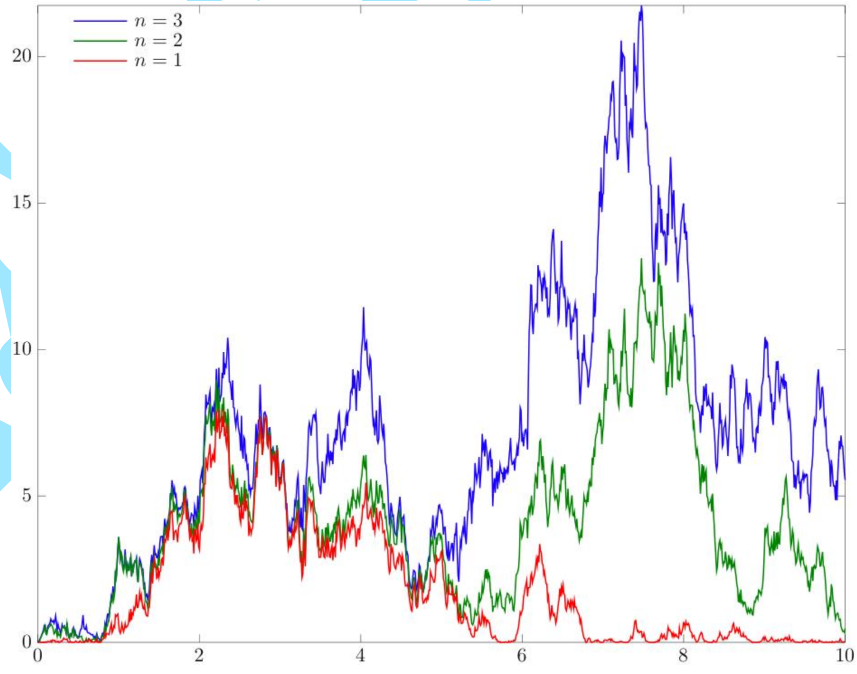
المحاضرة الخامسة

السنة الثالثة – إحصاء رياضي

طوريات عشوائية (1)



مدرس المقرر   د. هادية طهماز

سلاسل ماركوف *Markov Chains*

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشوائي ماركوفي مجموعة وسطاؤه T منقطعة (قابلة للعد على الأكثر) عندئذ يدعى هذا الطوري بسلسلة ماركوف.

نطابق في سلاسل ماركوف اللحظات الزمنية المتقطعة برقم دليلها أي نكتب: $t_n = n$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وبالتالي يمكن أن نكتب عوضاً عن X_{t_n} بـ X_n،

وبالتالي سلسلة ماركوف $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق العلاقة التالية:

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0)$$
$$= P(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

وذلك من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و كل $y, x, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0 \in \mathbb{R}$ ، عندئذ تدعى مجموعة قيم هذه السلسلة بفضاء الحالات للسلسلة وكل عنصر في هذا الفضاء يدعى حالة للسلسلة.

تعريف سلسلة ماركوف المتجانسة *Homogeneous Markov Chain*:

ليكن $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ سلسلة ماركوف بفضاء حالات منفصل عندئذ يقال عن هذه السلسلة إنها متجانسة إذا تحقق الشرط:

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x) = P(X_1 = y | X_0 = x)$$

هذا يعني أن احتمال الانتقال من الحالة x إلى الحالة y بخطوة واحدة لا يتغير بمرور الزمن (عدد الخطوات)، أي أن هذا الاحتمال مستقل عن n.

تعريف مصفوفة الانتقال بخطوة واحدة One-Step Transition Matrix

ليكن $\{\mathrm{X_n}\}_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ سلسلة ماركوف المتجانسة بفضاء حالة $E=\{0,1,2,\dots\}$، فإن احتمال الانتقال من الحالة x إلى الحالة y:

$$P_{xy}=P(X_{n+1}=y|X_n=x)\,;x\geq 0,y\geq 0$$

ومصفوفة الانتقال الاحتمالية لـ $\{\mathrm{X_n}\}_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ تعطى بالشكل:

$$P=(P_{xy})=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

وعناصر هذه المصفوفة تحقق الشروط الآتية:

$$P_{xy}\geq 0$$

$$\sum_{y=0}^{\infty}P_{xy}=1 \quad ;x=0,1,\dots$$

في حال كان الفضاء E منتهٍ أي $E=\{1,2,\dots,m\}$ فإن P من المرتبة $m\times m$ أي لها الشكل:

$$P = (P_{xy})_{m\times m} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

إن المصفوفة التي تحقق عناصرها الشرطين السابقين تدعى بمصفوفة عشوائية.

نقوم بتمثيل كل حالة اما بنقطة أو دائرة أو مربع ، ومن ثم نمثل الانتقال من الحالة x إلى الحالة y بســـهم ينطلق من x إلى y وهذا الانتقال باحتمال موجب تماماً قدره P_{xy} وفي حال $P_{xy} = 0$ لا ترتبط العناصر بسهم.

ومن أجل احتمالات البقاء إذا كانت موجبة فإنه يرســم ســهم مغلق منطلق من الحالة وعائداَ إليها على شكل قوس دائري

تعريف احتمالات الانتقال من المراتب العليا

Higher-Order Transition Probabilities

ليكن $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ سلسلة ماركوف المتجانسة بفضاء حالة $E = \{0,1,2,\dots\}$، ومصـــفوفة الانتقال $P = (P_{xy})_{m\times m}$، فإن احتمال الانتقال من الحالة x إلى الحالة y بـ n خطوة يعطى بالشكل:

$$P_{xy}^{(n)} = P(X_{n+m} = y | X_m = x) \; ; x \geq 0, y \geq 0$$

في حالة كانت سلسلة ماركوف متجانسة فإن مصفوفة الانتقال بخطوة واحدة هي ذاتها

مصفوفة الانتقال بعد n خطوة أي $P = P^{(n)}$.

توزيع البدء Initial Distribution:

بفرض $\pi_x^{(n)} = P(X_n = x)$ احتمال تواجد السلسلة عند اللحظة الزمنية n

في الحالة x، وعندما يكون $n = 0$ فإننا نحصل على $\pi_x^{(0)} = P(X_0 = x)$

وهو احتمال تواجد السلسلة في المبدأ أي لحظة البدء، ومجموعة القيم

$\pi^{(0)} = \left\{\pi_x^{(0)}; x \in E\right\}$ تدعى بالتوزيع البدء أو الابتدائي لسلسلة ماركوف

والتي تشكل متجهاً احتمالياً وذلك لأن $\sum_{x \in E} \pi_x^{(0)} = 1$ ويدعى هذا المتجه

بمتجه توزيع البدء لسلسلة ماركوف.

مثال:

لنفترض أنه لدينا ثلاثة أشخاص A,B,C يتداولون كرة فيما بينهم وفقاً لما يلي:

إذا وصلت الكرة لـــ A فإنه يرمي الكرة مباشرة إلى B باحتمال $\frac{1}{3}$ أو على C باحتمال

$\frac{2}{3}$، أما إذا وصلت الكرة إلى اللاعب B فإنه يرمي بها مباشرة إلى أي من A و C

بنفس الاحتمال، أما إذا وصلت الكرة إلى اللاعب C فإنه يرمي بها مباشرة إلى اللاعب B باحتمال $\frac{1}{4}$ وإلى اللاعب A باحتمال $\frac{3}{4}$ والمطلوب:

1- بين فيما إذا كانت سلسلة انتقالات الكرة تمثل سلسلة ماركوفية ام لا؟

2- إذا كانت هذه السلسلة ماركوفية فهل هي متجانسة؟

3- عين مصفوفة الانتقال لهذه المصفوفة عند الخطوة n.

4- إذا كان احتمال تواجد الكرة لحظة البدء عند A يســـاوي $\frac{1}{2}$ وعند B يساوي $\frac{1}{3}$ وعند C يساوي $\frac{1}{6}$ فما هو متجه توزيع البدء لهذه السلسة؟

5- أوجد العرض الماركوفي (أو التمثيل البياني) للسلسلة المثلة لهذه اللعبة.

الحل:

1- بملاحظة أن احتمالات الانتقال من حالة إلى حالة تتعلق بآخر تواجد للكرة في الحالة ولا علاقة لها بتواجدها في الماضـــي، فمثلاً احتمال انتقال الكرة من B إلى أي من A و C يساوي $\frac{1}{2}$ بغض النظر أين كانت الكرة في الماضـي، وبالمثل بالنســبة لبقية الحالات. ولذلك فإن هذه الســلســلة هي سلسلة ماركوف.

2- نلاحظ أن هذه السلسلة متجانسة لأن احتمالات الانتقال من حالة إلى حالة لا تتغير مع مرور الزمن.

3- لتعيين مصــفوفة الانتقال لهذه الســلســلة يجب تعيين احتمالات الانتقال نجد:

$p_{AB} = \frac{1}{3}$ و $p_{AC} = \frac{2}{3}$ و $p_{BA} = \frac{1}{2}$ و $p_{BC} = \frac{1}{2}$ و

$p_{CB} = \frac{3}{4}$ و $p_{CA} = \frac{1}{4}$ و $p_{AA} = 0$ و $p_{BB} = 0$ و

$p_{CC} = 0$.

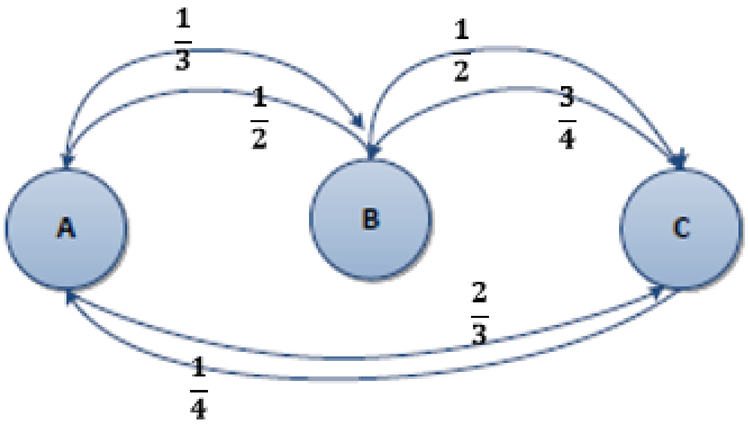
وبالتالي مصفوفة الانتقال لهذه السلسة هي:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

4- وفقاً للمعطيات فإن متجه توزيع البدء هو:

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

5- العرض الماركوفي للسلسلة المثلة لهذه اللعبة:



ملاحظات:

1- من تعريف سـلاسـل ماركوف المتجانسـة نلاحظ أن احتمالات الانتقال من حالة لحالة بخطوة واحدة غير متعلق بـ n لذلك سنعتبر $P_{xy}^{(n)} = P_{xy}$

2- على سبيل التبسيط في الدراسة والوضوح سنأخذ مستقبلاً مجموعة الحالات من $\mathbb{Z}$ لذلك سنكتب عوضاً عن x و y بـ i و j.

مبرهنة تشبمان–كولموغوروف:

ليكن $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ سلسلة ماركوف المتجانسة بفضاء حالة $E = \{0,1,2,\dots\}$،

عندئذ سيكون لدينا ما يلي محققاً:

$$(1) \quad P_{ij}^{(k+l)} = \sum_{s\in E} P_{is}^{(k)} \, . P_{sj}^{(l)}$$

$$(2) \qquad P_i^{(k+l)} = \sum_{s\in E} P_s^{(k)} \, . \, P_{si}^{(l)}$$

البرهان:

لدينا $\{\mathrm{X_n}\}_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ سلسلة ماركوف متجانسة عندئذ من أجل أي حالتين $i, j \in E$

ومن أجل أي عددين طبيعين $k, l \in \mathbb{N}$ يمكننا أن نكتب ما يلي:

$$P_{ij}^{(k+l)} = P(X_{k+l} = j | X_0 = i)$$

$$= P(X_{k+l} = j, X_k = s \, | X_0 = i)$$

$$= P\left(\bigcup_{s\in E} \{X_{k+l} = j, X_k = s\} \, | X_0 = i\right)$$

$$= \sum_{s\in E} P(X_{k+l} = j, X_k = s \, | X_0 = i)$$

$$= \sum_{s\in E} P(X_{k+l} = j \, | X_k = s, X_0 = i) \, . \, P(X_k = s | X_0 = i)$$

$$= \sum_{s\in E} P(X_{k+l} = j \, | X_k = s) \, . \, P(X_k = s | X_0 = i)$$

$$= \sum_{s \in E} P(X_l = j \,| X_0 = s) \,.\, P(X_k = s | X_0 = i)$$

$$= \sum_{s \in E} P_{is}^{(k)} \,.\, P_{sj}^{(l)}$$