F) = E_2 \setminus f(F)$ وبالتالي فإن $f(F)$ مغلقة في (E_2 , d_2) ، ومنه فإن f تابع مغلق .

$4 \Leftarrow 3$: بما أن f تابع مستمر فإن $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ بحسب النتيجة 1.11 . وبما أن f تابع مغلق فإن $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ بحسب المبرهنة 2.7 . وبالتالي فإن $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

$1 \Leftarrow 4$: بما أن $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ فإن f تابع مستمر بحسب النتيجة 1.11 .

لنبرهن على أن f^{-1} مستمر :

لتكن A مجموعة مغلقة في (E_1 , d_1) عندئذ $A = \overline{A}$ ومنه :

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) = f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$$

حيث $\overline{f(A)}$ هي مجموعة مغلقة في (E_2 , d_2) لأن لصاقة أي مجموعة هي مجموعة مغلقة .

إذن الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة في (E_1 , d_1) وفق التابع f^{-1} هي مجموعة مغلقة في (E_2 , d_2) ولذلك فإن f^{-1} تابع مستمر بحسب المبرهنة 1.8 .

2.11 - ملاحظات وأمثلة:

1. قد نجد تابعاً مستمراً ولكنه ليس مفتوحاً وليس مغلقاً

فمثلاً : إن التابع $f : (R,d_u) \to (R,d_u)$ المعرف بـ $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ هو تابع مستمر (واضح) ولكن هذا التابع غير مفتوح وغير مغلق لأن المجموعة R هي مجموعة مفتوحة في (R,d_u) ولكن $f(R) =]0,1]$ هي مجموعة غير مفتوحة وغي مغلقة في (R,d_u) .

2. قد نجد تابعاً مفتوحاً ومغلقاً ومستمراً ولكنه ليس هوميومورفيزم

فمثلاً : إن التابع $f : (R,d_u) \to (R,d_t)$ المعرف بـ $f(x) = c$ حيث c ثابت ما ، هو تابع مفتوح ومغلق [كل مجموعة جزئية من (R,d_t) هي مجموعة مفتوحة ومغلقة] وهو تابع مستمر لأنه تابع ثابت ولكنه ليس تقابلاً ولذلك فهو ليس هوميومورفيزم .

3. قد نجد تابعاً تقابلاً مستمراً ولكنه ليس هوميومورفيزم .

فمثلاً إن التابع $f : (R,d_t) \to (R,d_u)$ المعرف بـ $f(x) = x$ هو تقابل (واضح) وهو مستمر لأن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة من (R,d_u) هي مجموعة مفتوحة في (R,d_t) [كل مجموعة جزئية من (R,d_t) هي مجموعة مفتوحة] ولكن هذا التابع غير مفتوح لأن المجموعة $A = [0,1[$ هي مجموعة مفتوحة في (R,d_t) ولكن $f(A) = A$ هي مجموعة غير مفتوحة في (R,d_u) . إذاً : f ليس هوميومورفيزم .

4 . قد نجد تابعاً مفتوحاً ومستمراً وليس مغلقاً .

فمثلاً : إذا كانت $E =]2,4[$ وكان $f : (E,d_u) \to (R,d_u)$ معرفاً بـــ $f(x) = x$ فإننـــا نجد :

- إن f تابع مفتوح لأنه لو أخذنا A مجموعة مفتوحة في الفضاء (E,d_u) الجزئــي مــن (R,d_u) فإنه توجد مجموعة مفتوحة T في (R,d_u) بحيث يكون $A = E \cap T$ (عــد إلى دراسة الفضاءات الجزئية في الفصل الأول من هذا الكتــاب) وبمــا أن E مفتوحــة في (R,d_u) فإن A مفتوحة في (R,d_u) لأنها تقاطع لمجموعتين مفتوحتين في (R,d_u) . وبما أن $f(A) = A$ فإن $f(A)$ مفتوحة في (R,d_u) . إذن الصورة المباشرة لكل مجموعة مفتوحة - وفق f - هي مجموعة مفتوحة ولذلك فإن f تابع مفتوح .

- إن f تابع مستمر لأنه إذا كانت T مجموعة مفتوحة في (R,d_u) فإن $f^{-1}(T) = E \cap T$ مفتوحة في (E,d_u) [عد إلى دراسة الفضاءات الجزئي] .

إذاً : الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة - وفق f - هي مجموعة مفتوحة ولـــذلك فإن f تابع مستمر بحسب المبرهنة 1.8

- إن f تابع غير مغلق لأنه إذا أخذنا $F =]3,4]$ فإننا نجد أن F مجموعة مغلقة في (E,d_u) لأن $F = E \cap [3,5]$ ولكن $f(F) = F$ ليست مغلقة في (R,d_u) .

5 . قد نجد تابعاً مغلقاً ومستمراً وليس مفتوحاً .

فمثلاً : إذا كانت $E = [1,4]$ وكان $f : (E,d_u) \to (R,d_u)$ معرفاً بـــ $f(x) = x$ فإننـــا نجد :

- إن f مغلقاً لأنه إذا كانت A مجموعة مغلقة في (E,d_u) فإنه توجد مجموعة مغلقة F في (R,d_u) بحيث يكون $A = E \cap F$ ولما كانت E مغلقة في (R,d_u) فـــإن A مغلقـــة لأنها تقاطع لمجموعتين مغلقتين في (R,d_u) . إذن فالصورة المباشرة لكل مجموعـــة مغلقة هي مجموعة مغلقة ولذلك فإن f تابع مغلق .

- إن f تابع مستمر لأنه إذا كانت F مجموعة مغلقة في (R,d_u) فـــإن $f^{-1}(F) = E \cap F$ هي مجموعة مغلقة في (E,d_u) (عد إلى دراسة الفضـــاءات الجزئيـــة) . إذن فالصــــورة

العكسية لكل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة ولذلك فإن f تـابع مسـتمر بحسب المبرهنة 1.8 .

- إن f غير مفتوح لأنه إذا أخذنا $A =]3,4]$ فإننا نجـد أن A مجموعـة مفتوحـة في الفضاء الجزئي (E,d_u) لأن $A = E \cap]3,5[$ ولكن المجموعة $f(A) = A$ ليست مفتوحـة في (R,d_u) .

6 . يبرهن بسهولة على أن علاقة الهوميومورف هي علاقة تكافؤ على أي مجموعة من الفضاءات التبولوجية .

2.12 - نتيجة:

إن تركيب هوميومورفيزمين هو هوميومورفيزم .

البرهان :إذا كان f و y هوميومورفيزمين بحيث :

$$\begin{tikzcd} (E_1 , d_1) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\,o\,f"'] & (E_2 , d_2) \arrow[r, "g"] & (E_2 , d_2) \end{tikzcd}$$

فإن gof هوميومورفيزم لأن تركيب تقابلين هو تقابل ولذلك فإن gof تقابل كمـا أن تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر ولذلك فإن gof مستمر .

كذلك فإن تركيب تابعين مفتوحين هو تابع مفتوح ولذلك فإن gof تابع مفتوح .

إذاً gof تقابل ومستمر ومفتوح ولذلك فإن gof هوميومورفيزم بحسب المبرهنة 2.10.

2.13 - تعريف:

ليكن $f : (E_1 , d_1) \rightarrow (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية . نقول عن f إنـه تابع أيزوميتري Isometric إذا كان f تقابل ويحافظ على المسافة . أي :

$d_1(x,y) = d_2(f(x) , f(y))$ لكل x و y من (E_1 , d_1) ، وفي هذه الحالـة نقـول إن الفضاء (E_2 , d_2) هو أيزوميتري للفضاء (E_1 , d_1) .

2.14 - ملاحظات وأمثلة:

1. إن التابع $f:(R,d_u)\rightarrow(R,d_u)$ المعرف بـ $f(x)=x+1$ هو أيزوميتري لأننا نجد بدون صعوبة أنه تقابل ، ثم إن :

$$d_u(\,f(x)\,,\,f(y)\,)=|\,f(x)-f(y)\,|=|\,(\,x+1\,)-(\,y+1\,)\,|=|\,x-y\,|=d_u(x,y)$$

2. إذا كان $f:(E_1\,,\,d_1)\rightarrow(E_2\,,\,d_2)$ أيزوميتري فإنه تقابل ولذلك فإن تابعه العكسي $f^{-1}:(E_2\,,\,d_2)\rightarrow(E_1\,,\,d_1)$ موجود ويحقق : حذف

$d_2(x,y)=d_1(\,f^{-1}(x)\,,\,f^{-1}(y)\,)$ لكل x و y من $(E_2\,,\,d_2)$ وبالتالي فإن f^{-1} هو أيضاً أيزوميتري لأنه :

إذا كان $x\,,\,y \ni E_2$ فإنه ينتج عن كون f غامر ، أنه يوجد $x'\,,\,y' \ni E_1$ بحيث أن $f(x')=x$ و $f(y')=y$. وبحسب تعريف التابع العكسي فإن $x'=f^{-1}(x)$ و $y'=f^{-1}(y)$. ولما كان f أيزوميتري فإن $d_1(x',y')=d_2(\,f(x')\,,\,f(y')\,)$

أي أن : $d_1(\,f^{-1}(x)\,,\,f^{-1}(y)\,)=d_2(x,y)$.

3. يمكن أن نرى بسهولة أن العلاقة $(E_2\,,\,d_2)$ أيزوميتري للفضاء $(E_1\,,\,d_1)$ هي علاقة تكافؤ على أي مجموعة من الفضاءات المترية .

4. إذا كان $f:(E_1\,,\,d_1)\rightarrow(E_2\,,\,d_2)$ أيزوميتري فإن f هوميومورفيزم لأن f تقابل من الفرض ثم إن f مستمر لأنه أياً كانت النقطة a من $(E_1\,,\,d_1)$ فإن f مستمر في a لأنه إذا كانت (x_n) متتالية من نقط $(E_1\,,\,d_1)$ تتقارب نحو a فإن المتتالية $(\,f(x_n)\,)$ تتقارب في $(E_2\,,\,d_2)$ نحو $f(a)$ والبرهان على ذلك هو:

لتكن $\varepsilon>0$ عندئذٍ ينتج عن كون $x_n\rightarrow a$ أنه يوجد $n_0 \ni N$ بحيث أن $n_0<n$ يؤدي إلى أن $d(x_n\,,\,a)<\varepsilon$ وبما أن f أيزوميتري فإن $d(x_n\,,\,a)=d(\,f(x_n)\,,\,f(a)\,)$ ولذلك فإن $d(\,f(x_n)\,,\,f(a)\,)<\varepsilon$ إذن :

$$\forall\ \varepsilon>0\quad \exists\quad n_0\in N\ ;\ \Rightarrow\ d(\,f(x_n)\,,\,f(a)\,)<\varepsilon$$

وهذا يعني أن $f(x_n)\xrightarrow[n\rightarrow\infty]{}f(a)$.

وبحسب المبرهنة 1.5 يكون f مستمراً في النقطة a ، ولما كانت a نقطة احتيارية من (E_1 , d_1) فإن f مستمر .

بالأسلوب نفسه نبرهن على أن التابع العكسي $f^{-1} : (E_2 , d_2) \to (E_1 , d_1)$ مستمر أيضاً . وبالتالي فإن f هوميومورفيزم .

5 . إذا كان $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ هوميومورفيزم فإنه ليس من الضروري أن يكون أيزوميتري .

<u>فمثلاً</u> : إن التابع $f : ( ]0,1[, d_u) \to ( ]1,\infty[, d_u)$ المعرف بـ $f(x) = \frac{1}{x}$ هو هوميومورفيزم كما سبق أن رأينا في 2.10 ، ولكنه ليس أيزوميتري لأن :

$$d_u(\frac{1}{2} , \frac{1}{4}) = |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$$

بينما

$$d_u(f(\frac{1}{2}) , f(\frac{1}{4})) = d_u(2,4) = | 2 - 4 | = 2$$

ونلاحظ أن

$$d_u(\frac{1}{2} , \frac{1}{4}) \neq d_u(f(\frac{1}{2}) , f(\frac{1}{4}))$$

6 . ليكن (L_2 , d) فضاء هيلبرت ولتكن : حذ ف

$$L^* = \{ (x_n) \in L_2 \ : \ x_1 = 0 \}$$

ولنعتبر الفضاء الجزئي (L^* , d) من فضاء هيلبرت . إن التابع $f : (L_2 , d) \to (L^* , d)$ المعرف بـ :

$$f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots) = (0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots)$$

هو أيزوميتري لأنه تقابل (وهذا واضح) ثم إنه يحافظ على المسافة لأنه إذا كانت :

$$X = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots) \quad و \quad Y = (y_1 , y_2 , \ldots , y_n , \ldots)$$

نقطتين من (L_2 , d) فإن :

$$f(X) = (0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots) \quad و \quad f(Y) = (0 , y_1 , y_2 , \ldots , y_n , \ldots)$$

ومنه نجد أن :

$$d(X,Y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$$

$$d(f(X), f(Y)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} = d(X,Y)$$

وبالتالي فإن فضاء هيلبرت هو أيزوميتري لفضاء جزئي فعلي منه .

§3.3 - الاستمرار المنتظم للتوابع :

3.1 - تعريف:

ليكن $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من (E_1 , d_1) . نقول إن f مستمر بانتظام على A إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta > 0\ :\ \ d_1(x,y) < \delta\ \Rightarrow\ \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

و δ هذه ترتبط بـــ ε فقط ولا ترتبط بالعنصرين x و y من A .

حيث (ε و δ عددان حقيقيان) . نقول إن f مستمر بانتظام إذا كان f مستمراً بانتظام على الفضاء (E_1 , d_1) بكامله .

3.2 - ملاحظات وأمثلة:

1 . إن شرط الاستمرار المنتظم أقوى من شرط الاستمرار لأن δ هنا لا ترتبط بالنقطتين x و y من A وإنما ترتبط فقط بـــ ε ، ولذلك فإنه إذا كان f مستمراً بانتظـــام علـــى مجموعة A فإنه يكون مستمراً على A . ولكن العكس غير صحيح بشكل عام .

2 . حتى نبرهن على أن التابع $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ غير مســـتمر بانتظـــام علـــى مجموعة A جزئية من (E_1 , d_1) يجب أن نوجد $\varepsilon > 0$ ، واحدة على الأقل ، بحيث أنـــه لكـــل $\delta > 0$ توجـــد نقطتـــان x و y مـــن A تحققـــان : $d(x,y) = \delta$ ولكـــن $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.

3 . إن التابع $f : (R,d_u) \to (R,d_u)$ مستمر بانتظام على المجموعة $A =]0,1[$ لأن :

لتكن $\varepsilon > 0$ ولنوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$d_u(x,y) < \delta \Rightarrow d_u(f(x), f(y)) < \varepsilon$ أياً كانت x و y من A .

نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} d_u(f(x), f(y)) < \varepsilon\ &\Leftrightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ |x^2 - y^2| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |x - y|.|x + y| < \varepsilon$$

ولكننا نعلم أن $|x + y| \le |x| + |y|$ ولذلك فإنه أياً كانت x و y من A فإن

$$|x + y| \le 1 + 1 = 2$$

ومنه فإن $|x - y|.|x + y| \le 2.|x - y|$

فلو أخذنا $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ لوجدنا أن :

$$d_u(x,y) < \varepsilon \quad \Rightarrow |x - y| < \varepsilon \quad \Rightarrow |x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 2.|x - y| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - y|.|x + y| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d_u(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

وذلك أياً كانت x و y من A . ولذلك فإن f مستمر بانتظام على A .

4 . إن التابع المذكور في 3 أعلاه غير مستمر بانتظام (على الفضاء (R,d_u)) لأن:

لو أخذنا $\varepsilon = 1$ لوجدنا أنه أياً كانت $\delta > 0$ يمكن أن نوجد نقطتين x و y من R بحيث أن $d_u(x,y) < \delta$ ولكن $d_u(f(x), f(y)) > 1$.

حيث أننا نختار $x = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta}$ و $y = \frac{1}{\delta}$ فنجد أن :

$$d_u(x,y) = |x - y| = \left| \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

ولكن

$$d_u(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y|.|x + y|$$

$$= \frac{\delta}{2} . \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta} \right) = \frac{\delta^2}{4} + 1 > 1$$

(*) إذن فهذا التابع غير مستمر بانتظام مع أنه تابع مستمر .

5 . سوف نجد في فصل التراص القادم أنه إذا كان $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابع فضاءات مترية وكان (E_1, d_1) فضاءً متراصاً فإن :

f مستمر $\Leftrightarrow$ f مستمر بانتظام

6 . إذا كان التابع $f:(E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ مستمر بانتظام وكانت (x_n) متتالية لكوشي في (E_1 , d_1) فإن $(f(x_n))$ متتالية لكوشي في (E_2 , d_2) .

البرهان : لتكن $\varepsilon > 0$ عندئذ ينتج عن كون f مستمر بانتظام أنه :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta > 0\ :\ d_1(x,y) < \delta\ \Rightarrow\ d_2(f(x) , f(y)) < \varepsilon\ \ \forall\, x , y \in E_1$$

وبما أن (x_n) لكوشي في (E_1 , d_1) فإنه :

$$\forall\ \delta > 0\ \ \exists\ \ n_o \in N\ :\ p > n_o\ ,\ q > n_o\ \Rightarrow\ d_1(x_p , x_q) < \delta$$

وعليه فإنه :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ n_o \in N\ :\ p > n_o\ ,\ q > n_o\ \Rightarrow\ d_2(f(x_p) , f(x_q)) < \varepsilon$$

وهذا يعني أن المتتالية $(f(x_n))$ لكوشي في الفضاء (E_2 , d_2) .

