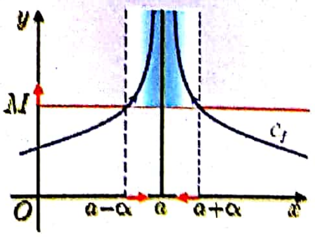
نهاية تابع عددي

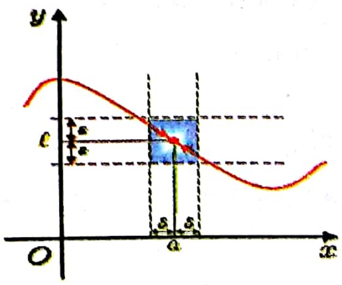
أولاً: نهاية تابع f عند a هي $+\infty$:

نقول إن نهاية التابع f عند a هي $+\infty$ إذا تجاوزت جميع قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M عندما تكون x قريبة بالقدر الكافي من a ونكتب: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$



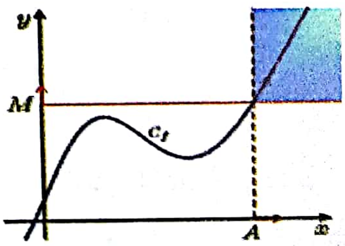
ثانياً: نهاية تابع f عند a هي قيمة عددية ℓ :

نقول إن نهاية التابع f عند a هي قيمة عددية ℓ إذا تجمعت جميع قيم $f(x)$ بالقرب من ℓ أو حول ℓ عندما تكون x قريبة بالقدر الكافي من a ونكتب: $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$



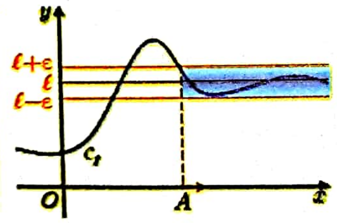
ثالثاً: نهاية تابع f عند $+\infty$ هي $+\infty$:

نقول إن نهاية التابع f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا تجاوزت جميع قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة بالقدر الكافي ونكتب: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$



نهاية تابع f عند $+\infty$ هي قيمة عددية ℓ:

نقول إن نهاية التابع f عند $+\infty$ هي قيمة عددية ℓ إذا تجمعت جميع قيم $f(x)$ بالقرب من ℓ أو حول ℓ عندما تكون x كبيرة بالقدر الكافي ونكتب: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$



بمعنى أدق:

أياً يكن العدد الحقيقي $\varepsilon > 0$ فإن قيم $f(x)$ ستقع ضمن المجال $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ بدءاً من حد معين x_0 أي:

$$f(x) \in \,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$$

$$\ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x)-\ell < \varepsilon$$

$$|f(x)-\ell| < \varepsilon$$

حيث: ℓ مركز المجال $\ell = \dfrac{a+b}{2}$ ، ε نصف قطر المجال $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$

ملاحظات:

$\boxed{1}$ رمز نصف قطر المجال في الكتاب (α أو ε) وهو مقدار موجب لأنه يمثل مسافة.

مثال ① : اوجد مجال مفتوح مركزه $\ell = 3$ ونصف قطره 0.04

$$I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[=]3 - 0.04\,, 3 + 0.04\,[\quad \Rightarrow \quad I =]2.96\,, 3.04[$$

مثال ② : اوجد مركز ونصف قطر المجال $I =]4.82\,, 5.18[$

المركز $\ell = \dfrac{5.18 + 4.82}{2} = 5$ ، نصف القطر $\varepsilon = \dfrac{5.18 - 4.82}{2} = 0.18$

$\boxed{2}$

$|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & \text{إما} \\ x = -a & \text{او} \end{cases}$ $\qquad |x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a & \text{إما} \\ x < -a & \text{او} \end{cases}$ $\qquad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

مثال: ليكن التابع $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ المعرف على $R\backslash\{-1\}$ عين العدد A الذي يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال I المفتوح الذي مركزه (1) ونصف قطره (0.05)

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ عندئذ $\ell = 1$

$f(x)$ ينتمي إلى المجال المفتوح I الذي مركزه $\ell = 1$ ونصف قطره $\varepsilon = 0.05$ إذا تحققت المتراجحة:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{x+3}{x+1} - 1\right| < \frac{5}{100}$$
$$\left|\frac{x+3-x-1}{x+1}\right| < \frac{5}{100}$$
$$\left|\frac{2}{x+1}\right| < \frac{1}{20}$$
$$40 < |x+1|$$

وبما أن $x \to +\infty$ فإننا نهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x > 0$ نجد أن:

$$40 < x + 1$$
$$x > 39 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 39}$$ أي

ينتج عن ذلك انه إذا كان $x > 39$ انتمى $f(x)$ إلى المجال $I =]1 - 0.05\,, 1 + 0.05[$

$$I =]0.95\,, 1.05[$$

مثال: بفرض f تابع معرف على $R\backslash\left\{\frac{-3}{2}\right\}$ وفق $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$ اوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم عين عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad (\ell = 2)$$

$f(x)$ تنتمي للمجال الذي مركزه $(\ell = 2)$ ونصف قطره $\left(\varepsilon = \frac{5}{100}\right)$ يجب أن تحقق المتراجحة:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{4x-5}{2x+3} - 2\right| < \frac{5}{100}$$
$$\left|\frac{4x-5-4x-6}{2x+3}\right| < \frac{1}{20}$$
$$\left|\frac{-11}{2x+3}\right| < \frac{1}{20}$$
$$\frac{11}{|2x+3|} < \frac{1}{20}$$
$$220 < |2x+3|$$

بما أن $x \to +\infty$ ونهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x > 0$ نجد أن:

$$220 < 2x + 3$$
$$217 < 2x$$
$$108.5 < x \quad \Rightarrow \quad A = 108.5$$

ينتج عن ذلك أنه إذا كان $x > 108.5$ انتمى $f(x)$ إلى المجال الذي مركزه $(\ell = 2)$ ونصف قطره $(\varepsilon = 0.05)$ أي:

$$f(x) \in]2 - 0.05\,, 2 + 0.05[$$
$$f(x) \in]1.95\,, 2.05\,[$$

للتوضيح: ♦إذا اخذنا $x = 109$ $\quad f(109) = \frac{431}{221} = 1.9502 \in$ للمجال

♦إذا اخذنا $x = 107$ $\quad f(107) = \frac{423}{217} = 1.949 \notin$ للمجال

وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

صفحة 34 رقم 2: احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ثم اعطِ عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9\,,5.1[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

نوجد مركز المجال ونصف قطره:

$$\ell=\frac{4.9+5.1}{2}=5$$

$$\varepsilon=\frac{5.1-4.9}{2}=0.1=\frac{1}{10}$$

$f(x)\in\,]4.9\,,5.1[$ إذا تحققت المتراجحة:

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<\frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{|x-1|}<\frac{1}{10}$$

$$40<|x-1|$$

بما أن $x\to+\infty$ نهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x>0$

فنجد أن:

$$40<x-1$$

$$41<x \quad\Longrightarrow\quad A=41$$

ومنه $f(x)\in\,]5-0.1\,,5+0.1[\,=\,]4.9\,,5.1[$

إذا كانت $x>41$

****

قواعد في النهايات :

① $\frac{\text{عدد}}{\infty}=0 \quad , \quad \frac{0}{\infty}=0$

② $\frac{\infty}{0}=\infty \quad , \quad \frac{\text{عدد غير الصفر}}{0}=\infty$ (ندرس إشارة الصفر و ننتبه لإشارة البسط)

③ $\frac{\infty}{\text{عدد}}=\infty$ (انتبه لإشارات البسط و المقام)

④ $-\infty-\infty=-\infty \quad , \quad +\infty+\infty=+\infty$

⑤ $\infty\times\infty=\infty$ (انتبه للإشارات)

حالات عدم التعيين :

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0.\infty$	$+\infty-\infty$

العمليات على النهايات :

① $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$

② $\lim_{x\to x_0}(f.g)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\,.\lim_{x\to x_0}g(x)$

③ $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)} \quad ; \quad g(x)\neq 0$

④ $\lim_{x\to x_0}\big(k\,f(x)\big)=k\lim_{x\to x_0}f(x)$

نهايات مرجعية :

① $\lim_{x\to-\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & n \text{ زوجي غير معدوم}\\ -\infty & n \text{ فردي غير معدوم}\end{cases}$

② $\lim_{\substack{x\to-\infty\\x\to+\infty}}\frac{1}{x^n}=0 \quad ; \quad n\in N^*$

③ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

④ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

ملاحظة: بعض التوابع ليس لها نهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ ، **مثل:** $f(x)=\sin x$ ، $f(x)=\cos x$

ليس للتابعين السابقين نهاية عند $-\infty,+\infty$ حيث :

$-1\le\sin x\le 1$ ، $-1\le\cos x\le 1$ أياً كانت $x\in R$ وبالتالي مجموعة قيم التابعين محصورة في المجال $[-1,1]$.

نهاية التابع الثابت $f(x)=b$: إن نهاية التابع الثابت عند اي قيمة هي دائماً (b)

مثال : $f(x)=-3 \quad , \quad \lim_{\substack{x\to0\\x\to-\infty\\x\to+\infty}}f(x)=-3$

نهاية التابع الصحيح عند $\pm\infty$:

هي نهاية حده الأكبر أساً مع أمثاله وإشارته.

ملاحظة : $(+\infty)^{\text{زوجي او فردي}} = +\infty$, $(-\infty)^{\text{زوجي}} = +\infty$, $(-\infty)^{\text{فردي}} = -\infty$

تمرين:

اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند $\pm\infty$:

1) $f(x) = 2x + x^2 + 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $f(x) = 2x^2 - x^3 + 5$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

4) $f(x) = \frac{x-1}{3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{-5}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

6) $f(x) = \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,x^4$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

تدريب صفحة 34 رقم 1 :

احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$

1) $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$

2) $f(x) = -3x^4 + 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-3x^4) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-3x^4) = -\infty$

3) $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (8x^4) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (8x^4) = +\infty$

4) $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (5x^3) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (5x^3) = -\infty$

5) $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (7x^3) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (7x^3) = -\infty$

6) $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^4) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^4) = -\infty$

نهاية تابع كسري حدودي عند $\pm\infty$:

نأخذ الحد الأكبر أساً بالبسط مع امثاله وإشارته ونأخذ الحد الأكبر أساً بالمقام مع امثاله وإشارته.

نختصر ثم نعوض ونوجد النهاية.

تمرين: اوجد نهاية كل تابع عند $\pm\infty$

1. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{+\infty}=0$$

---

2. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x^2}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{-x^2}\right)=-1$$

---

3. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{1-x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{-x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x)=-(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{-x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-(+\infty)=-\infty$$

---

4. $f(x)=\dfrac{6}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{x^2}\right)=\frac{6}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6}{x^2}\right)=\frac{6}{+\infty}=0$$

---

5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\,x-1}{1-2x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

---

6. $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=\frac{-2}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x^2}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=\frac{-2}{+\infty}=0$$

---

7. $f(x)=\dfrac{x-1}{3x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{3}\quad,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{3}$$

---

8. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\quad,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

تذكرة و ملاحظات:

1. من طرق تحليل كثير الحدود: العامل المشترك والتحليل المباشر والتجميع إلى فئات والمطابقات.

2. المتطابقات التربيعية:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

3. المتطابقات التكعيبية:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

البيطار

نهاية تابع كسري حدودي عند قيمة عددية (a):

نعوض a في التابع فنحصل على النهاية مباشرةً او نحصل على إحدى الحالتين الآتيتين :

$\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

يجب إزالة حالة عدم التعيين وذلك بطرق التحليل التي تعلمناها سابقاً (عامل مشترك – مطابقة - تحليل مباشر – مربع كامل - Δ - قسمة إقليدية).

$\frac{\text{عدد غير الصفر}}{0} = \infty$

يجب دراسة إشارة الصفر (إشارة المقام) ناخذ :

قيمتان لـ x من جوار a (قيمة أصغر و قيمة أكبر) نعوضها فقط في المقام.

تمرين: أوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}$ $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1} \qquad (a=-1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-3}{2}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{3-x} \qquad (a=3)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{3-x} = -(x-2)$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = -1$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^2-x}{x^3-1} \qquad (a=1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{3}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2} \qquad (a=2)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

الطريقة التجميعية:

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2} = \frac{x^2(x-2)-(x-2)}{x-2} = \frac{(x^2-1)\ (x-2)}{x-2} = x^2-1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

طريقة القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-x+2 & x-2 \\ \hline \mp x^3 \pm 2x^2 & x^2-1 \\ \hline -x+2 & \\ \pm x \mp 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x^2-1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{2x-1}{x-1} \qquad (a=1)$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x-1}{x^2} \qquad (a=0)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

[7] $f(x)=\frac{4}{2-x}$ $(a=2)$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

[8] $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ $(a=1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

****

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\infty-\infty$: يوجد طريقتان إما العامل المناسب أو الضرب بالمرافق

طريقة العامل المناسب : **نخرج من داخل الجذر x^2 عامل مناسب حتى وان لم يكن موجود.**

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}+x & : x\to+\infty\\ -x & : x\to-\infty\end{cases}$$

ملاحظة: بعد إخراج عامل مناسب نحصل على عامل مشترك بين الحدين

تمارين:

[1] $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-2x$ $(a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x$$

$$=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x=x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-2)=-\infty$$

---

[2] $f(x)=3x+\sqrt{x^2+2}$ $(a=-\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=3x+\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=3x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=3x-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=x\left(3-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty(3-1)=-\infty$$

---

[3] $f(x)=\sqrt{x-1}-x$ $(a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}-x=|x|\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x$$

$$=x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(0-1)=-\infty$$

$$f(x)=\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+4} \qquad (a=+\infty)$$

$\boxed{4}$ $\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}=x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$=x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(\sqrt{2}-1)=+\infty$$

طريقة الضرب بالمرافق (مرافق الجذر) :

نضرب بمرافق الجذر ونقسم عليه:

$$\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\xrightarrow{\text{مرافقه}}\sqrt{A}\mp\sqrt{B} \qquad \sqrt{A}-B\xrightarrow{\text{مرافقه}}\sqrt{A}+B \qquad \sqrt{A}+B\xrightarrow{\text{مرافقه}}\sqrt{A}-B$$

ملاحظة:

1. **بعد الضرب بمرافق الجذر نستخدم المطابقة التربيعية من الشكل** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
2. **بعد الضرب والقسمة على المرافق نميز حالتين:**
   * **إذا لم يبقى x في البسط نعوض فوراً.**
   * **إذا بقي x في البسط نطبق طريقة العامل المناسب.**

تمارين:

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x \qquad (a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{\left(\overbrace{\sqrt{x^2+x+1}}^{a}-\overbrace{x}^{b}\right)\left(\overbrace{\sqrt{x^2+x+1}}^{a}+\overbrace{x}^{b}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=2x-\sqrt{4x^2+1} \qquad (a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$=\frac{4x^2-(4x^2+1)}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\frac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{-1}{\infty}=0$$

3 $f(x)=\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x \qquad (a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$=\frac{2x^2+1-2x^2}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}=\frac{1}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$$

****

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{تابع كسري جذري}}$$

ضرب بالمرافق $\frac{0}{0}$ عامل مناسب $\frac{\infty}{\infty}$

تمرين: أوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

1 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x} \qquad (a=3)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{-1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\frac{-1}{4}$$

---

2 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1} \qquad (a=1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x^3-1}-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2x^3-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2x^3-2}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2(x^3-1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}=\frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3-1}+1}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{2(3)}{2}=3$$

---

3 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x-1} \qquad (a=-\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{-1}{2}$$

3 $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x \qquad (a = +\infty)$

$\infty - \infty$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x)}$$

$$= \frac{2x^2+1-2x^2}{(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x)} = \frac{1}{(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

****

$$\overbrace{\text{ضرب بالمرافق } \frac{0}{0} \qquad \text{عامل مناسب } \frac{\infty}{\infty}}^{\text{تابع كسري جذري}}$$

تمرين: اوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

1 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x} \qquad (a = 3)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{-1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{-1}{4}$$

---

2 $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1} \qquad (a = 1)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^3-1}-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$= \frac{2x^3-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)} = \frac{2x^3-2}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)} = \frac{2(x^3-1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)} = \frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3-1}+1}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2(3)}{2} = 3$$

---

3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x-1} \qquad (a = -\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-1}{2}$$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2}$ $(a=0)$

$\frac{0}{0}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x^2(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\frac{x+4-4}{x^2(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{x}{x^2(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

---

5) $f(x)=x-2\sqrt{x}$ $(a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين

طريقة اولى:

$$f(x)=x-2\sqrt{x^2.\frac{1}{x}}=x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$=x-2x\sqrt{\frac{1}{x}}=x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$$

طريقة ثانية:

$$f(x)=\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-2)\quad ;x>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(+\infty-2)=+\infty$$

---

6) $f(x)=\sqrt{x^2+x-3}-x+1$ $(a=+\infty)$

$\infty-\infty$ عدم تعيين.

$$f(x)=\sqrt{x^2+x-3}-x+1$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+x-3}-x)(\sqrt{x^2+x-3}+x)}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1$$

$$=\frac{x^2+x-3-x^2}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1=\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1$$

$$=\frac{x-3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}+x}+1=\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+x}+1$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right)}+1=\frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

---

7) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ $(a=+\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين.

