
الدرس
6
6
6
6
6
6

اللوغاريتمات العشرية


Welcome

لماذا ؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًّا	10^8 عظمى
التأثر في المناطق السكنية.	لا يشعر بها ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًّا في مناطق شاسعة جدًّا تصل إلى مئات الأميال.

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلاً تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية :

لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" ، تستعمل في كثير من التطبيقات، وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10اللوغاريتمات العشرية ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x \quad , x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

مثال 1

إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح : LOG 5 ENTER 0.6989700043

$$\log 5 \approx 0.6990$$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح : LOG 0.3 ENTER -0.5228787453

$$\log 0.3 \approx -0.5229$$

تحقق من فهمك

(1A $\log 7$ 0.8451

(1B $\log 0.5$ -0.3010

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلاً في المعادلة $y = \log x$ y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$10^y = x \longleftrightarrow \log x = y$$

$$10^0 = 1 \longleftrightarrow \log 1 = 0$$

$$10^1 = 10 \longleftrightarrow \log 10 = 1$$

$$10^m = 10^m \longleftrightarrow \log 10^m = m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت .

مثال 2 من واقع الحياة

حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت : يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10\log\frac{1}{m}$ حيث I شدة الصوت

m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان، إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6dB تقريبًا . كم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت m = 1 ؟

$$L = 10\log\frac{1}{m}$$ المعادلة الأصلية

$$66.6 = 10\log\frac{I}{1}$$ $L = 66.6, m = 1$

$$66.6 = \log I$$ بقسمة كل طرف علي 10 ثم التبسيط

$$I = 10^{6.66}$$ الصورة الأسية

$$I \approx 4570882$$ باستعمال الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

تحقق من فهمك

2) هزات أرضية : ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5m$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر .

2×10^{25} إيرج تقريباً .

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسية بدلالة الأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين.

مثال 3

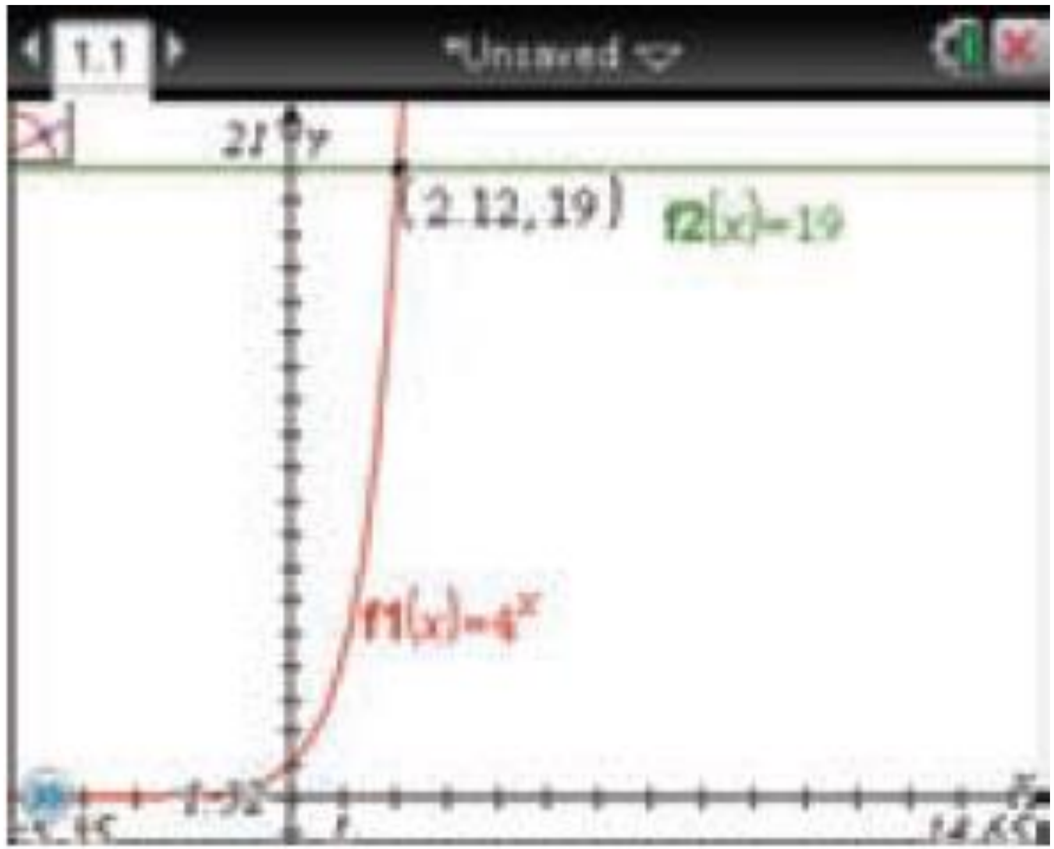
حل معادلات اشبة باستعمال تعريف اللوغاريتم العشري

حل المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغارتيمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \dfrac{\log 19}{\log 4}$	بقسمة كلا الطرفين علي log 4
$x \approx 2.1240$	باستعمال الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا.

تحقق : يمكنك التحقق من الإجابة بيانياً ، وذلك باستعمال الحاسبة البيانية ، مثل المعادلة $y = 4^x$ و المستقيم $y = 19$ بيانيا علي الشاشة نفسها ، و استعمل أكر intersect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانين ، الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبرياً .



تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$ ≈ 2.4650

3B) $6^x = 42$ ≈ 2.0860

يمكنك استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسّية لحل متباينات أسّية.

