البحث الاول: المتتاليات U_n

تعريفه: هي تابع مجموعة تعريفه الأعداد الطبيعية:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

نرمز للمتتالية U_n و $n \geq n_0$

تدعى $[U_n]$ حد
دليل الحد

نعبر عن المتتالية بثلاث طرق:

① - إعطاء الحد العام
مثال
$U_n = \frac{n+2}{n+3}$

② - بعلاقة تدريجية
مثال
$U_0 = 3$
$U_{n+1} = 2U_n + 4$

③ - على شكل سلسلة
مثال
$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots \frac{1}{n^3}$

لدراسة اطراد المتتالية: يوجد لدينا ثلاث طرق

① - الطريقة الأولى: (العامة): نشكل فرق $U_{n+1} - U_n$ وينتج لدينا

- المتتالية متزايدة تماماً $U_{n+1} - U_n > 0$
- المتتالية متزايدة $U_{n+1} - U_n \geq 0$
- المتتالية متناقصة تماماً $U_{n+1} - U_n < 0$
- المتتالية متناقصة $U_{n+1} - U_n \leq 0$
- المتتالية ثابتة $U_{n+1} - U_n = 0$

تستعمل في جميع الحالات

② - الطريقة الثانية : بشرط ان تكون حدودها موجبة فقط

- المتتالية متزايدة $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

- المتتالية متناقصة $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

- المتتالية ثابتة $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$

نستعمل هذه الطريقة عند وجود $(عدد)^n$ أو ! عاملي

③ - الطريقة الثالثة : أن نفرض $U_n = f(x)$ ثم نشتق المتتالية و نلاحظ

- المتتالية متزايدة $f'(x) > 0$
- المتتالية متناقصة $f'(x) < 0$
- المتتالية ثابتة $f'(x) = 0$

تستعمل عندما يكون الحد العام للمتتالية U_n على شكل تابع

ادرس اطراد كل من المتتالية :

① - $U_n = 3n + 2$

نفرض $U_n = f(x)$

$f(x) = 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3 > 0$

و المتتالية متزايدة

② - $U_n = (-1)^n$

ندرس سلوك المتتالية :

$n = 0 \Rightarrow U_0 = (-1)^0 = 1$

$n = 1 \Rightarrow U_1 = (-1)^1 = -1$

$n = 2 \Rightarrow U_2 = (-1)^2 = 1$

حدود المتتالية متناوبة فهي ليست مطردة

③ - $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ندرس سلوك المتتالية لنتأكد ان حدودها موجبة

$n = 0 \Rightarrow U_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

$n = 1 \Rightarrow U_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 2/3$

$n = 2 \Rightarrow U_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 4/9$

حدودها موجبة

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{2}{3} < 1$$

انتبه نقارنها مع الواحد

فالمتتالية متناقصة

المتتالية الحسابية

كل حد ينتج عن سابقه بإضافة r ويدعو r أساسها

لإثبات أن المتتالية حسابية نستخدم:

$$U_{n+1} - U_n = r$$

1- إذا كان الفرق يحوي n فإن المتتالية ليست حسابية

2- إذا كان الفرق لا يحوي n فإن المتتالية حسابية

في المتتالية الحسابية:

1- إذا كان a , b , c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن $b = \frac{a+c}{2}$

2- من أجل العددان m , n فإن:

$$U_n = U_m + (n-m)\, r$$

يستخدم لإيجاد الحد العام U_n أو حد من الحدود

3- مجموع n حد متعاقب من متتالية حسابية (إيجاد مجموع في المتتالية الحسابية) يعطى بالعلاقة

$$S = \frac{n\,(a+b)}{2}$$

a: أول حد

b: آخر حد

n: عدد الحدود

$$n = \underset{\text{الحد الأخير}}{\text{دليل}} - \underset{\text{الحد الأول}}{\text{دليل}} + 1$$

عدد حدود المتتالية المراد حساب جمع حدودها

المتتالية الهندسية

كل حد ينتج عن سابقه بضربه بـ q ويدعو q أساس المتتالية

لإثبات أن المتتالية هندسية نستخدم:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

1- إذا كانت خالية من n فإن المتتالية هندسية

في المتتالية الهندسية:

1- إذا كان a , b , c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية $b^2 = a \cdot c$

2- من أجل العددان m , n فإن

$$U_n = U_m \cdot q^{n-m}$$

يستخدم لإيجاد الحد العام U_n أو حد من الحدود

3- مجموع n حد متعاقب من متتالية هندسية (إيجاد مجموع في المتتالية الهندسية)

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

a: أول حد

q: أساس متتالية هندسية

n: عدد الحدود

$$n = \underset{\text{الحد الأخير}}{\text{دليل}} - \underset{\text{الحد الأول}}{\text{دليل}} + 1$$

تدريب ① 18: لتكن المتتالية $U_n = \frac{(2)^n}{(3)^{n+1}}$ أثبت أن المتتالية هندسية وعين أساسها .

الحل: يجب أن نبرهن أن $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

$$\boxed{U_{n+1} = \frac{(2)^{n+1}}{(3)^{n+2}}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{2^n \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^1 \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{3^{n+1}}}{\cancel{2^n} \cdot 3 \cdot \cancel{3^{n+1}}}$$

$$= \frac{2}{3} = q$$

إذا المتتالية هندسية وأساسها $q = \frac{2}{3}$

تدريب ②/18: الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية أو هندسية :

① - $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فيها $U_2 = 41$ ، $U_5 = -13$ احسب U_{20} .

