السؤال الأول :

في كل من الحالات الآتية ، عين m ليكون التابع f المعطى مستمراً على مجموعة تعريفه :

$$1)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} & x\neq 0\\ m & x=0\end{cases}\qquad 2)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x)-1}{\cos^2(x)-1} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}m & x=0\end{cases}$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & x\neq 1\\ m & x=1\end{cases}\qquad 4)\ f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\leq 1\\ 2x^2-mx & x>1\end{cases}$$

السؤال الثاني :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}$

اكتب معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

السؤال الثالث :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+2x\sin x+\sin^2 x}$

١) بين أن التابع f يكتب بالشكل : $f(x)=|x+\sin x|$

٢) استنتج نهاية التابع عند $+\infty$.

السؤال الرابع :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{3x+1}{x-1}$

١) احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واكتب معادلة كل مقارب وجدته .

٢) أوجد A التي تحقق : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]2.95\,,3.05[$.

السؤال الخامس :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$

١) احسب $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

٢) احسب $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

٣) أثبت أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

٤) أثبت أن $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+(ax+b))=0$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

السؤال السادس :

ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين C_f و C_g حيث :

$$f(x)=2x^2+x-1\quad ,\quad g(x)=x^2+3x-2$$

-انتهت الأسئلة-

السؤال الأول :

١) التابع f مستمر على المجالين $[-1,0[$ و $]0,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على المجال $[-1,+\infty[$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x+1-1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$$

$f(0)=m \quad \ggg \quad m=2$

٢) التابع f مستمر على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{\cos^2(x)-1}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{\cos(x)-1}}{\cancel{(\cos(x)-1)}(\cos(x)+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(\cos(x)+1)}=\frac{1}{2}$$

$f(0)=\frac{1}{2}m \quad \ggg \quad \frac{1}{2}m=\frac{1}{2} \quad \ggg \quad m=1$

٣) التابع f مستمر على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الواحد أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$$

$f(1)=m \quad \ggg \quad m=3$

٤) التابع f مستمر على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الواحد أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(2x^2-mx)=2-m$$

$f(1)=3(1)-2=1 \quad \ggg \quad 2-m=1 \quad \ggg \quad m=1$

السؤال الثاني :

بإجراء القسمة الإقليدية : $f(x)=x+1-\frac{1}{x+2}$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل لـC في جوار $+\infty$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{1}{x+2}-x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=0$$

طريقة ثانية : بفرض أن معادلة المقارب $y=ax+b$:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1-x^2-2x}{x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$$

إذن معادلة المقارب المائل هي $y = x + 1$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+2}\right) = 0$$

السؤال الثالث :

١) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x} = \sqrt{(x+\sin x)^2} = |x + \sin x|$

٢) $-1 \le \sin x \le 1$ إذن :

$$x - 1 \le x + \sin x \le 1 + x$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty\end{cases} \ggg \lim_{x\to+\infty}(x + \sin x) = +\infty$$

نستنتج أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left|\lim_{x\to+\infty}(x + \sin x)\right| = |+\infty| = +\infty$$

السؤال الرابع :

١) $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3 \;,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 \;,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \;,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

y=3 مقارب أفقي للخط C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

x=1 مقارب شاقولي للخط C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

٢) $$|f(x) - c| < r$$

نصف قطر المجال: $r = \frac{b-a}{2} = \frac{3.05-2.95}{2} = 0.05$

مركز المجال : $c = \frac{b+a}{2} = \frac{3.05+2.95}{2} = 3$

$$|f(x) - 3| < 0.05 \ggg \left|\frac{3x+1}{x-1} - 3\right| < 0.05 \ggg \left|\frac{3x+1-3x+3}{x-1}\right| < 0.05$$

$$\frac{4}{|x-1|} < 0.05 \ggg \frac{|x-1|}{4} > \frac{100}{5} \ggg |x-1| > 80$$

إما $1 - x > 80$ أي $x < -79$

أو $x - 1 > 80$ أي $x > 81$ ومنه $A = 81$ (أو أي عدد أكبر من ٨١)

السؤال الخامس :

١)

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x}$$

بما أن $x \to +\infty$ إذن $x > 0$ أي : $|x| = +x$:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = 1$$

(٢

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x(2+\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}\right)$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}\right) = \frac{2+0}{1+1} = 1$$

(٣

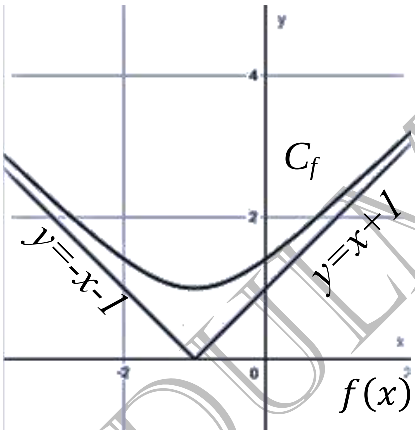
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+1+1} - (x+1)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+1)^2+1} - (x+1)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(x+1)^2+1-(x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)}\right) = 0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y = x+1$ مقارب مائل ل C_f في جوار $+\infty$.

(٤

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-(-x-1)) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{(x+1)^2+1} + (x+1)\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)}\right)$$
$$= 0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y = -x-1$ مقارب مائل ل C_f في جوار $-\infty$.



السؤال السادس :

دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين C_f و C_g حيث :

$$f(x) = 2x^2 + x - 1 \qquad , \qquad g(x) = x^2 + 3x - 2$$

ندرس إشارة الفرق :

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + x - 1 - (x^2 + 3x - 2) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$
$$f(x) - g(x) \geq 0 \ \ \ggg \ \ f(x) \geq g(x)$$

C_f فوق C_g .

ويتقاطع C_f مع C_g في النقطة التي فاصلتها $x=1$ أي في النقطة $A(1,2)$.

–انتهى الحل–