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2.\frac{1}{x}}}{x+1}=\frac{x+|x|\sqrt{\frac{1}{x}}}{x+1}=\frac{x+x\sqrt{\frac{1}{x}}}{x+1}=\frac{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{1}=1$$

التابع المثلثي :

مبرهنة : $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

قوانين هامة في المثلثات:

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$ $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

تمرين: أوجد نهاية كل تابع مما يلي عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}\ f(x)=\frac{\sin 3x}{x}\quad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}=3.\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=3(1)=3$$

علماً أن : $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1\right)$

$\boxed{2}\ f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}\quad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}=\frac{2}{3}.\frac{\sin 2x}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}$$

علماً أن : $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1\right)$

$\boxed{3}\ f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x}\quad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x}=\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\sin x.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=2(0)(1)=0$$

علماً أن : $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$

$\boxed{4}\ f(x)=\frac{1-\cos 2x}{3x^2}\quad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\frac{1}{3}.\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{2}{3}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{2}{3}(1)^2=\frac{2}{3}$$

علماً أن : $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$

$\boxed{5}\ f(x)=\frac{1-\cos x}{x}\quad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=2\sin\frac{x}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}$$

$$=\sin\frac{x}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=(0)(1)=0$$

علماً أن : $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right)$

$\boxed{6}\ f(x)=\frac{1-\cos x}{3x^2}\quad : a=0$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}.\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}.\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{6}(1)^2=\frac{1}{6}$$

علماً أن : $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right)$

مبرهنات المقارنة

مبرهنة ① (الإحاطة):
بفرض h, g, f ثلاثة توابع معرفة على مجال من الشكل $I =]b, +\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ثم لنفترض أن للتابعين g, h النهاية ℓ ذاتها عند $+\infty$ عندئذ: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

ملخص المبرهنة:

$$\begin{array}{ccccc} g(x) & \le & f(x) & \le & h(x) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell & \searrow & \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell & \swarrow & \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell \end{array}$$

♦ تبقى المبرهنة السابقة صحيحة على المجال $I =]-\infty, b[$

ملاحظات هامة:

1. نطبق مبرهنة الإحاطة عندما نحصل على $\cos\infty$ او $\sin\infty$
2. نبدأ الحل في مبرهنة الإحاطة: اياً يكن $x \in D$ فإن:

$$-1 \le \begin{matrix}\sin(g(x)) \\ \cos(g(x))\end{matrix} \le 1 \quad \text{او} \quad 0 \le \begin{matrix}\sin^2(g(x)) \\ \cos^2(g(x))\end{matrix} \le 1$$

3. نغير جهة المتراجحة عندما نضرب او نقسم على مقدار سالب أو عندما نأخذ مقلوب المتراجحة.

تمرين: اوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ $: a = -\infty$

اياً يكن $x < 0$:

$$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \div (x) < 0$$

$$\frac{-1}{x} \ge \frac{\cos x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$\frac{-1}{x} \ge f(x) \ge \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{x(3+\sin x)}{x^2+1}$ $: a = +\infty$

اياً يكن $x > 0$:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$2 \le 3 + \sin x \le 4$$

$$2x \le x(3+\sin x) \le 4x \qquad \div (x^2+1 > 0)$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \le \frac{x(3+\sin x)}{x^2+1} \le \frac{4x}{x^2+1}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \le f(x) \le \frac{4x}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x^2+1}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{3}$ $f(x) = 4 + \dfrac{\sin x}{x}$ $: a = -\infty$

اياً يكن $x < 0$:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\frac{-1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \ge 4 + \frac{\sin x}{x} \ge 4 + \frac{1}{x}$$

$$4 - \frac{1}{x} \ge f(x) \ge 4 + \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\left(4 - \frac{1}{x}\right) &= 4 \\ \lim_{x\to-\infty}\left(4 + \frac{1}{x}\right) &= 4 \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$

مبرهنات المقارنة

مبرهنة ① (الإحاطة):

بفرض h, g, f ثلاثة توابع معرفة على مجال من الشكل $I =]b, +\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ثم لنفترض ان للتابعين h , g النهاية ℓ ذاتها عند $+\infty$ عندئذ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

ملخص المبرهنة:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

♦ تبقى المبرهنة السابقة صحيحة على المجال $I =]-\infty, b[$

ملاحظات هامة:

1. نطبق مبرهنة الإحاطة عندما نحصل على $\cos\infty$ أو $\sin\infty$
2. نبدأ الحل في مبرهنة الإحاطة: أياً يكن $x \in D$ فإن: $0 \le \begin{matrix}\sin^2(g(x)) \\ \cos^2(g(x))\end{matrix} \le 1$ أو $-1 \le \begin{matrix}\sin(g(x)) \\ \cos(g(x))\end{matrix} \le 1$
3. نغير جهة المتراجحة عندما نضرب أو نقسم على مقدار سالب أو عندما نأخذ مقلوب المتراجحة.

تمرين: أوجد نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع:

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$: $a = -\infty$

أياً يكن $x < 0$:

$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \div (x) < 0$

$\dfrac{-1}{x} \ge \dfrac{\cos x}{x} \ge \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{-1}{x} \ge f(x) \ge \dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0\end{matrix}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{x(3+\sin x)}{x^2+1}$: $a = +\infty$

أياً يكن $x > 0$:

$-1 \le \sin x \le 1$

$2 \le 3 + \sin x \le 4$

$2x \le x(3+\sin x) \le 4x \qquad \div (x^2+1 > 0)$

$\dfrac{2x}{x^2+1} \le \dfrac{x(3+\sin x)}{x^2+1} \le \dfrac{4x}{x^2+1}$

$\dfrac{2x}{x^2+1} \le f(x) \le \dfrac{4x}{x^2+1}$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right) = 0\end{matrix}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة (1)}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{3}$ $f(x) = 4 + \dfrac{\sin x}{x}$: $a = -\infty$

أياً يكن $x < 0$:

$-1 \le \sin x \le 1$

$\dfrac{-1}{x} \ge \dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{1}{x}$

$4 - \dfrac{1}{x} \ge 4 + \dfrac{\sin x}{x} \ge 4 + \dfrac{1}{x}$

$4 - \dfrac{1}{x} \ge f(x) \ge 4 + \dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(4 + \dfrac{1}{x}\right) = 4\end{matrix}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$

مبرهنة ② : بفرض g, f تابعين معرفين على المجال $I =]b, +\infty[$ ولنفرض انه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $|f(x) - \ell| \le g(x)$ ثم لنفترض ان:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

♦ تبقى المبرهنة صحيحة على المجال $I =]-\infty, b[$

ملخص المبرهنة:

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - \ell| \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

تمرين: **بفرض f تابع يحقق $|f(x) + 4| \le \frac{-3}{x+4}$ ايا يكن $x > 0$ ما نهاية التابع f عند $+\infty$**

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - (-4)| \le \dfrac{-3}{x+4} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x+4} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{② المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$$

تمرين: **بفرض f تابع يحقق $|f(x) - 2| \le \frac{x \sin^2 x}{x^2+4}$ ايا يكن $x > 0$ ما نهاية التابع f عند $+\infty$**

بفرض : $g(x) = \dfrac{x \sin^2 x}{x^2 + 4}$

ايا يكن $x > 0$: $0 \le \sin^2 x \le 1$

$0 \le x \sin^2 x \le x$

$$0 \le \frac{x \sin^2 x}{x^2 + 4} \le \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+4}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (0) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

أصبح لدينا:

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - 2| \le \dfrac{x \sin^2 x}{x^2 + 4} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x \sin^2 x}{x^2 + 4} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{② المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

****

مبرهنة رقم ③ : بفرض g, f تابعين معرفين على المجال $I =]b, +\infty[$ عندئذ:

1. إذا كان $f(x) \ge g(x)$ عند كل x من I وكان: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Leftarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. إذا كان $f(x) \le g(x)$ عند كل x من I وكان: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Leftarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

تمرين: **اوجد نهاية التابع $f(x) = 2x - 3\sin x$ عند $+\infty$**

ايا يكن $x > 0$: $-1 \le \sin x \le 1$

$3 \ge -3\sin x \ge -3$

$2x + 3 \ge 2x - 3\sin x \ge 2x - 3$

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - 3) = +\infty \xrightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

تمرين: **اوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{-x}{3} + \cos \pi x$ عند $-\infty$**

ايا يكن $x < 0$: $-1 \le \cos \pi x \le 1$

$$\frac{-x}{3} - 1 \le \frac{-x}{3} + \cos \pi x \le \frac{-x}{3} + 1$$

$$\frac{-x}{3} - 1 \le f(x) \le \frac{-x}{3} + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x}{3} - 1\right) = +\infty \xrightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

تدريب صفحة 38 رقم 1 : احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة، ويمكن في حالة عدم وجود النهاية حساب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند a

1 $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty \ , \quad \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

2 $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$ $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \dfrac{+6}{0^-} = -\infty \ , \quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \dfrac{+6}{0^+} = +\infty$

3 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{x}\right) = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x}{x}\right) = 2$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty \ , \quad \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

4 $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+1}$ $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x}{x}\right) = 5$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5x}{x}\right) = 5$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{-4}{0^-} = +\infty \ , \quad \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

5 $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x^2-4x+4}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \dfrac{+4}{0^+} = +\infty \ , \quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \dfrac{+4}{0^+} = +\infty$

6 $f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$ $\begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 5 + \dfrac{2}{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - 5 + \dfrac{2}{-\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -11 + \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -11 + \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

تدريب صفحة 38 رقم 2 : جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم عين عدداً α يحقق الشرط: إذا كان x عنصراً من المجال $]1-\alpha, 1+\alpha[$ مختلفاً عن 1 كان $f(x) > 10^3$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{+4}{0^+} = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{+4}{0^+} = +\infty$

طريقة أولى:

لدينا $f(x) > 10^3$ وهذا يكافئ $\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$

نفرض $t = x - 1 \Leftarrow x = t + 1$

$\dfrac{5(t+1)-1}{t^2} > 10^3$

$\dfrac{5t+4}{t^2} > 10^3$

$5t + 4 > 10^3 t^2$

$10^3 t^2 - 5t - 4 < 0$

متراجحة درجة ثانية ندرس إشارتها

$10^3 t^2 - 5t - 4 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(10^3)(-4)$

$= 25 + 16000 = 16025$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16025} \simeq 126.5$

$t_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+126.5}{2(1000)} = \dfrac{5+126.5}{2000}$

$= \dfrac{131.5}{2000} = 0.06$

$t_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-126.5}{2(1000)} = \dfrac{5-126.5}{2000}$

$= \dfrac{-121.5}{2000} = -0.06$

t	$-\infty$		-0.06		0.06		$+\infty$
10^3t^2-5t-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$10t^2-5t-4<0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$-0.06 < t < 0.06$ نعوض $t = x - 1$ ومنه $-0.06 < x - 1 < 0.06$

$1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$ وبالتالي $\alpha = 0.06$

طريقة ثانية: لنكتب $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2}$$

$$f(x) > 10^3$$

$$\frac{A}{(x-1)^2} > 10^3 \overset{\text{(مقلوب)}}{\Rightarrow} \frac{(x-1)^2}{A} < \frac{1}{10^3}$$

$$(x-1)^2 < \frac{A}{10^3}$$

$$|x-1| < \sqrt{\frac{A}{10^3}}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to1}(5x-1) = 4$ فإن البسط سيكون قريب من عدد حقيقي A موجب تماماً أصغر من (4)

ومنه $\alpha = \sqrt{\frac{A}{10^3}}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to1}(5x-1) = 4$ فيكون: $5x - 1 > A$ في جوار معين للعدد (1)

أصبح لدينا:

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2} > \frac{A}{(x-1)^2} > 10^3$$

إذا اخترنا $A = 1.6$ عندئذ:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1.6}{10^3}} = \sqrt{\frac{16}{10^4}} = 0.04$$

تدريب صفحة 42 رقم 1 : احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة ويمكن عند الحاجة حساب النهاية من اليمين ومن اليسار عند a

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ $\quad \binom{1}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{-x^2}\right) = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{-x^2}\right) = -2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \ , \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty \ , \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ $\quad \binom{2}{-2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty \ , \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty \ , \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$ (1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{4}$ $f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$ $\binom{1}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} - \frac{1}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} - \frac{1}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = 2 + \frac{1}{-1} - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = 2 + \frac{1}{-1} - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

تدريب صفحة 42 رقم 2 : عين فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f ثم ادرس في كل حالة نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه وادرس عند اللزوم النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

$\boxed{1}$ $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

شرط الكسر:

$\sqrt{x} - 1 \neq 0$

$\sqrt{x} \neq 1$

$x \neq 1$

شرط الجذر:

$x \geq 0$

$[0, +\infty[$

$$D = [0, +\infty[\setminus\{1\} = [0,1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(0) = \frac{+1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{+2}{0^-} = -\infty \quad , \lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{+2}{0^+} = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

بما أن $x > 0$ فإن :

$$f(x) = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty(1+0)}{1-0} = +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$

شرط الجذر: $x \geq 0$ ومنه $D = [0, +\infty[$

$$f(0) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

شرط الكسر:

$x \neq 0$

شرط الجذر:

$x \geq 0$

$[0, +\infty[$

$$D =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$

شرط الكسر:

$x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

شرط الجذر:

$x \geq 0$

$[0, +\infty[$

$$D = [0, +\infty[$$

$$f(0) = \frac{0+0}{0+1} = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

بما أن $x > 0$ فإن :

$$f(x) = \frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$\boxed{5}\ f(x) = \dfrac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$

شرط الكسر: $x^2 + 1 \neq 0$ المقام معرف على R

شرط الجذر: $x \geq 0$ $[0, +\infty[$

$D = [0, +\infty[$

$f(0) = \dfrac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

بما ان $x > 0$ فإن :

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 + \frac{x}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1 + 0 - 0}{1 + 0} = 1$$

$\boxed{6}\ f(x) = \sqrt{x - 1} - \sqrt{x}$

شرط الجذر الأول: $x - 1 \geq 0$ ، $x \geq +1$ ، $[1, +\infty[$

شرط الجذر الثاني: $x \geq 0$ ، $[0, +\infty[$

$D = [1, +\infty[$

$f(1) = 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}).(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x-1) - (x)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{+\infty + \infty} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

تدرب صفحة 42 رقم 3 : اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$ عند الـ $+\infty$, ثم اوجد عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$, كان $f(x)$ في المجال $]-2.05, -1.95[$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

$\varepsilon = 0.05$, $\ell = -2$

حتى ينتمي $f(x)$ للمجال $]-2.05, -1.95[$

يجب أن تتحقق المتراجحة : $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\left|\frac{-2x+1}{x+3} + 2\right| < \frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{-2x + 1 + 2x + 6}{x+3}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{7}{x+3}\right| < \frac{1}{20}$$