(*) ينتج عن هذه الملاحظة أنه إذا كان $f:(E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية ، ووجدنا في $(E_1\ ,\ d_1)$ متتالية لكوشي (x_n) بحيث أن المتتالية $(f(x_n))$ ليست لكوشي في (E_2 , d_2) فإننا نحكم على أن هذا التابع غير مستمر بانتظام .

<u>فمثلاً</u> : وجدنا في 7 من 2.9 أن التابع $f : ( ]0,1[, d_u) \to ( ]1,\infty[, d_u)$ المعرف بـ $f(x) = \frac{1}{x}$ هو هوميومورفيزم (فهو مستمر) ولكنه ينقل متتالية كوشي التي حدها العام $x_n = \frac{1}{n+1}$ في $( ]0,1[, d_u)$ إلى المتتالية التي حدها العام $f(x_n) = n + 1$ وهي ليست لكوشي في $( ]1,\infty[, d_u)$ ولذلك فإن f غير مستمر بانتظام .

تمارين على مواضيع الفصل الرابع

1. لتكن A مجموعة جزئية من (E,d) وليكن $f:(E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابعاً مستمراً برهن على أن : $x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$

2. ادرس استمرار التابع $f:(\mathbb{R}^2,d_e) \to (\mathbb{R},d_u)$ المعرف بـ

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^4} & \forall \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \forall \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3. ادرس استمرار التابع $g:(\mathbb{R}^2,d_e) \to (\mathbb{R},d_u)$ المعرف بـ

$$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x y}{|x|+|y|} & \forall \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \forall \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4. برهن على أن التابع $f:(\mathbb{R},d_u) \to (\mathbb{R},d_u)$ المعرف بـ

$$f(x)=\begin{cases} x \, Sin\dfrac{1}{x} & if \quad x\neq 0 \\ 0 & if \quad x=0 \end{cases}$$

مستمر في النقطة 0 .

5. ليكن $f:(E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ تابعاً غامراً برهن على أنه إذا كان f مغلقاً فإنه يكون مفتوحاً أيضاً .

6. ليكن $f:(E,d) \to (\mathbb{R},d_u)$ التابع المعرف بـ $f(x)=6$ لكل $x \in E$ حيث (E,d) فضاء متري ما ، برهن على أن f مستمر ومغلق وغير مفتوح .

7. ليكن $f:(\mathbb{R},d_u) \to (\mathbb{R},d_u)$ تابعاً معرفاً بـ $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$ بين فيما إذا كان f مفتوحاً ؟ مغلقاً ؟

8. إذا كان $f:(E,d) \to (E,d_t)$ تابعاً ما فبرهن على أن f مفتوحاً ومغلقاً وذلك أياً كان

الفضاء (E,d) .

9. ليكن $f:(R,d_u)\to(R,d_u)$ التابع المعرف بـــ
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \forall\quad x\neq 0\\ 0 & \forall\quad x=0\end{cases}$$

برهن على أن f غير مستمر على المجال $[-1,1]$.

10. لـــيكن $f:(R^2,d_e)\to(R,d_u)$ تابعــاً مســتمراً .بــرهن علـــى أن المجموعـــة $A=\{(x,y)\in R^2 \;:\; f(x,y)=0\}$ مغلقة .

11. ليكن $f:(R^2,d_e)\to(R,d_u)$ التابع المعرف بـــ
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|y^2}{|x|+y^2} & \forall\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \forall\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ادرس استمرار f في النقطة $(0,0)$.

12. علل - بما لا يزيد عن سطرين - صحة أو خطأ كل من العبارات التالية :

a) كل تابع مستمر على فضاء متري هو تابع مفتوح على ذلك الفضاء .

b) التابع $f:(R,d_u)\to(R,d_t)$ المعرف بـــ $f(x)=x$ هو تابع مستمر.

c) كل تابع ينطلق من الفضاء المبتذل هو تابع مستمر وذلك أياً كان مستقره .

d) كل تابع يستقر في الفضاء المبتذل هو تابع مستمر وذلك أياً كان منطلقه .

أسئلة أتمتة :

السؤال الأول : ليكن $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$ تابعاً ما . ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) f مستمر $\Leftarrow$ f مغلق .

B) f مستمر $\Leftarrow$ f مفتوح .

C) f مفتوح $\Leftarrow$ f مستمر .

D) f هوميومورفيزم $\Leftarrow$ f مغلق ومفتوح .

السؤال الثاني : ليكن $f:(E_1,d_1)\to(E_2,d_2)$ تابعاً ما .

ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) f مغلق $\Leftarrow$ f مفتوح .

B) f مغلق $\Leftarrow$ f مستمر .

C) f مغلق ومفتوح $\Leftarrow$ f هوميومورفيزم .

D) f متباين وغامر $\Leftarrow$ f مستمر .

الفصل الخامس

التراص في الفضاءات المترية Compactness in Metric Space

§1 - المجموعات والفضاءات المتراصة .

1.1 - تعاريف :

– نقول عن أسرة مجموعات $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ ، إنها تشكل تغطية للمجموعة X ، إذا كان $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

– إذا كانت X مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) ، وكانت A_i مجموعة مفتوحة في (E,d) لكل i ∍ I ، وكانت الأسرة $\mathbf{A} = \{A_i\}$ تشكل تغطية لـ X ، فإننا نسمي هذه التغطية بتغطية مفتوحة لـ X (open cover) .

– إذا كانت الأسرة $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية للمجموعة X ، وإذا استطعنا إيجاد A_{i_1} و A_{i_2} و ... و A_{i_n} من $\mathbf{A}$ بحيث أن :

$$X \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_n}$$

فإننا نقول : إننا استطعنا أن نستخلص من التغطية $\mathbf{A}$ ، تغطية منتهية لـ X .

أو نقول : إن التغطية $\mathbf{A}$ ، تحوي على تغطية منتهية للمجموعة X .

1.2 - ملاحظات وأمثلة :

1. إذا كانت $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات جزئية من فضاء متري (E,d)، وكانت تشكل تغطية لـ E ، فإننا نقول إن $\mathbf{A}$ تشكل تغطية للفضاء (E,d) ، وفي هذه الحالة يكون $E = \bigcup_{i\in I} A_i$.

2. إن الأسرة $\mathbf{A} = \{A_n\}_{n\in N}$ ، حيث $A_n =]-n , n[$ ، تشكل تغطية مفتوحة للفضاء (R,d_u) ، لأنه : أياً كان x من R ، فإنه يوجد n ∍ N بحيث يكون $|x| < n$

لأن N غير محدودة من الأعلى في الفضاء (R,d_u) ، ومنه $-n < x < n$ أي أن $A_n =$

$x \ni]-n , n[$ وبالتالي $R \subseteq \bigcup_{n\in N} A_n$.

3. أياً كان الفضاء (E,d) ، فإن الأسرة $\mathbf{A} = \{ B(x,1) : x \in E \}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ (E,d) .

4. إذا كان (E,d_t) الفضاء المبتذل ، فإن الأسرة $\mathbf{A} = \{ \{x\} : x \in E \}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ (E,d_t) ، لأن $E = \bigcup_{x\in E} \{x\}$ ثم إن $\{x\}$ مجموعة مفتوحة في (E,d_t) .

5. إن الأسرة $\mathbf{A} = \{A_n\}_{n\in N}$ ، حيث $A_n =]\frac{1}{n}, 2[$ ، تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة $X =]0,1[$ في الفضاء (R,d_u) .

1.3 - تعريف :

لتكن X مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) .

– نقول إن X مجموعة متراصة في الفضاء (E,d) ، إذا أمكن أن نستخلص من كل تغطية مفتوحة لـ X ، تغطية منتهية لـ X .

– نقول عن الفضاء المتري (E,d) ، إنه فضاء متراص ؛ إذا كانت المجموعة E متراصة فيه .

1.4 - ملاحظات وأمثلة :

1. ينتج عن التعريف السابق ، أن المجموعة X من الفضاء المتري (E,d) تكون غير متراصة ، عندما يوجد لها تغطية مفتوحة ـــ واحدة على الأقل ـــ ولا نستطيع أن نستخلص منها تغطية منتهية لـ X .

فمثلاً : إن الفضاء العادي (R,d_u) هو فضاء غير متراص ، لأن الأسرة $\mathbf{A} = \{A_n\}$ حيث $A_n =]-n , n[$ ، تشكل تغطية مفتوحة لـ R كما رأينا في 2 من 1.2 ، ولا نستطيع أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية ، لأنه لو فرضنا جدلاً أن

$\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ تشكل تغطية منتهية لـ R ، مستخلصة من التغطية **A** ،

لوجدنا أن : $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} A_n$ ولكن :

$$A_1 =]-1,1[\subset A_2 =]-2,2[\subset \dots \subset A_m =]-m,m[$$

ولذلك فإن $\bigcup_{n=1}^{m} A_n = A_m =]-m,m[$ وبالتالي نحصل على أن $R \subseteq]-m,m[$

وهذا يخالف حقيقة أن R مجموعة غير محدودة .

إذاً : فالتغطية **A** ، لا تحوي تغطية جزئية منتهية لـ R ، ولذلك فإن R غير متراصة في الفضاء (R,d_u) ، أي أن هذا الفضاء هو فضاء غير متراص .

2. كل مجموعة منتهية ، في أي فضاء متري (E,d) ، هي مجموعة متراصة .

البرهان: لتكن $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة منتهية ، من فضاء متري (E,d) ، ولتكن $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ ، عندئذ نجد أن :

$$x_1 \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_1 \in I : x_1 \in A_{i_1}$$

$$x_2 \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_2 \in I : x_2 \in A_{i_2}$$

....

$$x_n \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_n \in I : x_n \in A_{i_n}$$

وهذا يعني أن الأسرة $\{A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n}\}$ تشكل تغطية منتهية لـ X ، مستخلصة من التغطية الكيفية $\{A_i\}_{i \in I}$.

إذاً : من كل تغطية مفتوحة لـ X ، نستطيع أن نستخلص تغطية منتهية ، ولذلك فإن X مجموعة متراصة .

(*) ينتج عن هذه الملاحظة ، أنه إذا كانت E مجموعة منتهية ، فإن الفضاء المتري (E,d) هو فضاء متراص كيفما كانت المسافة d .

3. يكون الفضاء المبتذل (E,d_t) متراص $\Leftrightarrow$ E مجموعة منتهية .

البرهان:

$\Rightarrow$: ينتج عن (*) من الملاحظة السابقة .

$\Leftarrow$: بحسب 4 من 1.2 ، فإن الأسرة $\mathbf{A} = \{ \{x\} : x \in E \}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ E ، وبما أن (E,d_t) متراص ، فإننا نستطيع أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية ، ولتكن هذه التغطية هي $\{ \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\} \}$ ، عندئذ نجد أن :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أي أن E مجموعة منتهية .

4. إن المجموعة $X = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0 \}$ ، هي مجموعة متراصة في الفضاء (R,d_u) .

البرهان :

لتكن $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ تغطية مفتوحة لـ X ، عندئذ تكون $0 \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ ومنه يوجد $i_0 \in I$ ، بحيث أن $0 \in A_{i_0}$. وبما أن 0 هو نهاية المتتالية التي حدها العام هو $\frac{1}{n}$ ، وبما أن A_{i_0} مجموعة مفتوحة ، فإن جميع حدود هذه المتتالية سوف تنتمي إلى A_{i_0} ، إلا عدداً منتهياً من هذه الحدود ، بحسب النتيجة 2.3 .

إذاً : فجميع عناصر المجموعة X تنتمي إلى A_{i_0} ، إلا عدداً منتهياً من هذه العناصر ، لتكن $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ مجموعة العناصر من X التي لا تنتمي إلى A_{i_0} ، عندئذ نجد أن :

$$x_1 \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \;\Rightarrow\; \exists\, i_1 \in I \;:\; x_1 \in A_{i_1}$$

$$x_2 \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \;\Rightarrow\; \exists\, i_2 \in I \;:\; x_2 \in A_{i_2}$$

....

$$x_m \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \;\Rightarrow\; \exists\, i_m \in I \;:\; x_m \in A_{i_m}$$

وهكذا نجد أن $B \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_m}$ ولدينا $X \setminus B \subseteq A_{i_o}$ ، ولذلك فإن :

$$X = (X \setminus B) \cup B \subseteq A_{i_o} \cup A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_m}$$

وهذا يعني أن الأسرة $\{ A_{i_o} \cup A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_m} \}$ تشكل تغطية منتهية مستخلصة من التغطية **A** .

إذاً : من كل تغطية مفتوحة لـــ X ، يمكن أن نستخلص تغطية منتهية ، ولذلك فـــإن X مجموعة متراصة .

(*) سوف نبرهن لاحقاً (انظر 1 من 1.15) ، على أن $X \setminus \{0\}$ هي مجموعـــة غـــير متراصة في الفضاء (R,d_u) .

5. يمكن أن نعمم المثال السابق كما يلي :

إذا كانت $X = \{ u_n , a\}_{n \in N}$ ، حيث u_n هو حد عام لمتتالية من فضاء متري (E,d)، متقاربة في هذا الفضاء نحو النقطة a ، فإن X مجموعة متراصة (E,d) .

البرهان : يتم بالأسلوب نفسه الذي برهنا فيه على المثال الوارد في 4 أعلاه .

1.5 - مبرهنة هاين – بوريل (Heine – Borel) :

كل مجال مغلق ومحدود في الفضاء (R,d_u) ، هو مجموعة متراصة .

البرهان :

ليكن $X = [a,b]$ ، مجال مغلق ومحدود في الفضاء (R,d_u) ، ولنبرهن على أن X مجموعة متراصة .

– إذا كانت $a = b$ ، فإن $X = \{a\}$ مجموعة منتهية ، ولذلك فإنها متراصة بحســـب 2 من 1.4 .

– إذا كانت $a < b$. لتكن $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ تغطية مفتوحة لـــ X ، ولنســتخلص منها تغطية منتهية لـــ X ؛ من أجل ذلك نضع :

$$M = \{ x \in X : \text{يُغطى بعدد منته من عناصر } \mathbf{A} \ [a,x] \}$$

ونلاحظ أن :

– إن $M \neq \emptyset$ لأن $M \ni a$.

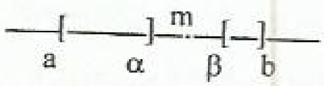
– إن M محدودة من الأعلى بـــ b ، ولذلك فإن M تملك حداً أعلى اصغري ولــيكن $m = \sup M$ ، واضح أن $a \le m \le b$.

– إن $m = b$ ، لأنه إذا كان $m < b$ فإننا نجد أن :

$$m \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \;\Rightarrow\; \exists\, i_0 \in I \;:\; m \in A_{i_0}$$

ولما كانت A_{i_0} مجموعة مفتوحــة $]\alpha , \beta[$ بحيــث أن $m \in]\alpha , \beta[\subseteq A_{i_0}$ ،

ونستطيع أن نختار $a < \alpha$ و $\beta < b$



وفي هذه الحالة نجد أن :

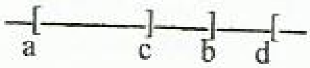
$a \le \alpha < m$ ، ولذلك فإن $\alpha \in M$ ، وبالتالي فإن $[a,\alpha]$ يُغطى بعدد منتــه مــن عناصر A ، ولنفرض أن الأسرة $\{ A_{i_1} , A_{i_2} , \dots , A_{i_r} \}$ تغطي $[a,\alpha]$.

عندئذٍ فالأسرة $\{ A_{i_0} , A_{i_1} , A_{i_2} , \dots , A_{i_r} \}$ تشكل تغطية منتهية لـــ $[a,\beta]$، مستخلصة من A ، ومعنى هذا أن $\beta \in M$ وهذا يخالف كــون $m = \sup M$ لأن $m < \beta$. إذاً $m = b$.

– إن $\beta \in M$ لأن :

$$b \in X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \;\Rightarrow\; \exists\, n \in I \;;\; b \in A_n$$

وبما أن A_n مفتوحة ، فإنه يوجد $]c , d[$ بحيث أن $b \in]c , d[\subseteq A_n$



ويمكن اختيار $a \le c$ ، فنجد أن $a \le c < b = m$ ، ولذلك $c \in M$ ولذلك فإن $[a,c]$ يُغطى بعدد منته من عناصر **A** ، ولنفرض أن الأســـرة $\{ A_{i_1} , A_{i_2} , \dots , A_{i_t} \}$ تغطي $[a,c]$ ، عندئذٍ ؛ تشكل الأسرة $\{ A_{i_1} , A_{i_2} , \dots , A_{i_t} , A_{i_n} \}$ **تغطية** منتهية لـــ $X = [a,b]$ وهي مستخلصة من التغطية A ولذلك فإن X **مجموعة متراصة** .

1.6 - ملاحظات وأمثلة :

1. إن المجموعة $X = [0,1]$ هي مجموعة متراصة في الفضاء (R,d_u) ، لأنها مجال مغلق ومحدود .

2. إن شرط كون المجال المغلق محدوداً ، هو شرط أساسي وضروري في مبرهنة هـــاين – بوريل ، لأنه لو أخذنا المجال المغلق غير المحدود $X = [\ 0,\infty\ [$ ، فإننـــا نجـــد أن X مجموعة غير متراصة في الفضاء (R,d_u) ، لأن الأســـرة $\mathbf{A} = \{ A_n \}_{n \in N}$ حيـــث $A_n =]\ -1\ , n\ [$ ، تشكل تغطية مفتوحة لـــ X لأن :

$$\forall\ x \in X ,\ \ \exists\ n \in N\ ;\ x < n$$

لأن N غير محدودة من الأعلى في (R,d_u) .

