الدرس

4

4

4

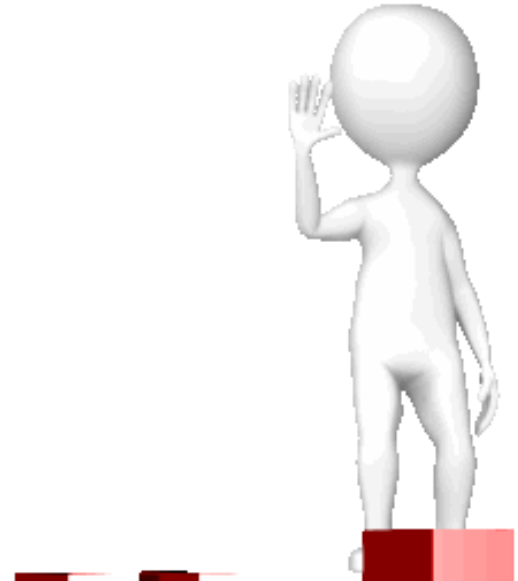
4

4

4

خصائص اللوغارتيمات

PROPERTIES OF LOGARITHMS



Welcome

لماذا ؟

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة، إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد، ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته، ويُعد هذا المقياس مثالاً آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10 . فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي. لأن $10^{7-5} = 10^{2} = 100$

خصائص اللوغاريتمات :

إذا كان b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ فإن $\log_b x = \log_5 8$ إذا و فقط إذا كان x = y .

فمثلاً إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ فإن $x = 8$ إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$

و تسمي هذه الخاصية خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية ، و بما أن اللوغاريتميات ترتبط بالأسس ، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس و يمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس .

مفهوم أساسي

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي :

إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال :

إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي :

لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله .

الرموز :

إذا كانت x , b , b اعداداً حقيقية موجبة ، حيث $b \neq 1$ فإن

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

مثال :

$$\log_2 \left[(5)(6)\right] = \log_2 5 + \log_2 6$$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $b^m = x \ , b^n = y$ و باستعمال تعريف اللوغاريتمات ،

فإن $m = \log_b x \ , n = \log_b y$

$b^m b^n = xy$	بالتعويض
$b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية ضرب القوي
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغارتيمات
$m + n = \log_b xy$	خاصية الأساسية للوغارتيمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	بالتعويض عن m , n بالقيمتين $\log_b x \ , \log_b y$ علي الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

مثال 1

استعمل $\log 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$

$$\log_4 192 = \log_4 \left(4^3 \times 3\right)$$

$$= \log_4 4^3 + \log_4 3$$

$$= 3 + \log_4 3$$

$$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$$

$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$

خاصية الضرب في اللوغارتيمات

خاصية الأساسية للوغارتيمات

$\log 3 \approx 0.7925$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$

2.5

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.

افترض أن $b^m = x, b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m, \log_b y = n$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$$

خاصية قسمة القوي

$$b^{m-n} = \frac{x}{y}$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$\log_b mb^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$$

خاصية الأساسية للوغاريتمية

$$m - n = \log_b \frac{x}{y}$$

بالتعويض عن m , n بالقيمتين $\log_b x, \log_b y$ علي الترتيب

$$\log_b m + \log_b n = \log_b \frac{x}{y}$$

مفهوم أساسي

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي :

لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه .

الرموز :

إذا كانت x , y , b اعداداً حقيقية موجبة ، حيث $b \neq 1$ فإن

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال :

$$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$$

استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

مثال 2

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$$\log_6 7.2 = \log_6 \left(\frac{36}{5}\right)$$

$$7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_6 6^2 - \log_6 5$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$$= 2 - 0.8982$$

$$\log_6 5 \approx 0.8982$$

$$= 1.1018$$

تحقق من فهمك

2) **استعمل** $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

1.37 تقريبًا

استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

مثال 3 من واقع الحياة

علـوم : يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول **pH** بالعلاقة $pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث H^+

يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم : أُعطي في المسألة صيغة إيجاد **pH** وقيمة **pH** للمطر الحمضي، والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط : اكتب المعادلة وحلها لإيجاد H^+

حل :

المعادلة الأصلية

$$pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

$$pH = 4.2$$

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$$

$\log_{10} 1 = 0$

$$4.2 = 0 - \log_{10}\left[H^+\right]$$

بالتبسيط

$$4.2 = -\log_{10}\left[H^+\right]$$

بضرب كلا الطرفين -1

$$-4.2 = \log_{10}\left[H^+\right]$$

تعريف اللوغاريتم

$$10^{-4.2} = \left[H^+\right]$$

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق :

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$$

$$pH = 4.2$$

$$4.2 \overset{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$$

$$[H^+] = 10^{-4.2}$$ **التعويض**

$$4.2 \overset{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$4.2 = 0 - (-4.2)$$

بالتبسيط

$$4.2 = 4.2$$ ✓

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

10^{-12} أو 0.0079 تقريبًا

تحقق من فهمك

3) صوت : يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل (dB) ، و يعطي بالصيغة $L = \log_{10} R$

حيث R شدة الصوت النسبية ، أوجد الشدة النسبية لصوت ارتفاعه 120 dB .