بما أن $x \to +\infty$ نهتم بالقيم الكبيرة للمتحول x

$$\frac{7}{x+3} < \frac{1}{20} \Rightarrow 140 < x + 3 \Rightarrow x > 137$$

و بالتالي نختار $A = 137$

تدرب صفحة 42 رقم 4: اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ عند 5 ثم اوجد مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال $]3.95\ , 4.05[$

$\lim\limits_{x\to5} f(x) = 4$, $\ell = \dfrac{3.95 + 4.05}{2} = 4$, $\varepsilon = \dfrac{4.05 - 3.95}{2} = 0.05$

إذا تحققت المتراجحة: $f(x) \in]3.95\ , 4.05[$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x+3}{x-3} - 4\right| < \frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{-3x+15}{x-3}\right| < \frac{1}{20}$$

نستخدم القسمة المطولة :

$$\left|-3 + \frac{6}{x-3}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\frac{-1}{20} < -3 + \frac{6}{x-3} < \frac{1}{20}$$

$$\frac{-1}{20} + 3 < \frac{6}{x-3} < \frac{1}{20} + 3$$

$$\frac{59}{20} < \frac{6}{x-3} < \frac{61}{20}$$

$$\frac{20}{59} > \frac{x-3}{6} > \frac{20}{61} \quad (\times 6)$$

$$\frac{120}{59} > x - 3 > \frac{120}{61}$$

$$\frac{120}{59} + 3 > x > \frac{120}{61} + 3$$

$$\frac{297}{59} > x > \frac{303}{61}$$

$$x \in \left]\frac{303}{61}, \frac{297}{59}\right[$$

تدرب صفحة 46 رقم 1 : اجب عن الأسئلة الآتية :

1. f تابع يحقق $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$ اياً كان $x>1$, ما نهاية f عند الـ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos x}{x} = ?$ نستخدم الإحاطة $\cos\infty$ حصلنا على

$-1 \le \cos x \le 1$

اياً كان $x>1$ فإن :

$3x-1 \le 3x+\cos x \le 3x+1$

$\frac{3x-1}{x} \le \frac{3x+\cos x}{x} \le \frac{3x+1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x}=3\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x}=3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+7}{x-1}=3\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$$

2. اثبت ان $\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$ اياً يكن $x>-1$, استنتج نهاية $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$
ثم ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$

$-1 \le \cos x \le 1$

اياً يكن $x>-1$ فإن :

نقسم على $(x+1>0)$:

$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$$

3. f تابع يحقق $|f(x)-3| \le \frac{1}{x+1}$ اياً كان $x \ge 0$, ما نهاية f عند الـ $+\infty$ ؟

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0 \xRightarrow[\text{② المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$$

4. f تابع يحقق $f(x) \ge \frac{1}{4}x^2$, اياً كان $x<0$, ما نهاية f عند الـ $-\infty$ ؟

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x^2=+\infty \xRightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

5. اثبت ان $x^2-5\sin x \ge x^2-5$, اياً كان العدد الحقيقي x . استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x \mapsto x^2-5\sin x$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$

اياً كان $x \in R$ فإن :

$-1 \le \sin x \le 1$

$5 \ge -5\sin x \ge -5$

$x^2+5 \ge x^2-5\sin x \ge x^2-5$

و منه :

$x^2-5\sin x \ge x^2-5$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5)=+\infty \xRightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5)=+\infty \xRightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$$

تدرب صفحة 46 رقم 2 : ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

1. تحقق ان $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ اياً يكن $x \ge 0$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

2. استنتج أن $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **أياً يكن** $x > 0$

أياً يكن $x > 0$ فإن : $\sqrt{1+x} \ge \sqrt{x}$

نضيف $\sqrt{x}$ للطرفين :

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \ge 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نضيف $\sqrt{1+x}$ للطرفين :

$$2\sqrt{1+x} \ge \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x)$$

و منه : $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. ما نهاية f **عند** $+\infty$ **؟**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

****

نهاية تابع مركب :

مبرهنة: بفرض لدينا ثلاثة توابع $\hbar, g, f$ وبفرض $f(x) = (go\hbar)(x) = g(\hbar(x))$

إذا كان $\lim\limits_{x\to a} \hbar(x) = b$ و $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ عندئذٍ : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

سواء كانت المقادير c, b, a أعداد حقيقية منتهية أو مقادير لا نهائية.

مثال: بفرض $f(x) = x^2 + 2x + 1$ و $\hbar(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$ تُحقق $f(x) = (go\hbar)(x)$

$$(go\hbar)(x) = g(\hbar(x)) \overset{\text{بتعويض ما يساوي } \hbar}{=} g(x+1) \overset{\text{حسب قاعدة ربط } g}{=} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

توضيح بأخذ $a = 2$ نجد : $\lim\limits_{x\to 2} \hbar(x) = 3$ ومنه $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 9$

وبالفعل نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 + 4 + 1 = 9$

تدريب صفحة 49 رقم 1 : **فيما يأتي نعطى تابعاً** f **معرفاً على مجموعة** D **ويطلب حساب نهاية** f **عند** a

سنتبع في حل هذه التمارين طريقة تركيب التوابع:

$\boxed{1}$ $D =]5, +\infty[$ $\quad f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ $\quad a = 5$

نفرض $X = \hbar(x) = \frac{x+3}{x-5}$ $\quad \lim\limits_{x\to 5^+} \hbar(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

$\boxed{2}$ $D = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ $\quad f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ $\quad a = -\infty$

نفرض $X = \hbar(x) = -x^3 + x^2 + x$

$$\lim_{x\to-\infty} \hbar(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

$\boxed{3}$ $D =]-\infty, 1[$ $\quad f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$ $\quad a = -\infty$

نفرض $X = \hbar(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \hbar(x) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} \sqrt{X} = 0$$

$\boxed{4}$ $D =]-1, 1[$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad a = 1$

نفرض $X = \hbar(x) = 1 - x^2$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} \hbar(x) = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

$\boxed{5}$ $D = R\backslash\{1\}$

$f(x) = \cos\pi x + \frac{1}{(x-1)^2}$ $\quad a = 1$

نفرض $X = h(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

$\lim_{x\to1} h(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(\cos\pi x) + \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$

$\boxed{6}$ $D = R\backslash\{-2\}$

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$ $\quad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = \frac{\pi x+1}{x+2}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \pi$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to\pi}(\cos X) = -1$

$\boxed{7}$ $D =]-\infty, 1[$

$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$ $\quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -\infty \end{pmatrix}$

♦ $a = 1$ نفرض $X = h(x) = \frac{2x^2}{1-x}$

$\lim_{x\to1^-} h(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

♦ $a = -\infty$ نفرض $X = h(x) = \frac{2x^2}{1-x}$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

$\boxed{8}$ $D =]0, +\infty[$ $\quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to0} \sin(X) = 0$

$\boxed{9}$ $D =]0, +\infty[$

$f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2$ $\quad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = ?$ $\quad \infty - \infty$ عدم تعيين من الشكل

$X = h(x) = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right); x > 0$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} (X)^2 = +\infty$

$\boxed{10}$ $D =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

$f(x) = \cos^2\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ $\quad a = +\infty$

نفرض $X = h(x) = \pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \pi$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to\pi} \cos^2(X) = 1$

ملاحظة: يمكن حل التمارين السابقة بطريقة التعويض فوراً والحصول على النتائج ذاتها.

تدريب صفحة 49 رقم 2 : ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

1. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

نفرض $X = f(x) = \frac{x-3}{x+5}$: ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to1} f(X) = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

2. اعد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

$f(f(x)) = \frac{f(x)-3}{f(x)+5} = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}} = \frac{-2x-18}{6x+22} = \frac{-x-9}{3x+11}$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{3x}\right) = \frac{-1}{3}$

تعريفه:

ليكن f تابع معرف على المجال $I =]b, +\infty[$ وليكن C الخط البياني للتابع f وبفرض المستقيم $\Delta: y = ax + b$.

نقول أن Δ مستقيم مقارب للخط C في جوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا تحقق:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

وإذا كان f تابع معرف على المجال $I =]-\infty, b[$ عندئذ:

نقول أن Δ مستقيم مقارب للخط C في جوار $(-\infty)$ إذا وفقط إذا تحقق:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

ولمعرفة الوضع النسبي بين Δ, C ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } f(x) - y_\Delta > 0 & : C \text{ يقع فوق } \Delta \\ \text{أو } f(x) - y_\Delta < 0 & : C \text{ يقع تحت } \Delta \end{cases}$$

تمرين: **ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}$ المعرف على $R\backslash\{-2\}$ وليكن المستقيم $\Delta: y = x + 1$**
اثبت ان Δ مستقيم مقارب لـ C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (x + 1) = \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - 2x - x - 2}{x + 2} = \frac{-1}{x + 2}$$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \quad \Rightarrow$ $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x+2}$

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$+$	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ	C تحت Δ

تدريب صفحة 51 رقم 1 : **فيما ياتي بين معللاً إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً للخط البياني C_f للتابع f**
عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ

$\boxed{1}$ $f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x + 1}$; $\Delta: y = 2x + 3$

$f(x) - y_\Delta = 2x + 3 + \frac{10}{x + 1} - (2x + 3) = \frac{10}{x + 1}$ $\quad$ f تابع معرف على $R\backslash\{-1\}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$ Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{10}{x+1}$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	C فوق Δ

2 $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $\Delta: y = -x + 1$

f تابع معرف على $R\backslash\{0\}$:

$$f(x) - y_\Delta = -x + 1 - \frac{1}{x^2} - (-x+1) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $\left(f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2} < 0\right)$ ومنه C تحت Δ

---

3 $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$; $\Delta: y = x$

f تابع معرف على R^*

$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{\sin x}{x} - x = \frac{\sin x}{x}$$

لدراسة نهاية $f(x) - y_\Delta$ عند $\pm\infty$ نستخدم مبرهنة الإحاطة:

ونميز حالتين :

1. في حالة $x > 0$ أي $x \in]0, +\infty[$

$$-1 \le \sin x \le +1$$

$$\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{+1}{x} \qquad (\div x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow$$ Δ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

2. في حالة $x < 0$ أي $x \in]-\infty, 0[$

نلاحظ أن $\frac{\sin x}{x}$ تابع زوجي على R^* أي $\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$ وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow$$ Δ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ ، لدينا $\left(f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}\right)$ معرف على $R\backslash\{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_\Delta = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad x = \pi k \ ; k \in Z$$

x	$-\infty$		-2π		$-\pi$		0		π		2π		$+\infty$
$\sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x				$-$			0			$+$			
$\frac{\sin x}{x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C فوق Δ		C تحت Δ		C فوق Δ	‖	C فوق Δ		C تحت Δ		C فوق Δ	

4 $f(x) = 3x + 7 - \dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$; $\Delta: y = 3x + 7$

f تابع معرف على R^* :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{|x|}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $\left(f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{|x|}} < 0\right)$ ، ومنه C تحت Δ

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$; $\Delta: y=2x+1$

بالقسمة المطولة نجد :

$$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$$

f تابع معرف على $R\backslash\{4\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty,+\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x)-y_\Delta$ لدينا $f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$

x	$-\infty$	4 $+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	C فوق Δ

$\boxed{6}$ $f(x)=\dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$; $\Delta: y=x-2$

f تابع معرف على $R\backslash\{-1\}$ وباستخدام القسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x-5 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} \mp x^3\mp 2x^2\mp x & x-2 \\ \hline -2x^2-4x-5 & \\ \pm 2x^2\pm 4x\pm 2 & \\ \hline -3 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{x^3-3x-5}{x^2+2x+1}$$

$$f(x)=x-2-\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f(x)-y_\Delta=x-2-\frac{3}{(x+1)^2}-(x-2)$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty,+\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_\Delta$ لدينا $\left(f(x)-y_\Delta=\frac{-3}{(x-1)^2}<0\right)$, ومنه C تحت Δ

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{-x^2-4x+\sin x}{x}$; $\Delta: y=-x-4$

f تابع معرف على $R\backslash\{0\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}-(-x-4)\overset{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{=}-x-4+\frac{\sin x}{x}+x+4=\frac{\sin x}{x}$$

لدينا $f(x)-y_\Delta=\frac{\sin x}{x}$ وبالتالي يبرهن أن المستقيم $\Delta: y=-x-4$ مقارب مائل

كما ورد إثباته ودراسة وضعه النسبي في التمرين $\boxed{3}$

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$; $\Delta: y = 2x + 1$

بالقسمة المطولة نجد :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 4}$$

f تابع معرف على $R\backslash\{4\}$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x - 4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta$ لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-4}$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	$\Vert$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	$\Vert$	C فوق Δ

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 5}{(x + 1)^2}$; $\Delta: y = x - 2$

f تابع معرف على $R\backslash\{-1\}$ وباستخدام القسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{x^2 + 2x + 1}$$

$$f(x) = x - 2 - \frac{3}{(x + 1)^2}$$

$$f(x) - y_\Delta = x - 2 - \frac{3}{(x + 1)^2} - (x - 2)$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x^2 + 2x + 1 & x^3 - 3x - 5 \\ & \mp x^3 \mp 2x^2 \mp x \\ \hline & -2x^2 - 4x - 5 \\ & \pm 2x^2 \pm 4x \pm 2 \\ \hline & -3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C عند $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$ لدينا $\left(f(x) - y_\Delta = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0\right)$ ، ومنه C تحت Δ

$\boxed{7}$ $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + \sin x}{x}$; $\Delta: y = -x - 4$

f تابع معرف على $R\backslash\{0\}$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x} - (-x - 4) \overset{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{=} -x - 4 + \frac{\sin x}{x} + x + 4 = \frac{\sin x}{x}$$

لدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$ وبالتالي يبرهن أن المستقيم $\Delta: y = -x - 4$ مقارب مائل

كما ورد إثباته ودراسة وضعه النسبي في التمرين $\boxed{3}$

8 $f(x)=\dfrac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$; $\Delta : y=\dfrac{1}{2}x+1$

f تابع معرف على $]0,+\infty[$ بالقسمة المطولة المبينة جانباً نجد:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x+1 \\ \hline 2x+1 & x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1 \\ & \mp x^2\mp\frac{1}{2}x \\ \hline & 2x+\sqrt{x}+1 \\ & \mp 2x\mp 1 \\ \hline & \sqrt{x} \end{array}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{2}x+1+\frac{\sqrt{x}}{2x+1}-\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=?$ $\dfrac{\infty}{\infty}$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\xRightarrow{\text{عندما } x>0 \text{ نجد}} f(x)-y_\Delta=\frac{1}{2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

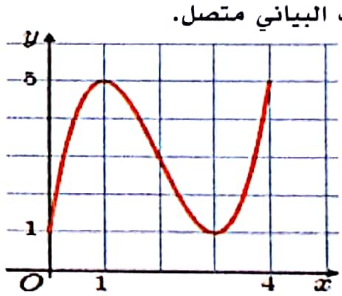
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0 \implies$ Δ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة المقدار $f(x)-y_\Delta$, لدينا $\left(f(x)-y_\Delta=\frac{1}{2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}>0\right)$, إذاً C فوق Δ

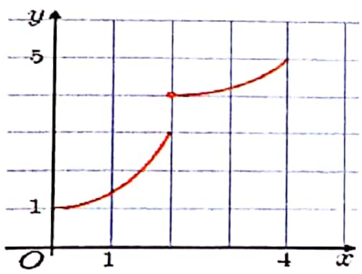
****

الاستمرار

مفهوم الاستمرار: نقول إن الخط البياني C للتابع f أنه مستمر على المجال I إذا كان الخط C متصل على جميع نقاط هذا المجال أي الخط البياني متصل.