ومنه $x \in [\ 0,n\ [\ \subseteq\ ]\ -1\ , n\ [= A_n$ ؛ وبالتالي $X \subseteq \bigcup_{n \in N} A_n$

ولا نستطيع أن نستخلص من **A** تغطيـــة منتهيـــة لــــــ X . لأنـــه لـــو كانـــت $\{A_1, A_2, \dots , A_m\}$ تغطية منتهية لـــ X ، مستخلصة من **A** ، لوجدنا أن :

$$A_1 =]\ -1,1\ [\ \subset\ A_2 =]\ -1,2\ [\ \subset\ \dots \subset\ A_m =]\ -1,m\ [$$

ومنه نحصل على :

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} A_n = A_m =]\ -1, m\ [$$

وهذا يعني أن X محدودة ، مما يناقض الفرض . ولذلك فإن X غير متراصة .

1.7 - مبرهنة :

إذا كان (E^* , d^*) فضاءً جزئياً من فضاء متري (E,d) ، وكانت $X \subseteq E^*$ فإن :

X مجموعة متراصة (E,d) $\Leftrightarrow$ X مجموعة متراصة في (E^*, d^*) .

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن $A^* = \{A_i^*\}$ تغطية مفتوحة كيفيـــة لـــــ X في (E^*, d^*) ، عندئـــذٍ $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i^*$ ، ولما كانت A_i^* مجموعة مفتوحة في (E^*, d^*) ، فإنه توجد مجموعة A_i ، مفتوحة في (E,d) ، بحيث يكون $A_i^* = E^* \cap A_i$ لكل $i \in I$. ومنه نجد أن :

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i^* = \bigcup_{i\in I} (E^* \cap A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

أي أن الأسرة $A = \{A_i\}$ ،تشكل تغطية مفتوحة لـــ X في الفضـــاء (E,d) ، ولـمـا كانت X متراصة في (E,d) ، فإنه يمكن أن نستخلص من التغطية A ، تغطية منتهيـــة لـــ X ، ولتكن هذه التغطية المنتهية هي $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}\}$ ، عندئذٍ يكون $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$ ، وبما أن $X \subseteq E^*$ ، فإن :

$$X \subseteq E^* \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{n} (E^* \cap A_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{n} A^*_{i_j}$$

وهذا يعني أن الأسرة $\{A^*_{i_1}, A^*_{i_2}, ..., A^*_{i_n}\}$ تشكل تغطية منتهيـــة لـــــ X ، مستخلصة من التغطية A^* ، ولذلك فإن X متراصة في (E^*, d^*) .

$\Rightarrow$: لتكن $A = \{A_i\}$ تغطية مفتوحة كيفية لــــ X في الفضـــاء (E,d) ، عندئـــذٍ $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ ، ولما كانت $X \subseteq E^*$ ، فإن :

$$X \subseteq E^* \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (E^* \cap A_i)$$

وهذا يعني أن الأسرة $\{E^* \cap A_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة (راجع موضوع المجموعات المفتوحة في الفضاءات الجزئية) لـــ X ، في الفضاء (E^*, d^*) . ولما كانت

X متراصة في (E^*, d^*) ، فإنه يمكن أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لـ X ، ولتكن هذه التغطية المنتهية $\{E^* \cap A_{i_1}, E^* \cap A_{i_2}, \ldots, E^* \cap A_{i_n}\}$ عندئذٍ يكون :

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (E^* \cap A_{i_j}) = E^* \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$$

وهذا يعني أن الأسرة $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ تشكل تغطية منتهية لـ X ، مستخلصة من التغطية A ، ولذلك فإن X مجموعة متراصة في الفضاء (E,d) .

1.8 - ملاحظات وأمثلة :

1. إذا أخذنا $X = E^*$ ، في المبرهنة السابقة ، نحصل على النتيجة التالية :

إذا كان (E^*, d^*) فضاءً جزئياً من فضاء متري (E,d) ، فإن :

E^* متراصة في (E,d) $\Leftrightarrow$ الفضاء (E^*, d^*) متراص .

2. لقد وجدنا في المثال 4 من 1.4 ، أن المجموعة $X = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\}$ متراصة في الفضاء (R,d_u) ، ولما كانت $X \subseteq Q$ ، فإن X مجموعة متراصة في الفضاء الجزئي (Q,d_u) .

3. إذا كان $X = [a,b]$ مجالاً مغلقاً ومحدوداً في الفضاء (R,d_u) ، فإنه ينتج عن مبرهنة هاين- بوريل 1.5 ، أن X مجموعة متراصة في (R,d_u) ، ولذلك فإن الفضاء الجزئي (X,d_u) ، هو فضاء متراص .

1.9 - مبرهنة :

ليكن (E,d) فضاءً مترياً . إن الشرطين التاليين متكافئان :

1) إن (E,d) فضاء متراص .

2) من كل أسرة من المجموعات المغلقة في (E,d) تقاطعها خالٍ ، يمكن أن نستخلص أسرة منتهية تقاطعها خالٍ .

البرهان :

$2 \Rightarrow 1$: لتكن $\{F_i\}_i$ أسرة من المجموعات المغلقة في (E,d) ، تحقق $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$

عندئذٍ يكون :

$$E = E \setminus \varnothing = E \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (E \setminus F_i)$$

ومعنى هذا أن الأسرة $\{E \setminus F_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة E . وبما أن E مجموعة متراصة في (E,d) ، بحسب الشرط 1) ، فإننا نستطيع أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لـ E ، أي أنه يوجد $n \in N$ بحيث تكون الأسرة :

$\{ E \setminus F_1 , E \setminus F_2 , \ldots , E \setminus F_n \}$ تغطية لـ E . ومنه $E = \bigcup_{i=1}^{n} (E \setminus F_i)$ ،

وبحسب قوانين دي مورغان ، نجد أن :

$$\varnothing = E \setminus E = E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (E \setminus F_i) = E \setminus (E \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_i)$$

أي أن : $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$.

$1 \Rightarrow 2$: لتكن $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ تغطية مفتوحة لـ E ، عندئذٍ يكون $E = \bigcup_{i\in I} A_i$

ومنه :

$$\varnothing = E \setminus E = E \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (E \setminus A_i)$$

أي أن $\{E \setminus A_i\}_{i\in I}$ هي أسرة مجموعات مغلقة في (E,d) تقاطعها خالٍ . وبحسب الشرط 2) ، فإنه يوجد $n \in N$ بحيث أن : $\bigcap_{i=1}^{n} (E \setminus A_i) = \varnothing$ ، وبحسب قوانين دي مورغان يكون : $E \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \varnothing$ ، ومنه $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

أي أن الأسرة $\{ A_1 , A_2 , \ldots , A_n \}$ تشكل تغطية منتهية لـ E ، مستخلصة من

التغطية المفتوحة الكيفية A ، وهذا يعني أن E مجموعة متراصة في الفضاء (E,d) ، ولذلك فإن هذا الفضاء هو فضاء متراص .

1.10 - نتيجة :

إذا كانت $\{F_n\}_{n\in N}$ ، أسرة مجموعات مغلقة من فضاء متراص (E,d) ، تحقق :

1) $F_n \neq \varnothing$ لكل $n \in N$ ،

2) $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$.

فإن $\bigcap\limits_{n\in N} F_n \neq \phi$

البرهان : لو فرضنا جدلاً أن $\bigcap\limits_{n\in N} F_n = \phi$ ، لنتج عن المبرهنة السابقة ، أنه يوجد $m \in N$ بحيث يكون $\bigcap\limits_{n=1}^{m} F_n = \phi$. وبما أن $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m$ ، فإن $\bigcap\limits_{n=1}^{m} F_n = F_m$ ، ونحصل على $F_m = \varnothing$ ، وهذا يناقض الفرض 1) . إذاً : $\bigcap\limits_{n\in N} F_n \neq \phi$.

1.11 - تطبيق (مبرهنة المجالات المتداخلة) :

لنعتبر ، في الفضاء (R,d_u) ، الأسرة $\{F_n\}_{n\in N}$ بحيث أن $F_n = [a_n , b_n]$ مجال مغلق ومحدود ، وبحيث أن $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ ، عندئذ يكون $\bigcap\limits_{n\in N} F_n \neq \phi$ لأن : $F_1 = [a_1 , b_1]$ مجال مغلق ومحدود في (R,d_u) ، ولذلك فإن الفضاء الجزئي (F_1,d_u) ، هو فضاء متراص (بحسب 3 من 1.8) .

إذاً : $\{F_n\}_{n\in N}$ أسرة مجموعات مغلقة في الفضاء المتراص (F_1,d_u) ، وتحقق شروط النتيجة 1.10 ، ولذلك فإن $\bigcap\limits_{n\in N} F_n \neq \phi$.

1.12 - مبرهنة :

a) كل مجموعة مغلقة ، في فضاء متري متراص ، هي مجموعة متراصة فيه .

b) كل مجموعة متراصة ، في أي فضاء متري ، هي مجموعة مغلقة .

البرهان:

a) لتكن F مجموعة مغلقة في فضاء متري متراص (E,d) ، ولنرهن على أن F متراصة :

لتكن $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ تغطية مفتوحة كيفية لـ F في (E,d)، عندئذ $F \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

ولما كانت F مغلقة ، فإن $E \setminus F$ مفتوحة ، ونلاحظ أن :

$$E = (E\setminus F) \cup F \subseteq (E\setminus F) \cup (\bigcup_{i\in I} A_i)$$

وهذا يعني أن الأسرة $\{E\setminus F, A_i\}_{i\in I}$ ، تشكل تغطية مفتوحة لـ E ، وبما أن (E,d) متراص ، فإنه يمكن أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لـ E ، ولتكن هذه التغطية المنتهية هي $\{E\setminus F, A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}\}$.

عندئذٍ نجد أن :

$$F \subseteq E \subseteq (E\setminus F) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j})$$

لكن هذا يؤدي إلى أن : $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$ ، وهذا يعني أن $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}\}$ تشكل تغطية منتهية لـ F ، مستخلصة من التغطية الكيفية $\mathbf{A}$. وهذا يعني أن F متراصة.

b) لتكن F مجموعة متراصة في فضاء متري (E,d) ، ولنبرهن على أن F مغلقة في هذا الفضاء . من أجل ذلك نبرهن على أن $E \setminus F$ مفتوحة في (E,d) ، ومن أجل ذلك نبرهن على أن $E\setminus F$ مجاورة لكل نقطة من نقاطها .

لتكن y نقطة من $E\setminus F$ ، عندئذٍ $y \notin F$ ولذلك فإن $x \neq y$ لكل $x \in F$ ، وبحسب

خواص الفصل في الفضاءات المترية (الفصل الثاني) ، يوجد T_x و T_y ∋ τ بحيث يكون:

$y \in T_y$ و $x \in T_x$ و $T_x \cap T_y = \varnothing$ ، ومنه $F = \bigcup\limits_{x\in F}\{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x\in F} T_x$

وهذا يعني أن الأسرة $\{T_x\}_{x\in F}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ F ، وبما أن F مجموعة متراصة ؛ فإنه يمكن أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لـ F ، ولتكن هذه التغطية المنتهية هي $\{T_{x_1}, T_{x_2}, \dots, T_{x_n}\}$ ، عندئذ $F \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_{x_i}$ ،

لتكن T_{iy} المجموعة المفتوحة التي تحقق :

$y \in T_{iy}$ و $T_{x_i} \cap T_{iy} = \varnothing$ من أجل $i = 1, 2, \dots, n$ ، ولنضع

$T = \bigcap\limits_{i=1}^{n} T_{iy}$ ، عندئذ نجد أن : $y \in T$ و $T \subseteq E \setminus F$ لأن :

$$z \in T \;\Rightarrow\; z \in \bigcap_{i=1}^{n} T_{iy} \;\Rightarrow\; z \in T_{iy} \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$$
$$\Rightarrow\; z \notin T_{x_i} \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$$
$$\Rightarrow\; z \notin \bigcup_{i=1}^{n} T_{x_i}$$

ولما كانت $F \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_{x_i}$ ، فإن $z \notin F$ ، وبالتالي فإن $z \in E \setminus F$ وبالتالي $T \subseteq E \setminus F$. إذاً : $y \in T \subseteq E \setminus F$ حيث T ∋ τ ، وبالتالي $E \setminus F$ مجاورة لـ y ، وذلك لكل y من $E \setminus F$ ، ومعنى هذا أن $E \setminus F$ مجموعة مفتوحة في (E,d) ، وبالتالي فإن F مجموعة مغلقة في (E,d) .

1.13 - ملاحظات وأمثلة :

1. ينتج عن a) من المبرهنة السابقة ، أنه إذا وجدنا في فضاء متري (E,d) مجموعة مغلقة وغير متراصة ، فإننا نحكم على أن الفضاء (E,d) غير متراص .

فمثلاً : وجدنا في 2 من 1.6، أن المجموعة $X = [\,0\,,\,\infty\,[$ غير متراصة في الفضاء (R,d_u) ، ولما كانت هذه المجموعة مغلقة في (R,d_u) ، فإننا نستنتج أن الفضاء (R,d_u) غير متراص ، وقد كنا برهنا على هذا بطريقة أخرى .

2. بما أن كل مجموعة منتهية هي مجموعة متراصة ، في أي فضاء متري (E,d) ، بحسب 2 من 1.4 ، فإنه ينتج عن b) من المبرهنة السابقة ، أن كل مجموعة منتهية هي مجموعة مغلقة في أي فضاء متري .

3. إن المجموعة المغلقة ، في فضاء غير متراص ، ليس من الضروري أن تكون متراصة ، فالمجموعة N مغلقة في الفضاء (R,d_u) ، ولكنها غير متراصة ، لأن الأسرة $A = \{A_n\}_{n\in N}$ ، حيث $A_n =]\,n - \frac{1}{2}\,,\,n + \frac{1}{2}\,[$ تشكل تغطية مفتوحة لـ N ولا نستطيع أن نستخلص منها تغطية منتهية ، لأن اجتماع عدد منته من المجموعات المحدودة يعطي مجموعة محدودة و N مجموعة غير محدودة .

4. إذا كانت X مجموعة غير مغلقة في فضاء متري (E,d) ، فإن X غير متراصة (بحسب b) من المبرهنة السابقة . وعليه فإنه ، إذا كان $a \neq b$ عددين حقيقيين ، فإن المجموعات $]a,b[$ و $]a,b]$ و $[a,b[$ غير متراصة في (R,d_u) ؛ بينما $[a,b]$ مجموعة متراصة في (R,d_u) بحسب مبرهنة هاين- بوريل 1.5 .

5. إذا كان (E,d) فضاءً متراصاً ، وكانت X مجموعة جزئية منه ، فإنه ليس من الضروري أن تكون X متراصة في (E,d) ، إذ قد تكون غير مغلقة .

فمثلاً : المجموعة $]a,b[$ حيث $a \neq b$ غير متراصة في الفضاء المتراص $([a,b],d_u)$.

6. إن تقاطع مجموعتين متراصتين من فضاء متري (E,d) ، هو مجموعة متراصة فيه .

البرهان : لتكن X و Y مجموعتين متراصتين من فضاء متري (E,d) ، ولتكن $A = X \cap Y$ ، ولنبرهن على أن A متراصة في (E,d) :

إن X و Y مغلقتان في (E,d) ، لأن كل مجموعة متراصة هي مجموعة مغلقة ، بحسب

المبرهنة 1.12 . ولذلك فإن A مجموعة مغلقة في (E,d) ، وبما أن $A \subseteq X$ ، فإن A مغلقة في الفضاء (X,d) الجزئي من (E,d) وبما أن X مجموعة متراصة في (E,d) فإن الفضاء الجزئي (X,d) هو فضاء متراص بحسب الملاحظة 1 من 1.8 . إذاً : A مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص (X,d) ، ولذلك فإن A مجموعة متراصة في الفضاء (X,d) بحسب المبرهنة 1.12. ، ومنه فإن A متراصة في (E,d) بحسب المبرهنة1.7.

1.14 - مبرهنة:

إذا كانت F مجموعة جزئية من الفضاء (R,d_u) فإن :

F متراصة $\Leftrightarrow$ F مغلقة ومحدودة

البرهان :

$\Leftarrow$: بما أن F متراصة ، فإنها مغلقة ، بحسب b من المبرهنة 1.12 . لنبرهن على أن F محدودة : نعلم أن الأسرة $\{\,]-n,n[\,\}_{n\in N}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ R (انظر 2 من 1.2) ، ولذلك فإن :

$$F \subseteq R = \bigcup_{n\in N}]-n,n[$$

وهذا يعني أن الأسرة $\{\,]-n,n[\,\}_{n\in N}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ F ، وبما أن F متراصة ، فإنه يمكن أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لـ F ، أي أنه يوجد $m \in N$ بحيث أن $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{m}]-n,n[$ ، وبما أن :

$$]-1,1[\subset]-2,2[\subset \ldots \subset]-m,m[$$

فإن $\bigcup_{n=1}^{m}]-n,n[=]-m,m[$. إذاً $F \subseteq]-m,m[$ ، وبالتالي F محدودة .

$\Rightarrow$: بما أن F محدودة ،فإنه يوجد مجال مغلق ومحدود $E^* = [a,b]$ بحيث أن $F \subseteq E^*$ وبحسب مبرهنة هاين- بوريل ، فإن الفضاء (E^*,d_u) متراص ، ولما كانت F مغلقة في (R,d_u) ، فإنها مغلقة في الفضاء الجزئي (E^*,d_u) . إذاً F مغلقة في الفضاء المتراص (E^*,d_u) ، فهي متراصة في (E^*,d_u) بحسب a من المبرهنة 1.12 . وبحسب المبرهنة

1.7 تكون F متراصة في (R,d_u) .

1.15 - ملاحظات وأمثلة :

1. المجموعة $X = \{ 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \ldots , \frac{1}{n} , .. \}$ غير مغلقة في (R,d_u) ، لأن $0 \in \overline{X}$ و $0 \notin X$ ولذلك $X \neq \overline{X}$ ، ولذلك فإن X غير متراصة في (R,d_u) .