الحل: نبحث أولاً عن r من أجل العددان n ، m فإن

$$U_n = U_m + (n-m)r \Rightarrow U_5 = U_2 + (5-2)r$$

$$-13 = 41 + 3r \Rightarrow -54 = 3r \Rightarrow \boxed{r = -18}$$

$$U_{20} = U_5 + (20-5)(-18)$$

$$U_{20} = -13 + (15)(-18) \Rightarrow U_{20} = -283$$

② - $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فيها $U_7 = \frac{1}{1080}$ ، $U_{10} = \frac{25}{2197}$ احسب U_{30}

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m} \Leftarrow U_n = U_m \cdot q^{n-m}$$

$$\frac{U_{10}}{U_7} = q^{10-7} \Rightarrow \frac{25}{2197} \cdot \frac{1080}{1} = q^3 \Rightarrow q = \frac{30}{13}$$

$$\frac{U_{30}}{U_{10}} = q^{30-10} \Rightarrow U_{30} = \frac{25}{2197} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{20}$$

③- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $U_1=-2$ ① احسب U_n بدلالة n
② واستنتج قيمة المجموعين $U_{30}+U_{31}+U_{32}$ و $U_1+U_2+\cdots+U_{20}$

الحل: من اجل العددان m و n فإن

$$U_n=U_m+(n-m)r \Rightarrow U_n=U_1+(n-1)3$$

$$U_n=-2+3n-3 \Rightarrow U_n=3n-5$$

-② $U_1+U_2+\cdots+U_{20}$, $U_{30}+U_{31}+U_{32}$

$$S=\frac{n(a+b)}{2}$$

$n=20-1+1=20$, $a=U_1=-2$, $b=U_{20}$, $U_{20}=3\times 20-5=55$

$$S=\frac{20(-2+55)}{2}=10(53)$$

$$=350$$

$$S=\frac{n(a+b)}{2}$$

$n=32-30+1$, $n=3$, $a=U_{30}$, $U_{30}=90-5=85$, $b=U_{32}$, $U_{32}=96-5=91$

$$S=\frac{3}{2}[85+91]$$

$$S=264$$

④- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $U_1=-2$ ① احسب U_n بدلالة n
② واستنتج قيمة المجموعين $U_1+U_2+\cdots U_7$ و $U_2+U_4+\cdots+U_{2n}$

الحل: من اجل العددان m و n:

$$U_n=U_m\cdot q^{n-m} \Rightarrow U_n=U_1\cdot 3^{n-1}$$

$$U_n=-\frac{2}{3}\cdot(3)^n$$

$U_1+U_2+\cdots+U_7$

$$S_n=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

$a=U_1=-2$, $n=7-1+1=7$, $3=q$

$$S=(-2)\frac{1-(3)^7}{1-3}$$

$$S=(-2)\frac{1-2187}{(-2)}$$

$$S=-2186$$

$U_2+U_4+\cdots+U_{2n}$

$q=(3)(3)=9$ متتالية هندسية أساسها

$a=U_2=(-2)(3)=-6$ وفيها

$$S_n=a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n=-6\cdot\frac{1-(9)^n}{-8}$$

$$S_n\ \frac{3}{4}\left[1-(9)^n\right]$$

5- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها -2 وفيها $U_0=-3$ احسب $U_{25}+U_{26}+\dots+U_{125}$

الحل: من اجل العددان m و n فإن:

$U_n=U_m+(n-m)r \Rightarrow U_n=U_0+(-2n)=-3-2n$

$S=\frac{n(a+b)}{2}$ $n=125-25+1=101$

$U_{125}=-3-250=-253$

$S_n=\frac{101}{2}(-53-253)=\frac{101}{2}(-306)=101(-153)$
$=-15453$

6- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $U_0=1$ احسب $U_3+U_4+\dots+U_{10}$

الحل: نوجد الحد العام: من اجل العددان m و n فإن:

~~$U_n=U_m+(n-m)r \Rightarrow U_n=U_0$~~

$U_n=U_m\cdot q^{n-m} \Rightarrow U_n=U_0\cdot q^{n-0} \Rightarrow U_n=(2)^n$

$a=U_3=2^3=8$ $S=a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ $q=2$

$n=10-3+1=8$

$S=8\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right)=-8[1-2^8]=2040$

7- احسب المجموع $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\dots+10$ نكتشف التمرين $\frac{1}{2}[1+2+3+\dots+20]$

الحل: المتتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $U_0=1$ $n=20$

$S=\frac{n(a+b)}{2}=10[1+20]=210 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 210=105$

8- a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية، عينها إذا علمت ~~a.b.c~~ $a.b.c=343$
و $a+b+c=36,75$

$b^2=a.c \Rightarrow a.c.b=343 \Rightarrow b^2.b=343 \Rightarrow b^3=343 \Rightarrow b=7$

$a.7.c=343 \Rightarrow a.c=49$

$a+b+c=36,75 \Rightarrow a+7+c=36,75 \Rightarrow a+b=29,75$

إما $a=28$ $c=1,75$
أو $a=1,75$ $c=28$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تدريب ④/18: ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

① $U_n = \frac{3}{n^2}$

الطريقة الأولى:

بما أن حدود المتتالية U_n موجبة تماماً

نستخدم $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$= \frac{\cancel{3}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\cancel{3}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$

فالمتتالية متناقصة تماماً

الطريقة الثانية:

$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2}$

$= \frac{\cancel{3n^2} - \cancel{3n^2} - 6n - 3}{n^2(n+1)^2} < 0$

إذن فالمتتالية متناقصة تماماً

② $U_n = \sqrt{3n+1}$

$U_{n+1} = \sqrt{3n+4}$

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$ نضرب بالمرافق

$= \frac{(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$

$= \frac{\cancel{3n} + 4 - \cancel{3n} - 1}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}} = \frac{3}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}} > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

③ $U_n = \frac{2n-1}{n+4}$ $\qquad U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1+4} = \frac{2n+1}{n+5}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+1}{n+5}_{(n+4)} - \frac{2n-1}{n+4}_{(n+5)} = \frac{(2n^2+n+8n+4) - (2n^2-n+10n-5)}{(n+4)(n+5)}$

$= \frac{2n^2+9n+4-2n^2-9n+5}{(n+4)(n+5)} = \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0$

متزايدة تماماً

④- $U_n = \frac{1}{n^2+1}$ $\quad U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{1} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} < 1$

متناقصة تماماً "لأن المقام أكبر من البسط"

⑤- $U_n = \frac{3n+1}{n-2}$

$U_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{n+1-2} = \frac{3n+4}{n-1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{3n+4}{n-1}_{(n-2)} - \frac{3n+1}{n-2}_{(n-1)}$

$= \frac{(3n^2+4n-6n-8)-(3n^2+n-3n-1)}{(n-1)(n-2)}$

$= \frac{\cancel{3n^2}-2n-8-\cancel{3n^2}+\cancel{2n}+1}{(n-1)(n-2)} = \frac{-7}{(n-1)(n-2)} < 0$ متناقصة تماماً

⑥- $U_n = \frac{n}{(10)^n}$ $\quad U_{n+1} = \frac{n+1}{(10)^{n+1}}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{(10)^{n+1}} - \frac{n}{(10)^n}_{(10)} \Rightarrow \frac{n+1-10n}{(10)^{n+1}} = \frac{-9n+1}{(10)^{n+1}} < 0$

متناقصة تماماً

⑨- $U_0 = 1 ; U_{n+1} = 2 \cdot U_n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 > 1$

متزايدة تماماً

⑧- $U_0 = 1 ; U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$

متناقصة تماماً

⑦- $U_0 = 2 , U_{n+1} = U_n - 3$

$U_{n+1} - U_n = -3 < 0$

متناقصة تماماً

الاستقراء الرياضي (البرهان بالتدرج): يستخدم لبرهان علاقات تحوي n خطواته:

① نرمز للقضية $E(n)$

② نبرهن صحة القضية من اجل $n = n_0$ أي $E(n_0)$

③ نفرض صحة القضية من اجل $E(n)$ (فرضية البرهان)

④ نبرهن صحة القضية من اجل $E(n+1)$

تدريب ص 20: مهما كان العدد الطبيعي $n \geq 1$ فإن:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

برهن صحة القضية؟

الحل: ① نرمز للقضية $E(n)$

② نبرهن صحة القضية من اجل $n=1$ أي $E(1)$

$$l_1 = 1^3 = 1$$

$$l_2 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

والقضية صحيحة من اجل $n=1$

③ نفرض صحة القضية من اجل $E(n)$

④ نبرهن صحة القضية من اجل $E(n+1)$

$$S_{n+1} = \underbrace{\overbrace{1^3 + 2^3 + \cdots n^3}^{l_1}}_{S_n} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad l_2$$

نبرهن من l_1 الى الوصول الى l_2

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 \Rightarrow S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}_{(1)} + (n+1)^3_{(4)}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \xrightarrow{\text{نخرج } (n+1)^2 \text{ عامل مشترك}} \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2[\overbrace{n^2+4n+4}^{\text{مربع كامل}}]}{4} \Rightarrow \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

التاريخ :

الوحدة :

$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 - - - + n^2$

تدريب 21/① : نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار

① احسب S_1, S_2, S_3, S_4 ثم عبّر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

② أثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل ① :

$S_1 = 1^2 = 1$ ، $S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ ، $S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

$$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + - - - + n^2}_{S_n} + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

② 1- نرمز للقضية $E(n)$

2- نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$

$l_1 = S_1 = 1$

$l_2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \qquad l_1 = l_2$

3- نفرض صحة القضية من أجل n

4- نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$:

$\boxed{2n^2 + 7n + 6} = 2n^2 + 3n + 4n + 6$

$l_1 = S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad l_2 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

$$l_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6_{(1)}} + (n+1)^2_{(6)} \Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7 + 6)}{6}$$

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ، القضية صحيحة من أجل $n+1$

الأستاذ : أحمد تكروري

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تدريب ③ /18/ : $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $V_0=1$ و $V_{n+1}=\frac{V_n}{1+V_n}$

① أثبت أن $V_n > 0$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n=\frac{1}{V_n}$ متتالية حسابية.