مثال 4

حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغارتيمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	بطرح y log 7 من اكلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	بقسمة كلا الطرفين علي 5 log 3 – log 7 > 0
$\{y \mid y < -1.0972\}$	باستعمال الحاسبة

تحقق : اختبر y = - 2

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأساسية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y=-2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بالتبسيط
$\dfrac{1}{59049} < \dfrac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

تحقق من فهمك

(4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ $\qquad$ $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

(4B $3^{y} \geq 6^{2y+1}$ $\qquad$ $\{y \mid y > -0.8782\}$

صيغة تغيير الأساس :

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأسا مختلف.

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

الرموز :

لأي أعداد موجبة a, b, n حيث $b \neq 1\,,\ a \neq 1$

$$\log_a x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم الأساس b للعدد الأصلي ←

لوغاريتم الأساس b للأساس القديم ←

مثال :

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

لإثبات صحة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$\mathrm{x}\log_b a = \log_b n$	خاصية لوغاريتم القوة
$\mathrm{x} = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$	بقسمة كلا الطرفين علي $\log_b a$
$\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$	$x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

مثال 5

استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$$ صيغة تغيير الأساس

$$\approx 2.7268$$ باستعمال الحاسبة

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \approx 1.1606$$

مثال 6

استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب : **البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تُسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $\mathrm{R} = \log_2 n$. حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.**

$\mathrm{R} = \log_2 n$	المعادلة الأصلية
$= \log_2 240$	$n = 240$
$= \dfrac{\log 240}{\log 2}$	صيغة تغيير الأساس
≈ 7.9	بالتبسيط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة يساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا .

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160 خطوة.

7.32

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة الآلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$ 0.6990　　2) $\log 21$ 0.6990　　3) $\log 0.4$ 0.6990

4) $\log 3$ 0.4771　　5) $\log 11$ 1.0414　　6) $\log 3.2$ 0.5051

7) $\log 8.2$ 0.9138　　8) $\log 0.9$ −0.0458　　9) $\log 0.04$ −0.3979

10) **علوم:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. (مثال 2)

3.55×10^{24} إيرج

11) **صوت:** أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB . (مثال 2)

a) كم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟

316227766 مرة تقريبًا

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.

19952623 مرة تقريبًا ؛ 93.7% تقريبًا

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

12) $6^x = 40$ 2.0588

13) $2.1^{a+2} = 8.25$ 0.8442

14) $7^{x^2} = 20.42$ ± 1.2451

15) $11^{b-3} = 5^b$ 9.1237

16) $8^x = 40$ 1.7740

17) $9^{b-1} = 7^b$ 8.7429

18) $15^{x^2} = 110$ ± 1.3175

19) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$ -3.8188

حل كلًّا مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

20) $5^{4n} > 33$

$$\{n \mid n > 0.5431\}$$

21) $6^{P-1} \leq 4^{P}$

$$\{p \mid p \leq 4.4190\}$$

22) $3^{y-1} \leq 4^{y}$

$$\{y \mid y \geq -3.8188\}$$

23) $5^{p-2} \geq 2^{p}$

$$\{p \mid p \leq 3.5129\}$$

24) $2^{4x} \leq 20$

$$\{y \mid y \geq -3.8188\}$$

25) $6^{3n} > 36$

$$\{p \mid p \leq 3.5129\}$$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 5)

26) $\log_3 7$ $\qquad \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.7712$

27) $\log_2 16$ $\qquad \frac{\log 16}{\log 2} = 4$

28) $\log_4 9$ $\qquad \frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.5850$

29) $\log_3 21$ $\qquad \frac{\log 21}{\log 3} \approx 2.7712$

30) $\log_5 (2.7)^2$ $\qquad \frac{\log 7.29}{\log 5} \approx 1.2343$

31) $\log_7 \sqrt{5}$ $\qquad \frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} \approx 0.4135$

32) **شحن:** اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t الزمن بالسنوات الذي مر منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي ، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. (مثال 6)

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال وانخفض سعرها بمعدل 15% سنويًا فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

سنتان

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال وانخفض سعرها بمعدل 10% سنويًا، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

5 سنوات

33) **علوم البيئة :** يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية؛ للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بِـ 0.025 ppm (حيث ppm تعني جزءًا من المليون) ، كما أن الرقم الهيدروجيني pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5، حتى يكون الماء صالحًا للشرب.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع مستوى الزرنيخ؟ نعم ؛ لأن $10.9 > 9.5$

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها $3l$ من الماء، فهل ماء البئر صالح للشرب؟ لا

(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1 L تقريبًا. $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg/kg}$)

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يكافئ مستوى pH المقلق (9.5)؟

3.6×10^{-10}

34) هزات أرضية: يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة.

$$M = \frac{2}{3}(\log E - 4.4)$$

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟

5

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم رول في كاليفورنيا عام 2007 م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في الاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟

1.67

d) بصورة عامة ، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟

7.94×10^{8} جول

(35 **تمثيلات متعددة:** ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) **جدوليًّا:** أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وابحث عن قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول.

الحل يقع بين 1.8 و 1.9

b) **بيانيًّا:** مثّل بيانيًّا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intresect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. (1.85, 13)

c) **عدديًّا:** حُلّ المعادلة جبريًّا. هل طريقتي الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك.

نعم جميع الطرق تعطي النتيجة نفسها 1.85؛ لأنك بدأت من المعادلة نفسها وإن لم يكن كذلك فقد ارتكبت بعض الأخطاء.