مستمر على المجال $[0,4]$



غير مستمر على المجال $[0,4]$

لأنه غير مستمر عند $x=2$

تعريف: لتكن a نقطة من مجموعة التعريف D نقول أن التابع f مستمر عند a إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

* ونقول إن التابع f مستمر على مجموعة A محتواة في D إذا وفقط إذا كان f مستمر عند كل نقطة من نقاط A

مبرهنة:

1. إذا كان التابع f اشتقاقياً عند نقطة a كان f مستمراً عند a والعكس غير صحيح بالضرورة.
2. إذا كان التابع f اشتقاقياً على المجال I كان f مستمراً على I والعكس غير صحيح بالضرورة.

استمرار التوابع المرجعية :

1. تابع الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ فهو مستمر عليه ونلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$, $f(0)=0$

فحسب تعريف الاستمرار يكون f مستمر عند $x=0$ أي مستمر على $[0,+\infty[$ ولكنه ليس اشتقاقي عند $x=0$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

اي f غير اشتقاقي عند $x=0$ فهو غير اشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$ ولكنه اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$.

2. توابع كثيرات ... فهي مستمرة على R.

3. التوابع الكسرية اشتقاقية على مجموعة تعريفها D فهي مستمرة على D.

4. التابعان $x \longmapsto \sin x \quad , \quad x \longmapsto \cos x$ اشتقاقيان على R فهما مستمران على R.

تدرب صفحة 54 رقم 1 : **نتأمل التابع f المعطى وفق $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$**

1. **ما مجموعة تعريف f ؟**

f معرف عندما:

$$1 - \cos x \geq 0$$

$$1 \geq \cos x \qquad \text{محققة دائماً}$$

$$D_f = R$$

2. **ايكون f مستمراً على مجموعة تعريفه ؟**

f عبارة عن تركيب تابعين $T(x) = 1-\cos x \quad , \quad h(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = (hoT)(x)$ و منه f مستمر على مجموعة تعريف T أي مستمر على R

3. **بيّن ان التابع f زوجي و يقبل العدد 2π دوراً له**

أياً يكن $x \in R$ فإن $-x \in R$

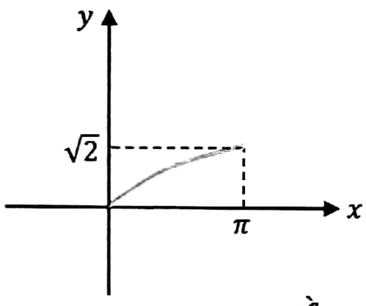
$$\begin{cases} -x \in R \\ f(-x) = \sqrt{1-\cos(-x)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x) \end{cases}$$

ومنه f تابع زوجي

$f(x+2\pi) = \sqrt{1-\cos(x+2\pi)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x)$ أي f تابع دوري و دوره 2π

4. **ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$, اثبت ان g اشتقاقي و ارسم خطه البياني**

لدينا : $f(x) = \sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\,.\sin\frac{x}{2}$



بما أن $x \to \sqrt{2}\,.\sin\frac{x}{2}$ اشتقاقي على R فإنه اشتقاقي على المجال $[0,\pi]$

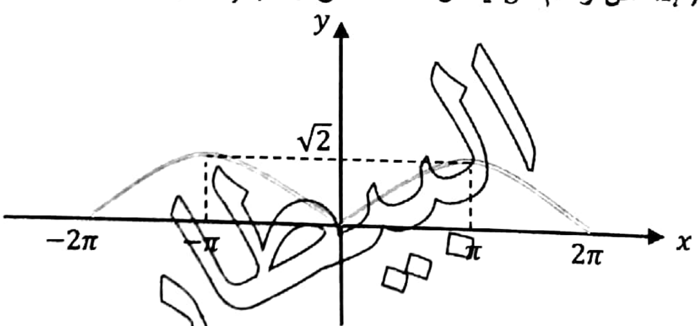
و منه g اشتقاقي على المجال $[0,\pi]$

نرسم الخط البياني للتابع f نقطياً على المجال $[0,\pi]$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad f(\pi) = \sqrt{2}$$

5. **استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi, 2\pi]$, ما مجموعة تعريف التابع f' ؟**

بما ان g تابع زوجي فإن خطه C متناظر بالنسبة لـ $y\acute{y}$, إذاً من رسم g يمكن أن نستنتج رسم C_f على $[-2\pi, 2\pi]$



حسب الزوجية والدورية:

f اشتقاقي على R و منه $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}$

f' معرف على R

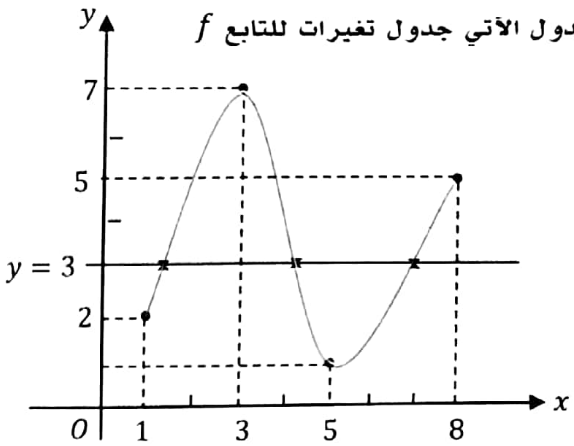
****

مبرهنات القيمة الوسطى:

مبرهنة ①: إذا كان f تابعاً مستمراً على المجال $I=[a,b]$ وكان $f(a)\le f(b)$ فإنه أياً كان $y\in[f(a),f(b)]$ فإن للمعادلة $y=f(x)$ حلاً واحداً على الأقل في المجال I

مثال: الجدول الآتي جدول تغيرات للتابع f

x	1		3		5		8
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$	2	↗	7	↘	1	↗	5



نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له أن:

التابع f مستمر على المجال $I=[1,8]$ و $f(1)=2$, $f(8)=5$ أي $f(1)\le f(8)$ ومنه أياً كانت $y\in[f(1),f(8)]=[2,5]$ فإنه للمعادلة $y=f(x)$ حلاً واحداً على الأقل في المجال $I=[1,8]$، فمثلاً $y=3$ يوجد لها ثلاثة حلول كما هو مبين بالشكل كذلك من أجل $y=4$ تتحقق شروط المبرهنة وللمعادلة ثلاثة حلول أيضاً

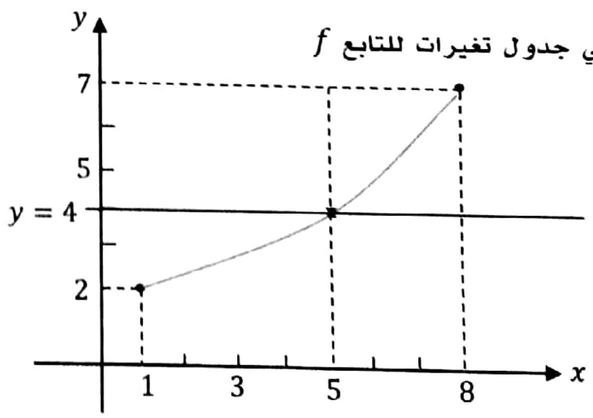
****

مبرهنة ② : إذا كان f تابعاً مستمراً ومتزايداً تماماً على المجال $I=[a,b]$ وكانت صورة المجال I هو المجال $[f(a),f(b)]$ فإنه أياً كانت $y\in[f(a),f(b)]$ فإن للمعادلة $y=f(x)$ حلاً واحداً فقط في المجال I.

ملاحظة: تبقى المبرهنة السابقة صحيحة في حالة f تابع متناقص تماماً فتصبح صورة المجال I هو المجال $[f(b),f(a)]$

مثال: في الجدول الآتي جدول تغيرات للتابع f

x	1		8
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	2	↗	7



نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له أن:

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $I=[1,8]$ و $f(1)=2$, $f(8)=7$ اي صورة المجال I هي $[2,7]$ ومنه أياً كانت $y\in[2,7]$ فإنه للمعادلة $y=f(x)$ حلاً وحيداً في المجال I

فمثلاً $y=4$ يوجد لها حلاً وحيداً فقط في المجال I هو $x=5$

****

مبرهنة ③ : إذا كان f مستمراً ومطرداً على المجال $I=[a,b]$

وكان $f(a)$, $f(b)$ من إشارتين متعاكستين أي $f(a).f(b)<0$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال I

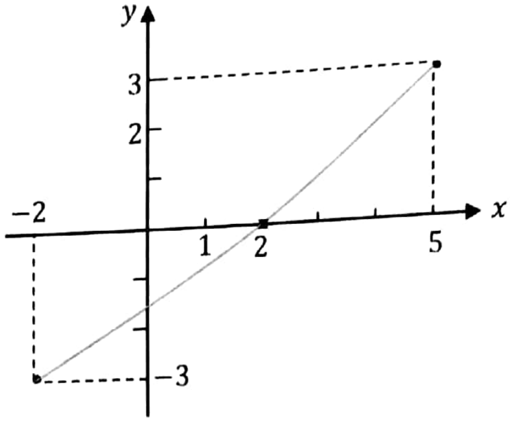
وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

ملاحظة:

إذا كان f مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ ومطرد تماماً على المجال $]a,b[$ فهو مطرد تماماً على المجال $[a,b]$

مثال: ليكن f تابعاً جدول تغيراته.

x	2		5
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	-3	$\nearrow$	3



نلاحظ من جدول تغيرات التابع f والرسم البياني المقابل له أن:

التابع f مستمراً ومتزايد تماماً على المجال $I = [-2,5]$ وان $f(-2) = -3$ ، $f(5) = 3$ نلاحظ ان $f(-2)$,$f(5)$ من إشارتين متعاكستين أي $f(-2).f(5) < 0$ ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في $]-2,5[$

ومن الشكل يكون الحل $x = 2$

****

مبرهنة ④ : فيما يأتي a و b عنصران من المجموعة $R \cup \{-\infty,+\infty\}$ ونفترض أن $a < b$ ونفترض ان التابع f تابع مستمر ومطرد تماماً على المجال I وان $J = f(I)$

المجال	f متزايد تماما	f متناقص تماما
$I = [a,b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I =]a,b]$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)\right]$	$f(I) = \left[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$I = [a,b[$	$f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)\right]$
$I =]a,b[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

****

ملاحظة مهمة ① : إذا كان f تابعاً مستمراً ومتزايداً تماماً (أو متناقصاً تماماً) على المجال I

وكان $0 \in f(I)$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من I يحقق $f(\alpha) = 0$

وإذا كان $0 \notin f(I)$ فإنه لا يوجد حل للمعادلة $f(x) = 0$ في I

ملاحظة ② : الاستمرار يقتضي وجود الحل والاطراد التام للتابع f يضمن وحدانية الحل أما في حالة الاطراد غير التام فقد نجد للمعادلة أكثر من حل.

تمرين: ليكن f معرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad x = 2 & \Rightarrow f(2) = -2 \\ \text{او} \quad x = 0 & \Rightarrow f(0) = 2 \end{cases}$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. اثبت ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً c في المجال $I=[0,2]$ أوجده.

f مستمر ونلاحظ من جدول التغيرات أن التابع f متناقص تماماً على المجال $I=[0,2]$ وان $f(0)=2$ ، $f(2)=-2$ وهما من إشارتين مختلفتين ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً c في المجال $I=]0,2[$

لإيجاده نجعل $f(x)=0$ أي $x^3-3x^2+2=0$ بما ان مجموع الثوابت يساوي الصفر فإن المعادلة تقبل القسمة على $(x-1)$ ومنه $(x-1)(x^2-2x-2)=0$

إما $x-1=0 \Rightarrow x=1\in I$

أو $x^2-2x-2=0$

$$\Delta=12 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{3}\notin I \\ x=1-\sqrt{3}\notin I \end{cases}$$

ومنه $x=1$ حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[0,2]$ أي $c=1$

3. اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة M التي فاصلتها (1) وعين α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل.

لإيجاد معادلة المماس T في النقطة $M(1,f(1))$ أي $M(1,0)$ نوجد الميل:

$$m=\acute{f}(x_M)=-3 \Rightarrow T: y-y_M=m(x-x_M) \Rightarrow T: y-0=-3(x-1)$$

$$T: \boxed{y=-3x+3}$$

لتعيين α فاصلة نقطة تقاطع T مع محور الفواصل نجعل $y=0$ ومنه $0=-3x+3$ وبالتالي $x=1=\alpha$

4. اثبت ان للمعادلة $f(x)=2$ حلاً وحيداً في المجال $I_1=[2,4]$

f مستمر ونلاحظ من جدول التغيرات أن f متزايد تماماً على المجال $I_1=[2,4]$

لأنه متزايد تماماً على المجال $I=[2,+\infty[$

ولدينا $f(2)=-2$ ، $f(4)=18$ أي $y=2\in[-2,18]$ ومنه للمعادلة $f(x)=2$ حلاً وحيداً في المجال $[2,4]$

تدريب صفحة 61 رقم 1 : التابع f معرف على R وفق $f(x)=x^3-x^2+x-2$ علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

ندرس تغيرات التابع f: f مستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\acute{f}(x)=3x^2-2x+1 \\ \acute{f}(x)=0\end{array}\right\} \quad 3x^2-2x+1=0$$

$\Delta=-8<0 \Rightarrow$ مستحيلة الحل في R وبالتالي فإن $\acute{f}(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على R فهو مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$

$$\left.\begin{array}{l}f(1)=1-1+1-2=-1 \\ f(2)=8-4+2-2=4\end{array}\right\} \Rightarrow f(1)\times f(2)<0$$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

تدريب صفحة 61 رقم 2 : التابع f معرف على R وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ علل لماذا يكون للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاثة وفقط ثلاثة حلول حقيقية؟

لاحظ حلول المعادلة $f(x) + 1 = 0$ تكافئ $f(x) = -1$

ندرس تغيرات التابع f: f مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x$ ، $\acute{f}(x) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \\ 3x(x-2) = 0 \end{array} \right.$ إما $x = 0$: $f(0) = 1$ أو $x = 2$: $f(2) = -3$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا $f(x) = -1$

♦ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتزايد تماماً على }]-\infty, 0[\\ -1 \in f(\,]-\infty, 0[\,) =]-\infty, 1[\end{array} \right.$ إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0[$

♦ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتناقص تماماً على } [0,2] \\ -1 \in f(\,[0,2]\,) = [-3,1] \end{array} \right.$ إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $[0,2]$

♦ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتزايد تماماً على }]2, +\infty[\\ -1 \in f(\,]2, +\infty[\,) =]-3, +\infty[\end{array} \right.$ إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]2, +\infty[$

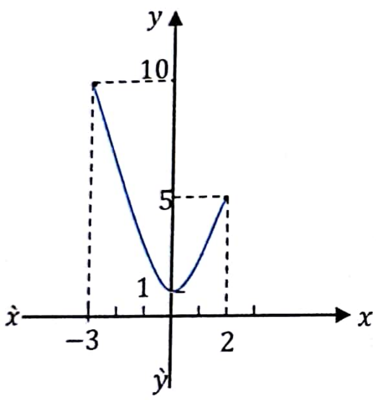
ومنه للمعادلة $f(x) = -1$ ثلاثة حلول في R

تدريب صفحة 61 رقم 3 :

ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [-3, 2]$ وفق $f(x) = x^2 + 1$

1. ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

x	-3	0	2
y	10	1	5
	$(-3,10)$	$(0,1)$	$(2,5)$



حسب الشكل المجاور نجد أن: $f(\,[-3,2]\,) = [1,10]$

2. **ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ في المجال I**

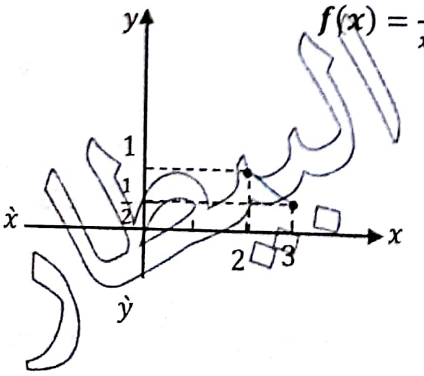
من الشكل المجاور نجد أن المستقيم $y = f(x) = 4$ يقطع المنحني C_f في نقطتين

إذاً للمعادلة $f(x) = 4$ حلين مختلفين في I .