③ استنتج عبارة V_n بدلالة n

الحل: ① من أجل $n=0$ $\Leftarrow$ $V_0=1>0$ محققة

بفرض العلاقة صحيحة من أجل n ، أي أن :

$V_n > 0$ ---- *

نبرهن صحة العلاقة من $n+1$

$V_{n+1} > 0$

من العلاقة * : $V_n > 0$

نضيف 1 : $1+V_n > 1$ $\Leftarrow$ $0 < \frac{1}{1+V_n} < 1$

نضرب بـ (-1) : $-1 < \frac{-1}{1+V_n} < 0$ $\Leftarrow$ نضيف (1) $1 > 1-\frac{1}{1+V_n} > 0$

$\Leftarrow 0 < \frac{1+V_n-1}{1+V_n} < 1 \Leftarrow 0 < \frac{V_n}{1+V_n} \Leftarrow 0 < V_{n+1}$

والعلاقة صحيحة من أجل $n+1$

② $U_{n+1}=\frac{1}{V_{n+1}}=\frac{1+V_n}{V_n}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{1+V_n}{V_n}-\frac{1}{V_n}=\frac{V_n}{V_n}=1$ $\Rightarrow U_0=\frac{1}{1}=1$

المتتالية حسابية $r=1$

③ $U_n=U_0+nr$ $\Leftarrow$ $U_n=n+1$

$V_n=\frac{1}{U_n}=\frac{1}{n+1}$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

التاريخ :

الوحدة : تمارين ومسائل الوحدة الأولى

المسألة 1/22 : ادرس اطراد المتتاليات الآتية :

① - $U_n = -3n+1$

$U_{n+1} = -3(n+1)+1 \Rightarrow U_{n+1} = -3n-2$

$U_{n+1} - U_n = (-3n-2) - (-3n+1) = -3n-2+3n-1 = -3 < 0$

متناقصة تماماً فهي مطردة

② - $U_n = \frac{n+1}{n+2}$

نفرض $U_n = f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$

متزايدة تماماً فهي مطردة

③ - $U_n = 2^n$

$U_{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(2)^{n+1}}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2^1}{\cancel{2^n}} = 2 > 1$

متزايدة تماماً فهي مطردة

④ - $U_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

ندرس بسلوك المتتالية :

$n=1 \Rightarrow U_1 = \left(\frac{1}{-1}\right)^1 = -1$, $n=2 \Rightarrow U_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$n=3 \Rightarrow U_3 = \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-1}{27}$

المتتالية متناوبة الإشارة فهي غير مطردة

⑤ - $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

نفرض $U_n = f(x)$ ثم نشتق $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} < 0 \Rightarrow$ المتتالية متناقصة تماماً فهي مطردة

⑥ - $U_n = \frac{n^2}{n!}$ $U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$

بما أن جميع الحدود موجبة نستخدم :

$\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$\frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$

المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من $n=2$ فهي مطردة

نعلم أن :
$0! = 1$
$2! = 2.1$
$n! = n(n-1)!$
$(n+1)! = (n+1)n!$

⑦ - $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + - - - + \frac{1}{2^n}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + - - - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} - U_n = \cancel{U_n} + \frac{1}{2^{n+1}} - \cancel{U_n} = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

متزايدة تماماً فهي مطردة

⑨ - $U_0 = 2 \ ; \ U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$n=0 \Rightarrow U_1 = \frac{3}{4} U_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$

$n=1 \Rightarrow U_2 = \frac{3}{4} U_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{37}{8}$

نلاحظ أن المتتالية متزايدة تماماً من أجل $n=0,1$

لنثبت أن المتتالية متزايدة أي لنثبت أن :

$U_{n+1} - U_n > 0$

من أجل $n=0$: $U_1 - U_0 > 0 \Rightarrow \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} > 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$U_{n+1} - U_n > 0$ ✳

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$: $U_{n+2} - U_{n+1} > 0$

$U_{n+2} = \frac{3}{2} U_{n+1} + 2$

$U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{3}{4} U_{n+1} + \cancel{2} - \frac{3}{2} U_n - \cancel{2}$

$\frac{3}{4}(U_{n+1} - U_n) > 0$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$ وتكون متزايدة تماماً فهي مطردة

⑧ - $U_0 = 8 \ ; \ U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$n=0 \Rightarrow U_1 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$n=1 \Rightarrow U_2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

لنثبت أن المتتالية ثابتة الحدود وفق الحد 8

عند $n=0,1$ لنثبت من أجل $n=0$

$U_0 = 8$ محقق

✳ نفرض صحة القضية من أجل n : $U_n = 8$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ لنثبت أن :

$U_{n+1} = 8$

$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$U_{n+1} = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

تكون المتتالية ثابتة حدودها 8

فهي مطردة

المسألة ②/22 : المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $U_0=2$ و $U_{n+1}=2U_n-3$

①- احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4 ، U_5

تخمين ②- استنتج عبارة U_n بدلالة n (انظر من حساب المقدار U_n-3)

①- $n=0 \Rightarrow U_1 = 2U_0 - 3 \Rightarrow U_1 = 2(2) - 3 = 1$

$n=1 \Rightarrow U_2 = 2U_1 - 3 \Rightarrow U_2 = 2(1) - 3 = -1$

$n=2 \Rightarrow U_3 = 2U_2 - 3 \Rightarrow U_3 = 2(-1) - 3 = -5$

$n=3 \Rightarrow U_4 = 2U_3 - 3 \Rightarrow U_4 = 2(-5) - 3 = -13$

$n=4 \Rightarrow U_5 = 2U_4 - 3 \Rightarrow U_5 = 2(-13) - 3 = -29$

②- ط$_1$:

$U_1 - 3 = -2 \Rightarrow U_1 = -(2)^1 + 3$

$U_2 - 3 = -4 \Rightarrow U_2 = -(2)^2 + 3$

$U_3 - 3 = -8 \Rightarrow U_3 = -(2)^3 + 3$

$U_4 - 3 = -16 \Rightarrow U_4 = -(2)^4 + 3$

وهكذا ... فإن $U_n = -(2)^n + 3$

ط$_2$: إذا كانت $U_{n+1} = aU_n + b$

$U_n = c(a)^n + d$

حيث $c,d \in \mathbb{R}$ يجب حسابه نلاحظ من نص السؤال $b=-3$ و $a=2$

$U_0 = c(2)^0 + d \Rightarrow 2 = c + d$

$U_1 = c(2)^1 + d \Rightarrow 1 = 2c + d$

بالطرح $-1 = c$

نعوض في الأولى $2 = -1 + d \Rightarrow d = 3$

وبالتالي $U_n = -(2)^n + 3$

الأستاذ : أحمد تكروري

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة 22/3 : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل :

$U_0 = 3$; $U_{n+1} = -U_n + 4$

عين $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$

ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

الحل :

$n=0 \Rightarrow U_1 = -3+4 = 1$

$n=1 \Rightarrow U_2 = -1+4 = 3$

$n=2 \Rightarrow U_3 = -3+4 = 1$

$n=3 \Rightarrow U_4 = -1+4 = 3$

$n=4 \Rightarrow U_5 = -3+4 = 1$

إذاً : $U_n = (-1)^n + 2$

المسألة 22/4 : أثبت بالتدريج صحة العلاقتين الآتيتين :

① - $1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n! = (n+1)!-1$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$l_1 = 1$

$l_2 = (1+1)!-1 = 2!-1 = 2-1 = 1$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$\underbrace{1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n!}_{*} = (n+1)!-1$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$\underbrace{1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n!}_{*}+(n+1)\times(n+1)! = (n+2)!-1$

$\underbrace{(n+1)!-1+(n+1)\times(n+1)!}_{l_1} = \underbrace{(n+2)!-1}_{l_2}$

نعمل بـ l_1 حتى نصل إلى l_2

نخرج من l_1 $(n+1)!$ عامل مشترك

$(n+1)![+1+n+1] - 1$

$\underbrace{(n+1)!(n+2)}_{} - 1$

$(n+2)! - 1 = l_2$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

② - $n! \geq 2^{n-1}$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=1$

$l_1 = 1! = 1$, $l_2 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$

والقضية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض صحة القضية من أجل n

$n! \geq 2^{n-1}$ *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$(n+1)! \geq 2^n$

من * نجد ونضرب الطرفين بـ $(n+1)$

$(n+1)\,n! \geq 2^{n-1}(n+1)$ من أجل 2^n عوض $n=1$

$(n+1)! \geq 2^n$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

مثلاً : $5\times 4! = 5!$

المسألة ⑤/22: في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$$U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

و $V_n = U_{2n}-U_n$ أثبت أن المتتالية V_n متزايدة تماماً

الحل:

$$U_{2n} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}_{U_n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

$$U_{2n} = U_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

$$U_{2n}-U_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

$$V_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$V_{n+1}-V_n = \frac{1}{2n+1}+\underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{(1)}-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{(2)}$$

$$= \frac{1}{2n+1}+\frac{1-2}{2n+2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{2(n+1)}-\underbrace{\frac{1}{2(n+1)}}_{2n+1}$$

$$= \frac{2n+2-2n-1}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

المسألة ⑥/22: a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية

a ، $2b$ ، $3a$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية

عيّن q أساس المتتالية الهندسية حيث $a \neq 0$

حسب تعريف المتتالية الهندسية $b = a \cdot q$

$$c = b \cdot q = (a \cdot q)\cdot q = a \cdot q^2$$

وحسب تعريف المتتالية الحسابية

$$2b = \frac{c+3a}{2}$$

$$2a \cdot q = \frac{a \cdot q^2+3a}{2}$$

$$2q = \frac{q^2+3}{2}$$

$$q^2+3 = 4q$$

$$\Rightarrow q^2-4q+3 = 0$$

$$(q-1)\cdot(q-3) = 0$$

$$q = 1$$

$$q = 3$$

حاربوا للوصول إلى أحلامكم

فالعالم يحتاج الكثير من الشغوفين

الأستاذ : أحمد تكروري

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة ⑦ / 23 : لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق
$U_0 = 7$; $U_{n+1} = 10U_n - 18$
عبر عن U_n بدلالة n ثم تحقق من صحة هذه
العبارة مهما كانت $n \in \mathbb{N}$

الحل:

$n = 0 \Rightarrow U_1 = 10U_0 - 18$

$U_1 = 10(7) - 18 = 52$

$U_1 = 50 + 2 = 5(10) + 2$

$U_2 = 10(52) - 18 = 500 + 2$

$U_2 = 5(10)^2 + 2$

$U_n = 5(10)^n + 2$

لنثبت صحة العلاقة بالاستقراء الرياضي

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 0$

$U_0 = 5(10)^0 + 2 = 7$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$U_n = 5(10)^n + 2$ --- *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$

