ثانياً: حل كلاً من المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

$P(Z) = Z^3 + (14 - i\sqrt{2}) Z^2 + (74 - 14i\sqrt{2}) Z - 74i\sqrt{2}$

① نعوض $(i\sqrt{2})$ في $P(Z) = 0$

3 $(i\sqrt{2})^3 + (14 - i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + (74 - 14i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 74i\sqrt{2}$

3 $= -2\sqrt{2}i - 28 + 2\sqrt{2}i + 74\sqrt{2}i + 28 - 74i\sqrt{2}$

3 $= 0$

ومنه $i\sqrt{2}$ جذر للمعادلة $P(Z) = 0$

② a) $P(Z) = (Z - i\sqrt{2})(Z^2 + aZ + b)$

3 $= Z^3 + aZ^2 + bZ - i\sqrt{2}Z^2 - ia\sqrt{2}Z - i\sqrt{2}b$

3 $= Z^3 + (a - i\sqrt{2})Z^2 + (b - a\sqrt{2}i)Z - i\sqrt{2}b$

بالمطابقة مع الفرض نجد

3 $a - i\sqrt{2} = 14 - i\sqrt{2}$ (1)

3 $b - a\sqrt{2}i = 74 - 14i\sqrt{2}$ (2)

3 $-i\sqrt{2}b = -74i\sqrt{2}$ (3)

3 من (1) نجد أن $\boxed{a = 14}$

3 من (3) نجد أن $\boxed{b = 74}$

نتحقق بالتعويض في (2)

3 $74 - 14\sqrt{2}i = 74 - 14i\sqrt{2}$

محققة

3 $P(Z) = (Z - i\sqrt{2})(Z^2 + 14Z + 74)$

b) $P(Z) = 0$

$(Z - i\sqrt{2})(Z^2 + 14Z + 74) = 0$

2 إما $\boxed{Z = i\sqrt{2}}$

٣٤

أو $Z^2 + 14Z + 74 = 0$

3 $\Delta = b^2 - 4ac = (14)^2 - 4(1)(74)$

3 $= 196 - 296$

$\Delta = -100 < 0$

$\sqrt{-\Delta} = 10$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان

3 $Z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{-\Delta}\,i}{2a} = \dfrac{-14 + 10i}{2}$

3 $\boxed{Z_2 = -7 + 5i}$

3 $\boxed{Z_3 = \overline{Z_2} = -7 - 5i}$

③ a)

3 $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{4}} Z_I$

3 $Z_C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(i\sqrt{2})$

$Z_C = \frac{2i}{2} + 1 = 1 + i$

3 $\boxed{Z_C = 1 + i}$

b)

3 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$

$Z_D = Z_C + Z_A - Z_B$

$Z_D = 1 + i - 7 + 5i + 7 + 5i$

3 $\boxed{Z_D = 1 + 11i}$

c)

3 $\dfrac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \dfrac{-7 + 5i - 1 - i}{1 + 11i + 7 + 5i}$

3 $= \dfrac{-8 + 4i}{8 + 16i} = \dfrac{-2 + i}{2 + 4i}$

3 $= \dfrac{(-2 + i)(2 - 4i)}{4 + 16} = \dfrac{10i}{20}$

3 $\underbrace{\dfrac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}}$ $= \frac{1}{2}i$

3+3 $\left|\dfrac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}\right| = \frac{1}{2}$ $\quad \arg\left(\dfrac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$

3+3 $\dfrac{CA}{BD} = \frac{1}{2}$ $\quad (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$

$CA = \frac{1}{2}BD$

3+3 قطرا الرباعي ABCD متوازي الأضلاع متعامدان

وغير متساويين فهو معين

$\frac{2}{100}$

ثانياً: حل كلاً من المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

$P(Z) = Z^3 + (14 - i\sqrt{2})Z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})Z - 74i\sqrt{2}$

① نعوض $(i\sqrt{2})$ في $P(Z) = 0$

3 $(i\sqrt{2})^3 + (14 - i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + (74 - 14i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 74i\sqrt{2}$