2. يمكن تعميم المبرهنة السابقة على جميع الفضاءات الإقليدية (R^n , d_e) . وعليه فإن المجموعة $\{ (x,y) \in R^2 : x > 0 \}$ غير متراصة في (R^2 , d_e) لأنها غير محـــدودة .

3. إذا كانت F مجموعة متراصة في أي فضاء متري (E,d) ، فإن F مغلقة ومحـــدودة ، لأن أسرة الكرات المفتوحة $\{ B(x,1) \}_{x \in X}$ تشكل تغطية مفتوحة لـــ X ؛ وبما أن X متراصة ، فإننا نستطيع أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لـــ X ، ولـــتكن هذه التغطية المنتهية $\{ B(x_1,1) , B(x_2,1) , \ldots , B(x_n,1) \}$ عندئذٍ :

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i ,1)$$

ولما كانت $B(x_i,1)$ محدودة ؛ ولما كان اجتماع عدد منته من المجموعات المحدودة هـــو مجموعة محدودة ؛ فإن $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i ,1)$ مجموعة محدودة ، ولذلك فإن X محدودة .

1.16 - مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة غير منتهية ، من فضاء متري متراص (E,d) ، فإن $A' \neq \varnothing$.

البرهان : لنفرض جدلاً أن $A' = \varnothing$ ، عندئذٍ يكون $x \notin A'$ ، أياً كان x مـــن E ، ولذلك فإنه لكل x من E ، توجد مجموعة مفتوحـــة T_x ، بحيـــث أن $x \in T_x$ و $T_x \cap A \subseteq \{x\}$ ، ولهذا فإن T_x لا تحوي من عناصر A إلا x ، على الأكثر ، وبما أن :

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in E} T_x$$

فإن الأسرة $\{T_x\}_{x\in E}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ E ، وبما أن E مجموعة متراصة ، فإنه يمكن أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية ، ولتكن هذه التغطية المنتهية هي $\{T_{x_1}, T_{x_2}, \dots, T_{x_n}\}$ ، عندئذٍ $A \subseteq E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T_{x_i}$ ، وبما أن T_{x_i} لا تحوي من عناصر A إلا x_i على الأكثر ، فإن $\bigcup_{i=1}^{n} T_{x_i}$ لا تحوي من عناصر A إلا n عنصراً على الأكثر ، وبما أن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T_{x_i}$ ، فإن A لا تحوي إلا n عنصراً على الأكثر ، وهذا يعني أن A منتهية ، مما يناقض الفرض . إذن $A' \neq \emptyset$.

1.17 - نتيجة:

كل فضاء متري متراص هو فضاء تام ، ولكن العكس غير صحيح ، بشكل عام .

البرهان : ليكن (E,d) فضاء متراصاً ، ولنبرهن على أنه تام . لتكن (x_n) متتالية لكوشي في (E,d) ، ولتكن $A = \{x_n\}$ ، عندئذٍ :

- إذا كانت A منتهية ، فإن (x_n) تحوي متتالية جزئية متقاربة (بحسب 4 من 2.11 من الفصل الثالث) ، وبما أن (x_n) لكوشي ؛ فإن (x_n) نفسها متقاربة (بحسب 3.8 من الفصل الثالث) .

- إذا كانت A غير منتهية ، فإنه ينتج عن المبرهنة السابقة ، أنه توجد $x \in A'$ ، وهذا يعني أنه توجد متتالية من نقط $A|\{x\}$ - أي متتالية جزئية من (x_n) - تتقارب نحو x (بحسب 2.15 من الفصل الثالث) ، وبما أن (x_n) لكوشي ؛ فإن (x_n) تتقارب نحو x .

إذاً (x_n) متقاربة في (E,d) . أي أن كل متتالية لكوشي من (E,d) ، متقاربة فيه ، ولذلك فإن (E,d) فضاء تام .

للبرهان على أن العكس غير صحيح ، بشكل عام ، يكفي أن نضرب المثال التالي :

الفضاء (R,d_u) هو فضاء تام (بحسب 5.5 من الفصل الثالث) ، ولكن هذا الفضاء غير متراص بحسب 1 من 1.4 ، من هذا الفصل .

1.18 - ملاحظات وأمثلة :

1. نستطيع أن نبرهن على مبرهنة بولزانو- وايرستراش ، الواردة في 5.4 من الفصل الثالث ، بالاعتماد على المبرهنة 1.16 الواردة أعلاه ،كما يلي :

إذا كانت $A \neq \varnothing$ مجموعة محدودة وغير منتهية من (R,d_u) ، فإنه يوجد مجال مغلق ومحدود $E^* = [a,b]$ بحيث أن $A \subseteq E^*$ ، لأن A محدودة . وبما أن (E^*,d_u) متراص (بحسب 3 من 1.8) ، فإن $A' \neq \varnothing$ ، لأن A مجموعة غير منتهية في فضاء متراص (بحسب 1.16) .

2. إذا وجدنا ، في فضاء متري (E,d) ، مجموعة غير منتهية A ، بحيث أن $A' = \varnothing$ فإننا نحكم على أن الفضاء (E,d) غير متراص .

<u>فمثلاً</u> : نعلم أن $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية و $\mathbb{N}' = \varnothing$ ، في الفضاء (R,d_u) ، ولذلك فإن (R,d_u) غير متراص .

3. إذا كانت (u_n) متتالية محدودة ، من الفضاء (R,d_u) ، فإن (u_n) تملك متتالية جزئية متقاربة .

البرهان: نضع $A = \{u_n\}$ ، ونلاحظ أنه :

- إذا كانت A منتهية ، فإن (u_n) تملك متتالية جزئية متقاربة بحسب 4 من 2.11 من الفصل الثالث .

- إذا كانت A غير منتهية ، فإنه ينتج عن كون A محدودة أنه ، يوجد مجال مغلق ومحدود $E^* = [a,b]$ بحيث أن $A \subseteq E^*$.وبما أن (E^*,d_u) متراص (بحسب 3 من 1.8)، فإن $A' \neq \varnothing$ بحسب 1.16 . لتكن $x \in A'$ ، عندئذٍ توجد متتالية من نقط $A \setminus \{x\}$ (أي متتالية جزئية من (u_n)) تتقارب نحو x .

§.2 - التراص عداً والتراص المحلي :

Countably Compact and Locally Compact .

2.1 - تعريف :

نقول عن مجموعة X ، من فضاء متري (E,d) ، إنها متراصة عداً ، إذا كانت كل مجموعة Y ، جزئية وغير منتهية من X ، تملك نقطة تراكم تنتمي إلى X . ونقول عن فضاء متري (E,d) إنه متراص عداً إذا كانت E مجموعة متراصة عداً فيه .

2.2 - ملاحظات وأمثلة:

1. إن مفهوم التراص عداً ،الوارد في التعريف السابق ، مستنبط من مبرهنة بولزانو– وايرشتراس ، الواردة في الفصل الثالث ، والتي تقول : كل مجموعة جزئية محدودة وغير منتهية من (R,d_u)، تملك نقطة تراكم تنتمي إلى R .

2. إذا كان $a \neq b$ عددين حقيقيين ، فإن المجال المحدود والمغلق $X = [a,b]$ ، متراص عداً في الفضاء (R,d_u) . لأنه إذا كانت Y مجموعة جزئية غير منتهية من X ، فإن Y محدودة ، لأن X محدودة ، وعليه فإن Y مجموعة محدودة وغير منتهية من (R,d_u) ، ولذلك فإنه ينتج ، عن مبرهنة بولزانو– وايرشتراس ، أن Y تملك نقطة تراكم y تنتمي إلى R . ونلاحظ أن $y \in \overline{Y} \subseteq \overline{X} = X$. إذاً : كل مجموعة Y جزئية وغير منتهية من X تملك نقطة تراكم y تنتمي إلى X ، وبالتالي فإن X متراصة عداً .

3. إن المجموعة $X =]0,1[$ غير متراصة عداً في (R,d_u) ، لأن المجموعة $Y = \{ \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \dots , \frac{1}{n} , \dots \}$ ، الجزئية وغير المنتهية من X ، لا تملك إلا نقطة تراكم واحدة وهي 0 ، وهذه النقطة لا تنتمي إلى X .

4. كل مجموعة مغلقة من فضاء متراص عداً ، هي مجموعة متراصة عداً .

البرهان : لتكن F مجموعة مغلقة من فضاء متراص عداً (E,d) . ولتكن Y مجموعة جزئية وغير منتهية من F ، عندئذٍ Y مجموعة جزئية غير منتهية من E . وبما أن E متراصة عداً ، فإنه يوجد لـ Y نقطة تراكم y تنتمي إلى E . ومنه نجد أن :

$$y \in \overline{Y} \subseteq \overline{F} = F$$

إذاً : كل مجموعة Y ، جزئية وغير منتهية من F ، تملك نقطة تراكم y تنتمـــي إلى F، وبالتالي فإن F متراصة عداً .

5. إن الفضاء (R,d_u) غير متراص عداً ، لأن $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية وجزئية من R ، وهي لا تملك نقطة تراكم تنتمي إلى R ، حيث إننا نعلـــم أن $\mathbb{N}' = \varnothing$ في الفضـــاء (R,d_u) .

2.3 - مبرهنة [١] :

إذا كانت $X \neq \varnothing$ مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) فإن :

$$X \text{ متراصة في } (E,d) \Leftarrow X \text{ متراصة عداً في } (E,d)$$

البرهان : لتكن Y مجموعة جزئية وغير منتهية من X ، عندئذٍ ينتج عن الفـــرض أن Y مجموعة جزئية وغير منتهية من الفضاء المتراص (X,d) ، الجزئـــي مـــن (E,d) ، وبحسب المبرهنة 1.16، فإن $Y' \neq \varnothing$ في (X,d) ، أي أن Y تملك نقطة تراكم تنتمـــي إلى X .وبالتالي فإن X متراصة عداً في (E,d) .

2.4 - تعريف:

نقول عن فضاء متري (E,d) إنه متـــراص محليـــاً (Locally Com.) ، إذا كانت كل نقطة $x \in X$ تملك مجاورة متراصة .

نقول عن مجموعة X ، جزئية من (E,d) ، إنها مجموعة متراصة محليـــاً في (E,d)، إذا كان الفضاء الجزئي (X,d) متراص محلياً .

2.5 - ملاحظات وأمثلة :

1. إن الفضاء (R,d_u) هو فضاء متراص محلياً ، لأنه : أياً كانت النقطه x من R فإن $v_x = [x-2, x+2]$ ، مجاورة لـــ x (لأن $x \in]x-1, x+1[\subseteq v_x$) وهذه المجاورة متراصة في (R,d_u) بحسب مبرهنة هاين- بوريل .

---

[١] سنبرهن في التبولوجيا(2) أن عكس هذه المبرهنة هو أيضاً صحيح في الفضاء المتري .

2. إذا كانت X مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) ، وكان لكل نقطة x من X توجد مجاورة v لـ x متراصة في (E,d) ، وبحيث أن $v \subseteq X$ ، فإن X متراصة محلياً

لأن: لكل x من X لدينا $v = X \cap v$ مجاورة لـ x في الفضاء الجزئي (X,d) ، وبما أن v متراصة في (E,d) ، فإن v مجاورة لـ x في (X,d) بحسب المبرهنة 1.7 .

إذاً : لكل x من X توجد مجاورة لـ x متراصة في الفضاء (X,d) ، ولذلك فإن الفضاء (X,d) متراص محلياً ؛ أي أن X مجموعة متراصة محلياً .

3. إن مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي مجموعة متراصة محلياً في (R,d_u) ، لأنه أياً كان $n \in \mathbb{Z}$ فإن $]n-1 , n+1[$ مجاورة لـ n في (R,d_u) ، ولذلك فإن $\mathbb{Z} \cap]n-1 , n+1[= \{n\}$ مجاورة لـ n في الفضاء الجزئي $(\mathbb{Z},du)$ ، وهذه المجاورة متراصة لأنها مجموعة منتهية . إذاً : لكل $n \in \mathbb{Z}$ توجد مجاورة $\{n\}$ لـ n متراصة في $(\mathbb{Z},du)$ ، وهذا يعني أن الفضاء الجزئي $(\mathbb{Z},du)$ متراص محلياً ، ولذلك فإن $\mathbb{Z}$ مجموعة متراصة محلياً في (R,d_u).

2.6 - مبرهنة:

إذا كانت X مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) ، فإن :

$$X \text{ متراصة في } (E,d) \quad \underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} \quad X \text{ متراصة محلياً في } (E,d)$$

البرهان:

بما أن X متراصة في (E,d) ، فإن X متراصة في الفضاء الجزئي (X,d) ، ولذلك فإن (X,d) فضاء متراص . لتكن x من X ، عندئذ x تملك مجاورة متراصة في (X,d) هي X ، وهذا يعني أن الفضاء الجزئي (X,d) متراص محلياً ، ولذلك فإن X مجموعة متراصة محلياً في (E,d) . لرؤية العكس يكفي أن نضرب مثلاً :

إن المجموعة $\mathbb{Z}$ متراصة محلياً في الفضاء (R,d_u) كما بينا في 3 من 2.5 .ولكن $\mathbb{Z}$ غير متراصة في الفضاء (R,d_u) ،لأن $\mathbb{Z}$ غير محدودة في هذا الفضاء وبحسب المبرهنة 1.14 .

2.7 - مبرهنة:

كل مجموعة مغلقة ، في فضاء متراص محلياً ، هي مجموعة متراصة محلياً .

البرهان : لتكن F مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص محلياً (E,d) ، ولنبرهن على أن F متراصة محلياً : لتكن x نقطة من F ، عندئذ $x \in E$ ، وبما أن (E,d) متراص محلياً ، فإنه توجد مجاورة v لـ x ، متراصة في (E,d) ؛ لتكن $v^* = F \cap v$ ، عندئذ تكون v^* مجاورة لـ x في الفضاء (F,d) الجزئي من (E,d). إن v^* متراصة في (E,d) لأنه ؛ إذا كانت $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ تغطية مفتوحة لـ v^* في (E,d) ، فإن $\{A_i , E \setminus F\}_{i \in I}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ v في (E , d) ، وبما أن v متراصة في (E,d) ، فإنه يمكن أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية ، ولتكن $\{A_{i_1} , A_{i_2} , \dots , A_{i_n} , E \setminus F\}$ هذه التغطية المنتهية لـ v ، عندئذ تكون $\{A_{i_1} , A_{i_2} , \dots , A_{i_n}\}$ تغطية منتهية لـv^* ، مستخلصة من التغطية الكيفية **A** ولذلك فإن v^* متراصة في (E,d) . إذاً : لكل $x \in F$ ، توجد مجاورة v^* متراصة في (E,d) و $v^* \subseteq F$ ، ولذلك فإن F متراصة محلياً بحسب الملاحظة 2 من 2.5 .

2.8 - ملاحظة:

إذا كانت T مجموعة مفتوحة في فضاء متري (E,d) ، وكانت $x \in T$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة u من (E,d) بحيث يكون :

$$x \in u \subseteq \bar{u} \subseteq T$$

البرهان:

بما أن T مفتوحة و $x \in T$ ، فإن $F = E \setminus T$ مغلقة ، $x \notin F$ ، و [illegible] واص الفصل في الفضاءات المترية (الفصل الثاني) ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان T_x و T_F بحيث أن $x \in T_x$ و $F \subseteq T_F$ و $T_x \cap T_F = \varnothing$ ، ومنه :

$$x \in T_x \subseteq E \setminus T_F \subseteq E \setminus F = T$$

وبما أن T_F مفتوحة ، فإن $E \setminus T_F$ مغلقة ، ولذلك فإن $\overline{E \setminus T_F} = E \setminus T_F$ ، وينتج عن $T_x \subseteq E \setminus T_F$: أن $\overline{T_x} \subseteq \overline{E \setminus T_F} = E \setminus T_F$. نضع $u = T_x$ فنجد أن u مجموعة مفتوحة في (E,d) وتحقق :

$$x \in T_x \subseteq \overline{u} = \overline{T_x} \subseteq E \setminus T_F \subseteq E \setminus F = T$$

أي أن $x \in u \subseteq \overline{u} \subseteq T$.

2.9 - مبرهنة:

كل مجموعة مفتوحة في فضاء متراص محلياً ،هي مجموعة متراصة محلياً .

البرهان : لتكن T_1 مجموعة مفتوحة في الفضاء المتراص محلياً (E,d) ، ولنبرهن على أن T_1 متراصة محلياً : لتكن x نقطة من T_1 ، عندئذ $x \in E$ ، وبما أن (E,d) متراص محلياً ، فإنه توجد مجاورة v لـ x متراصة في (E,d) . إن $T_1 \cap v$ مجاورة لـ x (لأنها تقاطع مجاورتين لـ x)،ولذلك توجد مجموعة مفتوحة T بحيث أن $x \in T \subseteq v \cap T_1$ ، وبحسب الملاحظة 2.8 ، فإنه توجد مجموعة مفتوحة u من (E,d) بحيث يكون : $x \in u \subseteq \overline{u} \subseteq T \subseteq v \cap T_1 \subseteq v$. وبما أن v متراصة ، فإن الفضاء (v,d)، الجزئي من (E,d) ، هو فضاء متراص . وبما أن $\overline{u}$ مغلقة في (E,d) و $\overline{u} \subseteq v$ ، فإن $\overline{u}$ مغلقة في (v,d) . إذاً : $\overline{u}$ مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص (v,d) ، ولذلك فإنها متراصة فيه بحسب المبرهنة 1.12 ، وبالتالي فإن $\overline{u}$ متراصة في الفضاء (E,d) بحسب المبرهنة 1.7 . إذاً : $\overline{u}$ مجاورة متراصة لـ x و $\overline{u} \subseteq T \subseteq v \cap T_1 \subseteq T_1$ ، وبالتالي ؛ لكل نقطة x من T_1 توجد مجاورة $\overline{u}$ ، متراصة في (E,d) ، وبحيث أن $\overline{u} \subseteq T_1$ ، ولذلك فإن T_1 متراصة محلياً بحسب 2 من 2.5 .