10^{12}

تذكر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي

خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي :

لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال :

$$\log_b 6^5 = 5 \log_b 6$$

مثال 4

استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 3 \approx 2.3219$ فقرب قيمة $\log_2 25$

$$\log_2 25 = \log_2 5^2$$

$$= 2\log_2 5$$

$$\approx 2(2.2319) \approx 4.6438$$

$5^2 = 25$

خاصية لوغاريتم القوة

$5^2 = 25$

تحقق من فهمك

٤) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ فقرب قيمة $\log_3 49$

3.5424 تقريباً

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

مثال 5

احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4.

$$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_4 \left(4^3\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$4^3 = 64$$

$$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$$

خاصية قوة القوة

$$= \frac{3}{5} \log_4 4$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$$

$$\log_b b = 1$$

تحقق من فهمك

(1A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

$\frac{2}{3}$

(1B $\log_7 \sqrt[6]{49}$

$\frac{1}{3}$

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة، إذ يمكنك تحويل الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح، والقوى والجذور إلى ضرب.

كتابة العبارة اللوغاريتمية بالصورة المطولة

مثال 6

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :

(a $\log_2 12x^{5}y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12x^{5}y^{-2}$

$$12x^{5}y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^{5} + \log_2 y^{-2}$$ **خاصية الضرب في اللوغاريتمات**

$$= \log_2 12 + 5\log_2 x + 2\log_2 y$$ **خاصية لوغاريتم القوة**

(b $\log_2 a^{2}b^{-3}c^{-2}$

$$\log_2 a^{2}b^{-3}c^{-2} = \log_2 a^{2} + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$ **خاصية الضرب في اللوغاريتمات**

$$= 2\log_2 a + 3\log_2 b + 2\log_2 c$$ **خاصية لوغاريتم القوة**

تحقق من فهمك

(6A $\log_{13} a^3bc^4$

$\log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$

(6B $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

$\log_6 5 + 3\log_6 x + 7\log_6 y + 0.5\log_6 z$

(6C $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

$\log_4 (1-x)^{\frac{1}{3}} - \log_4 (2x+1)$

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات السابقة في إعادة كتابة اللوغاريتمية من الصورة المطولة إلى الصورة المختصرة.

مثال 7

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة :

(a $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$$

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتم

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$$

بانطاق المقام

$$= \log_3 \frac{x^4 \sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$$

$$0.5\log_7(x+2)+6\log_7 2x$$ (b

خاصية لوغاريتم القوة $0.5\log_7(x+2)+6\log_7 2x=\log_7\sqrt{x+2}-\log_7 64x^6$

$(x+2)^{0.5}=\sqrt{x+2}, 2^6=64$

$=\log_7\sqrt{x+2}+\log_7 64x^6$

خاصية الضرب في اللوغاريتم

$=\log_7 64x^6\sqrt{x+2}$

تحقق من فهمك

$-5\log_2(x+1)+3\log_2(6x)$ **(7A**

$\log_2 \dfrac{216x^3}{(x+1)^5}$

$\log_3(2x-1)-\dfrac{1}{4}\log_3(x+1)$ **(7B**

$\log_3 \dfrac{2x-1}{\sqrt[4]{x+1}}$

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\log_4 15$ — 1.9535

2) $\log_4 \frac{5}{3}$ — 0.3685

3) $\log_4 \frac{3}{4}$ — −0.2075

4) $\log_4 18$ — 2.085

استعمل $\log_4 2 = 0.5$, $\log_4 3 \approx 0.7925$, $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (مثال 1)

5) $\log_4 30$ — 2.4535

6) $\log_4 20$ — 2.1610

7) $\log_4 \frac{2}{3}$ — −0.2925

8) $\log_4 \frac{4}{3}$ — 0.2075

9) $\log_4 9$ — 1.5850

10) $\log_4 8$ — 1.5

11) **تسلق الجبال:** يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. **(مثال 2)**

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

إفرست 26855.44 باسكال .
تريسوني 34963.34 باسكال .
بونيتي 36028.42 باسكال .

إذا كان , $\log_3 5 \approx 1.465, \log_5 7 \approx 1.2091, \log_6 8 \approx 1.1606$
$\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 3)

12 $\log_3 25$ — 2.93

13 $\log_5 49$ — 2.4182

14 $\log_6 48$ — 2.1606

15 $\log_7 81$ — 2.2584

16 $\log_6 512$ — 3.4818

17 $\log_7 729$ — 3.3876

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي:

18 $\log_5 \sqrt[4]{25}$ — $\frac{1}{2}$

19 $\log_2 \sqrt[5]{32}$ — 1

20 $3 \log_7 \sqrt[6]{49}$ — 1

21 $4 \log_2 \sqrt{8}$ — 6

22 $50 \log_5 \sqrt{125}$ — 75

23 $\log_3 \sqrt[6]{243}$ — $\frac{5}{6}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: (مثال 6)

