طرق دراسة اطراد تابع

1- حسب تعريف الاطراد :
(كتاب الجبر - صف العاشر – صفحة 46)
2- بالاعتماد على التوابع المرجعية :
(كتاب التحليل – حادي عشر – صفحة 17)
3- بالاعتماد على مبرهنات الاطراد :
(كتاب التحليل – حادي عشر – صفحة 24 – صفحة 25 – صفحة 26)
4- بالاعتماد على المشتق :
(كتاب جزء أول حادي عشر صفحة 79 – كتاب البكالوريا جزء أول صفحة 85)

أولاً :

دراسة اطراد تابع حسب التعريف :

f متزايد تماماً على D إذا تحقق الشرط :
أياً يكن u∈D فإن $u<v$ تقتضي $f(u)<f(v)$
f متزايد على D إذا تحقق الشرط : (مصاطب)
أياً يكن v∈D فإن $u<v$ تقتضي $f(u)\leq f(v)$
f متناقص تماماً على D إذا تحقق الشرط :
أياً يكن u∈D فإن $u<v$ تقتضي $f(u)>f(v)$
f متناقص على D إذا تحقق الشرط : (مصاطب)
أياً يكن v∈D فإن $u<v$ تقتضي $f(u)\geq f(v)$
f ثابت على D إذا تحقق الشرط :
أياً يكن v∈D فإن $u<v$ تقتضي $f(u)=f(v)$

ثانياً :

دراسة اطراد تابع بالاعتماد على التوابع المرجعية :

التوابع المرجعية يتم اعتماد اطرادها دون اللجوء للبرهان لأنه تم برهانها سابقاً واعتمدت مرجعية للجوء إليها مباشرة :

التوابع المرجعية المألوفة :

1- التابع التآلفي :
$D_f = \mathbb{R}$ معرف على $f(x) = ax + b$
خطه البياني مستقيم , إذا كانت $a>0$ فالتابع متزايد على D
إذا كانت $a<0$ فالتابع متناقص على D

2- التابع التربيعي :
$D_f = \mathbb{R}$ معرف على $f(x) = x2$
خطه البياني قطع مكافئ , إذا كانت $x\in]-\infty,0]$ فالتابع متناقص
إذا كانت $x\in[0,+\infty[$ فالتابع متزايد

3- التابع الكسري :

$f(x)=\frac{1}{x}$ معرف على $D_f=\mathbb{R}^*$

خطه البياني قطع زائد , التابع متناقص على كل من المجالين]∞ +,0[,]0,∞ -[

4- التابع الجذري :

$f(x)=\sqrt{x}$ معرف على]∞+,0] $D_f=[0,+\infty[$

f متزايد تماماً على]∞+,0]

5- تابع القيمة المطلقة :

$f(x)=|x|$ معرف على $\mathbb{R}$

f متناقص على]0,∞ -[, f متزايد على]∞+,0]

6- تابع الجيب:

$f(x)=\sin x$ دوري ومعرف على $\mathbb{R}$

اذا كانت $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ,+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ فهو متزايد

اذا كانت $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ فهو متناقص

7- تابع التجيب:

$f(x)=\cos x$ دوري ومعرف على $\mathbb{R}$

اذا كانت $x\in[0+2\pi k\ ,\pi+2\pi k]$ فهو متناقص

اذا كانت $x\in[\pi+2\pi k\ ,\ 2\pi+2\pi k]$ فهو متزايد

8- تابع اللوغاريتم:

$f(x)=\ln x$ معرف على $]0,+\infty[$

اذا كانت $x\in]0,+\infty[$ فالتابع متزايد

9- التابع الأسي:

$f(x)=e^{x}$ معرف على $\mathbb{R}$

اذا كانت $x\in]-\infty,+\infty[$ فالتابع متزايد

ثالثاً :

<u>دراسة جهة اطراد تابع بالاعتماد على المبرهنات :</u>

(المقصود بجهة الاطراد : متزايد أو متناقص)

☺ مبرهنة 1 :

مجموع تابعين متزايدين تماماً على مجال I هو تابع متزايد تماماً على I

مجموع تابعين متزايدين على مجال I هو تابع متزايد على I

مجموع تابعين متناقصين تماماً على مجال I هو تابع متناقص تماماً على I

مجموع تابعين متناقصين على مجال I هو تابع متناقص على I

ملاحظة :

- *عند طرح تابعين من جهة اطراد واحدة أو مختلفة لا يمكن الحكم على اطراد ناتج الطرح حسب المبرهنات*
- *عند ضرب تابعين من جهة اطراد واحدة أو مختلفة لا يمكن الحكم على اطراد ناتج الضرب حسب المبرهنات*
- *عند قسمة تابعين من جهة اطراد واحدة أو مختلفة لا يمكن الحكم على اطراد ناتج القسمة حسب المبرهنات*

☺ مبرهنة 2 :

إذا كانت $\lambda>0$ فإن للتابعين f , λf جهة الاطراد نفسها

إذا كانت $\lambda<0$ فإن التابعين f , λf متعاكسين بجهة الاطراد

☺ مبرهنة 3 :

عندما يتفق f , g في جهة الاطراد يكون gof و fog متزايد تماماً على I

عندما يختلف f , g في جهة الاطراد يكون gof و fog متناقصاً تماماً على I

ملاحظة : *لا يمكن الحكم على جهة اطراد جداء ضرب تابعين*

ملاحظة : *كيف ندرس جهة اطراد مقلوب تابع حسب المبرهنات السابقة :*

ليكن التابع f المعرف على D ومقلوبه $\frac{1}{f}$ *معرف على D باستثناء القيم التي تعدم المقام*

فإن $\frac{1}{f} = gof$ حيث $g(x) = \frac{1}{x}$

وحسب *مبرهنة تركيب التوابع :*

بما أن $g(x) = \frac{1}{x}$ تابع متناقص كونه مرجعي فإن التابع $\frac{1}{f}$ يعاكس *جهة اطراد f دائماً.*

رابعاً :

<u>**دراسة جهة الاطراد بالاعتماد على المشتق :**</u>

مبرهنة : *(بكالوريا صفحة 85)*

ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال I , تابعه المشتق f'

1- إذا كان f' موجباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متزايداً تماماً على I

2- إذا كان f' سالباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متناقصاً تماماً على I

3- إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I

صياغة مكافئة :

- إذا كان $f'\geq 0$ على I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I كان f متزايداً تماماً على I
- إذا كان $f'\leq 0$ على I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I كان f متناقصاً تماماً على I