2.10 - ملاحظات وأمثلة:

1. إن تقاطع مجموعتين متراصتين محلياً في فضاء متري (E,d) ، هو مجموعة متراصة محلياً في (E,d) .

البرهان :

لتكن X و Y مجموعتين متراصتين محلياً في فضاء متري (E,d) ، ولتكن $A = X \cap Y$ ، ولنبرهن على أن A متراصة محلياً في (E,d) : ليكن $x \ni A$ عندئذ $x \ni X$ و $x \ni Y$ ، وبما أن X مجموعة متراصة محلياً في (E,d) ، فإن الفضاء الجزئي (X,d) متراص محلياً ، ولذلك فإنه توجد مجاورة v لـ x متراصة في (X,d) ، وبحسب المبرهنة 1.7 فإن v متراصة في (E,d) . بنفس الأسلوب ؛ فإنه ينتج عن كون $x \ni Y$ و Y مجموعة متراصة محلياً في (E,d) ، أنه توجد مجاورة u لـ x في (Y,d) متراصة في (E,d) . وبما أن تقاطع مجموعتين متراصتين هو مجموعة متراصة بحسب 6 من 1.13، فإن $v \cap u$ مجموعة متراصة في (E,d) . وبما أن $v \cap u \subseteq X \cap Y = A$ ، فإن $u \cap v$ مجموعة متراصة في الفضاء (A,d) ، الجزئي من (E,d) ، بحسب المبرهنة 1.7 .
من جهة ثانية فإنه ينتج كون v مجاورة لـ x في (X,d) وكون $x \in A \subseteq X$ أن $v \cap A$ مجاورة لـ x في (A,d) وكذلك فإن $u \cap A$ مجاورة لـ x في (A,d) وبالتالي فإن $(u \cap A) \cap (v \cap A)$ مجاورة لـ x في (A,d) . ولكن $u \cap v \subseteq A$ ولذلك فإن : $(u \cap A) \cap (v \cap A) = (u \cap v) \cap A = u \cap v$

إذاً : $u \cap v$ مجاورة لـ x متراصة في الفضاء (A,d) ، وهذا يعني أن الفضاء (A,d) ، الجزئي من (E,d) ، متراص محلياً . وبالتالي فإن A مجموعة متراصة محلياً في الفضاء .(E,d)

2. إذا كانت X مجموعة مفتوحة ، وY مجموعة مغلقة ، في فضاء متراص محلياً (E,d)، فإن $X \cap Y$ متراصة محلياً في (E,d) ، لأن : X متراصة محلياً بحسب المبرهنة 2.9 ، وY متراصة محلياً بحسب المبرهنة 2.7 ، ولذلك فإن $X \cap Y$ متراصة محلياً بحسب الملاحظة 1 أعلاه .

فمثلاً : في الفضاء (R,d_u) ؛ إذا كان لدينا $a < c < b < d$ ، فإن $]a,b[$ مجموعة

مفتوحة و $[c,d]$ مجموعة مغلقة ، ولذلك فإن $]a,b[\cap [c,d] = [c,d[$ مجموعة متراصة محلياً في (R,d_u) .

3. خلاصة: إذا كانت X مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) فإن :

X متراصة في (E,d) $\Leftrightarrow$ X متراصة عداً في (E,d)

X متراصة في (E,d) $\not\Leftarrow$ X متراصة محلياً في (E,d) .

§3.3 - التوابع في الفضاءات المترية المتراصة :

3.1 - مبرهنة:

ليكن $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية مستمر .

إذا كانت X مجموعة متراصة في (E_1 , d_1) ، فإن $f(X)$ مجموعة متراصة في (E_2 , d_2) .

البرهان : لتكن $\{B_i\}_{i\in I}$ تغطية مفتوحة لـ $f(X)$ في (E_2 , d_2) ، عندئذٍ ينتج عن تعريف التغطية المفتوحة أن $f(X) \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ ، و B_i مجموعة مفتوحة في (E_2 , d_2) لكل $i \in I$. وبما أن f مستمر ، فإن $f^{-1}(B_i)$ مجموعة مفتوحة في (E_1 , d_1) لكل $i \in I$ (بحسب المبرهنة 1.8 من الفصل الرابع) . ونلاحظ أن :

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

ومعنى هذا أن الأسرة $\{ f^{-1}(B_i) \}_{i\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ X ، وبما أن X متراصة في (E_1,d_1)، فإننا نستطيع أن نستخلص من هذه التغطية تغطية منتهية لـ X ، ولتكن هذه التغطية المنتهية هي $\{ f^{-1}(B_{i_1}) , f^{-1}(B_{i_2}) , \dots , f^{-1}(B_{i_n}) \}$ ، عندئذٍ يكون :

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(B_{i_j}) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j})$$

ومنه : $$f(X) \subseteq f[f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j})] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j}$$

أي أن الأسرة $\{ B_{i_1} , B_{i_2} , \dots , B_{i_n} \}$ تشكل تغطية منتهية لـــ $f(X)$ ، مستخلصة من التغطية المفتوحة الكيفية $\{B_i\}_{i\in I}$ ، ومعنى هذا أن $f(X)$ مجموعة متراصة في (E_2 , d_2) .

3.2 - ملاحظات وأمثلة :

1. نعبر عن المبرهنة السابقة – عادةً – بالقول : إن الصورة المباشرة لمجموعة متراصة، وفق تابع مستمر هي مجموعة متراصة .

(*) ماذا تستنتج لو كان التابع f غامراً في المبرهنة السابقة ؟.

2. إن الصورة العكسية لمجموعة متراصة ، وفق تابع مستمر ، ليس من الضروري أن تكون متراصة .

فمثلاً : لو عرفنا التابع $f : (R,d_u) \to (R,d_u)$ بـــ $f(x) = 1$ لكل x من R، لوجدنا أن هذا التابع مستمر لأنه تابع ثابت ، وإن المجموعـــة $Y = \{1\}$ متراصـــة في فضاء المستقر (R,d_u) ، لأنها منتهية ، ولكن $R = f^{-1}(Y)$ مجموعة غـــير متراصـــة في فضاء المنطلق (R,d_u) ، كما نعلم .

3. إذا كان $f : (R,d_u) \to (R^2,d_e)$ تابعاً مستمراً وكان $I = [0,1]$ ، فإن $f (I)$ مجموعة متراصة في (R^2,d_e) ، وذلك لأن I متراصة في (R,d_u) بحسب مبرهنة هاين–بوريل .

4. إذا كان (E_1 , d_1) فضاءً متراصاً ، وكـــان $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابعـــاً مستمراً فإن f يكون تابعاً مغلقاً .

البرهان : إذا كانت F مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص (E_1 , d_1) ، فإن F متراصـــة فيه بحسب المبرهنة 1.12 . وبحسب المبرهنة 3.1 فإن $f(F)$ متراصـــة في $(f(E_1) , d_2)$ ، ولذلك فإن $f(F)$ متراصة في (E_2 , d_2) ، وذلك بحسب المبرهنة 1.7 . وبالتـــالي فـــإن $f(F)$ مجموعة مغلقة في (E_2 , d_2) بحسب المبرهنة 1.12 . إذاً f تابع مغلق .

3.3 - مبرهنة :

ليكن (E_1 , d_1) فضاءً متراصاً ، وليكن $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابعاً مستمراً ومتبايناً ، عندئذ $f(E_1)$ هوميومورف إلى E_1 .

البرهان : من الفرض نجد أن التابع $f : (E_1 , d_1) \to (f(E_1) , d_2)$ تقابل ومستمر ، ولذلك فإن تابعه العكسي $f^{-1} : (f(E_1) , d_2) \to (E_1 , d_1)$ موجود ، ويكفي أن نبرهن على أن f^{-1} مستمر ؛ ومن أجل ذلك يكفي أن نبرهن على أنه إذا كانت F مجموعة مغلقة في (E_1 , d_1)، فإن $(f^{-1})^{-1} (F) = f(F)$ تكون مغلقة في $(f(E_1) , d_2)$.

بما أن F مغلقة في فضاء متراص (E_1 , d_1) ، فإنها متراصة فيه (بحسب المبرهنة 1.12) وبحسب المبرهنة 3.1 فإن $f(F)$ متراصة في (E_2 , d_2) ، وبما أن $f(F) \subseteq f(E_1)$ فإن $f(F)$ متراصة في $(f(E_1) , d_2)$ لأن كل مجموعة متراصة هي مجموعة مغلقة . إذاً f^{-1} مستمر وبالتالي f هوميومورفيزم من (E_1 , d_1) إلى $(f(E_1) , d_2)$.

3.4 - مبرهنة :

إذا كان $f : (E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية مستمراً ومتبايناً . وإذا كانت X مجموعة جزئية من (E_1 , d_1) متراصة عداً ، فإن $f(X)$ مجموعة متراصة عداً في (E_2 , d_2) .

البرهان : لتكن B مجموعة غير منتهية ، جزئية من $f(X)$ ، عندئذ تكون $A = f^{-1}(B)$ مجموعة غير منتهية لأن f تابع . وبما أن f متباين فإن :

$A = f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(f(X)) = X$ ، أي أن A مجموعة غير منتهية ، جزئية من المجموعة X . وبما أن X متراصة عداً في (E_1 , d_1) ، فإن A تملك نقطة تراكم $a \in X$.

إن $b = f(a)$ نقطة تراكم للمجموعة B في $f(X)$ ، لأن :

إذا كانت v مجاورة لـ b في (E_2 , d_2) ، فإنه ينتج عن كون f مستمراً أن $f^{-1}(v)$ مجاورة لـ a في (E_1 , d_1) . وبما أن a نقطة تراكم لـ A فإن $A\setminus\{a\} \cap f^{-1}(v) \neq \varnothing$، ولذلك فإن $B\setminus\{b\} \cap v \neq \varnothing$ ، وهذا يعني أن b نقطة تراكم للمجموعة B ، تنتمي

إلى $f(X)$ لأن a تنتمي إلى X . إذاً : كل مجموعة غير منتهية وجزئية من $f(X)$ ، تملك نقطة تراكم تنتمي إلى $f(X)$ ، ولذلك فإن $f(X)$ متراصة عداً .

3.5 - مبرهنة :

ليكن $f : (E_1 , d_1) \rightarrow (E_2 , d_2)$ تابعاً مستمراً ومتبايناً ومفتوحاً .

إذا كانت X مجموعة متراصة موضعياً في (E_1 , d_1) ، فإن $f(X)$ مجموعة متراصة موضعياً في (E_2 , d_2) .

البرهان : لتكن $y \in f(X)$ عندئذٍ يوجد $x \in X$ بحيث أن $y = f(X)$. بما أن X متراصة موضعياً ، فإنه توجد مجاورة v لـ x متراصة في الفضاء الجزئي (X , d_1).
وبما أن مقصور f على X الذي هو : $f_{|X} : (X , d_1) \rightarrow (f(X) , d_2)$ هو تابع مفتوح (لأنه مقصور لتابع مفتوح) ، فإن $f(v)$ مجاورة لـ $y = f(x)$. وبما أن $f_{|X}$ مستمر ومتباين ، لأنه مقصور لتابع مستمر ومتباين فإن $f(v)$ متراصة في الفضاء $(f(X) , d_2)$ بحسب المبرهنة 3.1 . إذاً : لكل نقطة y من $f(X)$ ، توجد مجاورة متراصة في $(f(X) , d_2)$ ، ولذلك فإن الفضاء $(f(X) , d_2)$ ، الجزئي من الفضاء (E_2 , d_2) ، هو فضاء متراص موضعياً ، وبالتالي فإن المجموعة $f(X)$ متراصة موضعياً في الفضاء (E_2 , d_2) .

3.6 - مبرهنة :

ليكن (E_1 , d_1) فضاءً متراصاً ، وليكن $f : (E_1 , d_1) \rightarrow (E_2 , d_2)$ تابع فضاءات مترية . عندئذٍ :

$$f \text{ مستمر على } E_1 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ مستمر بانتظام على } E_1$$

البرهان: $\Leftarrow$: لأن كل تابع مستمر بانتظام هو تابع مستمر .

$\Rightarrow$: حتى نبرهن على أن f مستمر بانتظام على E_1 ، يجب أن نبرهن على أنه ؛ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن δ ترتبط بـ ε فقط ، ولا ترتبط بنقط E_1 ، و بحيث أنه لكل x و y من E_1 يحققان $d_1(x,y) < \delta$ ، يكون $d_2(f(x) , f(y)) < \varepsilon$.

لتكن $\varepsilon > 0$ ، عندئذٍ ينتج عن كون f مستمر على E_1 ، أن f مستمر في كل نقطة z من E_1 ، ولذلك فإنه :

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ , \ \exists \ \delta_z > 0 \ : d_1(x,z) < \delta_z \Rightarrow d_2(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

إن أسرة الكرات المفتوحة $\{B(z, \frac{\delta_z}{2})\}_{z \in E_1}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ E_1 ، لأن :

$$E_1 = \bigcup_{z \in E_1} \{z\} \subseteq \bigcup_{z \in E_1} B(z, \frac{\delta_z}{2})$$

وبما أن $(E_1 \ , \ d_1)$ فضاء متراص ، فإننا نستطيع أن نستخلص ، من هــذه التغطيــة ، تغطية منتهية لــ E_1 ، ولتكن هذه التغطية هي :

$$\{ B(z_1, \frac{\delta_{z_1}}{2}), \ B(z_2, \frac{\delta_{z_2}}{2}), \dots, \ B(z_m, \frac{\delta_{z_m}}{2}) \}$$

لتكن :

$$\delta = \min\{ \frac{\delta_{z_1}}{2}, \frac{\delta_{z_2}}{2}, \dots, \frac{\delta_{z_m}}{2} \}$$

عندئذٍ نجد أنه لكل x و y من E_1 ، بحيث أن $d_1(x,y) < \delta$ ، يكون :

$$x \in E_1 = \bigcup_{i=1}^{m} B(z_i, \frac{\delta_{z_i}}{2}) \Rightarrow \exists \ r : \ 1 \le r \le m \ ; \ x \in B(z_r, \frac{\delta_{z_r}}{2})$$

$$\Rightarrow d_1(x,z_r) < \frac{\delta_{z_r}}{2} < \delta_{z_r} \overset{(1)}{\Rightarrow} d_2(f(x), f(z_r)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه :

$$d_1(y,z_r) \le d_1(y,x) + d_1(x,z_r) < \delta + \frac{\delta_{z_r}}{2} \le \frac{\delta_{z_r}}{2} + \frac{\delta_{z_r}}{2} = \delta_{z_r}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} d_2(f(y), f(z_r)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه نجد أن :

$$d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), f(z_r)) + d_2(f(z_r), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يعني أن f مستمر بانتظام على E_1 .

تمارين على مواضيع الفصل الخامس

1. أي من المجموعات التالية ؛ متراصة في الفضاء (R,d_u) ؟ علل إجابتك .

$$A=\{\frac{n}{n+1}\}_{n\in N} \quad \text{و} \quad B=\{Sin\, n\frac{\pi}{2}\}_{n\in N} \quad \text{و} \quad C=2N$$

2. إذا كان (E,d) فضاءً مترياً متراصاً ، وكانت $\{A_n\}_{n\in N}$ أسرة مجموعات مفتوحة فيه ، وتحقق الخاصتين التاليتين :

a) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$

b) $A_n \neq E$ لكل $n \in N$

برهن على أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq E$.

3. إذا كانت X مجموعة متراصة من فضاء متري (E,d) ، فبرهن على أن X' متراصة أيضاً في (E,d) .

4. إذا كان (E_1 , d_1) فضاءً متراصاً ، وكان $f:(E_1 , d_1) \to (E_2 , d_2)$ تقابلاً و مستمراً فبرهن على أن f هوميومورفيزم .

5. عين المجموعات المتراصة من بين المجموعات التالية ، واذكر السبب .

a) $X=\{x , y , z\}$ في فضاء متري (E,d) .

b) $Y=[1,10]$ في الفضاء (R,d_t) .

c) $Z=\{\frac{1}{2},\frac{1}{4}, \ldots , \frac{1}{2n}, \ldots\}$ في الفضاء (R,d_u) .

d) $W=\{(\frac{1}{2},2),(\frac{1}{3},3),\ldots,(\frac{1}{n},n),\ldots\}$ في الفضاء (R^2,d_e)

6. برهن على أن المجموعة $X=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : y>0\}$ ، غير متراصة في (R^2,d_e).

7. إذا كانت c نقطة ثابتة من فضاء متراص (E, d) ، وكانت $X = \{ x \in E : 1 \le d(c,x) \le 2 \}$ ، فبرهن على أن X متراصة في (E,d) .

8. إذا كانت A مجموعة غير منتهية من فضاء متراص (E,d) ، فبرهن على أن $A' \neq \varnothing$

9. إذا كان $f : (R^2,d_e) \to (R,d_u)$ تابعاً ما ، وكانت $A = \{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$ مجموعة جزئية من R^2 فإن $f(A)$ متراصة .

10. علل – بما لا يزيد عن سطرين – صحة أو خطأ كل من العبارات التالية :

a) $\mathbb{N}$ مجموعة غير متراصة في الفضاء (R,d_u) .

b) المجموعة $X = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2n} \}$ متراصة في الفضاء (R,d) .

c) كل مجموعة تامة في فضاء متري (E,d) ، هي مجموعة متراصة .

d) المجموعة $X = \{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \}$ متراصة في الفضاء (R,d_u) .

e) المجموعة $F = [0,5] \cup \{3,6,9\}$ متراصة محلياً في الفضاء (R,d_u) .

f) المجموعة $X =]1,2] \cup \{3\}$ متراصة عداً في الفضاء (R,d_u) .

أسئلة أتمتة :

السؤال الأول : ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) إن المجموعة $\{1, 2, 3\}$ غير متراصة في الفضاء العادي لـ R.

B) كل فضاء متراص هو فضاء مترابط .

C) كل فضاء متراص هو فضاء تام .

D) الفضاء (N, du) هو فضاء متراص .

السؤال الثاني : لتكن $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0\}$ من الفضاء العادي لـ R . ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) إن S مجموعة متراصة .

B) إن S مجموعة متراصة محلياً .

C) إن S مجموعة متراصة عداً .

D) إن S مجموعة غير مغلقة في الفضاء الجزئي (Q , du) .

الفصل السادس

الترابط في الفضاءات المترية Connectedness in Metric Spaces

§.1 - الفضاءات والمجموعات المترابطة .

1.1 – تعاريف :

– نقول عن فضاء متري (E,d) ، إنه فضاء غير متــرابط (disconnected) إذا تحقق الشرط التالي :

$$\exists\ A,B \in \tau\ :\ A \neq \varnothing\ ,\ B \neq \varnothing\ ,\ A \cap B = \varnothing\ ,\ A \cup B = E$$

وفي هذه الحالة نقول : إن المجموعتين A و B تشكلان فصلاً للمجموعة E .

– إذا لم نستطع إيجاد فصلٍ لـــ E ، فإننا نقول : إن الفضاء (E,d) مترابط .

– إذا كانت X مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) ، فإننا نقول عن X إنها مجموعة مترابطة في الفضاء (E,d) إذا وفقط إذا كـــان الفضـــاء (X,d_x)، الجزئي من (E,d) مترابطاً .

1.2 - تمهيدية :

إذا كانت X مجموعة جزئية من فضاء متري (E,d) ، فإن X غير مترابطة إذا وفقط إذا تحقق الشرط (1) التالي :

$$\exists\ S,T \in \tau\ :\ S \cap X \neq \varnothing\ ,\ T \cap X \neq \varnothing\ ,\ S \cap T \cap X = \varnothing\ ,\ X \subseteq S \cup T$$

البرهان :

لنفرض أولاً أن X مجموعة غير مترابطة في (E,d) ، عندئذٍ يكون الفضـــاء الجزئي (X,d_x) غير مترابط ولذلك فإنه :

$$\exists\ A,B \in \tau_X\ :\ A \neq \varnothing\ ,\ B \neq \varnothing\ ,\ A \cap B = \varnothing\ ,\ A \cup B = X \qquad (*)$$

ومن دراسة الفضاءات الجزئية (الفصل الثاني) نجد أن :

$$A,B \in \tau_X \Rightarrow \exists\ S,T \in \tau\ :\ A = S \cap X\ ,\ B = T \cap X$$

وبالتعويض في (*) نجد أنه :

$$\exists\ S,T \in \tau\ :\ S \cap X \neq \varnothing\ ,\ T \cap X \neq \varnothing\ ,\ S \cap T \cap X = \varnothing\quad \&$$

$$X = A \cup B = (S \cap X) \cup (T \cap X) \subseteq S \cup T$$

وهذا يعني أن الشرط (1) محقق . لنضع $A = S \cap X$ و $B = T \cap X$ ، عندئذ ينتج عن دراسة الفضاءات الجزئية أن A و B مجموعتان مفتوحتان في الفضاء الجزئي (X,d_x) ويحققان :

$$A \neq \varnothing \;,\; B \neq \varnothing \;,\; A \cap B = (S \cap X) \cup (T \cap X) = S \cap T \cap X = \varnothing ,$$
$$A \cup B = (S \cap X) \cup (T \cap X) = (S \cup T) \cap X = X$$

وهذا يعني أن المجموعتين A و B تشكلان فصلاً للمجموعة X في الفضاء الجزئي (X,d_x) ، وبالتالي فإن هذا الفضاء غير مترابط ، وعليه فإن المجموعة X غير مترابطة .

1.3 - ملاحظات وأمثلة :

1. إذا كانت S و T مجموعتين جزئيتين من فضاء متري (E,d) ، تحققان الشرط (1) الوارد في التمهيدية السابقة ، فإننا نقول : إن S و T تشكلان فصلاً للمجموعة X .

2. إذا كانت X مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة من فضاء متري (E,d) ، فإن X مترابطة.

البرهان : لتكن $X = \{x\}$ ، ولنفرض جدلاً أن X غير مترابطة ، عندئذ ينتج عن التمهيدية 1.2 ، أنه توجد مجموعتان $T , S \ni \tau$ يحققان الشرط (1) ، أي أن :

$S \cap X \neq \varnothing$ ولذلك فإن $S \cap X = \{x\}$

$T \cap X \neq \varnothing$ ولذلك فإن $T \cap X = \{x\}$

$S \cap T \cap X = \varnothing$ وهذا غير ممكن لأن $S \cap T \cap X = \{x\}$ كما هو واضح .

إذن X مترابطة .

3. إذا كانت E مجموعة مؤلفة من أكثر من نقطة واحدة ، فإن الفضاء المبتذل (E,d_t) غير مترابط ، لأنه ، إذا كانت $x \ni E$ فإننا نأخذ $A = \{x\}$ و $B = E \setminus \{x\}$ لنجد أن A و B تشكلان فصلاً للمجموعة E .

4. إذا كانت $X = \{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$ ،حيث $1 < n$ ، مجموعة منتهية جزئية من الفضاء (R,d_u) فإن X غير مترابطة .

البرهان :

نرتب عناصر X بشكل تصاعدي ، ولنفرض أن هذا الترتيب كان :

$$x_1 < x_2 < \ \ldots \ < x_n$$

(نعيد ترقيم عناصر X إن لزم الأمر) .

عندئذ نأخذ $\left] -\infty , \frac{x_1+x_2}{2} \right[= S$ و $\left] \frac{x_1+x_2}{2} , x_n+1 \right[= T$ ، لنجد أن S و T تحققان الشرط (I) من التمهيدية 1.2 ، فهما يشكلان فصلاً للمجموعة X .

5. ببرهان مشابه لبرهان المثال 4 السابق ، نجد أن N و Z هي مجموعات غير مترابطة في الفضاء (R,d_u) .

أيضاً فإن المجموعتين $S =]\, e , \infty [$ و $T =]-\infty , e\, [$ ، حيث e هو العدد النبري ، تشكلان فصلاً للمجموعة Q في الفضاء (R,d_u) ، ولذلك فإنها غير مترابطة في هذا الفضاء .

6. إن المجموعة $X = \{ (x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 \geq 9 \}$ ، هي مجموعة غير مترابطة في حداث

الفضاء الإقليدي (R^2,d_e) ، لأن المجموعتين : $S = \{ (x,y) : x > 1 \}$ و $T = \{ (x,y) : x < -1 \}$ يشكلان فصلاً لها ؛ لأن :

واضح أن $S , T \in \tau$ ثم إن :

$(4 , 0) \in S \cap X$ ولذلك فإن $S \cap X \neq \varnothing$

$(-4 , 0) \in T \cap X$ ولذلك فإن $T \cap X \neq \varnothing$

وأخيراً : $S \cap T \cap X = \varnothing \cap X = \varnothing$

$$(x,y) \in X \ \Rightarrow \ x^2 - y^2 \geq 9 \ \Rightarrow \ x^2 \geq 9 + y^2 \ \Rightarrow \ x^2 \geq 9 \ \Rightarrow \ |x| \geq 3$$

ومنه إما $x \geq 3$ وبالتالي $(x,y) \in S$، أو $x \leq -3$ وبالتالي $(x,y) \in T$ ، أي أن $(x,y) \in S \cup T$ ، وبالتالي $X \subseteq S \cup T$. إذاً : S و T يحققان الشرط (I) من التمهيدية 1.2 ، ولذلك فهما يشكلان فصلاً لـ X .

1.4 - مبرهنة :

إذا كانت X مجموعة جزئية من الفضاء (R,d_u) ، تحوي على الأقل عنصرين ، فإن :

$$X \text{ مترابطة في } (R,d_u) \Leftrightarrow X \text{ تشكل مجالاً في } R .$$

البرهان :

$\Leftarrow$: لنفرض جدلاً أن X ليست مجالاً في R ، عندئذٍ يوجد a و b من X و $p \notin X$ بحيث يكون $a<p<b$. نأخذ $S=]-\infty,p[$ و $T=]p,\infty[$ فنجد أن $T, S \in \tau$ وأن :

$a\in S\cap X$ ولذلك فإن $S\cap X\neq\emptyset$

$b\in T\cap X$ ولذلك فإن $T\cap X \neq \emptyset$

$S\cap T\cap X=\emptyset\cap X=\emptyset$ و $X\subseteq \{R\}\setminus\{P\} = S\cup T$

أي أن S و T تشكلان فصلاً للمجموعة X ، وهـذا يناقض الفـرض ، أي أن X مترابطة في (R,d_u) .

$\Rightarrow$: لنفرض الآن أن X مجالاً ، ولنفرض ، جدلاً ، أن X مجموعة غـير مترابطـة في (R,d_u) ، عندئذ توجد $S, T \in\tau$ بحيث أن :

$X\subseteq S\cup T$ ، $S\cap T\cap X=\emptyset$ ، $T\cap X=B\neq\emptyset$ ، $S\cap X=A\neq\emptyset$

ولذلك فإن :

$$A\cap B=\emptyset \text{ و } A\cup B=(S\cap X)\cup(T\cap X)=(S\cup T)\cap X = X$$

بما أن A و B غير خاليتين ؛ فإنـه يوجـد $a\in A$ و $b\in B$ ولنفـرض أن $a<b$ ($a\neq b$ لأن $A\cap B=\emptyset$) . ليكن $p=\sup\{A\cap[a,b]\}$ عندئـذ $p\in[a,b]$ لأن $[a,b]$ مجموعة مغلقة ، ولذلك فإن $p\in X$ أي أن $p\in A\cup B$ ... (1)

– إذا كان $p\in A=S\cap X$ فإن $p<b$ لأن $A\cap B=\emptyset$ و $p\in S$ ، وبما أن S مجموعة مفتوحة في (R,d_u) ، فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن : $p+\varepsilon\in S$ و $a<p+\varepsilon<b$ ومنه $p+\varepsilon\in X$ وبالتالي $p+\varepsilon\in A$ ، ولكن هذا يناقض كون $p=\sup\{A\cap[a,b]\}$. إذاً : $p\notin A$.

– إذا كان $p \in \Gamma - T \cap X$ فإن $p \in T$ ، وبما أن T مجموعة مفتوحة ، فإنه يوجد $0 < \delta$ بحيث أن $[p - \delta , p] \subseteq T$ و $a < p - \delta < b$ ومنه $X \supseteq [p - \delta , p]$ وبالتالي $B \supseteq [p - \delta , p]$ ولذلك فإن $[p - \delta , p] \cap A = \varnothing$ ، لكن هذا يعني أن $p - \delta$ يشكل حداً أعلى للمجموعة $A \cap [a,b]$ ، وهذا يناقض كون p هو أصغر الحدود العليا لهذه المجموعة . إذن $p \notin B$.

وبالتالي $p \notin A \cup B$ ، ونحصل على تناقض مع (1) . إذاً : X مجموعة مترابطة .

1.5 - ملاحظات وأمثلة :

1. ينتج عن المبرهنة 1.4 ، أنه إذ كان $a < b$ عددين من الفضاء (R,d_u) فإن المجموعات :

$]a,b[$ و $[a,b[$ و $]a,b]$ و $[a,b]$ و $[a , \infty[$ و $]-\infty,b]$ و $]a,\infty[$ و $]-\infty ,b[$ و R ، كلها مترابطة ، لأنها مجالات تحوي أكثر من نقطة واحدة .

أما المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و Q و $\{3\} \cup [0.1]$ ، فإنها غير مترابطة ، لأنها ليست مجالات.

2. لا توجد علاقة بين الترابط والتراص . ولتوضيح هذا الأمر نضرب الأمثلة التالية :

– المجموعة $\{1,2\}$ متراصة (لأنها منتهية) ، وغير مترابطة (لأنها ليست مجالاً) ، في الفضاء (R,d_u).

– المجموعة $]1,2[$ مترابطة (لأنها مجال) ، وغير متراصة (لأنها ليست مغلقة) ، في (R,d_u).

– المجموعة $\{x\}$ مترابطة (لأنها مؤلفة من نقطة واحدة) ، ومتراصة (لأنها منتهية) ، في كل فضاء متري (E,d) .

– المجموعة Q غير مترابطة (لأنها ليست مجالاً) ، وغير متراصة (لأنها غير محدودة) ، في (R,d_u) .

1.6 - مبرهنة :

إذا كانت X مجموعة مترابطة في فضاء متري (E,d) ، وكانت Y مجموعة جزئية من الفضاء (E,d) تحقق $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ ، فإن Y مترابطة في (E,d) .

البرهان : لنفرض ، جدلاً ، أن Y مجموعة غير مترابطة في (E,d) ، عندئذ :

$$\exists\, S,T \in \tau \;:\; S \cap X \neq \varnothing \;,\; T \cap Y \neq \varnothing \;,\; S \cap T \cap Y = \varnothing \;,\; Y \subseteq S \cup T$$

لكن هذا يؤدي إلى أنه : إما $S \cap X = \varnothing$ أو $T \cap Y = \varnothing$ [وإلاّ لكانت S و T تشكلان فصلاً للمجموعة المترابطة X] . لنفرض أن $S \cap X = \varnothing$ ، عندئذ $X \subseteq E \setminus S$ ، ومنه نجد أن $\overline{X} \subseteq \overline{E \setminus S} = E \setminus S$ ، وبالتالي $Y \subseteq \overline{X} \subseteq E \setminus S$ ، وهذا يؤدي إلى أن $S \cap Y = \varnothing$ ، ونحصل على تناقض مع كـون $S \cap Y \neq \varnothing$ ، وإذا فرضنا أن $T \cap X = \varnothing$ ، فإننا نحصل على تناقض مماثل . إذاً : Y مترابطة .

1.7 - ملاحظات وأمثلة :

1. إذا كانت X مجموعة مترابطة في فضاء متري (E,d) ، فإن لصاقتها $\overline{X}$ تكون أيضاً مترابطة في (E,d) ، لأن : $X \subseteq \overline{X} \subseteq \overline{X}$

2. إذا كانت $\overline{X}$ مجموعة مترابطة في (E,d) ، فإنه ليس من الضروري أن تكـون X مجموعة مترابطة .

فمثلاً: إن $\overline{Q} = R$ مجموعة مترابطة في (R,d_u) ، ولكن Q غير مترابطة في هذا الفضاء كما مر معنا سابقاً .

3. إذا كانت $X \subset Y$ مجموعتين جزئيتين من فضاء متري (E,d) ، فإنه :

- قد تكون X مترابطة و Y غير مترابطة .

فمثلاً: في الفضاء (R,d_u) ، إذا أخذنا $X = \{1\}$ و $Y = \{1,2\}$ نجد أن $X \subset Y$ و X مترابطة لأنها مؤلفة من نقطة واحدة ، في حين أن Y غير مترابطة لأنها ليست مجالاً.

- قد تكون Y مترابطة و X غير مترابطة .

فمثلاً : في الفضاء (R,d_u) ، إذا أخذنا $X = Q$ و $Y = R$ نجد أن $X \subset Y$ و X

غير مترابطة ، في حين أن R مترابطة .

1.8 - مبرهنة :

ليكن (E,d) فضاءً مترياً . إن الشروط التالية متكافئة :

1) (E,d) فضاء مترابط .

2) لا توجد مجموعتان مغلقتان U و V بحيث يكون :

$$U \neq \varnothing \quad , \; V \neq \varnothing \; , \; U \cap V = \varnothing \quad , \quad U \cup V = E$$

3) لا يوجد في (E,d) مجموعة مفتوحة و مغلقة بآن واحد سوى $\varnothing$ و E .

4) لا يوجد مجموعة جزئية A من (E,d) بحيث أن $\varnothing \neq A \neq E$ و $bd\,A = \varnothing$.

5) إذا كانت $E^* = \{a,b\}$ ، وكان (E^*, d_t) الفضاء المبتذل ، فإنه لا يوجد تطبيق $f : (E,d) \to (E^*, d^*)$ بحيث يكون f غامر ومستمر .

البرهان :

$2 \Rightarrow 1$: لو فرضنا ، جدلاً ، أنه توجد مجموعتان مغلقتان U و V تحققان الشرط الوارد في 2 . عندئذٍ نضع $S = E \setminus U$ و $T = E \setminus V$ لنجد بسهولة ، أن S و T تشكلان فصلاً للمجموعة E ، وبذلك يكون الفضاء (E,d) غير مترابط ، مما يناقض الشرط 1 .

$3 \Rightarrow 2$: لنفرض ، جدلاً ، أنه توجد مجموعة مفتوحة ومغلقة A من (E,d) ، بحيث أن $\varnothing \neq A \neq E$ ، عندئذٍ نضع $V = E \setminus A$ و $U = A$ ، فنجد أن U و V مجموعتان مغلقتان وتحققان :

$$U \neq \varnothing \quad , \; V \neq \varnothing \; , \; U \cap V = \varnothing \quad , \quad U \cup V = E$$

مما يناقض الشرط 2 .

$4 \Rightarrow 3$: لنفرض ، جدلاً ، أنه توجد مجموعة جزئية A من (E,d) ، بحيث أن $\varnothing \neq A \neq E$ و $bd\,A = \varnothing$ ، عندئذٍ يكون $\overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \varnothing$ ، أي أن : $\overline{A} \cap E \setminus \mathring{A} = \varnothing$ ، ومنه نحصل على أن $\overline{A} \subseteq \mathring{A}$ وبالتالي $\mathring{A} = A = \overline{A}$

وهذا يعني أن A مفتوحة ومغلقة بآن واحد ، مما يناقض الشرط 3 .

5 $\Rightarrow$ 4 : لنفرض ،جدلاً ، أنه يوجد تطبيق $f : (E,d) \rightarrow (E^* , d_t)$ بحيث يكون f غامر ومستمر ، عندئذ نضع : $S = f^{-1}(\{a\})$ و $T = f^{-1}(\{b\})$ فنجد أن S و T غير خاليتين لأن f غامر ، ومفتوحتين لأن f مستمر ، فالصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة ولدينا $\{a\}$ و $\{b\}$ مفتوحتان في الفضاء المبتذل (E^* , d_t) . ثم إن $T = E \setminus S$ ولذلك فإن T مفتوحة ومغلقة و $E \neq T \neq \varnothing$ ومنه $b\,d\,T = \overline{T} \setminus \overset{\circ}{T} = \varnothing$ ، مما يناقض الشرط 4 .

1 $\Rightarrow$ 5 : لنفرض ، جدلاً ، أن (E,d) غير مترابط ، عندئذ توجد مجموعتان T , S في τ بحيث أن $T \cup S = E$ و $T \cap S = \varnothing$ و $S \neq \varnothing$ و $T \neq \varnothing$. نعرف $f : (E,d) \rightarrow (E^* , d_t)$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} a & \forall \quad x \in S \\ b & \forall \quad x \in T \end{cases}$$

فنجد ، بسهولة ، أن f هذا تابع غامر ومستمر ، مما يناقض الشرط 5 .

إذاً : (E,d) فضاء مترابط .

1.9 - ملاحظات وأمثلة :

1. نعلم أنه لا يوجد ، في الفضاء (R,d_u) ، مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد غير $\varnothing$ و R ، ولذلك فإن هذا الفضاء هو فضاء مترابط .

2. رأينا ، سابقاً ، أن Q مجموعة غير مترابطة في (R,d_u) ، ولذلك فإن الفضاء الجزئي (Q,d_u) هو فضاء غير مترابط ، وبالتالي فإنه يوجد في الفضاء (Q,d_u) مجموعة مفتوحة ومغلقة بآن واحد، وتختلف عن Q وعن $\varnothing$.

1.10 - مبرهنة :

إذا كانت X مجموعة مترابطة في الفضاء المتري (E_1 , d_1) ، وإذا كان $f : (E_1 , d_1) \rightarrow (E_2 , d_2)$ تابعاً مستمراً ، فإن f(X) مجموعة مترابطة في الفضاء (E_2 , d_2) .

البرهان :

لنفرض ، جدلاً ، أن $f(X)$ غير مترابطة في (E_2 , d_2) ، عندئذٍ يوجد مجموعتان H و K مفتوحتان في الفضاء (E_2 , d_2) وتحققان :

$$f(X) \cap H \neq \varnothing \;,\; f(X) \cap K \neq \varnothing \;,\; f(X) \cap H \cap K \neq \varnothing \;,\; f(X) \subseteq H \cup K$$

لتكن $S = f^{-1}(H)$ و $T = f^{-1}(K)$ ، عندئذٍ نجد أن : S و T مفتوحتان في الفضاء (E_1 , d_1) ، لأن f تابعاً مستمراً ، فالصورة العكسية لمجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة . ثم إن :

$S \cap X \neq \varnothing$ لأنه : إذا كان $y \in f(X) \cap H$ فإن $y \in f(X)$ و $y \in H$ ولذلك فإنه يوجد $x \in X$ بحيث أن $y = f(x)$ ومنه :

$$x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(H) = S \quad \& \quad x \in X \Rightarrow x \in S \cap X$$

وبالمثل فإن $T \cap X \neq \varnothing$. ثم إن $X \cap S \cap T = \varnothing$ لأن :

$$\begin{aligned} f(X) \cap H \cap K = \varnothing &\Rightarrow f^{-1}[\, f(X) \cap H \cap K \,] = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \\ &\Rightarrow f^{-1}(\, f(X)\,) \cap f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K) = \varnothing \\ &\Rightarrow f^{-1}(\, f(X)\,) \cap S \cap T = \varnothing \end{aligned}$$

وبما أن $X \subseteq f^{-1}(\, f(X)\,)$ ، فإننا نحصل على أن $X \cap S \cap T = \varnothing$.

ثم إن $X \subseteq S \cup T$ لأن :

$$\begin{aligned} x \in X &\Rightarrow f(x) \in f(X) \subseteq H \cup K \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(H \cup K) = f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K) = S \cup T \end{aligned}$$

مما تقدم نجد أن S و T تشكلان فصلاً للمجموعة X في الفضاء (E_1 , d_1) ، وهذا يناقض كون X مترابطة في هذا الفضاء . إذاً : $f(X)$ مترابطة في الفضاء (E_2 , d_2) .

1.11 - مبرهنة :

إذا كان (E^* , d^*) فضاءً جزئياً من (E,d) ، وكانت $X \subseteq E^*$ فإن :

X مترابطة في (E^* , d^*) $\Leftrightarrow$ X مترابطة في (E,d) .

البرهان :

$\Leftarrow$: لنفرض ، جدلاً ، أن X غير مترابطة في (E,d) ، عندئذٍ توجد مجموعتان S و T مفتوحتان في (E,d) ، تشكلان فصلاً لـ X في (E,d) ، أي :

$$S\cap X\neq\varnothing \ , \ T\cap X\neq\varnothing \ , \ S\cap T\cap X=\varnothing \ , \ X\subseteq S\cup T$$

لنضع $S^*=S\cap E^*$ و $T^*=T\cap E^*$ ، عندئذٍ نجد أن S^* و T^* مفتوحتان في (E^*, d^*) وتشكلان فصلاً لـــ X في (E^*, d^*) ، لأن :

$$S^*\cap X = S\cap E^*\cap X = S\cap X\neq\varnothing$$
$$T^*\cap X = T\cap E^*\cap X = T\cap X\neq\varnothing$$
$$S^*\cap T^*\cap X = (S\cap E^*)\cap(T\cap E^*)\cap X = S\cap T\cap X=\varnothing$$
$$X\subseteq S\cup T \ \ \& \ \ X\subseteq E^* \Rightarrow X\subseteq (S\cup T)\cap E^* = (S\cap E^*)\cup(T\cap E^*) = S^*\cup T^*$$

وهذا يناقض كون X مترابطة في (E^*, d^*) ، إذاً : X مترابطة في (E,d) .

$\Leftarrow$: لنفرض ، جدلاً ، أن X غير مترابطة في (E^*, d^*) ، عندئذٍ توجد مجموعتـــان S^* و T^* ، مفتوحتان في (E^*, d^*) ، بحيث تشكلان فصلاً لـــــ X في (E^*, d^*) ، أي :

$$S^*\cap X\neq\varnothing \ , \ T^*\cap X\neq\varnothing \ , \ S^*\cap T^*\cap X=\varnothing \ , \ X\subseteq S^*\cup T^*$$

ولكن ، من دراسة المجموعات المفتوحة في الفضاءات الجزئيـــة ، نجـــد أنـــه توجـــد مجموعتان S و T ، مفتوحتان في (E,d) ، بحيث يكون :

$$S^*=S\cap E^* \ , \ T^*=T\cap E^*$$

إن T و S تشكلان فصلاً لـــ X في (E,d) ، لأن :

$$\varnothing\neq S^*\cap X = S\cap E^*\cap X\subseteq S\cap X$$

ولذلك فإن $S\cap X\neq\varnothing$.

$$\varnothing\neq T^*\cap X = T\cap E^*\cap X\subseteq T\cap X$$

ولذلك فإن $T\cap X\neq\varnothing$. ثم إن : $X\subseteq E^* \Rightarrow X\cap E^*=X$ ،

ولذلك فإن :

$$S\cap T\cap X = S\cap T\cap(X\cap E^*\cap E^*) = (S\cap E^*)\cap(T\cap E^*)\cap X = S^*\cap T^*\cap X=\varnothing$$

وأخيراً $X\subseteq S^*\cup T^*\subseteq S\cup T$

وهذا يناقض كون X مترابطة في (E,d) ، إذاً : X مترابطة في (E^*, d^*) .

1.12 - مبرهنة :

إذا كانت $\{X_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات المترابطة في فضاء متري

(E,d) ، بحيث أن $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \neq \varnothing$ فإن $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ مجموعة مترابطة .

البرهان :

لنضع $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ، ولنبرهن على أن X مجموعة مترابطـــة في (E,d) . مـــن أجل ذلك نفرض ، جدلاً ، أن X غير مترابطة ، عندئذ توجد مجموعتان S و T ، مفتوحتان في (E,d) ، وتشكلان فصلاً لـــ X . ونلاحظ ما يلي :

1) أياً كانت $i \in I$ فإن X_i إما محتواة في S ، أو محتواة في T ، وذلك لأن : $X_i \subseteq X \subseteq S \cup T$ ، و إذا كانت $X_i \cap S \neq \varnothing$ و $X_i \cap T \neq \varnothing$ فـــإن S و T تشكلان فصلاً لـــ X_i ، مما يناقض كون X_i مترابطة . إذاً : X_i إما محتواة في S أو X_i محتواة في T .

2) إن الأسرة $\{X_i\}_{i\in I}$ بكاملها ، إما محتواة في S ، أو محتـــواة في T . لأنـــه إذا كانت $X_i \subseteq S$ و $X_j \subseteq T$ فإننا نجد أن :

$$X_i \cap X_j = (X_i \cap S) \cap (X_j \cap T) = (X_i \cap X_j) \cap S \cap T$$
$$\subseteq X \cap S \cap T = \varnothing$$

ومنه نجد أن $X_i \cap X_j = \varnothing$ وبالتالي $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = \varnothing$ ، مما يناقض الفرض .

ـــ إذا كانت الأسرة $\{X_i\}_{i\in I}$ بكاملها محتواة في S ، فإننا نجد أن $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i \subseteq S$ ، ولذلك فإن $X \cap S = X$ وبالتالي فإن :

$$X \cap T = (X \cap S) \cap T = X \cap S \cap T = \varnothing$$

وهذا يناقض كون S و T تشكلان فصلاً لـــ X .

ـــ وإذا كانت الأسرة $\{X_i\}_{i\in I}$ محتواة بكاملها في T ، فإننا سنصل إلى تناقض مماثل للسابق . إذاً : X مترابطة .

1.13 - ملاحظات وأمثلة :

1. نعلم أنه لدينا في الفضاء (R,d_u) ، كل المجموعات $X_i =]-i, i[$ حيث $i \in N$ ،

هي مجموعات مترابطة ، ثم إن $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i =]-1,1[\neq \varnothing$ ولذلك فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ مجموعة مترابطة في الفضاء (R,d_u) ، ولكن $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. إذاً : R مجموعة مترابطة في (R,d_u).

2. إذا كانت $X_i =]2i, 2i+1[$ حيث $i \in \mathbb{N}$ ، فـإن X_i مجموعـة مترابطـة في الفضاء (R,d_u) لأنها مجال في R ، ولكن المجموعة $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ غير مترابطة . لماذا ؟

3. إذا كان لكل زوج x و y من نقط (E,d) ، توجد مجموعة مترابطة X_{xy} ، تحـوي x و y ، فإن (E,d) فضاء مترابط .

البرهان :

لتكن a نقطة ثابتة من E ، عندئذٍ $E = \bigcup_{x \in E} X_{ax}$ ، ومن المبرهنة السـابقة نحصل على المطلوب .

4. إذا كانت $\{X_n\}_{n \in N}$ أسرة مجموعات جزئية مترابطة من فضاء متـري (E,d) ، بحيث أن $X_{n-1} \cap X_n \neq \varnothing$ ، وكانت $X = \bigcup_{n \in N} X_n$ ، فإن X مترابطة . (برهن على ذلك كتمرين) . نـبرهن بالاسـتقراء علـى أن $A_n = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ مترابطة لكـل $n \in \mathbb{N}$ ، وبمـا أن $\bigcap_{n \in N} A_n = X_1 \neq \varnothing$ ، فـإن $X = \bigcup_{n \in N} A_n$ مترابطة ، بحسب المبرهنة السابقة .

5. (هذه الملاحظة تفيد للمبرهنة التالية) . إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من فضاء متري (E,d) ، وكانت $H \subseteq A$ و $H \subseteq B$ فإن :

H مفتوحة (مغلقة) في (A,d_A) و (B,d_B) يـؤدي إلى أن H مفتوحـة (مغلقـة) في $(A \cup B, d_{A \cup B})$.

البرهان :

بما أن H مفتوحة في الفضاء الجزئي (A,d_A) ، فإنه يوجد $T_1 \in \tau$ بحيث أن

$H = T_1 \cap A$ ، وبما أن H مفتوحة في الفضاء الجزئي (B,d_B) ، فإنه يوجـــد $T_2 \ni \tau$

بحيث أن $H = T_2 \cap A$ ، ومنه نستنتج أن $H = (T_1 \cap T_2) \cap (A \cup B)$ ، لأن :

$$H = H \cap H = (T_1 \cap A) \cap (T_2 \cap A) = (T_1 \cap T_2) \cap A$$
$$\subseteq (T_1 \cap T_2) \cap (A \cup B)$$

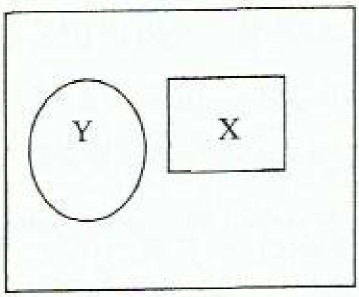
ثم إن :

$$(T_1 \cap T_2) \cap (A \cup B) = [(T_1 \cap T_2) \cap A] \cup [(T_1 \cap T_2) \cap B]$$
$$\subseteq (T_1 \cap A) \cup (T_2 \cap B) = H \cap H = H$$

إذاً : $H = (T_1 \cap T_2) \cap (A \cup B)$. وبما أن $T_1 \cap T_2 \ni \tau$ ، فإن H مفتوحة في الفضاء الجزئي $(A \cup B, d_{A \cup B})$ ، وبالأسلوب نفسه نبرهن حالة H مغلقة .

1.14 - مبرهنة :

ليكن (E,d) فضاءً مترياً مترابطاً . ولتكن X مجموعة جزئية مترابطة في (E,d) ، ولتكن $Y \subseteq E \setminus X$ ولنفرض أن Y مفتوحة ومغلقة بآن واحـــد في الفضـــاء (E\X,d) ، الجزئي من (E,d) ، عندئذٍ تكون المجموعة $X \cup Y$ مترابطـــة في الفضـــاء (E,d) .



(E,d)

البرهان :

لنضع $Z = X \cup Y$ ، ولنبرهن على أن Z مترابطة في (E,d) .

نفرض ، جدلاً ، أن Z غير مترابطة في (E,d) ، عندئذٍ يكون الفضاء (Z,d) الجزئـــي من (E,d) ، غير مترابط (بحسب تعريف المجموعة المترابطة) . ولذلك فإنـــه توجـــد مجموعتان S و T ، مفتوحتان في الفضاء (Z,d) بحيث يكون :

$$T \cup S = Z \ , \ T \cap S = \varnothing \ , \ T \neq \varnothing \ , \ S \neq \varnothing$$

إن S و T مغلقتان ، أيضاً ، في الفضاء (Z,d) لأن : $S = Z \setminus T$ و $T = Z \setminus S$.

وبما أن $X \subseteq Z$ و X مترابطة في (E,d) ، فإن X مترابطة في الفضاء (Z,d) ، بحسب المبرهنة 1.11 .

وبما أن $X \subseteq Z = S \cup T$ فإنه : إما $X \subseteq S$ أو $X \subseteq T$ [لو كان $X \cap S \neq \varnothing$ و $X \cap T \neq \varnothing$ لشكلت S و T فصلاً لـ X في (Z,d) ، ولحصلنا على تناقض مع كون X مترابطة في (Z,d)] . لنفرض أن $X \subseteq T$ عندئذ نجد أن :

$$S = Z \setminus T \subseteq Z \setminus X \subseteq Y$$

وبما أن S مفتوحة ومغلقة في الفضاء (Z,d) و $S \subseteq Y$ ، فإن S مفتوحة ومغلقة في الفضاء (Y,d) ، الجزئي من (Z,d) (راجع بحث الفضاءات الجزئية) ، وبما أن Y مفتوحة ومغلقة بآن واحد في $(E\setminus X,d)$ بالفرض ، فإن S مفتوحة ومغلقة في $(E\setminus X,d)$.

إذاً : فالمجموعة S مفتوحة ومغلقة في الفضائين (Z,d) و $(E\setminus X,d)$ ، الجزئيين من (E,d). وبحسب الملاحظة 5 من 1.13 ، تكون S مفتوحة ومغلقة في الفضاء $(E\setminus X \cup Z,d)$. ولكن $E \subseteq (E\setminus X) \cup Z \subseteq (E\setminus X) \cup X = E$

أي أن $(E\setminus X) \cup Z = E$ ، وبالتالي فإن S مجموعة مفتوحة ومغلقة في الفضاء (E,d) .

وبما أن $\varnothing \neq S \neq E$ ، فإنه ينتج عن المبرهنة 1.8 ، أن الفضاء (E,d) غير مترابط ، وهذا يناقض الفرض . إذاً : فالمجموعة $Z = X \cup Y$ هي مجموعة مترابطة في (E,d) .

1.15 - نتيجة كره توسكي : حذف

إذا كانت X و Y مجموعتين مغلقتين في فضاء متري مترابط (E,d) ، بحيث أن $E = X \cup Y$ ، وبحيث أن $X \cap Y$ مجموعة مترابطة في (E,d) .