تدريب صفحة 61 رقم 4 : ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [2, 3]$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1. ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

x	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$
	$(2,1)$	$(3, \frac{1}{2})$



حسب الشكل المجاور نجد أن: $f(\,[2,3]\,) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ في المجال I

من الشكل المجاور نجد ان المستقيم $y = f(x) = \frac{3}{4}$ يقطع المنحني C_f في نقطة واحدة

إذاً للمعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ حل وحيد في I

بطريقة اخرى:

لدينا $\acute{f}(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ وبالتالي f مستمر ومتناقص تماماً على $[2,3]$

$\frac{3}{4} \in f([2,3]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ومنه للمعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ حل وحيد في I

تدريب صفحة 61 رقم 5 : **ليكن f التابع المعرف على المجال R وفق $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$**

1. احسب $f(-1)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$

$f(-1) = \frac{-3}{2}$ ، $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ، $f(0) = \frac{-1}{2}$ ، $f(1) = \frac{1}{2}$

2. استنتج ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1, 1]$

التابع f مستمر واشتقاقي على R

$\acute{f}(x) = 12x^2 - 3$

$$\acute{f}(x) = 0$$
$$3(4x^2 - 1) = 0$$
$$3(2x-1)(2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} \\ \text{أو } x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$		0	$-$	0		$+$	
$f(x)$	↗	$\frac{-3}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{-3}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗

نلاحظ من جدول التغيرات:

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $\left[-1, \frac{-1}{2}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \frac{-3}{2} < 0 \\ f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) \times f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_1 في المجال $\left[-1, \frac{-1}{2}\right]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_2 في المجال $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

وائل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $\left[\frac{1}{2},1\right]$

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{-3}{2} < 0 \\ f(1) &= \frac{1}{2} \quad > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a_3 في المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$

مما سبق نستنتج ان للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول حقيقية في المجال $[-1,1]$

تدريب صفحة 61 رقم 6 : ليكن f التابع المعرف على المجال R وفق $f(x) = 1 + 3x - x^3$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2. احسب $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات f

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 3 - 3x^2 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 3 - 3x^2 &= 0 \\ 3(1+x)(1-x) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

إما $x = -1$: $f(-1) = -1$

أو $x = 1$: $f(1) = 3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

3. اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة جذور فقط ينتمي كل واحد منها إلى واحد من المجالات

$[-2,-1]$ ، $[-1,1]$ ، $[1,2]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $[-2,-1]$

$$0 \in f([-2,-1]) = [-1,3] \Leftarrow \begin{cases} f(-2) = 3 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-2,-1]$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[-1,1]$

$$0 \in f([-1,1]) = [-1,3] \Leftarrow \begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[-1,1]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $[1,2]$

$$0 \in f([1,2]) = [-1,3] \Leftarrow \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = -1 \end{cases}$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[1,2]$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول حقيقية في المجالات السابقة.

ملاحظة: يمكن حل التدريب باستخدام الطريقة التي وردت في التدريب رقم 5

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

تدريب صفحة 61 رقم 7 : نتأمل التابع f المعرف ...

1. احسب $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج انه يوجد عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha)=0$

$f(0)=0-\cos(0)=-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

f مستمر ومتزايد تماماً على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
بما ان $f(0)\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$
فإنه يوجد $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ يحقق $f(\alpha)=0$

2. اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب ان ينتمي إلى المجال $[-1,1]$

حل المعادلة $f(x)=0$ يكافئ $x-\cos x=0$ ومنه $x=\cos x$ وبما ان $\cos x\in[-1,1]$
فإن $\cos x=x\in[-1,1]$ إذاً حل المعادلة $f(x)=0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[-1,1]$

3. استنتج ان كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب ان ينتمي إلى المجال $]0,1[$

fمستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$$\left.\begin{array}{l}f(0)=-1<0\\ f(1)=1-\cos(1)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\times f(1)<0$$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$ ونلاحظ أن f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-1,0]$

$$\left.\begin{array}{l}f(-1)=-1-\cos(-1)=-1-\cos 1\\ f(0)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 0\notin f(]-1-\cos 1,-1])$$

أي ليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]-1,0]$

ومنه كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $]0,1[$

4. برهن ان التابع $x\to x-\cos x$ متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ واستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0,1[$

$f(x)=x-\cos x$

f اشتقاقي على $]0,1[$ ومنه $\left(f'(x)=1+\sin x>0\right)$ على المجال $]0,1[$ إذاً f متزايد تماماً على المجال $]0,1[$

$$\left.\begin{array}{l}f(0)=-1<0\\ f(1)=1-\cos(1)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\times f(1)<0$$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]0,1[$

تمرينات ومسائل صفحة 67

1) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند اطراف مجموعة تعريفه وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $D =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x^2}$, $D = (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 - \dfrac{4}{+\infty} = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 - \dfrac{4}{+\infty} = 2$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 2 - \dfrac{4}{0^+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2 - \dfrac{4}{0^+} = -\infty$

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2 + 3x - \dfrac{1}{x+3}$, $D =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - \dfrac{1}{-\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \dfrac{1}{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = 9 - 9 - \dfrac{1}{0^-} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 9 - 9 - \dfrac{1}{0^+} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

$\boxed{4}$ $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x+2}$

شرط الكسر الأول:

$1 + x \neq 0$

$x \neq -1$

شرط الكسر الثاني:

$x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$

$$D = R\backslash\{-2, -1\}$$
$$D =]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \dfrac{1}{-\infty} - \dfrac{1}{-\infty} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \dfrac{1}{+\infty} - \dfrac{1}{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -2 + \dfrac{1}{-1} - \dfrac{1}{0^-} = -3 + \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -3 + \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -1 + \dfrac{1}{0^-} - \dfrac{1}{+1} = -2 + \dfrac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -2 + \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\boxed{5}$ $f(x) = (2x-3)(5-\sqrt{x})$, $D = [0, +\infty[$

$f(0) = (-3)\,(5) = -15$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$\boxed{6}$ $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{x}$, $D = (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ غير موجودة , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ غير موجودة

لأن قيم $\cos x$ تتجمع في جوار -1 وجوار $+1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1 + \dfrac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1 + \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

$\boxed{7}$ $f(x) = 2x + \sin x$ ، $D =]-\infty, +\infty[$

$-1 \leq \sin x \leq +1$: فإن $x \in]-\infty, +\infty[$ أياً كانت

$2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$: نضيف $2x$ إلى أطراف المتراجحة

$\lim_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty \xrightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty \xrightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{8}$ $f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ ، $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{-\infty} = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ ، $\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\boxed{9}$ $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$ ، $D = [0, +\infty[$

$f(0) = 3$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = x\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) + 3 = x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + 3$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-0) + 3 = +\infty$

$\boxed{10}$ $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ ، $D =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

---

2) اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$

ثم اوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني و بيّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ $\qquad$ **شرط الكسر:** $x - 1 \neq 0$ أي $x \neq 1$ ومنه $D = R\backslash\{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2$ $\Delta_2 : y = 2$ مقارب أفقي عند $-\infty$ ، $+\infty$	$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$ $\Delta_1 : x = 1$ مقارب شاقولي عند $-\infty$ ، $+\infty$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2x+1}{x-1} - 2$$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ 1	$\qquad$ $+\infty$
$f(x) - y_{\Delta_2}$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ_2	C فوق Δ_2

3) اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$ عند -1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$
ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

شرط الكسر: $x + 1 \neq 0 \Leftarrow x \neq -1 \Leftarrow D = R\backslash\{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$f(x) = \frac{-2x}{x+1}$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$ $\Delta_1: x = -1$ مقارب شاقولي عند $-\infty$, $+\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right) = -2$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right) = -2$ $\Delta_2: y = -2$ مقارب أفقي عند $-\infty$, $+\infty$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{-2x}{x+1} + 2$$

$$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{-2x + 2x + 2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

x	$-\infty$ $\quad -1$	$\quad +\infty$
$f(x) - y_{\Delta_2}$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ_2	C فوق Δ_2

---

4) f هو التابع المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-1}$

1. اثبت ان $\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$ أياً يكن $x > 1$

أياً كان $x > 1$:
$$-1 \leq \sin x \leq 1$$
نضيف $2x$:
$$2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$$
نقسم أطراف المتراجحة على $x - 1$ حيث $x - 1 > 0$ لأن $x > 1$:

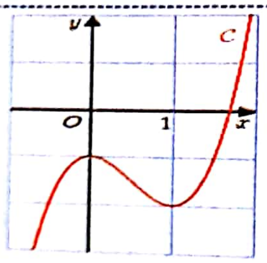
$$\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$$

2. استنتج نهاية f عند $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) = 2\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

---

5) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
وليكن C خطه البياني المبين في الشكل المرفق:



1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ عند $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. احسب $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات f

$f'(x) = 6x^2 - 6x$
$f'(x) = 0$
$6x(x-1) = 0 \Rightarrow$ إما $x = 0$: $f(0) = -1$
أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$: $f(1) = -2$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

البيطار

... $f(x) = 0$ تقبل جذرا واحدا فقط وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α

3. اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذرا واحدا
اثبت ان α ينتمي إلى المجال $]1.6\,,1.7[$

من جدول التغيرات ومن الرسم البياني نجد ان:

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,+\infty[$ و $0 \in f(]1,+\infty[) =]-2,+\infty[$ } **إذاً للمعادلة** $f(x) = 0$ **حل وحيد في المجال** $]1,+\infty[$

f **مستمر ومتزايد تماماً على المجال** $]-\infty,0[$, f **مستمر ومتناقص تماماً على المجال** $[0,1]$

$0 \notin f(]-\infty,0[) =]-\infty,-1[$, $0 \notin f([0,1]) = [-2,-1]$ **على الترتيب**

ومنه ليس للمعادلة $f(x) = 0$ **حل على كامل المجال** $]-\infty,1]$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ **حل وحيد وجدناه في المجال** $]1,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} f(1.6) = -0.48 < 0 \\ f(1.7) = 0.15 \quad > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1.6).f(1.7) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ **حل وحيد** $\alpha \in]1.6,1.7[$

---

6) نتامل التابع f المعرف على R^* بالعلاقة $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ ادرس نهاية f عند الصفر.

نفرض $X = h(x) = 3x$ **ومنه** $x = \frac{X}{3}$ **وبالتالي فإن:**

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

$$f(X) = \frac{\sin(X)}{\frac{X}{3}} = \frac{3\sin(X)}{X}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to 0}\left(\frac{3\sin(X)}{X}\right) = 3(1) = 3 \quad , \quad \left(\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = 1\right)$$ **علماً أن :**

---

7) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ وليكن C خطه البياني

المطلوب هو إثبات أن الخط C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ وكذلك الأمر في جوار $-\infty$

نعلم أن معادلة المقارب المائل من الشكل: $\Delta: y = ax + b$

♦ **عند $+\infty$:** ❶ **لإيجاد a نأخذ نهاية المقدار** $\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = ?$$ **حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل** $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{x\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

❷ **لإيجاد b نأخذ نهاية المقدار** $f(x) - ax$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \sqrt{2}x\right) = ?$$ **حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل** $\infty - \infty$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x = \frac{\left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x}$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x}$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left[\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\right]} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt{2}x)=\frac{1+0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ومنه معادلة المقارب المائل عند $+\infty$ $\quad \Delta: y=\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}}{4}$

♦ عند $-\infty$: ❶ لإيجاد a نأخذ نهاية المقدار $\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a=-\sqrt{2}$$

❷ لإيجاد b نأخذ نهاية المقدار $f(x)-ax$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+\sqrt{2}x)=?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)+\sqrt{2}x=\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}$$

$$f(x)+\sqrt{2}x=\frac{2x^2+x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}$$

$$f(x)+\sqrt{2}x=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right]}=\frac{1+\frac{1}{x}}{-\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right]}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+\sqrt{2}x)=\frac{1+0}{-[\sqrt{2}+\sqrt{2}]}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

ومنه معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ $\quad \acute{\Delta}: y=-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$

---

8) من المعلوم أن كثير حدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0$
حيث $a_n\neq 0$ نهدف إلى إثبات انه إذا كان n عدداً فردياً قبل P جذراً حقيقياً على الأقل.

هنا نميز حالتين حيث n عدد فردي فرضاً:

الحالة الأولى: $a_n>0$

♦ بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(-\infty)=-\infty \quad ; \quad \text{عدد موجب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a\in R$ يحقق $P(a)<0$

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(+\infty)=+\infty \quad ; \quad \text{عدد موجب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b\in R$ يحقق $P(b)>0$

♦ بما أن Pمستمر على المجال $[a,b]$ و $P(a).P(b)<0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c\in[a,b]$ يحقق $P(c)=0$

الحالة الثانية: $a_n<0$

♦ بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(-\infty)=+\infty \quad ; \quad \text{عدد سالب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a\in R$ يحقق $P(a)>0$

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(a_nx^n)$$
$$=a_n(+\infty)=-\infty \quad ; \quad \text{عدد سالب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b\in R$ يحقق $P(b)<0$

♦ بما أن Pمستمر على المجال $[a,b]$ و $P(a).P(b)<0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c\in[a,b]$ يحقق $P(c)=0$

وبالتالي فإن P يقبل جذراً حقيقياً على الأقل إذا كان n عدداً فردياً.

---

9) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = ?$$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2-4x-12}{x^2-4} = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-21}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-21}{0^-} = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = ?$ $\quad$ حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{2x^3-x^2-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+x+1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{2+1+1}{1+2} = \frac{4}{3}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{1}{-6} - \frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{1}{-6} - \frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} - \frac{2}{0^-} = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty + -\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} - \frac{2}{0^+} = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty+$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{x+3-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ $\qquad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^4}{x^3}\right) = \lim_{x\to-\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} (x) = +\infty$$

$\lim_{x\to1} f(x) = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{2(2)}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

$\boxed{6}$ $f(x) = 2x + \sin^2 x$ $\qquad a = \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \end{pmatrix}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نطبق مبرهنة المقارنة :

$0 \le \sin^2 x \le +1$ $\quad x \in R$ أياً كانت

$2x \le 2x + \sin^2 x \le 1 + 2x$ $\quad$ نضيف $2x$ إلى اطراف المتراجحة

$2x \le f(x) \le 1 + 2x$

$$\lim_{x\to+\infty} (2x) = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (1 + 2x) = -\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$\boxed{7}$ $f(x) = x^3(2 + \cos x)$ $\qquad a = \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\quad$ حصلنا على حالة $\cos\infty$ نطبق مبرهنة المقارنة:

$-1 \le \cos x \le +1$ $\quad x \in R$ أياً كان

$1 \le 2 + \cos x \le 3$

♦ عندما $x > 0$ فإن $x^3 > 0$:

$x^3 \le x^3(2 + \cos x) \le 3x^3$

$x^3 \le f(x) \le 3x^3$

$x^3 \le f(x)$ $\quad$ بما ان :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

♦ عندما $x < 0$ فإن $x^3 < 0$:

$x^3 \ge x^3(2 + \cos x) \ge 3x^3$

$x^3 \ge f(x) \ge 3x^3$

$x^3 \ge f(x)$ $\quad$ بما ان :

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = 1(2 + \cos 1) = 2 + \cos 1$$

8) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ $\quad a=\left(\frac{1}{+\infty}\right)$

$\lim_{x\to 1} f(x)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\,.\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{0}{1}=0$$

---

10) ليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$

1. اثبت ان g محدود.

نعلم انه أياً كانت $x\in R$ فإن :

$$-1\le \sin x\le 1$$

نضرب بـ 2

$$-2\le 2\sin x\le 2$$

نجمع 3

$$1\le 3+2\sin x\le 5$$

نقلب المتراجحة

$$1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$$

فالتابع $g(x)$ محدود حيث $g(x)\in\left[\frac{1}{5},1\right]$

2. استنتج كلاً من النهايتين $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$

♦ لدينا $1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$

نضرب بـ x^2 حيث $x^2>0$

$$x^2\ge\frac{x^2}{3+2\sin x}\ge\frac{x^2}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5}=+\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)=+\infty$$

♦♦ لدينا $1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$

نضرب بـ $x+\sin x$ حيث $x\ge 0$ في جوار $+\infty$ ومنه $x+\sin x>0$

$$\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\ge\frac{x+\sin x}{5}\qquad(*)$$

لنحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{5}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{5}=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم مبرهنة المقارنة

نعلم انه أياً كانت $x>0$ فإن :

$$-1\le \sin x\le 1$$

نضيف x

$$x-1\le x+\sin x\le x+1$$

نقسم على 5

$$\frac{x-1}{5}\le\frac{x+\sin x}{5}\le\frac{x+1}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{5}\right)=+\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{5}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{5}\right)=+\infty \xrightarrow[\text{المقارنة ③ في }(*)]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}=+\infty$$

11) ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$

1. عين D_f مجموعة تعريف f

شرط الكسر: $x^2-x-2\neq 0$ ومنه $(x-2)(x+1)\neq 0$ اي $x\neq -1$, $x\neq 2$

$$D=]-\infty,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$$

2. اوجد الأعداد c,b,a التي تحقق $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ ايا ً تكن x من D_f

نقسم البسط على المقام (القسمة الإقليدية):

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-2 & 3 \\ \hline & 3x^2+6x \\ & \mp 3x^2\pm 3x\pm 6 \\ \hline & 9x+6 \end{array}$$

$$f(x)=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}=3+\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة مع الشكل $a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ نجد $\boxed{a=3}$

$$\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2} \quad \cdots\cdots\cdots \boxed{*}$$

لإيجاد b نضرب طرفي المعادلة بـ $(x+1)$ ونجعل $x=-1$:

$$b+0=\frac{-9+6}{-3}=\frac{-3}{-3}=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{b=1}$$

لإيجاد c نضرب طرفي المعادلة بـ $(x-2)$ ونجعل $x=2$:

$$0+c=\frac{18+6}{3}=8 \quad\Rightarrow\quad \boxed{c=8}$$

$$f(x)=3+\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x-2}$$

3. ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to2^+} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$

---

12) ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$

1. ادرس نهاية f في جوار 1

شرط الكسر: $(x-1)^2\neq 0$ ومنه $x-1\neq 0$ اي $x\neq 1$ $\qquad D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

2. اوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ ايا ً تكن x من $I\backslash\{1\}$

$$f(x)>10^6 \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2}>10^6$$
$$\Rightarrow x>(x-1)^2 10^6$$

المتراجحة المطلوبة $\boxed{10^6(x-1)^2-x<0}$

نعدم المتراجحة و ندرس إشارتها

$$10^6(x-1)^2-x=0$$
$$10^6(x-1)^2-x+1-1=0$$
$$10^6(x-1)^2-(x-1)-1=0$$
$$10^6t^2-t-1=0$$

لناخذ $t=x-1$:

$$\Delta=b^2-4ac=1-4(10)^6(-1)$$
$$=1+4(10)^6\simeq 4(10)^6>0$$

$\sqrt{\Delta}=2(10)^3$ للمعادلة حلان حقيقيان

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+2(10)^3}{2(10)^6}$$
$$=\frac{2001}{2(10)^6}=\frac{1000.5}{(10)^6}\simeq 0.001$$

$$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-2(10)^3}{2(10)^6}$$
$$=\frac{-1999}{2(10)^6}=\frac{-999.5}{(10)^6}=-0.0009\simeq-0.001$$

$$t=x-1\in]-0.001,+0.001[$$
$$\Rightarrow x\in]1-0.001,1+0.001[$$
$$x\in]0.999,1.001[$$

13) ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x \qquad a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=? \quad \infty-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2x}{x^2}\right)}+x}$$

$$=\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}=\frac{2x}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right]}$$

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{1+1}=1$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x \qquad a=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=? \quad \infty-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}$$

$$=\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{x}{x^2}\right)}-2x}$$

$$=\frac{x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x}$$

$$f(x)=\frac{x}{-x\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right]}=\frac{-1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1} \qquad a=0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=? \quad \dfrac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}$$

$$f(x)=2\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=2(1+1)=4$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \qquad a=\begin{pmatrix}1\\+\infty\end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=? \quad \dfrac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\left(-x+\sqrt{x}\right)\left(-x-\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{x^2-x}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}=\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}$$

$$f(x)=\frac{x}{-x-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{-1-1}=\frac{-1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=? \quad \dfrac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$= \quad x\left(-1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) \quad -1+\frac{1}{\ldots}$$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{0}{-2} = 0$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ +\infty \end{pmatrix}$

$\lim_{x\to -1} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{(x^2-1)}$$

$$= \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

---

14) ادرس في كل حالة نهاية التابع f

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $\quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ +\infty \end{pmatrix}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{x} = \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = (0)(1) = 0$ $\quad$ علماً أن : $\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم الإحاطة

$-1 \le \sin x \le +1$ $\quad$ أياً كانت $x \in R$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \le \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \; x > 0$$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\quad a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نعلم أن $\left[1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\right]$ و $\left[\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]$

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ $\qquad a=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}(1)}=2 \quad , \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right)$$ علماً أن :

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $\qquad a=2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط والمقام في آنٍ واحد

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$$

$$=\frac{\left(2-\sqrt{3x-2}\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$=\frac{[4-(3x-2)]\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{[2x+5-9]\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}=\frac{(-3x+6)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x-4)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{-3(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}=\frac{-3\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{-3(6)}{2(4)}=\frac{-9}{4}$$

---

15) ليكن g التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=3$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x))=\lim_{t\to 3} g(t)=\frac{9-1}{0^+}=+\infty$$ بفرض : $g(x)=t$

2. اعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x

$$g(g(x))=\frac{3g(x)-1}{g(x)-3}=\frac{3\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-1}{\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-3}$$

$$=\frac{\frac{9x-3}{x-3}-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x-3-x+3}{x-3}}{\frac{3x-1-3x+9}{x-3}}=\frac{8x}{8}=x$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x))=+\infty$$

16) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$ اوجد الأعداد الحقيقية d, c, b, a علماً ان الخواص الآتية محققة:

- ♦ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب للخط C
- ♦ المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$
- ♦ تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C

♦ نلاحظ:

$\lim\limits_{x\to d} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ $x = d$ مقارب شاقولي لـ C

وبما ان $x = 3$ مقارب شاقولي لـ C (فرضاً)

عندئذ: $\boxed{d = 3}$

♦ $y = 2x - 5$ معادلة المقارب المائل لـ C عند $+\infty$ أو $-\infty$

$$f(x) - y = ax + b + \frac{c}{x-d} - 2x + 5$$
$$= (a-2)x + (b+5) + \frac{c}{x-d}$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ b + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 2}\ ,\ \boxed{b = -5}$$

وجدنا : $f(x) = 2x - 5 + \frac{c}{x-3}$

♦ النقطة $A(1,2)$ تنتمي لـ C

$$f(1) = 2$$
$$2(1) - 5 + \frac{c}{(1) - 3} = 2$$
$$\frac{c}{-2} = 5$$
$$\boxed{c = -10}$$

و منه : $f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x-3}$

---

17) فيما يأتي C هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f بين في كل حالة إن كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية او شاقولية او مائلة) للخط C

$\boxed{1}$ $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ $\qquad D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ $\boxed{y = 1}$ مقارب أفقي يوازي $\acute{x}x$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ $\boxed{y = 1}$ مقارب أفقي يوازي $\acute{x}x$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ $\boxed{x = 3}$ مقارب شاقولي يوازي $\acute{y}y$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \Rightarrow$ $\boxed{x = 3}$ مقارب شاقولي يوازي $\acute{y}y$ عند $+\infty$

$\boxed{2}$ $f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x^2+1}$ $\qquad D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

لنبحث عن مقارب مائل نفرض أن $y_\Delta = -x + 3$

$$f(x) - y_\Delta = -x + 3 + \frac{2}{x^2+1} - (-x+3) = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $y_\Delta = -x + 3$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{3}$ $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ $\qquad D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$ عند $-\infty$

لنبحث عن مقارب مائل , نفرض أن $y_\Delta = 1 + \frac{x}{2}$

$$f(x) - y_\Delta = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{-2}{x}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $y_\Delta = 1 + \frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{4}$ $f(x) = 1 - x + \frac{3x}{x^2+2}$ $\qquad D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

لنبحث عن مقارب مائل، نفرض أن $y_\Delta = 1 - x$

$$f(x) - y_\Delta = 1 - x + \frac{3x}{x^2+2} - (1-x) = \frac{3x}{x^2+2}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2+2} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2+2} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $y_\Delta = 1 - x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x}$ $\qquad D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty \quad \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $y\grave{y}$ عند $-\infty$

لنبحث مقارب مائل :

$$f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x} \overset{\text{بتوزيع البسط على المقام}}{=} 2x + 5 - \frac{4}{x}$$

نفرض أن $y_\Delta = 2x + 5$,

$$f(x) - y_\Delta = 2x + 5 - \frac{4}{x} - (2x+5) = \frac{-4}{x}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $y_\Delta = 2x + 5$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

$\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x^2+2+\sin x}{x}$ $\qquad D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$f(x) = x + \frac{2+\sin x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم مبرهنة المقارنة

نعلم انه أياً كانت $x \in R$ فإن :

$-1 \le \sin x \le 1$

نجمع 2 :

$1 \le 2 + \sin x \le 3$

$\frac{1}{x} \le \frac{2+\sin x}{x} \le \frac{3}{x}$: $\div (x>0)$

$x+\frac{1}{x} \le x+\frac{2+\sin x}{x} \le x+\frac{3}{x}$: نجمع x

$x+\frac{1}{x} \le f(x) \le x+\frac{3}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty \xRightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\frac{+2}{0^-}=-\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $y'y$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\frac{+2}{0^+}=+\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي منطبق على $y'y$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم مبرهنة المقارنة

$-1 \le \sin x \le 1$ نعلم أنه أياً كانت $x\in R$ فإن :

$1 \le 2+\sin x \le 3$: نجمع 2

$\frac{1}{x} \ge \frac{2+\sin x}{x} \ge \frac{3}{x}$: $\div (x<0)$

$x+\frac{1}{x} \ge x+\frac{2+\sin x}{x} \ge x+\frac{3}{x}$: نجمع x

$x+\frac{1}{x} \ge f(x) \ge x+\frac{3}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty \xRightarrow[\text{③ المقارنة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لنبحث عن مقارب مائل , نفرض أن $y_\Delta = x$

$f(x)-y_\Delta = x+\frac{2+\sin x}{x}-x=\frac{2+\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم الإحاطة

$-1 \le \sin x \le 1$ نعلم أنه أياً كانت $x\in R$ فإن :

$1 \le 2+\sin x \le 3$: نجمع 2

$\frac{1}{x} \ge \frac{2+\sin x}{x} \ge \frac{3}{x}$: $\div (x<0)$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=?$ حصلنا على حالة $\sin\infty$ نستخدم الإحاطة

$-1 \le \sin x \le 1$ نعلم أنه أياً كانت $x\in R$ فإن :

$1 \le 2+\sin x \le 3$: نجمع 2

$\frac{1}{x} \le \frac{2+\sin x}{x} \le \frac{3}{x}$: $\div (x>0)$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{① الإحاطة}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

أي $y_\Delta = x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

لنبحث عن مقارب مائل :

$$f(x) \overset{\text{باستخدام القسمة الإقليدية}}{=} 3x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

نفرض أن : $y_\Delta = 3x$

$$f(x) - y_\Delta = 3x - \frac{x+1}{x^2+1} - 3x = -\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} -\frac{x+1}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} -\frac{x+1}{x^2+1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $y_\Delta = 3x$ هو مقارب مائل لـ C عند $+\infty, -\infty$

---

18) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$

1. a) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1))$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1)) = ?$$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - (x+1) = \frac{\left[\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)\right]}{\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+4-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1} = \frac{x^2+2x+4-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = 0$$

b) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = 0$ فإن $y_\Delta = x+1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

c) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)$$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1) = 0$$

$$\sqrt{x^2+2x+4} = (x+1)$$

نربع بشرط $(x > -1)$: $x^2+2x+4 = (x+1)^2$

مستحيلة $x^2+2x+4 = x^2+2x+1 \Rightarrow 4 = 1$

ملاحظة: (أي معادلة مستحيلة الحل لها إشارة واحدة). $f(x)-(x+1) > 0 \Rightarrow$ C فوق Δ

2. a) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

b) اثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وان نهاية $f(x) - ax$ عند $x \to -\infty$ عدد حقيقي b

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}\overset{-\infty \text{ عند}}{=}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$f(x)-ax=\sqrt{x^2+2x+4}+x$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+ax)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-ax=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)}=\frac{2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\frac{2}{-2}=-1\Rightarrow\boxed{b=-1}$$

c) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$

معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي $y=-x-1$

---

19)ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

2. a)اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية (متمماً إلى مربع كامل).

$$x^2+4x+5=x^2+4x+4-4+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$$

b) استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$ اكتب معادلته.

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$$

نفرض أن : $\Delta: y=x+2$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-y_\Delta=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)=\frac{\left[\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right]\left[\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right]}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\frac{1}{+\infty}=0$$ $\Rightarrow$ $y_\Delta=x+2$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

التأويل الهندسي: $\boxed{y=0}$ مقارب أفقي منطبق على محور $\acute{x}x$ عند $-\infty$

2. اثبت ان المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = x + \sqrt{x^2+1} - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \frac{1}{+\infty} = 0 \implies$ $y = 2x$ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

3. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \implies \sqrt{x^2+1} - x = 0$$

$\sqrt{x^2+1} = x \quad : x > 0 \quad \xrightarrow{\text{نربع}} \quad x^2+1 = x^2 \quad \implies 1 = 0$ مستحيلة الحل

ملاحظة هامة: أي معادلة مستحيلة الحل لها إشارة واحدة فقط إما موجبة دائماً أو سالبة دائماً لمعرفتها نأخذ قيمة ضمن مجموعة التعريف ونعوضها في $f(x) - y_\Delta$ والإشارة الناتجة هي إشارة $f(x) - y_\Delta$

قيمة تجريبية $x = 0 \implies f(x) - y_\Delta > 0 \implies$ C فوق Δ.

---

21) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2-1|}$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{\left|x^2\left(4 - \frac{1}{x^2}\right)\right|} = x + |x|\sqrt{\left|4 - \frac{1}{x^2}\right|} = x - x\sqrt{\left|4 - \frac{1}{x^2}\right|}$$

$$= x\left(1 - \sqrt{\left|4 - \frac{1}{x^2}\right|}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-2) = +\infty$$

2. a) احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x)$

$$f(x) - 3x = x + \sqrt{|4x^2-1|} - 3x = \sqrt{|4x^2-1|} - 2x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{|4x^2-1|} - 2x\right)\left(\sqrt{|4x^2-1|} + 2x\right)}{\sqrt{|4x^2-1|} + 2x} = \frac{|4x^2-1| - 4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|} + 2x}$$

$$= \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|} + 2x} = \frac{-1}{\sqrt{|4x^2-1|} + 2x}$$

عند $+\infty$ يكون $|4x^2-1| = 4x^2 - 1$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

b) احسب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

$$f(x)+x = x+\sqrt{|4x^2-1|}+x = \sqrt{|4x^2-1|}+2x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{|4x^2-1|}+2x\right)\left(\sqrt{|4x^2-1|}-2x\right)}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x} = \frac{|4x^2-1|-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x}$$

عند $-\infty$ يكون $|4x^2-1| = 4x^2-1$

$$= \frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x} = \frac{-1}{\sqrt{|4x^2-1|}-2x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

3. a) استنتج ان الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_2, Δ_1 يطلب إيجاد معادلتيهما.

بما ان : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = 0$ فإن $\Delta_1: y = 3x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

بما ان : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = 0$ فإن $\Delta_2: y = -x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

b) ادرس الوضع النسبي للخط C وكل من المقاربين Δ_2, Δ_1

دراسة الوضع النسبي للمقارب $y = 3x$ مع C:

$$f(x)-3x = 0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}-2x = 0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|} = 2x$$ نربع : $x > 0$
$$|4x^2-1| = 4x^2$$

إما $4x^2-1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0$ مستحيلة

أو $4x^2-1 = -4x^2 \Rightarrow 8x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow$ إما $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (مقبول) ، أو $x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (مرفوض)

x	0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta_1}$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق Δ_1	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	C تحت Δ_1	

نقطة تقاطع C مع المقارب Δ_1 هي $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

دراسة الوضع النسبي للمقارب $\Delta_2: y = -x$ مع C:

$$f(x)+x = \sqrt{|4x^2-1|}+2x = 0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|} = -2x$$ نربع بشرط : $x < 0$
$$|4x^2-1| = 4x^2$$

إما $4x^2-1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0$ مستحيلة

أو $4x^2-1 = -4x^2 \Rightarrow 8x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow$ إما $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (مرفوض) أو $x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (مقبول)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$		0
$f(x)-y_{\Delta_2}$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تحت Δ_2	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	C فوق Δ_2	

نقطة تقاطع C مع المقارب Δ_2 هي $\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

22) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

1. ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

2. a) اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني.

$$4x^2-4x+3=4(x^2-x)+3=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1+3$$

$$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2=2^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2=(2x-1)^2+2$$

b) ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$h(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\x\to+\infty}} h(x)=?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$h(x)=\frac{(2x-1)^2+2-(2x-1)^2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$$

$$h(x)=\frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\dfrac{2}{+\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\dfrac{2}{+\infty}=0\end{cases}$$

c) استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما.

من b) نلاحظ ما يلي:

$$h(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}$$

$$h(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}-|2x-1|$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0 \Rightarrow$ $\boxed{y=-(2x-1)}$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0 \Rightarrow$ $\boxed{y=2x-1}$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

3. اثبت أن الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين.

$$h(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}$$

$$h(x)=0 \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}=0$$

$$\sqrt{(2x-1)^2+2}=\sqrt{(2x-1)^2}$$

نربع: $(2x-1)^2+2=(2x-1)^2$

مستحيلة $2=0 \Rightarrow$ $h(x)$ لها إشارة واحدة فقط

نأخذ قيمة اختيارية ولتكن $x=0$ ونعوضها في $h(x)$ فنجد أن $h(x)>0$ إذاً C فوق المقاربين Δ_1,Δ_2

---

23) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

1. a) اثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}}-1$$

$$=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0 \Rightarrow$ $\boxed{\Delta: y=x+1}$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

b) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-y_\Delta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1 \\ f(x)-y_\Delta=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=1$$

$x=\sqrt{x^2+9}$ (نربع بشرط $x>0$)

$x^2=x^2+9 \Rightarrow 0=9$ مستحيلة

بما أن $0=9$ مستحيلة فإن $(f(x)-y_\Delta)$ لها إشارة واحدة فقط ناخذ قيمة اختيارية لتكن $x=0$ ونعوضها فنجد $(f(x)-y_\Delta<0)$ إذاً C تحت Δ

2. اصحيح ان المستقيم $\grave{\Delta}$ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

$$f(x)-y_{\grave\Delta}=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-(x-1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}}+1$$

$$=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_{\grave\Delta}]=0 \Rightarrow$ $\boxed{\grave\Delta: y=x-1}$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

---

24) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=x^3+x+1$ احسب $f(0), f(-1)$ ثم اثبت وجود عدد حقيقي وحيد c من المجال $]-1,0[$ يحقق $f(c)=0$

$f(-1)=-1-1+1=-1$, $f(0)=1$

$\acute f(x)=3x^2+1>0$

f معرف واشتقاقي على $]-1,0[$

x	-1 $\qquad$ 0
$\acute f(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$

نلاحظ أن:

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-1,0[$

$f(-1).f(0)<0$

فللمعادلة $f(c)=0$ جذر وحيد c في R ينتمي للمجال $]-1,0[$

---

25) ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$

1. اثبت ان f متزايد تماماً على المجال $\left]\frac{-3}{2},-1\right[$

f معرف واشتقاقي على المجال $\left]\frac{-3}{2},-1\right[$

$$\acute f(x)=\frac{3x^2(x+1)-1(x^3)}{(x+1)^2}=\frac{3x^3+3x^2-x^3}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

نلاحظ ان $\acute f(x)\geq 0$ المشتق موجب وينعدم عند قيمة $x=\frac{-3}{2}$ التي لا تشكل مجالاً في مجموعة التعريف $\left]\frac{-3}{2},-1\right[$

فالتابع متزايد تماماً على $\left]\frac{-3}{2},-1\right[$

2. نظم جدولاً بتغيرات f على المجال $\left]-1 , \frac{-3}{2}\right]$

f معرف و اشتقاقي على $\left[\frac{-3}{2} , -1\right[$

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{27}{4} \qquad , \qquad \lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{f}(x) = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \\ \acute{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ إما } & (\text{مرفوض}) \\ x = \dfrac{-3}{2} \text{ او } : f\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \dfrac{27}{4} \end{cases}$$

	0 +	
	$\frac{27}{4}$ ↗ $+\infty$	

3. اوجد $f\left(\left[\frac{-3}{2} , -1\right[\right)$ واثبت ان للمعادلة $f(x) = 10$ حلاً وحيداً في المجال $\left]-1 , \frac{-3}{2}\right]$

$$f\left(\left[\frac{-3}{2} , -1\right[\right) = \left[\frac{27}{4} , +\infty\right[$$

$$\begin{cases} f \text{ مستمر ومتزايد تماماً على المجال } \left]-1 , \frac{-3}{2}\right] \\ 10 \in f\left(\left[\frac{-3}{2} , -1\right[\right) = \left[\frac{27}{4} , +\infty\right[\end{cases}$$
ومنه للمعادلة $f(x) = 10$ حلاً وحيداً في المجال $\left]-1 , \frac{-3}{2}\right]$.

---

26) ليكن f التابع المعرف على $I = [0,3[$ وفق $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف واشتقاقي على $[0,3[$

$$f(0) = -3 \quad , \quad f(3) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \acute{f}(x) = 2x - 2 \\ \acute{f}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = 1} \; : \; f(1) = -4$$

x	0 1 3
$\acute{f}(x)$	− 0 +
$f(x)$	-3 ↘ -4 ↗ 0

2. استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$

طريقة أولى: من جدول التغيرات نجد أن $f(x) = 0$ عندما $x = 3$

طريقة ثانية:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{مقبول}) \\ x = -1 & (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

3. عيّن $f([0,3[)$

$$f([0,3[) = [-4 , -3] \cup [-4 , 0[= [-4 , 0[$$

---

27) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ اثبت ان f مستمر على R وعين $f(R)$

لاحظ: f اشتقاقي على R فهو مستمر على R.

نعلم أن : $x^2 \in [0, +\infty[$

$$x^2 + 1 \in [1 , +\infty[\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \in]0 , 1]$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2+1} \in [-1 , 0[\;\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2+1} \in [0 , 1[\;\Rightarrow f(x) \in [0 , 1[= f(R)$$

ملاحظة: يمكن إيجاد المطلوب عبر دراسة تغيرات f وتعيين $f(R)$

28) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

1. احسب نهاية f عند الصفر.

نعلم انه اياً كان $: x \in R^*$

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

نضرب بـ x^2 :

$$\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right| \leq x^2$$

$$|f(x) - 0| \leq x^2$$

بما ان $\lim_{x\to0}(x^2) = 0$ حسب الإحاطة ② فإن $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

2. هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على R علل إجابتك.

f مستمر عند $x = 0$ لأن : $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$

وبما أن f هو عبارة عن جداء دالتين $\left(x^2 , \cos\frac{1}{x}\right)$ مستمرتان على كلاً من المجالين $]-\infty , 0[,]0 , +\infty[$

فيكون f مستمر على R

---

29) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$ ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R

التابع f مستمر على كلاً من المجالين $]-\infty , 0[,]0 , +\infty[$

حتى يكون f مستمر على R يجب أن يكون مستمر عند $x = 0$ أي يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$

$\lim_{x\to0} f(x) = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1-x^2-1}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$f(x) = \frac{-x^2}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to0} f(x) &= 0 \\ f(0) &= m \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{حسب تعريف الاستمرار}} \boxed{m = 0}$$

---

30) يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرف على المجال $[0 , 2]$ وفق $f(x) = x - E(x)$

1. اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

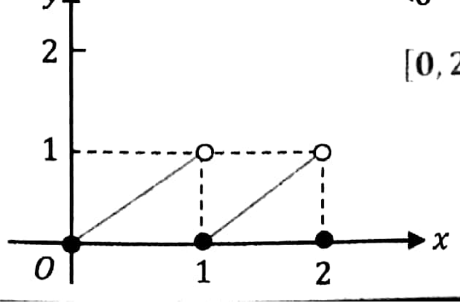
بما أن $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x , $x \in [0,2]$ فإن $E(x) \in \{0,1,2\}$

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0 , 1[\\ 1 & : x \in [1 , 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = x - E(x) = \begin{cases} x & : x \in [0 , 1[\\ x - 1 & : x \in [1 , 2[\\ 0 & : x = 2 \end{cases}$$

2. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0, 2]$

نرسم الخط البياني لـ f على كل مجال

بأخذ نقاط مساعدة تنتمي لكل مجال



3. هل f مستمر على المجال $[0,2]$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f(x) &= 1\\ f(1) &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) \neq f(1)$$

f غير مستمر عند $x = 1$ فهو غير مستمر على المجال $[0,2]$

4. طلب إضافي : أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

$$0 \leq x - E(x) < 1$$

نقسم على $x > 0$:

$$0 \leq f(x) < 1$$

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (0) &= 0\\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) &= 0\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

نعلم أن :

نقسم على $x > 0$:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) &= 1\\ \lim_{x\to+\infty} (1) &= 1\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{الإحاطة ①}]{\text{حسب مبرهنة}} \lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$$

---

31) يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

1. اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

بما أن $E(x)$ هي الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ، و $x \in [0,2]$ فإن $E(x)$ تنتمي إلى $\{0,1,2\}$

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0,1[\\ 1 & : x \in [1,2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = E(x) + (x - E(x))^2 = \begin{cases} x^2 & : x \in [0,1[\\ 1 + (x-1)^2 & : x \in [1,2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$$

2. اثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$

f تابع كثير الحدود على كل من المجالين $[0,1[$, $[1,2[$ وهذه التوابع مستمرة على مجالات تعريفها

ولنتحقق من استمرار f عند كل من 1 و 2

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f(x) &= 1\\ f(1) &= 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1) = 1$$

f مستمر من أجل $x = 1$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to2^-} f(x) &= 2\\ f(2) &= 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to2^-} f(x) = f(2) = 2$$

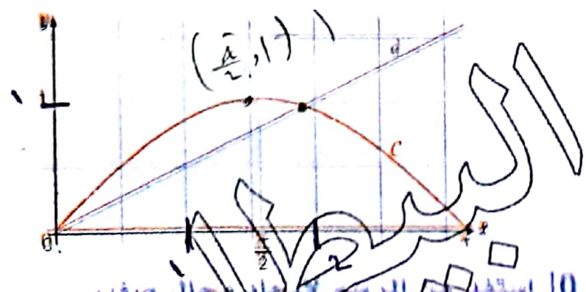
f مستمر من أجل $x = 2$:

إذاً التابع f مستمر على $[0,2]$

---

32) في معلم متجانس C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,\pi]$ وفق $f(x) = \sin x$ و d هو المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$

1. a) ارسم كلاً من C, d.



يمكن رسم الخط C والمستقيم d نقطياً كما وضع بالشكل

b) يبدو أن للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ حلاً وحيداً α في المجال $]0,\pi[$ استفد من الرسم لإيجاد مجال صغير ينتمي إليه α

واضح من الرسم أن $\alpha \in]1,2[$

2. نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $]0,\pi[$ وفق $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$

a) احسب $\acute{g}(x)$ واثبت ان $\acute{g}(x)$ ينعدم عند $x=\frac{\pi}{3}$

$$g(0)=0 \quad , \quad g(\pi)=\frac{-\pi}{2}$$

g اشتقاقي على $[0,\pi]$

$$\left.\begin{array}{l}\acute{g}(x)=\cos x-\frac{1}{2}\\ \acute{g}(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\in[0,\pi] \ : \ g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$$

b) نظم جدولاً بتغيرات g

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\acute{g}(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$	$\searrow$	$\frac{-\pi}{2}$

3. استنتج مما سبق أن المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0,\pi[$

هذا يكافئ إثبات أن للمعادلة $\sin x-\frac{1}{2}x=0 \ \Leftarrow \ g(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]0,\pi]$

♦ g تابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ بحيث:

$0\notin g\left(\left]0\ \frac{\pi}{3}\right[\right)=\left]0,\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right[$ إذاً ليس للمعادلة حلاً في المجال $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$

♦♦ g مستمر ومتناقص تماماً على $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

$$\left.\begin{array}{l}g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}>0\\ g(\pi)=\frac{-\pi}{2}<0\end{array}\right\}\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right)\times g(\pi)<0$$

ومنه للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد في المجال $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

وبالتالي للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ حلاً وحيد في المجال $\alpha\in]0,\pi[$

---

33) ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق $f(x)\in I$ اياً يكن x من I نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $k(x)=f(x)-x$

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k اثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$

$$k(x)=f(x)-x \qquad : x\in I=[0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l}x\in[0,1]\\ f(x)\in[0,1]\end{array}\right\}\Rightarrow [0,1]\ \text{مستمر على المجال}\ k(x)=f(x)-x$$

$$\left.\begin{array}{l}k(0)=f(0)\geq 0 \quad \left(f(x)\in[0,1]\ \text{لأن}\right)\\ k(1)=f(1)-1\leq 0 \ \ (f(1)\in[0,1])\end{array}\right\}\Rightarrow k(0)\times k(1)<0$$

إذاً يوجد $a\in[0,1]$ بحيث $k(a)=0$, $f(a)-a=0$ ومنه $f(a)=a$

---

34) ليكن m عدداً حقيقياً وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على R وفق: $f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$

1. a) اثبت ان الخطين ... يتقاطعان في نقطتين B,A اوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

$$\left.\begin{array}{l}C_0: f_0(x)=x^3-8x\\ C_1: f_1(x)=x^3+x^2-8x-1\end{array}\right\}\Rightarrow f_1(x)=f_0(x)$$

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{إما}\ \ x=1 & : f_0(1)=1-8=-7\\ \text{أو}\ \ x=-1 & : f_0(-1)=-1+8=7\end{array}\right\}\Rightarrow A(1,-7) \ , \ B(-1,7)$$

b) استنتج ان جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين B,A

$$A(1,-7):f_m(1)=1+m-8-m=-7 \overset{\text{محققة}}{\Longrightarrow} A\in C_m$$

$$B(-1,7):f_m(-1)=-1+m+8-m=7 \overset{\text{محققة}}{\Longrightarrow} B\in C_m$$

2. اوجد نهاية f_m عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$$

3. استنتج مما سبق ان للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول متمايزة في R اياً يكن العدد m

مما سبق وجدنا أن C_m يمر بالنقطتين $A(1,-7)$, $B(-1,7)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	7	↘	-7	↗	$+\infty$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,-1]$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f_m(x)&=-\infty\\ f(-1)&=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f_m(x)\times f(-1)<0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-\infty,-1]$

♦ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,1[$

$$\left.\begin{aligned}f(-1)&=7\\ f(1)&=-7\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(-1)\times f(1)<0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

♦ f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$

$$\left.\begin{aligned}f(1)&=-7\\ \lim_{x\to+\infty} f_m(x)&=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(1)\times \lim_{x\to+\infty} f_m(x)<0$$

إذاً للمعادلة $f_m(x)=0$ حل وحيد في المجال $[1,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول مختلفة في R

---

35) ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق الشرطين:

♦ اياً كان x من I كان $f(x)$ من I

♦ واياً كان x من $]0,1[$ كان $f'(x)<1$

اثبت ان للمعادلة $f(x)=x$ حلاً وحيداً في I

طريقة التفكير للحل: **من الشرط الثاني:**

الحل يكافئ أن نثبت أن للمعادلة $f(x)-x=0$ حل وحيد في I , لنفرض أن: $x\in I=[0,1]$: $\boxed{g(x)=f(x)-x}$

حسب الفرض: g مستمر على المجال $[0,1]$ واشتقاقي على المجال $]0,1[$ (لأن $f'(x)<1$)

$$g'(x)=f'(x)-1<0 \quad , \quad \left(f'(x)<1 \Rightarrow f'(x)-1<0\right) \quad : \text{لأن}$$

$g(0)=f(0)$
$g(1)=f(1)-1$

x	0		1
$g'(x)$	‖	$-$	‖
$g(x)$	$f(0)$	↘	$f(1)-1$

لاحظ: $g(x)$ مستمر ومتناقص على المجال $[0,1]$

$$\left.\begin{aligned}g(0)&=f(0)\ge 0\\ g(1)&=f(1)-1\le 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(0)\times g(1)<0$$

انتبه: لماذا $g(0)=f(0)\ge 0$ لأن $f(x)\in[0,1]$ وبالمثل $g(1)=f(1)-1\le 0$

إذاً يوجد $\alpha\in[0,1]$ بحيث للمعادلة $g(x)=0$ أي $f(x)-x=0$ وبالتالي $f(x)=x$ حل وحيد.

36) ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. اثبت ان للخط C محور تناظر.

$f(x)=\sqrt{1+x^2} \quad : D_f=R$

♦ $x\in R \to -x\in R$ (محقق)

♦ $f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$ (محقق)

ومن تحقق الشرطين السابقين نجد ان: f تابع زوجي ومنه فإن خطه البياني C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب yy' الذي معادلته $x=0$

2. ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. اثبت ان $f(x)-x=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ أياً يكن x من R استنتج ان C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$ عين الوضع النسبي للخط C ومقاربه d

$$f(x)-x=\sqrt{1+x^2}-x=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$f(x)-x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\frac{1}{+\infty}=0 \quad \Rightarrow$ $d: y=x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

$f(x)-y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}>0$ ومنه C فوق d كون $\sqrt{1+x^2}+x>0$ أياً تكن $x\in R$

4. ليكن $\acute{C}$ الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x)=-f(x)$ وليكن $H=C\cup\acute{C}$

اثبت ان معادلة H هي $y^2-x^2=1$

لدينا $g(x)=-f(x)$

النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى H إذا وفقط إذا كان $y=f(x)$ أو $y=g(x)=-f(x)$

$$y^2=(f(x))^2=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2=1+x^2$$

او $y^2=(-f(x))^2=\left(-\sqrt{1+x^2}\right)^2=1+x^2$

وهذا يكافئ قولنا ان $y^2=1+x^2$ ومنه معادلة H هي $y^2-x^2=1$

5. نعتمد معلماً جديداً $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث $\vec{u}=\frac{\sqrt2}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ و $\vec{v}=\frac{\sqrt2}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$. لتكن M نقطة إحداثياتها (x,y) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ وإحداثياتها (X,Y) في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$

اوجد y,x بدلالة Y,X ارسم الخط H في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$

$$\vec{v}=\frac{\sqrt2}{2}(-\vec{i}+\vec{j}) \quad , \quad \vec{u}=\frac{\sqrt2}{2}(\vec{i}+\vec{j})$$

$M(x,y):\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

$M(X,Y):\overrightarrow{OM}=X\vec{u}+Y\vec{v}=X\left(\frac{\sqrt2}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt2}{2}\vec{j}\right)+Y\left(\frac{-\sqrt2}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt2}{2}\vec{j}\right)$

$$=\underline{\frac{\sqrt2}{2}X\vec{i}}+\underline{\frac{\sqrt2}{2}X\vec{j}}-\underline{\frac{\sqrt2}{2}Y\vec{i}}+\underline{\frac{\sqrt2}{2}Y\vec{j}}$$

$$M(X,Y):\overrightarrow{OM}=\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt2}{2}X-\frac{\sqrt2}{2}Y}_{x}\Bigg)\vec{i}+\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt2}{2}X+\frac{\sqrt2}{2}Y}_{y}\Bigg)\vec{j}$$

ومنه: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$ و $y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$

نعوض في معادلة H : $y^2 - x^2 = 1$

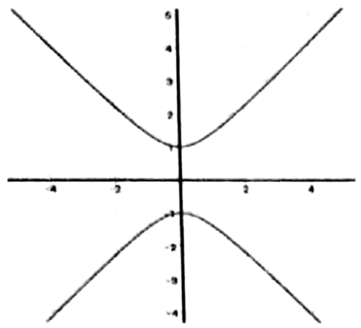
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 - \left(\frac{1}{2}X^2 - XY + \frac{1}{2}Y^2\right) = 1$$

$2X.Y = 1 \quad \Rightarrow \quad X.Y = \frac{1}{2}$: و هي معادلة H في الجملة الجديدة

يمثل الرسم الخط البياني لـ H حيث C باللون الأزرق

و $\acute{C}$ باللون الأخضر



---

37) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f = R\backslash\{-1,+1\}$ وفق $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$

1. a) اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x < -1 \\ f_2(x) = x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

b) ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f ثم اوجد $\acute{f}(x)$ وادرس إشارته على كل من مجالات D_f

$D =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f_1(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f_2(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f_2(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f_2(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

f اشتقاقي على كل من المجالات $]-\infty, -1[,]-1, 1[,]1, +\infty[$

$$\acute{f}(x) = \begin{cases} \acute{f}_1(x) = -1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x(x)}{(x^2-1)^2} & : x < -1 \\ \acute{f}_2(x) = 1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x(x)}{(x^2-1)^2} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

$$\acute{f}(x) = \begin{cases} \acute{f}_1(x) = -1 + \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2-1)^2} & : x < -1 \\ \acute{f}_2(x) = 1 + \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} & : x > -1 \quad ; x \neq 1 \end{cases}$$

دراسة إشارة المشتق

$$\acute{f}_1(x) = \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2-1)^2}$$

$\acute{f}_1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^4 + x^2 - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-1)(-2) = -7 < 0$ (مستحيلة الحل)

وبالتالي فإن إشارته توافق إشارة x^4 أي أنه سالب.

لاحظ: البسط سالب والمقام موجب فالكسر سالب أي:

$\acute{f}_1(x) < 0$ عندما $x < -1$

$$\acute{f}_2(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$\acute{f}_2(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$

$\acute{f}_2(x) = 0 \qquad x^2(x^2-3) = 0$

إما $x^2 = 0 \to \boxed{x = 0}$: $f_2(0) = 1$

أو $x^2 = 3 \to \begin{cases} \text{إما } \boxed{x = \sqrt{3}} : f_2(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \text{أو } x = -\sqrt{3} \notin D_{f_2} \end{cases}$

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\acute{f}_2(x)$	▮	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

2. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	▮	$-$	0	$-$	▮	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ▮ $+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$ ▮ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$	↗	$+\infty$

3. a) تحقق من ان المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = x + 1$, $y = -x - 1$ هما بالترتيب مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين.

$$f_1(x) - y_{\Delta_1} = -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} - (-x-1)$$

$$= \frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x) - y_{\Delta_1}\right) = 0$$

Δ_1 مقارب مائل للخط C عند $-\infty$

$$f_2(x) - y_{\Delta_2} = x + 1 + \frac{x}{x^2-1} - (x+1)$$

$$= \frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_2(x) - y_{\Delta_2}\right) = 0$$

Δ_2 مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: بالعودة لقاعدة الربط الأساسية نجد:

$$f(x) - y = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad : \quad \underbrace{(0,1)}_{\text{نقطة مشتركة}}$$

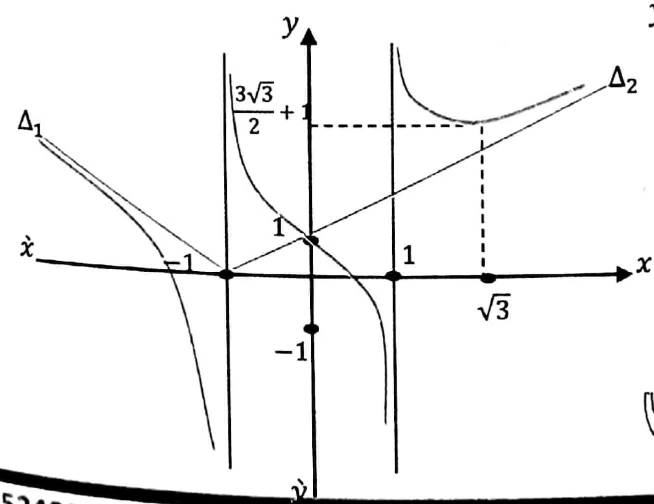
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	‖ $+$	0 $-$	‖	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ_1	C فوق Δ_2	C تحت Δ_2		C فوق Δ_2

b) اوجد معادلة للمماس T للخط البياني C في النقطة A منه علماً ان فاصلة A تساوي الصفر.

$A(0,1)$, $\acute{f}_2(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow m = \acute{f}_2(0) = 0$

معادلة المماس T هي: $y - 1 = 0(x - 0)$ أي $y = 1$

c) ارسم T للخط البياني C ثم ارسم C



4. اثبت ان للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α في المجال $]-1,1[$ واوجد مجالاً طوله 10^{-1} تنتمي إليه α

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-1,1[$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-1^+} f(x)\times\lim_{x\to1^-} f(x)<0$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

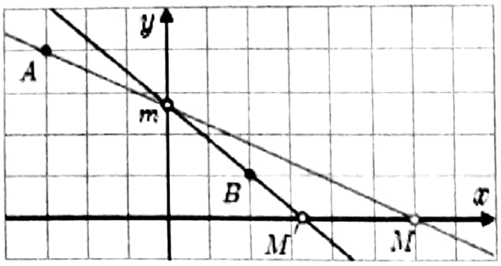
لدينا:

$$\left.\begin{array}{l}f(0.6)=0.66 \quad >0\\ f(0.8)=-0.42<0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0.6)\times f(0.8)<0$$

إذاً $\alpha\in\,]0.6,0.8[$ الذي طوله 10^{-1}

---

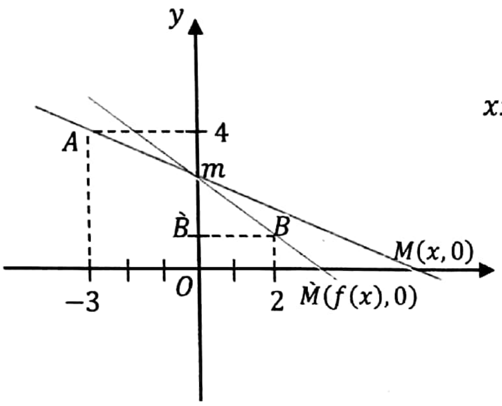
38) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$, $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$ نقرن بالنقطة M النقطة $\grave{M}$ التي نعرفها كما يلي:



- ♦ يقطع المستقيم AM المحور $(O,\vec{j})$ في m
- ♦ يقطع المستقيم BM المحور $(O,\vec{i})$ في $\grave{M}$

نرمز إلى فاصلة $\grave{M}$ بالرمز $f(x)$

1. بدون حساب خمن نهاية f عند $+\infty$



نلاحظ أنه عندما $x\to+\infty$ فإن المستقيم AM سيوازي تقريباً المحور $x\grave{x}$ فتتحرك النقطة m لتستقر في النقطة $(0,4)$

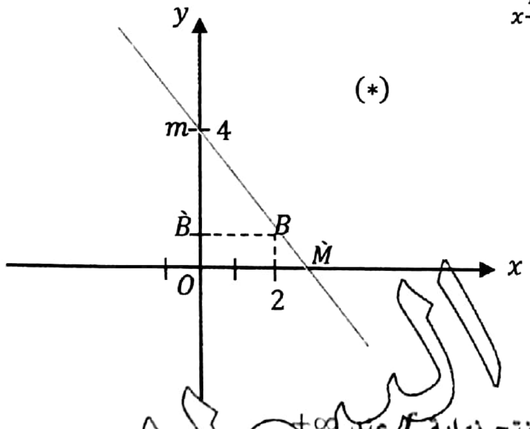
ومن المثلث القائم $Om\grave{M}$ في الشكل $(*)$ نستفيد من نسبة التشابه

$$\frac{O\grave{M}}{\grave{B}B}=\frac{Om}{\grave{B}m}\Rightarrow\frac{O\grave{M}}{\grave{B}B}=\frac{4}{3}$$

لكن $\grave{B}B=2$ ومنه :

$$\frac{O\grave{M}}{2}=\frac{4}{3}\Rightarrow O\grave{M}=\frac{8}{3}$$

وبما أن فاصلة $\grave{M}$ يمثلها $f(x)$ يمكننا أن نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{8}{3}$



2. اثبت ان $f(x)=\frac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$

لنفرض أن a ميل المستقيم (AM) فتكون معادلته: $y-4=a(x+3)$ ومنه $y=a(x+3)+4$

نقاطع المستقيم مع محور التراتيب بوضع $x=0$ فتنتج النقطة $m(0,3a+4)$

نقاطع المستقيم مع محور الفواصل بوضع $y=0$ فتنتج النقطة $M\left(-\left(3+\frac{4}{a}\right),0\right)$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

ميل المستقيم (Bm) حيث $B(2,1)$, $m(0,3a+4)$

$$\text{ميل}_{(Bm)} = \frac{3a+4-1}{0-2} = \frac{-3}{2}(a+1)$$

معادلة المستقيم (Bm)

$$y-1 = \frac{-3}{2}(a+1)(x-2)$$

يقطع المستقيم (Bm) محور الفواصل في النقطة $\grave{M}$

بوضع $y=0$ نجد ان فاصلة $\grave{M}$:

$$0-1 = \frac{-3}{2}(a+1)x + 3(a+1)$$

$$\frac{3}{2}(a+1)x = 3a+4 \implies x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3a+4}{a+1} \quad ; a \neq -1$$

$f(x)$

اي $\grave{M}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3a+4}{a+1}, 0\right)$

لدينا من فاصلة النقطة M :

$$x = -\left(3+\frac{4}{a}\right) \implies ax = -3a-4 \implies a(x+3) = -4 \implies a = \frac{-4}{x+3} \quad ; x \neq -3$$

نعوض قيمة a في فاصلة النقطة $\grave{M}$ التي تمثل $f(x)$

$$f(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3a+4}{a+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\left(\frac{-4}{x+3}\right)+4}{\frac{-4}{x+3}+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4x}{x-1} = \frac{8x}{3x-3} \quad ; x \neq -3, x \neq 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{8}{3}$$

3. a) ادرس نهاية f عند $-\infty$ ما التاويل الهندسي لهذه النتيجة؟

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{8}{3} \implies$ المستقيم $y = \frac{8}{3}$ مقارب أفقي يوازي المحور $x\grave{x}$

b) ادرس نهاية f عند $x=1$ ما التاويل الهندسي لهذه النتيجة؟

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \implies$ المستقيم $x=1$ مقارب شاقولي يوازي المحور $y\grave{y}$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \implies$ المستقيم $x=1$ مقارب شاقولي يوازي المحور $y\grave{y}$

4. عندما $x=-3$ يكون المستقيم AM موازياً $(O,\vec{J})$ وتكون m "في اللانهاية" يمكن ان نقول في هذه الحالة ان Bm يوازي $(O,\vec{J})$ وان $\grave{M}$ تقع في $(2,0)$ نعرف عندئذ التابع g وفق $g(x) = f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 ، $g(-3) = 2$ لماذا يكون g مستمراً عند -3

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq -3, x \neq 1 \\ 2 & : x = -3 \end{cases}$$

ونلاحظ ان $\lim_{x\to-3} g(x) = \lim_{x\to-3} f(x) = 2 = g(-3)$

وبالتالي يمكننا ان نكتب أن g مستمر عند $x=-3$

****