3 $= -2\sqrt{2}i - 28 + 2\sqrt{2}i + 74\sqrt{2}i + 28 - 74i\sqrt{2}$

3 $= 0$

ومنه $i\sqrt{2}$ جذر للمعادلة $P(Z) = 0$

② a) $P(Z) = (Z - i\sqrt{2})(Z^2 + aZ + b)$

3 $= Z^3 + aZ^2 + bZ - i\sqrt{2}Z^2 - ia\sqrt{2}Z - i\sqrt{2}b$

3 $= Z^3 + (a - i\sqrt{2})Z^2 + (b - a\sqrt{2}i)Z - i\sqrt{2}b$

بالمطابقة مع الفرض نجد

3 $a - i\sqrt{2} = 14 - i\sqrt{2}$ (1)

3 $b - a\sqrt{2}i = 74 - 14i\sqrt{2}$ (2)

3 $-i\sqrt{2}b = -74i\sqrt{2}$ (3)

3 من (1) نجد أن: $\boxed{a = 14}$

3 من (3) نجد أن: $\boxed{b = 74}$

نعوض بالمعادلة (2)

3 $74 - 14\sqrt{2}i = 74 - 14i\sqrt{2}$

محققة

3 $P(Z) = (Z - i\sqrt{2})(Z^2 + 14Z + 74)$

b) $P(Z) = 0$

$(Z - i\sqrt{2})(Z^2 + 14Z + 74) = 0$

2 إما $\boxed{Z = i\sqrt{2}}$

34

أو $Z^2 + 14Z + 74 = 0$

3 $\Delta = b^2 - 4ac = (14)^2 - 4(1)(74)$

3 $= 196 - 296$

$\Delta = -100 < 0$

$\sqrt{-\Delta} = 10$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان

3 $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{-14 + 10i}{2}$

3 $\boxed{Z_2 = -7 + 5i}$

3 $\boxed{Z_3 = \overline{Z_2} = -7 - 5i}$

③ a)

3 $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{4}} Z_I$

3 $Z_C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(i\sqrt{2})$

$Z_C = \frac{2i}{2} + 1 = 1 + i$

3 $\boxed{Z_C = 1 + i}$

b)

3 $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$

$Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$

$Z_D = Z_C + Z_A - Z_B$

$Z_D = 1 + i - 7 + 5i + 7 + 5i$

3 $\boxed{Z_D = 1 + 11i}$

c)

3 $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \frac{-7 + 5i - 1 - i}{1 + 11i + 7 + 5i}$

3 $= \frac{-8 + 4i}{8 + 16i} = \frac{-2 + i}{2 + 4i}$

3 $= \frac{(-2 + i)(2 - 4i)}{4 + 16} = \frac{10i}{20}$

3 $\underbrace{\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}}_{} = \frac{1}{2}i$

3+3 $\left|\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}\right| = \frac{1}{2}$ $\arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$

3+3 $\frac{CA}{BD} = \frac{1}{2}$ $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$

$CA = \frac{1}{2}BD$

3+3 فالرباعي ABCD متوازي أضلاع قطراه متعامدان وغير متساويين فهو معين

2

100

D | شتاء 2021/2020 | سلم تصحيح [illegible] لمادة الرياضيات

السؤال الثالث:

5 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AJ}$

5 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BJ}$

بالجمع:

5+5+5 $2\overrightarrow{IJ} = \vec{0} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{HB} + \vec{0}$

5 $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BH}$

5 $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$

5 فالأشعة $\overrightarrow{IJ}$ ، $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{BH}$ مرتبطة خطياً

40

السؤال الرابع:

$a = 3\sqrt{3} + 2i$

$b = 2\sqrt{3} + i$

$c = 4 + 3i$

$d = 3 + 4i$

5 $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)$

5 $= \arg\left(\frac{3\sqrt{3}+2i-2\sqrt{3}-i}{4+3i-3-4i}\right)$

5 $= \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)$

5+5 $= \arg\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)$

5 $= \arg\left(\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

5+5 $= \arg\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \frac{5\pi}{12}$

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

(1) $\overrightarrow{CK}(x_K, y_K, z_K - 5)$

2 $\overrightarrow{CD}(5, 5, -5)$

$\overrightarrow{CK} = 0.6\,\overrightarrow{CD}$

2 $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K - 5 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2 ومنه $x_K = 3$

2 $y_K = 3$

2 $z_K = 2$

2 $K(3, 3, 2)$

2 $\overrightarrow{BA}(7, -7, -7)$

2 $\overrightarrow{BL}(x_L, y_L - 4, z_L - 7)$

$\overrightarrow{BA} = 7\,\overrightarrow{BL}$

2 $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x_L \\ y_L - 4 \\ z_L - 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L - 4 \\ z_L - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $x_L = 1$