البرهان :

لنضع $Z = X \cap Y$ و $D = X \setminus Z$ ، عندئذ نجد أن $D = E \setminus Y \subseteq E \setminus Z$ لأن $E = X \cup Y$. وبما أن Y مغلقة في (E,d) ، فإن D مفتوحة في (E,d) ،

ولذلك فإنها مفتوحة في الفضاء $(E \setminus Z, d)$ ، الجزئي من (E,d) (راجع بحث الفضاءات الجزئية) .

ثم إن :
$$D = X \setminus Z = X \cap (E \setminus Z)$$

وبما أن X مغلقة في (E,d) بالفرض ، فإن D مغلقة في الفضاء $(E \setminus Z, d)$ ، ولــذلك فإنه ينتج عن المبرهنة 1.14 السابقة أن $D \cup Z$ مترابطة في (E,d) ، ولكن $D \cup Z = X$.

إذاً : X مترابطة في (E,d) ، وبوضع $D = Y \setminus Z$ ، نجد بالأســلوب نفســه أن Y مترابطة في (E,d) .

1.16 - تعريف :

نقول عن مجموعتين X و Y ، جزئيتين من فضاء متري (E,d) ، إنهمـا منفصلتان (Separated) إذا كان $X \cap \overline{Y} = \varnothing$ و $\overline{X} \cap Y = \varnothing$.

1.17 - ملاحظات وأمثلة :

1. في الفضاء (R, d_u) ، إذا كانت $X =]1,3[$ و $Y =]3,5[$ و $Z = [5,7[$ ، فإن X و Y منفصلتان لأن :

$$\overline{X} \cap Y = [1,3] \cap]3,5[= \varnothing \quad , \quad X \cap \overline{Y} =]1,3[\cap [3,5] = \varnothing$$

في حين أن Y و Z غير منفصلتين ، لأن :

$$\overline{Y} \cap Z = [3,5] \cap [5,7[= \{5\} \neq \varnothing$$

2. إذا كانت X و Y مجموعتين مغلقتين في فضاء متري (E,d) ، فإن :

$$X \text{ و } Y \text{ منفصلتان } \Leftrightarrow X \cap Y = \varnothing$$

لأن $\overline{X} = X$ و $\overline{Y} = Y$.

3. في الفضاء الإقليدي (R^2, d_e) . إن المجموعتين : حلاوي

$$X = \{ (x,y) \in R^2 \ : \ y = Sin\frac{1}{x} \quad ; \quad 0 < x \leq 1 \}$$

$$Y = \{ (0,y) \in R^2 \ : \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \}$$

غير منفصلتين ، لأن النقطة $(0,1)$ تنتمي إلى $\overline{X} \cap Y$.

4. إذا كانت المجموعتان S و T تشكلان فصلاً لمجموعة X من فضاء متري (E,d) ، فإن المجموعتين $A = X \cap S$ و $B = X \cap T$ منفصلتان لأنه :

لو فرضنا ، جدلاً ، $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ لوجدنا $x \in A \cap \overline{B}$ ومنه $x \in A = S \cap X$ وبالتالي $x \in S$ ، و $x \in \overline{B}$. وبما أن S مجموعة مفتوحة فهي مجاورة لـ x ، ولذلك فإن $S \cap B \neq \varnothing$ بحسب تعريف النقطة اللاصقة بمجموعة . ومنه نجد أن : $S \cap T \cap X \neq \varnothing$ ، وهذا يناقض كون S و T تشكلان فصلاً لـ X . إذاً : $A \cap \overline{B} = \varnothing$ ، وبالأسلوب نفسه نبرهن على أن $\overline{A} \cap B = \varnothing$. وبالتالي فإن A و B منفصلتان.

1.18 - مبرهنة :

إذا كانت X و Y مجموعتين مترابطتين وغير منفصلتين من فضاء متري (E,d) ، فإن المجموعة $X \cup Y$ تكون مترابطة في هذا الفضاء .

البرهان : لنفرض ، جدلاً ، أن $X \cup Y$ غير مترابطة ، ولنفرض أن المجموعتين S و T تشكلان فصلاً لـ $X \cup Y$ ، عندئذ نلاحظ ما يلي :

- بما أن X مترابطة و $X \subseteq X \cup Y \subseteq S \cup T$ فإنه : إما $X \subseteq S$ أو $X \subseteq T$ ، وإلا لكانت S و T فصلاً لـ X . وبالمثل فإنه : إما $Y \subseteq S$ و $Y \subseteq T$.

1) إذا فرضنا أن $X \subseteq S$ و $Y \subseteq T$ نجد أن :

$$\begin{aligned} Y \subseteq T \ \Rightarrow X \cap Y = Y \ \Rightarrow \ Y \cap S &= (Y \cap T) \cap S \\ &= Y \cap T \cap S \subseteq (Y \cup X) \cap T \cap S = \varnothing \end{aligned}$$

ولذلك $Y \cap S = \varnothing$ ومنه :

$$(X \cup Y) \cap S = (X \cap S) \cup (Y \cap S) = (X \cap S) \cup \varnothing = X \cap S = X$$

وبالمثل فإن $(X \cup Y) \cap T = Y$. ولكن هذا يؤدي إلى أن X و Y منفصلتان بحسب الملاحظة 4 من 1.17 ، ونحصل على تناقض مع الفرض .

2) إذا فرضنا أن $X \subseteq T$ و $Y \subseteq S$ فإننا سنصل - بمناقشة مماثلة لـ 1) - إلى أن

X و Y منفصلتان ونحصل على تناقض مع الفرض أيضاً .

3) إذا فرضنا أن $X \subseteq S$ و $Y \subseteq S$ فإننا سنجد أن $X \cup Y \subseteq S$ ومنه : $(X \cup Y) \cap S = X \cup Y$ وبالتالي :

$$(X \cup Y) \cap T = [\,(X \cup Y) \cap S\,] \cap T = (X \cup Y) \cap S \cap T = \varnothing$$

وهذا يناقض كون S و T فصلاً لـ $X \cup Y$.

4) إذا فرضنا أن $X \subseteq T$ و $Y \subseteq T$ فإننا سنصل - بمناقشة مماثلة لـ 3) - إلى تناقض مع كون S و T فصلاً لـ $X \cup Y$. إذاً : $X \cup Y$ مجموعة مترابطة .

§2 - المركبات المترابطة :

إذا كان (E,d) فضاءً مترياً ما ، وكانت $x \in E$ ، فإنه توجد مجموعة جزئية X من E - واحدة على الأقل - مترابطة بحيث أن $x \in X$ ، فمثلاً $X = \{x\}$ ، ولكن قد يوجد أكثر من مجموعة مترابطة في (E,d) وتحوي على x .

2.1 - تعريف :

إذا كانت x نقطة من فضاء متري (E,d) ، فإننا نسمي أكبر مجموعة جزئية مترابطة C_x في (E,d) تنتمي إليها x ، بالمركبة المترابطة للنقطة x .

2.2 - ملاحظات و أمثلة :

1. إذا كانت $\{C_x\}_{x \in X}$ أسرة كل المركبات المترابطة لنقط E ، في فضاء (E,d) ، فإن :

- $E = \bigcup\limits_{x \in E} C_x$ لأن $E = \bigcup\limits_{x \in E} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in E} C_x \subseteq E$.

- إذا كان $x \neq y$ من E ، فإن $C_x \cap C_y = \varnothing$ أو $C_x = C_y$ لأنه إذا كان $C_x \cap C_y \neq \varnothing$ فإن $C_x \cup C_y$ تكون مترابطة بحسب المبرهنة 1.12 . ولدينا $x \in C_x \subseteq C_x \cup C_y$ ، ولما كانت C_x هي أكبر مجموعة جزئية مترابطة من E تحوي x فإن $C_x = C_x \cup C_y$ ، وهذا يعني أن $C_y \subseteq C_x$. وبما أن $y \in C_y \subseteq C_x$ و C_y هي أكبر مجموعة جزئية مترابطة من E تحوي y فإن $C_y = C_x$.

2. إذا كان (E,d) فضاءً مترياً مترابطاً ، فإن E هي مركبة مترابطة لكل عنصر من عناصر E ، وهي المركبة المترابطة الوحيدة في هذا الفضاء .

2.3 - مبرهنة :

إذا كانت C_x مركبة مترابطة لـ x في فضاء متري (E,d) ، فإن C_x مجموعة مغلقة .

البرهان : بما أن C_x مترابطة فإن $\overline{C_x}$ مترابطة (بحسب 1 من الملاحظات 1.7) ، وبما أن $x \in C_x \subseteq \overline{C_x}$ و C_x هي أكبر مجموعة مترابطة ينتمي إليها x ، فإن $C_x = \overline{C_x}$ وبالتالي فإن C_x مغلقة .

2.4 - ملاحظات وأمثلة :

1. في الفضاء (Q,d_u) ، الجزئي من (R,d_u) ، نلاحظ أنه إذا كانت $X \subseteq Q$ فإن : X مترابطة في (Q,d_u) ، إذا وفقط إذا ، كانت X مؤلفة من نقطة واحدة . لأن X مترابطة في (Q,d_u) يؤدي إلى أن X مترابطة في (R,d_u) بحسب المبرهنة 1.11 ، وبالتالي فإن X تكون مجالاً في R بحسب المبرهنة 1.4 ، ولكن $X \subseteq Q$ ولذلك فإن $X = [x , x] = \{x\}$ ، لأن $[x , x]$ هو المجال الوحيد ، غير الخالي ، المحتوى في Q ، لأن Q قابلة للعد في حين أن أي مجال غير خالٍ ، إذا اختلف طرفاه ، يكون مجموعة غير قابلة للعد .

ينتج عما تقدم أنه ؛ إذا كانت x نقطة من الفضاء (Q,d_u) ، فإن المركبة المترابطة لـ x في هذا الفضاء هي $C_x = \{x\}$ ، وينتج عن هذا أن المركبة المترابطة قد تكون مجموعة غير مفتوحة ، لأن $\{x\}$ مجموعة غير مفتوحة في الفضاء (Q,d_u) .

2. في الفضاء المبتذل (E,d_t) . إذا كانت $x \ni E$ ، فإن المركبة المترابطة لـ x هي $C_x = \{x\}$ ، لأن أي مجموعة جزئية ، تحوي أكثر من عنصرين ، في هذا الفضاء هي مجموعة غير مترابطة (بحسب 3. من الملاحظات 1.3) .

3.§ - الترابط المحلي Locally Connected :

3.1 – تعريف :

نقول عن فضاء متري (E,d) إنه مترابط محلياً في النقطة x من E ، إذا كانت كل مجاورة لـ x تحوي مجموعة مفتوحة مترابطة وتحوي x . ونقول إن الفضاء (E,d) مترابط محلياً ، إذا كان (E,d) مترابط محلياً في كل نقطة من نقط E . ونقول عن مجموعة X من (E,d) إنها مترابطة محلياً ، إذا كان الفضاء الجزئي (X,d) مترابطاً محلياً .

3.2 - ملاحظات وأمثلة :

1. إن الفضاء المبتذل (E,d_t) مترابط محلياً ، لأنه أياً كانت $x \in E$ فإن $\{x\}$ مجموعة مفتوحة ومترابطة ، وهي محتواة في كل مجاورة لـ x .

2. قد نجد فضاءات مترابطة محلياً ولكنها غير مترابطة .

<u>فمثلاً</u> : إذا كانت E مجموعة تحوي أكثر من عنصر واحد ، فإن الفضاء المبتذل (E,d_t) مترابط محلياً ولكنه غير مترابط ، كما نعلم .

3. قد نجد فضاءات مترابطة ولكنها غير مترابطة محلياً .

<u>فمثلاً</u> : في الفضاء الإقليدي (R^2, d_e) ، لو أخذنا : حذرها

$$X = \{ (x,y) \in R^2 \ : \ y = Sin\frac{1}{x} \quad ; \quad 0 < x \le 1 \}$$

فإننا نجد أن $X = f(\,]0,1]\,)$ وفق التابع المستمر :

$f : (R \setminus \{0\}, d_u) \to (R^2, d_e)$ المعرف بـ : $f(x) = (x, Sin\frac{1}{x})$.

ولما كانت المجموعة $]0,1]$ مترابطة في $(R \setminus \{0\}, d_u)$ بحسب المبرهنة 1.4 والمبرهنة 1.11 ، فإن X مترابطة في (R^2, d_e) بحسب المبرهنة 1.10 . وإذا أخذنا :

$$Y = \{ (0,y) \in R^2 \ : \ \frac{1}{2} \le y \le 1 \}$$

نجد أن $Y = g(\,[\frac{1}{2}, 1]\,)$ وفق التابع المستمر :

$$g : (R,d_u) \rightarrow (R^2, d_e) \quad \text{المعرف بـ} : \quad g(y) = (0,y)$$

ولما كانت المجموعة $[\frac{1}{2} , 1]$ مترابطة في (R,d_u) بحسب المبرهنة 1.4 ، فإن Y مترابطة في (R^2, d_e) بحسب المبرهنة 1.10 .

وبما أن المجموعتين X و Y غير منفصلتين ، لأن $(0,1) \in \overline{X} \cap Y$ ، فإن المجموعة $X \cup Y$ مترابطة بحسب المبرهنة 1.18 ، وبالتالي فإن الفضاء $(A \cup B, d_e)$ ، الجزئي من (R^2, d_e) ، هو فضاء مترابط. ولكن هذا الفضاء غير مترابط محلياً ،لأنه لو أخذنا النقطة $M = (0,1)$ من $A \cup B$ لوجدنا أن الكرة $B(M , \frac{1}{4})$ مجاورة لـ M ، ولا تحوي أي مجموعة مفتوحة مترابطة .

تمارين على مواضيع الفصل السادس

1. إذا كانت X مجموعة مترابطة وتحوي على أكثر من عنصر واحد في فضاء متري (E,d) فبرهن على أن X غير منتهية .

2. برهن على أن المجموعة $A = \bigcup_{n \in N}]\, 2n\, ,\, 2n+1\, [$ ، غير مترابطة في الفضاء (R,d_u) .

3. برهن على أن ℕ غير مترابطة في الفضاء العادي لـ R .

4. علل – بما لا يزيد عن سطرين – صحة أو خطأ كل من العبارات التالية :

a) كل مجموعة متراصة في فضاء متري (E,d) هي مجموعة مترابطة فيه .

b) كل فضاء جزئي من فضاء مترابط هو فضاء مترابط .

c) كل فضاء تام هو فضاء مترابط .

d) كل مجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء متري (E,d) هي مترابطة .

e) المجموعة $F = [0,5] \cup \{1,2,3\}$ مترابطة في الفضاء (R,d_u) .

f) المجموعة $X = [0,5] \cup \{7\}$ مترابطة في الفضاء (R,d_u) .

أسئلة أتمتة :

السؤال الأول : ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) إن المجموعة { 1 , 2 , 3 } غير مترابط في الفضاء العادي لـ R.

B) كل فضاء مترابط هو فضاء متراص .

C) كل مجموعة منتهية من فضاء متري (E , d) هي مجموعة مترابطة .

D) الفضاء (R , dt) هو فضاء مترابط .

السؤال الثاني : لتكن $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \quad \dots \quad , \frac{1}{n}, \quad \dots, 0\}$ من الفضاء العادي لـ R . ضع إشارة على رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية :

A) إن S مجموعة مترابطة .

B) إن S مركبة مترابطة للنقطة 0 .

C) إن S مجموعة مترابطة محلياً .

D) إن S مجموعة غير مترابطة في الفضاء الجزئي (Q , du) .

دليل المصطلحات العلمية

إنكليزي – عربي

رقم الصفحة	إنكليزي	الحرف	عربي
		A	
٤٢	Absolute value		القيمة المطلقة
١٢٨	Accumulation point		نقطة تركم
١٣٢	Adherent of set		لصاقة مجموعة
٢٦	Anti-symmetric , relation		علاقة تخالفية
٦٨	Axiom		مسلمة
		B	
٩٩	Ball		كرة مفتوحة
١١٩	Base for a topology		أساس تبولوجيا
٤٩	Bijection		تقابل
٢٤	Binary relation		علاقة ثنائية
٢٢٢	Bolzano-Weirstrass Theorem		مبرهنة بولزانو –وايرشتراس
١٤٣	Boundary of a set		جبهة (حدود)مجموعة
٩٤	Bounded set		مجموعة محدودة
		C	
٣٤	Cantor Theorem		مبرهنة كانتور
٣٣ ، ٦٠	Cardinal numbers		عدد أصلي

D

المصادر العلمية

[1] – S . Willard , General Topology , ed . Wesley 1997

[2] – J . I . Nagata , MODERN General Topology , North – Holland pub . Amsterdam 1974

[3] – Schaum's Outline Series . Theory and Problems of General Topology , New York 1965

[4] – G . F . Simmons , Introduction to Topology and Modern Analysis , AD . MC . Graw-Hill , 1963

[5] – P . E . Long , An Introduction to General Topology , Charles . E . Merrill Publications Company 1986

[6] – N . Bourbaki , Topologie Generale , Ch . 3 , 4

١) ح . نقار . تبولوجيا (١) الفضاءات المترية ، مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية ، حلب ١٩٩٤

٢) ع . أبو حمدة الطبولوجيا (١) ، المطبعة الجديدة ، دمشق ١٩٨٦

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل :

الدكتور	الدكتور	الدكتور
شحادة الأسدي	محمد خير أحمد	حمدو النجار

المدقق اللغوي

الدكتورة أسمهان الصالح

Aleppo University Publications
Faculty of Science

TOPOLOGY(1)
METRIC SPACES

By

Dr. M. K. AHMAD

Dr. N.DABBIT

Academic year
2010-2011

1252380

سعر المبيع للطلاب ٢٣٠ ل.س