نضرب طرفي * بـ 10

$10U_n = 5(10)^n(10)^1 + 20$

$10U_n = 5(10)^{n+1} + 20$

نطرح 18 من الطرفين

$10U_n - 18 = 5(10)^{n+1} + 2$

$U_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

المسألة ⑩ / 24 : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل:
معرفة $U_0 = 1$ $U_1 = 4$
$U_{n+1} = 5U_n - 6U_{n-1}$ $(n \geq 1)$

① عين عددين حقيقيين a, b تحققان
$a \cdot b = 6$ $a + b = 5$
إما $a = 2$, $b = 3$
أو $a = 3$, $b = 2$

② لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل
$V_n = U_{n+1} - aU_n$ أثبت أن المتتالية
V_n متتالية هندسية أساسها b

الحالة الأولى $a = 2$, $b = 3$

$V_n = U_{n+1} - 2U_n$

$V_{n+1} = U_{n+2} - 2U_{n+1}$

$V_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - 2U_{n+1}$

$V_{n+1} = 3U_{n+1} - 6U_n$

$= 3(U_{n+1} - 2U_n)$

$V_{n+1} = 3V_n$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 3$

فالمتتالية هندسية وأساسها

$b = 3$

الأستاذ : أحمد تكروري

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

3- لتكن (W_n) المتتالية المعرفة

$W_n = U_{n+1} - bU_n$

أثبت أن المتتالية W_n هندسية أساسها a

الحل:

$W_n = U_{n+1} - bU_n \; ; \; b = 3$

$W_n = U_{n+1} - 3U_n$

$W_{n+1} = U_{n+2} - 3U_{n+1}$

$W_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - 3U_{n+1}$

$W_{n+1} = 2U_{n+1} - 6U_n$

$= 2(U_{n+1} - 3U_n)$

$\Rightarrow W_{n+1} = 2W_n$

$\frac{W_{n+1}}{W_n} = 2$

فالمتتالية (W_n) هندسية أساسها $a = 2$

4- عبر عن V_n و W_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

$V_n = U_{n+1} - 2U_n$

$V_0 = U_1 - 2U_0$

$V_0 = 4 - 2(1) = 2$

$V_n = V_0 \cdot q^n \; ; \; q = b = 3$

$V_n = (2)(3)^n$

$W_n = U_{n+1} - 3U_n$

$W_0 = 4 - 3(1) = 1$

$W_n = W_0 \cdot q^n \; ; \; q = a = 2$

$W_n = (2)^n$

$V_n = U_{n+1} - 2U_n \Rightarrow (2)(3)^n = U_{n+1} - 2U_n \quad (1)$

$W_n = U_{n+1} - 3U_n \Rightarrow (2)^n = U_{n+1} - 3U_n \quad (2)$

بالطرح

$(2)(3)^n - (2)^n = U_n$

$U_n = (2)(3)^n - (2)^n$

كن راضياً عن نفسك متجاهلاً
كل من يحاول إحباطك

المسألة 11 (1): أثبت أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ أن:

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

25

① نبرهن صحة القضية من أجل $n=2$

$12 \geq 9$ محققة

والقضية صحيحة من أجل $n=2$

② نفرض صحة القضية من أجل n

$$3n^2 \geq (n+1)^2 \quad *$$

③ نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

$$3n^2+6n+3 \geq n^2+4n+4$$

نضيف للعلاقة * $6n+3$

$$3n^2+6n+3 \geq (n+1)^2+6n+3$$

$$3(n^2+2n+1) \geq n^2+2n+1+6n+3$$

$$3(n+1)^2 \geq \underbrace{n^2+4n+4}+4n$$

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2+4n \quad ; 4n>0$$

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

والعلاقة صحيحة أياً كان $n \geq 2$

(2) لتكن العلاقة:

$$E(n): 3^n \geq 2^n+5n^2$$

(a) ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

$n=1 \Rightarrow 3 \geq 2+5 \Rightarrow 3 \geq 7$

خاطئة

$n=2 \Rightarrow (3)^2 \geq (2)^2+5(2)^2$

$\Rightarrow 9 \geq 24$

خاطئة

$n=3 \Rightarrow (3)^3 \geq (2)^3+5(3)^2$

$\Rightarrow 27 \geq 53$ خاطئة

$n=4 \Rightarrow (3)^4 \geq (2)^4+5(4)^2$

$81 \geq 91$ خاطئة

$n=5 \Rightarrow 243 \geq 157$

صحيحة

(b) أثبت أن $E(n)$ صحيحة أياً يكن العدد الطبيعي $n \geq 5$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=5$

$243 \geq 157$ والقضية صحيحة من أجل $n=5$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$3^n \geq 2^n+5n^2 \quad *$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$$

نضرب طرفي العلاقة * بـ $3>0$

$$3\cdot(3)^n \geq 3[(2)^n+5n^2]$$

$$(3)^{n+1} \geq 3(2)^n+3(5n^2)$$

$$(3)^{n+1} \geq 1(2)^n+(2)(2)^n+5(3n^2)$$

$$(3)^{n+1} \geq (2)^n+(2)^{n+1}+5(3n^2)$$

وبما أن $3n^2 \geq (n+1)^2$ نعوض:

$$(3)^{n+1} \geq (2)^n+(2)^{n+1}+5(n+1)^2$$

$$(3)^{n+1} \geq (2)^{n+1}+5(n+1)^2 \quad ; 2^n>0$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة (14) 25/