24 $\log_9 6x^3y^5z$

$\log_9 6 + 3\log_9 x + 5\log_9 y + \log_9 z$

25 $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

$\log_{11} a - 4\log_{11} b + 12\log_{11} c + 7\log_{11} d$

26 $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$

$2\log_7 h + 11\log_7 j - 5\log_7 k$

27 $\log_4 10t^2uv^{-3}$

$\log_4 10 + 2\log_4 t + \log_4 u - 3\log_4 v$

28 $\log_5 a^6b^{-3}c^4$

$6\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c$

29 $\log_2 \dfrac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$

$\log_2 (3x+2) - \frac{1}{7}\log(1-5x)$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

(30 $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x) = \log_5 \frac{x^3\sqrt{6-x}}{6-x}$

(31 $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1) = \log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$

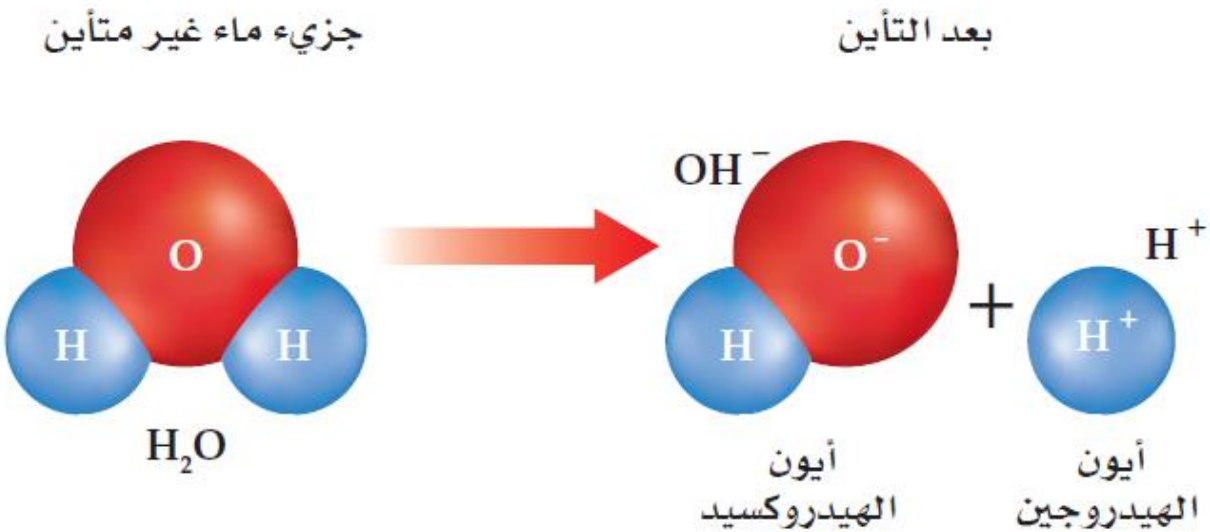
(32 $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c)$ $\log_3 \frac{a^7 b}{64c^2}$

(33 $2\log_8 (9x) - \log_8 (2x-5)$ $\log_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$

(34 $2\log_6 (5a) + \log_6 b + 7\log_6 c$ $\log_6 25a^2bc^7$

(35 $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z$ $\log_2 \frac{x}{yz^3}$

36) كيمياء: ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



أي أن صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمول لكل لتر.

a) عبّر عن $\log K_w$ بدلالة $\log [H^+]$ و $\log [OH^-]$.

$$\log_{10} K_w = \log_{10} [H^+] + \log_{10} [OH^-]$$

b) قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}. بسّط المعادلة في فرع **a** لتعكس القيمة العددية لـ K_w.

$$-14 = \log_{10} [H^+] + \log_{10} [OH^-]$$

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر ، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

$$1 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$$

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

37 $\log_8 (x-3) = \log_8 x - \log_8 3$ خطأ

38 $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$ صحيحة

39 $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$ خطأ

40 $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$ صحيحة

41 $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ صحيحة

42 $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$ خطأ

43 $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ خطأ

44 $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$ صحيحة

45) **هزات أرضية :** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر .
إذا علمت أن قوة الهز M تُعطى بالعلاقة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث تمثل x شدة الهزة الأرضية، فأجب عما يأتي:

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939 م	تركيا	8.0
1963 م	يوغسلافيا	6.0
1970 م	البيرو	7.8
1988 م	أرمينيا	7.0
2004 م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟
وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟

أرمينيا ويوغسلافيا، أو تركيا وأرمينيا؛
تركيا ويوغسلافيا.

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963 م؟ **9.0 درجات**

46) استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$؟

افترض أن الطرف الأيسر يساوي y
أي أن $y = \log_a x$، وهذا يعني أن
$x = a^y$، والآن بقي أن تثبت أن
الطرف الأيمن يساوي y أيضًا

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\log_b a^y}{\log_b a} = y \frac{\log_b a}{\log_b a} = y$$