2 $y_L = 3$

2 $z_L = 6$

$L(1, 3, 6)$

2 $\overrightarrow{LK}(2, 0, -4)$

2 $\overrightarrow{LG}\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$

2 نلاحظ أن: $\overrightarrow{LK} = 4\,\overrightarrow{LG}$

فالشعاعان $\overrightarrow{LG}$ ، $\overrightarrow{LK}$ مرتبطان خطياً

فالنقاط L ، K ، G تقع على استقامة واحدة

40

المسألة الثالثة:

$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

4 ① أ) نبين أن $x \in D_f$ ثم $-x \in D_f$

لكل $x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

4 $-x \in]2,+\infty[\cup]-\infty,-2[= D_f$

ب)

4 $f(-x) = \ln\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right)$

4 $= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

4 $= \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

$= -f(x)$

4 $f(-x) = -f(x)$

ما يطلب تحقق

ومنه f فردية

4 ومنه المبدأ نقطة تناظر بالنسبة للمنحنى $O(0,0)$

② f مستمرة على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=1$

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to1}\ln X = 0$

4 ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=1$

4 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to1}\ln X = 0$

$\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى C بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to(-2)^-}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = +\infty$

4 $\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{X\to+\infty}\ln X = +\infty$

ومنه

4 ٣٥ $\boxed{x=-2}$ مستقيم مقارب رأسي

$\lim_{x\to2^+}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=0$

4 $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{X\to0}\ln X = -\infty$

4 ومنه $\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب رأسي

4 ③ f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

4 $f'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{\frac{x-2}{x+2}}$

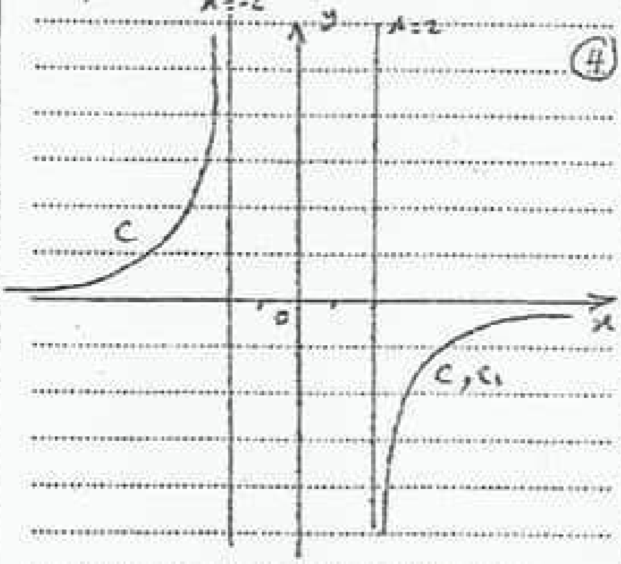
4 $f'(x) = \frac{\frac{1(x+2)-1(x-2)}{(x+2)^2}}{\frac{x-2}{x+2}}$

4 $f'(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)} > 0$

4 ومنه f متزايدة تماما على كل مجال من D_f

④

4 + 4 + 4



$f_1(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

4 f_1 معرفة إذا كان $x-2>0$ و $x+2>0$

$x>-2$ و $x>2$

$x \in]-2,+\infty[\cap]2,+\infty[$

4 $x \in]2,+\infty[$

4 $f_1(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = f(x)$

حيث $x \in]2,+\infty[$

ومنه f_1 هو مقصور f على $]2,+\infty[$

C_1 هو جزء من C الواقع في المجال $]2,+\infty[$

١٠٠ انتهت الأجوبة

أولاً : أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن f تابعاً مستمراً على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ، خطّه البياني C_f . جدول تغيّراته الآتي :

x	$-\infty$		-2		-1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		$-$	
$f(x)$	2	↗	3	↘	0 ‖ $+\infty$		↘	-1

❶ أوجدي نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C_f .

❷ هل يوجد للخط C_f مستقيمات مقاربة مائلة ؟ عللي إجابتك .

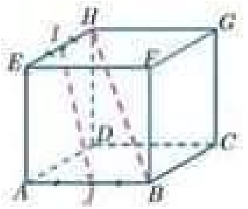
❸ أثبتي أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

❹ أوجدي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

السؤال الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x+x\ln(1+\frac{1}{x})$

أثبتي أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط C .

السؤال الثالث :



$ABCDEFGH$ مكعب.

النقطتان I و J هي بالترتيب منتصفات $[EH]$ و $[AB]$

أثبتي أنّ الأشعة $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BH}$ مرتبطة خطياً .

السؤال الرابع:

في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$ لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثّلها الأعداد العقدية :

$a=3\sqrt{3}+2i$ و $b=2\sqrt{3}+i$ و $c=4+3i$ و $d=3+4i$. أوجدي قياساً للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA})$.

ثانياً :حلي التمارين الأربع الآتية :(60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا النقاط : $A(7,-3,0)$ و $B(0,4,7)$ و $C(0,0,5)$ و $D(5,5,0)$ و $G(\frac{3}{2},3,5)$

❶ عيّني إحداثيات كلٍّ من النقطتين K و L اللتين تحققان: $\overrightarrow{CK}=0.6\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}=7\overrightarrow{BL}$.

ثمّ أثبتي أنّ النقاط K و G و L تقع على استقامة واحدة .

❷ عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(1,m,10)$ إلى المستوي (ACD) ؟

التمرين الثاني :

يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

❶ ليكن g التابع المعرّف على $[1,+\infty[$ وفق : $g(x)=\frac{E(x)}{x}$. ما نهاية g عند $+\infty$ ؟

❷ ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x)=x-E(x)$

اكتبي $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$) . هل f مستمر على المجال $[0,2]$ ؟

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثالث:

$f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

4 ① $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$

$f(x) > 10^4$

4 $\frac{4}{(x-2)^2} > 10^4$

4 $\frac{(x-2)^2}{4} < 10^{-4}$

4 $(x-2)^2 < 4 \cdot 10^{-4}$

$|x-2| < 2 \cdot 10^{-2}$

4 $|x-2| < 0.02$

$-0.02 < x-2 < 0.02$

4 $2-0.02 < x < 2+0.02$

$x \in]2-0.02, 2+0.02[$

4 ومنه $\boxed{\alpha = 0.02}$

$f(x) > 10^4$ لما $x \in]2-0.02, 2+0.02[\setminus \{2\}$

4 ② f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

4 $f(x) = 4(x-2)^{-2}$

4 $f'(x) = -8(x-2)^{-3}(1)$

4 $f'(x) = \frac{-8}{(x-2)^3}$

4 $g(x) = f(\sin x)$

4 $g'(x) = (\sin x)' \cdot f'(\sin x)$

4-4 $= \cos x \times \frac{-8}{(\sin x - 2)^3}$

60 ٣٣

التمرين الرابع:

$(D; \overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

5 $I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

5 $J\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$

5 $K\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$

5 $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

5 $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

5 $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right)$

5 $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$IK = \|\overrightarrow{IK}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$

5 $= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

5 $IJ = \|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

5 $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \|\overrightarrow{IJ}\| \cdot \|\overrightarrow{IK}\| \cos(\widehat{JIK})$

5 $\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}}{\|\overrightarrow{IJ}\| \cdot \|\overrightarrow{IK}\|}$

$\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

5 $\boxed{\cos(\widehat{JIK}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$

60

3 ② $\vec{AC}(-7, 3, 5)$

3 $\vec{AD}(-2, 8, 0)$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AD}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{-7}{-2} \neq \frac{3}{8}\right)$

فالنقاط A و C و D ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوٍ واحد

حتى تنتمي النقطة $M(1, m, 10)$ إلى المستوي ACD يجب أن يوجد عددان حقيقيان α و β حيث

3 $\vec{AM} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AD}$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ m+3 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3

3 $\begin{cases} -7\alpha - 2\beta = -6 & (1) \\ 3\alpha + 8\beta = m+3 & (2) \\ 5\alpha = 10 & (3) \end{cases}$

لنأخذ {(1) و (3)}

3 من (3) نجد أن $\boxed{\alpha = 2}$

نعوض في (1)

$-14 - 2\beta = -6$

3 $-2\beta = 8$

$\boxed{\beta = -4}$

يجب أن تحقق المعادلة (2)

3 $3(2) + 8(-4) = m+3$

3 $6 - 32 = m+3$

$-26 = m+3$

3 $\boxed{m = -29}$

$M(1, -29, 10)$ تنتمي إلى المستوي (ACD)

60

التمرين الثاني:

① $g(x) = \frac{E(x)}{x}$

4+4 $x-1 < E(x) \leq x$

بقسمة x في جوار $+\infty$ باعتبار أن المتراجحة على x لا تتغير جهة التراجح

4+4 $\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$

$\frac{x-1}{x} < g(x) \leq 1$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

فبالاستناد إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

②

$f(x) = x - E(x)$

4
4
4 $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 1 \\ x-1 & ; 1 \leq x < 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$

4 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x) = 1$

4 $f(1) = 1-1 = 0$

4 نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq f(1)$

4 ومنه f ليس مستمراً عند 1

4 وبالتالي f ليس مستمراً على $[0, 2]$

60

٣٢

أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

① f معرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

2 ومنه $\boxed{y=2}$ مستقيم مقارب أفقي

2 $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 0$

2 $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$

2 ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي

2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$

2 ومنه $\boxed{y=-1}$ مستقيم مقارب أفقي.

2 ② لا يوجد للخط C مقاربات مائلة

2 لوجود مقارب أفقي في جوار $-\infty$

و مقارب أفقي في جوار $+\infty$

حيث $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$

2 ③ في المجال $]-\infty,-1[$ يكون f مستمراً [illegible]

2 $f(]-\infty,-1[) =]0,3]$

2 و $0 \notin]0,3]$

2 فليس للمعادلة $f(x)=0$ أي حلول في المجال $]-\infty,-1[$

2 في المجال $]-1,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه

2 $f(]-1,+\infty[) =]-1,+\infty[$

2 و $0 \in]-1,+\infty[$

2 فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في المجال $]-1,+\infty[$

٣٠

2 ومنه نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2 ④ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (-1)^+$

2 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to(-1)^+} f(X) = +\infty$

40

السؤال الثاني:

$f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

5+5 $f(x) - y_D = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$

5 $f(x) - y_D = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 1$

5 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

5+5 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

5 $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_D) = 1 - 1 = 0$

5 ومنه $D: y = x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

40

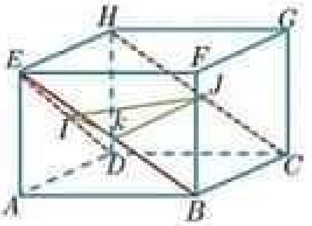
التمرين الثالث :

ليكن f تابعاً معرّفاً على $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^2}$

❶ احسبي $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. ثمّ عيّني عدداً $\alpha > 0$ يحقّق الشرط : إذا كان $x \in]2-\alpha, 2+\alpha[\setminus \{2\}$ كان $f(x) > 10^4$.

❷ احسبي التابع المشتق للتابع f . واستنتجي مشتق التابع $g : x \mapsto f(\sin x)$.

التمرين الرابع :



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $AD = AE = 1$

فيه النقاط I و J و K منتصفات القطع المستقيمة $[DE]$ و $[HC]$ و $[EB]$ بالترتيب .

لنتخذ المعلم المتجانس $(D; \overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

أوجدي مركبات كلٍّ من الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ ثمّ احسبي الجداء السلمي $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$.

ثمّ احسبي الطولين IJ و IK واستنتجي $\cos \widehat{JIK}$.

ثالثاً: حلي المسألتين الآتيتين : (100درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

ليكن $P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$

❶ تحقّقي أنّ $i\sqrt{2}$ جذر للمعادلة $P(z) = 0$.

❷ a) عيّني العددين الحقيقين a و b حيث $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.

b) حلي المعادلة $P(z) = 0$.

❸ لتكن النقاط A و B و I التي تمثّلها الأعداد العقدية: $z_A = -7 + 5i$ و $z_B = -7 - 5i$ و $z_I = i\sqrt{2}$

a) عيّني العدد العقدي z_C الممثّل للنقطة C صورة النقطة I وفق الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\dfrac{\pi}{4}$.

b) بافتراض $z_C = 1 + i$ عيّني العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

c) بافتراض $z_D = 1 + 11i$ احسبي النسبة $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ وتحقّقي أنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

واستنتجي عندئذٍ طبيعة الرباعي $ABCD$.

المسألة الثانية:

ليكن f تابعاً معرّفاً على $D_f =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ وفق $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ خطّه البياني C_f .

❶ أثبتي أنّ التابع f فردي ، واستنتجي الصفة التناظرية لخطه البياني .

❷ احسبي نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتجي كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي للخط C_f .

❸ أثبتي أنّ f متزايدٌ تماماً على كلٍّ من مجالي D_f .

❹ ارسمي C_f . ثمّ استنتجي رسم C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

....انتهت الأسئلة..