أ- نبرهن للقضية << يقسم العدد 9 العدد 10^n+1 >>

بالرمز $E(n)$ في حالة $n \in N$

1- أثبت أنه إذا كانت القضية $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كانت عندئذ $E(n+1)$ صحيحة

الحل: القضية $E(n)$: يقسم العدد 9 العدد 10^n+1

نفرض أنها صحيحة من أجل $n+1$:

يقسم العدد 9 العدد $E(n+1): 10^{n+1}+1$

$(10)^{n+1}+1=(10)(10)^n+1$

$10(10^n+1-1)+1$

$10(10^n+1)-10+1$

$\underbrace{10(10^n+1)}_{\text{يقسم من الفرض صحيحة}}-\underbrace{9}_{\text{يقسم صحيحة}}$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

2- أتكون $E(n)$ صحيحة في N؟ علل إجابتك

نلاحظ

$E(0)=(10)^0+1=2$

$E(1)=(10)^1+1=11$

$E(2)=(10)^2+1=101$

$E(3)=(10)^3+1=1001$

كل منها غير صحيحة فالعدد 9 لا يقسم

أياً من الأعداد 1001 و 101 و 11 و 2 فالقضية

$E(n)$ غير صحيحة في N كما أن $E(n)$

كليا خاطئة لأن مجموع خانات العدد

$10^{n+1}=1\overbrace{00\ldots0}^{n-1}1$

يساوي 2 وهو ليس من مضاعفات العدد 9

المسألة (15) 25/

أ- لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$U_0=1$ ، $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$; $n\geq 1$

1) أثبت أن $0\leq U_n\leq 2$ أياً يكن العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية U_n متزايدة تماماً

1- نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$:

والقضية صحيحة $0\leq 1\leq 2$

نفرض صحة القضية من أجل n

$0\leq U_n\leq 2$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$0\leq U_{n+1}\leq 2$

$0\leq U_n\leq 2$

$\Rightarrow 2\leq 2+U_n\leq 4$

$\sqrt{2}\leq\sqrt{2+U_n}\leq 2$; $0\leq U_{n+1}\leq 2$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

2- لكي تكون $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً يجب أن يكون

$U_{n+1}>U_n$

الحل $E(n): U_{n+1}>U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$; $U_1=\sqrt{3}$

$U_1>U_0$ ، $\sqrt{3}>1$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n : $U_{n+1}>U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$: $U_{n+2}>U_{n+1}$

$U_{n+1}>U_n$

$2+U_{n+1}>2+U_n\Rightarrow$

$\sqrt{2+U_{n+1}}>\sqrt{2+U_n}\Rightarrow U_{n+2}>U_{n+1}$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

و U_n متزايدة تماماً

الوحدة : التاريخ :

المسألة (12) : 25/ نرمز بالرمز $E(n)$ الى القضية

$3^n \geq (n+2)^2$

(1) هل $E(0)$ و $E(1)$ و $E(2)$ و $E(3)$ و $E(4)$ صحيحة

(2) أثبت بالتدريج صحة العلاقة $E(n)$ عند كل عدد طبيعي $n \geq 3$

الحل:

$E(n) : (3)^n \geq (n+2)^2$

خاطئة $E(0) : (3)^0 \geq (0+2)^2 \Rightarrow 1 \geq 4$

خاطئة $E(1) : (3)^1 \geq (1+2)^2 \Rightarrow 3 \geq 9$

خاطئة $E(2) : (3)^2 \geq (2+2)^2 \Rightarrow 9 \geq 16$

صحيحة $E(3) : (3)^3 \geq (3+2)^2 \Rightarrow 27 \geq 25$

صحيحة $E(4) : (3)^4 \geq (4+2)^2 \Rightarrow 81 \geq 36$

(2) - $E(n) : (3)^n \geq (n+2)^2$

1- نبرهن صحة القضية من اجل $n=3$

$27 \geq 25$

والقضية صحيحة من اجل $n=3$

2- نفرض صحة القضية من اجل n

$(3)^n \geq (n+2)^2$ *

3- نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2 = n^2+6n+9$

نضرب طرفي القضية * بـ $3>0$:

$(3)(3)^n \geq 3(n+2)^2$

$(3)^{n+1} \geq 3n^2+12n+12$

$(3)^{n+1} \geq n^2+6n+9+2n^2+6n+3$

$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2+2n^2+6n+3$

$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2$; $2n^2+6n+3>0$

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

المسألة (13) 25/ : أثبت بالتدريج صحة كل الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n :

(1) 4^n+5 مضاعف للعدد 3

(1) نبرهن صحة القضية من اجل $n=0$:

$4^0+5=6$

والقضية صحيحة من اجل $n=0$ لان 6 من مضاعفات 3

(2) نفرض صحة القضية من اجل n

$(4)^n+5$ مضاعف للعدد 3 --- *

(3) نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$(4)^{n+1}+5$

$(4)^{n+1}+5 = (4)^n(4)+5$

ضيفنا وطرحنا 5

$= 4(4^n+5-5)+5$

$4(4^n+5)-20+5$

$= 4(4^n+5)-15$

وحسب * 4^n+5 مضاعف للعدد 3

ولدينا -15 مضاعف للعدد 3 أيضاً

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

وحسب الاستقراء الرياضي تكون العلاقة صحيحة مهما كان $n \in N$

الأستاذ : أحمد تكروري موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

② - $(2)^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

① - نبرهن صحة القضية من اجل $n = 0$

$(2)^0 - 1 = 0$

والقضية صحيحة من اجل $n = 0$

② - نفرض صحة القضية من اجل n

$(2)^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 --- *

③ - نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$2^{3(n+1)} - 1 = 2^3 (2)^{3n} - 1$

$= 8(2^{3n} - 1 + 1) - 1$

$= 8(2^{3n} - 1) + 8 - 1$

$= 8(2^{3n} - 1) + 7$

وبما أن $(2^{3n} - 1)$ مضاعف للعدد 7 فرضاً

$8(2^{3n} - 1)$ مضاعف للعدد 7 و 7 م 7

مضاعفات للعدد 7 $\Leftarrow$

$8(2^{3n} - 1) + 7$ مضاعف للعدد 7

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

③ - $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3

① - نبرهن صحة القضية من اجل $n = 0$

$(0)^3 + 2(0) = 0$

والقضية صحيحة من اجل $n = 0$

② نفرض صحة القضية من اجل n

$n^2 + 2n$ مضاعف للعدد 3

③ - نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$(n+1)^3 + 2(n+1)$

$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$

$= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$

$= \underbrace{(n^3 + 2n)}_{\text{مضاعف من الفرض}} + \underbrace{3(n^2 + n + 1)}_{\text{مضاعف}}$

مضاعف X شملة

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

④ $(3)^{2n+1} + (2)^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

① - نبرهن صحة القضية من اجل $n = 0$

$(3) + (4) = 7$

والقضية صحيحة من اجل $n = 0$

② نفرض صحة القضية من اجل n

$(3)^{2n+1} + (2)^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

③ - نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$(2)^{2n+3} + (2)^{n+3}$ مضاعف للعدد 7

$(3)^{2n+3} + (2)^{n+3} = (3)^{2n+1+2} + (2)^{n+2+1}$

$= (3)^{2n+1} \cdot (3)^2 + (2)^{n+2} \cdot (2)^1$

$= (3)^{2n+1}(7+2) + (2)^{n+2} \cdot (2)^1$

$= 7(3)^{2n+1} + (2)(3)^{2n+1} + (2)(2)^{n+2}$

$= \underbrace{7(3)^{2n+1}}_{\text{مضاعف 7 لانه يوجد 7}} + 2[\underbrace{(3)^{2n+1} + (2)^{n+2}}_{\text{من الفرض مضاعف 7}}]$

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة 16 / 25 : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق :

$U_0=1$; $U_{n+1}=\dfrac{3U_n+2}{2U_n+6}$; $n\geq0$

1- أثبت أن التابع $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

$$f'(x)=\frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2}=\frac{18-4}{(2x+6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{14}{(2x+6)^2}>0$$

$\Leftarrow f$ متزايد تماماً على $R\setminus\{-3\}$ فهو متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

2- استنتج أن $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$\frac{1}{2}\leq 1\leq 1$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$\frac{1}{2}\leq U_n\leq 1$ --- *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$\frac{1}{2}\leq U_{n+1}\leq 1$

لدينا فرضاً $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 1$ بتطبيق f

تزايد f $\Leftarrow$ $f(\frac{1}{2})\leq f(U_n)\leq f(1)$

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{\frac{3}{2}+2}{1+6}=\frac{\frac{7}{2}}{7}=\frac{1}{2}$$

$$f(1)=\frac{3+2}{2+6}=\frac{5}{8}$$

وبما أن $f(U_n)=U_{n+1}$ $\Leftarrow$

$\frac{1}{2}\leq U_{n+1}\leq 1$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

3- أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً $(U_n)_{n\geq0}$

U_n متناقصة $\Leftrightarrow U_{n+1}<U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$U_1=\frac{3U_0+2}{2U_0+6}=\frac{3+2}{2+6}=\frac{5}{8}<1$$

$\Rightarrow U_1<U_0$ والقضية صحيحة

نفرض صحة القضية من أجل n

$U_{n+1}<U_n$ --- *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+2}<U_{n+1}$

$U_{n+1}<U_n$

$f(U_{n+1})<f(U_n)$

$U_{n+2}<U_{n+1}$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

فإن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً

المسألة (17)/26 : ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ، ثم نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق :

$U_0 = 2\cos\theta$; $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$

① احسب U_1 , U_2 ② أثبت بالتدريج أنّ $U_n = 2\cos\left[\frac{\theta}{2^n}\right]$

الحل: ①

$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$U_1 = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ --- ①"

تذكرة: $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2})}$

$U_2 = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4} = 2\cos\frac{\theta}{(2)^2}$

② نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$ $U_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ --- ②"

محققة ②" = ①"

نفرض صحة القضية من أجل n $U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$ --- *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$ $U_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}$

$U_{n+1} = \sqrt{4\cos^2\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

انتهت وحدة المتتاليات U_n

الأستاذ: أحمد حبيب تكروري

0994446057

ما ستفعله اليوم سيقال عنك غداً... فقرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً